suma+ 80
Artículos
Noviembre 2015
pp. 43-50

Estrategias para resolver problemas de máximos y mínimos con métodos elementales

Miquel Ferrer Puigdellívol

El artículo caracteriza cómo resuelven problemas de máximos y mínimos alumnos que no están familiarizados con el cálculo diferencial. Se obtienen datos de las respuestas de 138 estudiantes a dos problemas de esta tipología. El análisis establece cinco estrategias de resolución y muestra que un alto porcentaje de alumnos es capaz de resolver estos problemas por métodos elementales. El estudio concluye que la resolución de problemas de máximos y mínimos se puede trabajar en clase antes de segundo de bachillerato, que es el curso donde se propone en el currículo de matemáticas de secundaria.

Palabras clave: Divulgación, Geometría, Resolución de problemas de máximos y mínimos, Educación matemática, Secundaria.

Strategies to solve maximum and minimum problems by elementary methods

The article characterizes how students, who are not used to working with tools of differential calculus, solve maximum and minimum problems. Data comes from the responses of 138 students after solving two problems of this typology. Analysis reveals five different strategies of problem solving and shows that a high percentage of students can solve these problems by elementary methods. The study concludes that maximum and minimum problem solving can be studied in class before the second course of baccalaureate, which is the grade where these problems are proposed in the official curriculum of mathematics.

Keywords: Dissemination, Geometry, Maximum and minimum problem solving, Mathematics Education, Secondary school.

La resolución de problemas y el uso de artefactos tecnológicos son elementos relevantes del currículo de matemáticas para la educación secundaria obligatoria y el bachillerato en Catalunya (Departament d'Ensenyament, 2007, 2008), ya que actúan como facilitadores en el desarrollo de conocimientos y procesos matemáticos del alumnado. En concreto, tanto en primero como en segundo curso de bachillerato, el currículo establece:

> La resolución de problemas entendida como un estilo de enseñanza y aprendizaje que facilita la construcción de conocimiento matemático a partir de la experimentación, la búsqueda de regularidades, y la formulación de resultados conjeturales (Departament d'Ensenyament, 2008, 59282).

¿Qué es un problema en educación matemática?

Muchos autores presentan distintas consideraciones respecto del término «problema» en educación matemática y las introducen desde múltiples perspectivas. En concreto, Pólya (1981) considera que «tener un problema significa buscar de manera consciente una acción apropiada para conseguir un objetivo claramente concebido, pero no alcanzable de manera inmediata». Interpretando esta

Artículo recibido en *Suma* en ****** de 2012 y aceptado en **** de 2013

definición se llega a la consideración de que un problema debe cumplir tres condiciones: (a) *aceptación*: la persona o grupo deben aceptar la tarea como un reto y establecer un compromiso formal para resolverla; (b) *bloqueo*: los intentos iniciales no dan buen resultado y las técnicas habituales para abordar la tarea no funcionan; y (c) *exploración*: se indaga en nuevos métodos para resolver satisfactoriamente la tarea.

No obstante, como analiza Schoenfeld (1985), diferenciar un verdadero problema matemático de un mero ejercicio es una cuestión compleja y depende en gran medida del sujeto a quien va dirigida la experiencia:

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace de esta un problema para aquella persona. La palabra «problema» se utiliza para designar una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Asimismo, esta dificultad debe representar un embrollo intelectual más allá de un mero cálculo [...]. Para enunciarlo formalmente, si alguien tiene acceso a un esquema de resolución para una tarea matemática, ésta es un ejercicio y no un problema (Schoenfeld, 1985, 74).

Además, a diferencia de lo que sucede cuando se resuelve un ejercicio, el proceso de resolución de un problema no suele producirse según unas reglas preestablecidas. El conocimiento y el comportamiento matemático de quien resuelve problemas se puede clasificar en función de: los *recursos* —conjunto de conocimientos matemáticos básicos y necesarios para que el resolutor se enfrente al problema—, las *heurísticas* —técnicas generales de resolución—, y el *control* —la forma como cada persona se enfrenta a la resolución de problemas, teniendo en cuenta los recursos y las heurísticas que conoce— (Schoenfeld, 1985). El cumplimiento, o no, de estos componentes por parte del resolutor es lo que determinará la dificultad del problema. Así, por ejemplo, un sujeto puede presentar unos recursos adecuados y un buen dominio de la heurística, pero la falta de seguridad en su sistema de creencias puede no permitir que alcance la solución del problema. Por tanto, comprender y analizar estos elementos es importante para entender cómo se enfrenta cada resolutor a un problema, pero también para ser capaz de entender las dificultades que se le presentan.

Problemas de máximos y mínimos

Los «problemas de máximos y mínimos», también conocidos como «problemas de extremos» o «problemas de optimización», se encuentran explicitados, en Catalunya, en el currículo de segundo curso de bachillerato (Departament d'Ensenyament, 2008). Estos problemas figuran en el apartado de «análisis» y en el bloque de «aplicación del estudio local y global de una función en situaciones geométricas, científicas y tecnológicas». En particular, se pide a los alumnos que estudien funciones de una única variable real, analizando sus máximos y mínimos relativos y absolutos, y resolviendo problemas de optimización.

En los cursos de matemáticas es frecuente que los estudiantes resuelvan los problemas de extremos inmediatamente después de estudiar el cálculo diferencial. De esta forma aplican la teoría del cálculo con derivadas a casos prácticos y, aparentemente, más cercanos y realistas. Según Modica (2010) es frecuente enfrentarse a estos problemas siguiendo un esquema: (a) leer el problema atentamente y dibujar, si es necesario, un diagrama que ayude a organizar los datos y la definición de las variables; (b) definir la variable respecto de la cual se expresa la ecuación matemática que se quiere maximizar o minimizar; (c) plantear todas las ecuaciones que relacionan variables y constantes para encontrar una función con el menor número de variables posible, la cual se optimizará; y (d) aplicar el cálculo diferencial para obtener los valores máximos y mínimos de la función.

No obstante, Modica (2010) también afirma que los problemas de extremos se pueden trabajar con alumnos que aún no conocen el cálculo diferencial, ya que muchos de estos problemas admiten soluciones por métodos elementales, como por ejemplo la utilización de propiedades algebraicas que se pueden demostrar a partir de conocimientos matemáticos que el alumnado ya conoce. Además, es interesante que los estudiantes no vean el cálculo con derivadas como el único método para resolver un problema de máximos y mínimos, ya que según la situación del extremo de la función estudiada, las técnicas diferenciales pueden no ser la mejor opción para encontrar una solución directa al problema. Aún así, Moreno y Cuevas (2004) concluyen que para la mayoría de estudiantes y para algunos docentes el extremo de una función solo se puede obtener a partir del criterio de la segunda derivada[1] y, en caso de que este no funcione, el resolutor no es capaz de elaborar una respuesta coherente para el problema. Asimismo, el estudio pone de manifiesto la interpretación errónea del concepto de extremo de una función, como resultado de aplicar mecánicamente el criterio de la segunda derivada. Como menciona Tall (1997), «el estudiante debe aprender a afrontar las dificultades conceptuales y su aprendizaje no debe basarse exclusivamente en adquirir rutinas de cálculo, sino que también debe profundizar en los conceptos matemáticos asociados a los procedimientos.»

De forma parecida a Modica (2010) y Moreno y Cuevas (2004), muchos docentes sostienen la hipótesis de que es posible resolver, de forma sencilla y accesible para los alumnos, algunos problemas de máximos y mínimos sin aplicar las técnicas del cálculo diferencial. Por tanto, parece claro que esta tipología de problemas se puede trabajar antes del segundo curso de bachillerato. Con el fin de estudiar con más detalle esta suposición inicial, en este artículo se presenta un estudio experimental de carácter diagnóstico que tiene como objetivo *caracterizar cómo resuelven problemas de máximos y mínimos los estudiantes que no están familiarizados con el cálculo diferencial, identificando estrategias*[2] *que siguen para abordarlos.*

Selección de dos problemas y datos

Para realizar el estudio se preparó un cuestionario con seis problemas de máximos y mínimos para ser resueltos individualmente en una sesión de una hora de clase. En este artículo se presentan datos relativos a dos de los seis problemas del cuestionario, ambos con contexto estrictamente matemático y donde se pregunta a los estudiantes que encuentren un máximo. El primer problema presenta naturaleza geométrica y plantea la representación de un polígono de área máxima sobre un geoplano, habiendo fijado *a priori* su perímetro .

> *Problema 1: Dibujar polígonos sobre un geoplano*
> De todos los polígonos de 8 centímetros de perímetro que se pueden representar sobre el siguiente geoplano (figura 1), dibuja el que tenga un área mayor. Argumenta con detalle tu elección.

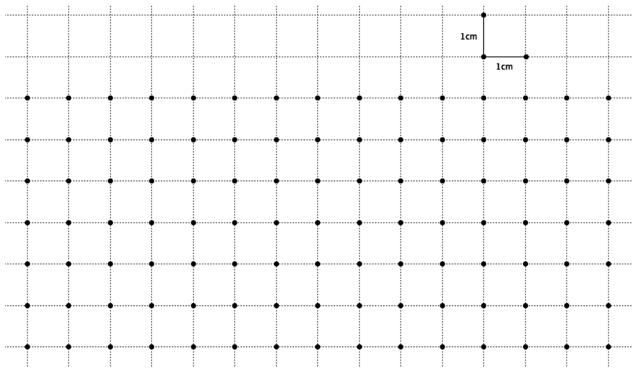

Figura 1

El segundo problema es de tipo aritmético y pregunta por la optimización del producto de dos números naturales conociendo su suma. Los estudiantes resolvieron ambos problemas por escrito y pudiendo utilizar la calculadora.

> *Problema 2. Producto máximo de dos números naturales*
> Sabemos que dos números enteros y positivos suman 100. Determina cuáles son estos números de forma que su producto sea el mayor posible. Argumenta con detalle tu respuesta.

Se obtuvieron datos de dos centros públicos de secundaria de Catalunya con un total de 138 alumnos de primero de bachillerato, los cuales estaban cursando la asignatura de Matemáticas o de Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales, y aún no habían trabajado técnicas de cálculo diferencial. Ambos centros pertenecen a un ámbito sociocultural medio y cumplen el desarrollo curricular propuesto por el Departament d'Ensenyament. Su línea pedagógica se caracteriza por desarrollar el espíritu crítico y la formación integral de los alumnos. Además, desde los departamentos de matemáticas se fomenta la resolución de problemas y la argumentación, oral y escrita, de los procesos de resolución.

Ejemplificación de estrategias de resolución para los dos problemas

Los datos obtenidos se analizan desde una perspectiva inductiva-deductiva, con el fin de identificar qué estrategias han seguido los alumnos para resolver los dos problemas de extremos seleccionados (Mayer, 1986). Las estrategias detectadas, que se describen a continuación, se agrupan en códigos que contienen las distintas unidades de significado.

Ensayo y error

Los alumnos escogen un valor o resultado de manera fortuita o sistemática y le aplican las condiciones del enunciado para verificar si han conseguido con éxito el objetivo planteado. En caso afirmativo se concluye el proceso y se considera que ese resultado es una solución. En caso contrario, los alumnos siguen probando nuevos valores hasta llegar a una solución. En esta estrategia, que se detecta en los dos problemas, no se elabora una lista, es decir, no se consideran exhaustivamente todas las posibilidades.

Concretamente, 17 alumnos (12,32 %) utilizaron «ensayo y error» para resolver el problema 1 y 15 estudiantes (10,87 %) hicieron uso de esta estrategia para resolver el problema 2. La figura 2 muestra las respuestas de Aitor para el primer problema y de Biel para el segundo problema. Ambas soluciones son representativas de la unidad de significado «ensayo y error».

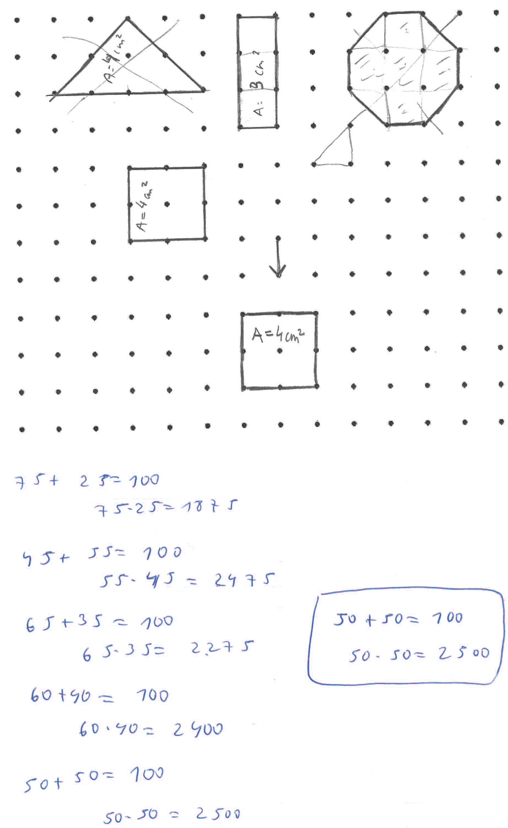

Figura 2. Respuesta de Aitor (arriba) y de Biel (abajo) a los problemas 1 y 2

Hacer una lista o un recuento

Los alumnos calculan exhaustivamente todos los resultados, correctos e incorrectos, del problema y determinan que si un resultado cumple con las exigencias planteadas por el enunciado, entonces es una solución. Los resultados se pueden detallar explícitamente o bien se determinan casos particulares que definen un patrón y éste se generaliza. A diferencia de «ensayo y error», en esta estrategia la solución se obtiene después de haber probado todos los resultados posibles.

Concretamente, 6 alumnos (4,35%) utilizaron una lista o un recuento para resolver el problema 1 y 9 estudiantes (6,52%) hicieron uso de esta estrategia para resolver el problema 2. A modo de ejemplo, la figura 3 muestra la respuesta de Bruno para el segundo problema. Esta solución es re-

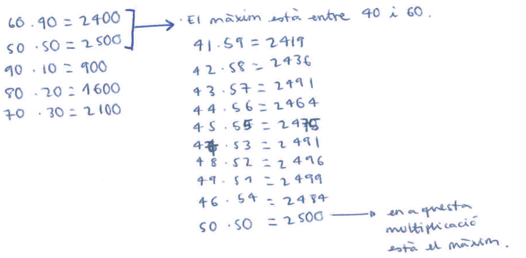

Figura 3. Respuesta de Bruno al problema 2

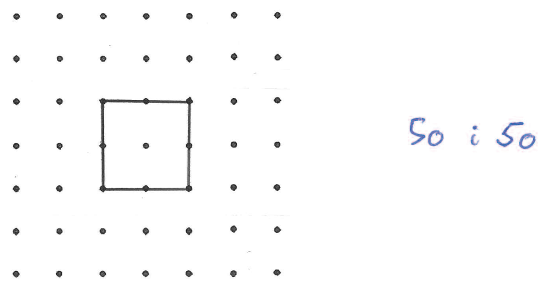

Figura 4. Respuesta de Ana (izquierda) y de Bernardo (derecha) a los problemas 1 y 2

presentativa de la unidad de significado «hacer una lista o un recuento».

Conjeturar

Los alumnos determinan un resultado y lo asumen como solución del problema. Se trata de una unidad de significado amplia, la cual se detecta en los dos problemas. A continuación, la dividimos en tres subunidades más concretas:

Conjeturar una solución sin verificarla ni argumentarla

Se determina un resultado y se afirma que es una solución del problema. Los alumnos no comprueban si cumple, o no, las condiciones del enunciado, ni tampoco argumentan cómo lo han obtenido, ya que únicamente presuponen que dicho resultado es una solución.

En concreto, 58 alumnos (42,03%) utilizaron «conjeturar la solución sin verificarla ni argumentarla» para resolver el problema 1 y 24 estudiantes (17,39 %) hicieron uso de esta estrategia para resolver el problema 2. La figura 4 muestra la respuesta de Ana para el primer problema y de Bernardo para el segundo problema. Ambas soluciones son representativas de esta unidad de significado.

Conjeturar una solución y verificarla

Se selecciona un resultado que se asume como solución del problema y, a continuación, se comprueba que cumple las condiciones del enunciado. Del total de 138 alumnos, 21 estudiantes (15,22%) utilizaron «conjeturar la solución y verificarla» para resolver el problema 1 y 59 estudiantes (42,75%) hicieron uso de esta estrategia para resolver el problema 2. La figura 5 muestra las respuestas de Ángel para el primer problema y de Berta para el segundo problema. Ambas soluciones son representativas de esta unidad de significado.

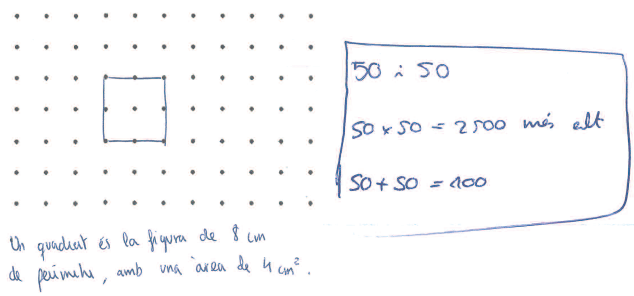

Figura 5: Respuesta de Ángel (izquierda) y de Berta (derecha) a los problemas 1 y 2

Conjeturar una solución, verificarla y argumentarla

Se determina un resultado, que se asume como solución del problema; se comprueba que cumple las condiciones del enunciado y se utilizan argumentos para razonar su adecuación matemática. En este caso observamos que 17 estudiantes (12,32 %) utilizaron «conjeturar la solución, verificarla y argumentarla» para resolver el problema 1 y 12 estudiantes (8,7 %) hicieron uso de esta estrategia para resolver el problema 2. A modo de ejemplo, la figura

6 muestra la respuesta de Bárbara para el segundo problema. La solución es representativa de esta unidad de significado.

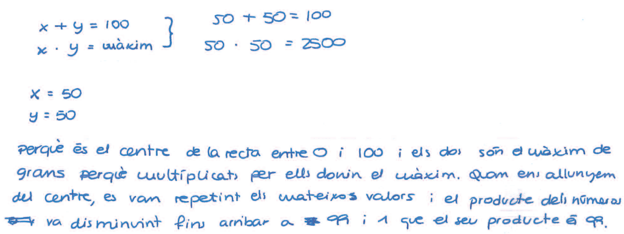

Figura 6. Respuesta de Bárbara al problema 2

Particularización de un resultado más general

Los alumnos hacen referencia a un resultado más general que conocen *a priori* para argumentar su solución del problema. Por ejemplo, para justificar que «de todos los rectángulos de perímetro fijado, el cuadrado[3] es el que encierra mayor área», hacen uso de un resultado más general, el cual establece que «de todas las curvas cerradas y simples de longitud fijada, la circunferencia es la que encierra mayor área». De esta forma, consideran el problema de maximizar el área de un rectángulo de perímetro fijado como un caso particular del «problema isoperimétrico»[4] (Pérez y otros, 2002).

Esta estrategia, que sólo se detecta en el problema 1, fue seguida por 8 estudiantes (5,8%). La figura 7 ilustra la respuesta de Alba, la cual se considera representativa de la unidad de significado «particularización de un resultado más general».

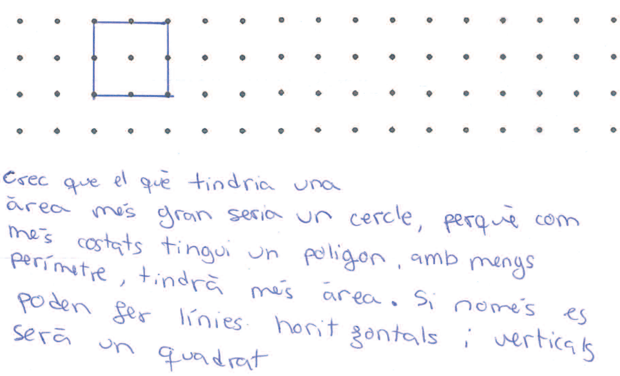

Figura 7. Respuesta de Alba al problema 1

Buscar una función que sirva de patrón y experimentar

Los estudiantes obtienen pautas que permiten analizar una determinada función, con el fin de observar regularidades que sugieran una solución del problema. Únicamente 2 alumnos (1,45%) utilizaron esta estrategia en la resolución del segundo problema. La figura 8 muestra la respuesta de Bryan, la cual es representativa de la unidad de significado «buscar una función que sirva de patrón y experimentar».

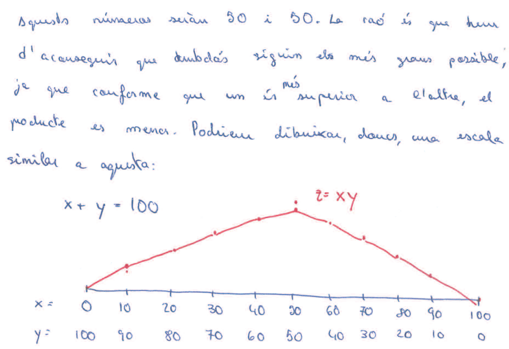

Figura 8. Respuesta de Bryan al problema 2

Sin estrategia detectada en el nivel en que se enmarca este estudio

Aunque en la mayoría de ocasiones se ha podido identificar qué estrategia siguió el alumno para resolver el problema, algunas veces el estudiante no identificó la incógnita, los datos o la condición de la tarea. Además, ciertos alumnos no escribieron ninguna respuesta y, por tanto, no fue posible determinar ninguna estrategia. Siguiendo a Valle, Juárez y Guzmán (2007), agrupamos todos estos casos en la unidad de significado «sin estrategia detectada en el nivel en que se enmarca este estudio».

La figura 9 muestra la respuesta de Andrés para el primer problema y la figura 10 la respuesta de Elisabeth para el segundo problema.

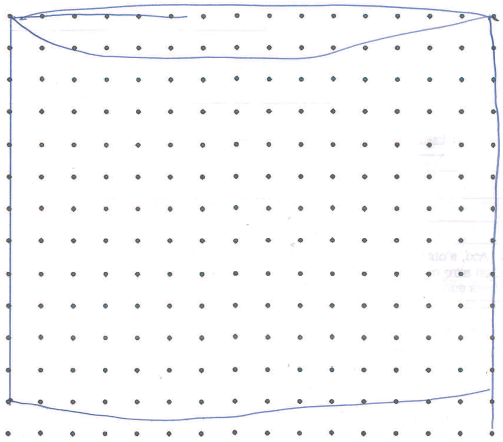

Figura 9. Respuesta de Andrés al problema 1

Son el 5 i el 20 perquè si es multiplican entre ells acavaran donan 100

Figura 10. Respuesta de Elisabeth al problema 2

	Problema 1		*Problema 2*	
	N.° alumnos	*Porcentaje*	*N.° alumnos*	*Porcentaje*
Ensayo y error	17	12,32 %	15	10,87 %
Hacer una lista o un recuento	6	4,35 %	9	6,52 %
Conjeturar	96	69,57 %	95	68,84 %
Conjeturar una solución sin verificarla ni argumentarla	58	42,03 %	24	17,39 %
Conjeturar una solución y verificarla	21	15,22 %	59	42,75 %
Conjeturar una solución, verificarla y argumentarla	17	12,32 %	12	8,7 %
Particularización de un resultado más general	8	5,8 %	—	—
Buscar una función que sirva de patrón y experimentar	—	—	2	1,45 %
Sin estrategia detectada en el nivel de este estudio	11	7,96 %	17	12,32 %

Tabla 1. Resumen de estrategias para los dos problemas

Concretamente, no fue posible detectar ninguna estrategia en la resolución del primer problema en las respuestas de 11 alumnos (7,96 %) y lo mismo sucedió con las resoluciones de 17 estudiantes (12,32 %) al segundo problema.

Finalmente, la tabla 1 resume las estrategias que han seguido los alumnos para resolver ambos problemas. Además, muestra que la estrategia mayoritaria para resolver tanto el primer como el segundo problema fue la de «conjeturar» (69,57 % para el problema 1 y 68,84 % para el problema 2). Análogamente, se observa que sólo el 4,35 % de los alumnos utilizaron una «lista o un recuento» para resolver el primer problema y únicamente el 1,45% empleó la estrategia de «buscar una función que sirva de patrón y experimentar» para resolver el segundo problema.

Conclusiones

La investigación se centró en *caracterizar cómo resuelven problemas de máximos y mínimos estudiantes que no están familiarizados con el cálculo diferencial, identificando estrategias que siguen para abordarlos*. Con este fin se diseñó un estudio experimental de carácter diagnóstico y se analizaron las respuestas de 138 alumnos de primero de bachillerato a dos problemas de extremos. El análisis permitió identificar cinco estrategias de resolución, las cuales se englobaron en las siguientes unidades de significado: «ensayo y error», «hacer una lista o un recuento», «conjeturar», «particularización de un resultado más general» y «buscar una función que sirva de patrón y experimentar». Además, se detectó que algunos alumnos no identificaron la incógnita del problema, no reconocieron los datos, o bien no dieron ninguna respuesta. Por este motivo, se debió emplear una unidad de significado adicional denominada «sin estrategia detectada en el nivel en que se enmarca este estudio».

Se determinó que un porcentaje alto de alumnos fue capaz de obtener una respuesta para los dos problemas de máximos y mínimos, aunque un porcentaje inferior tuvo los recursos matemáticos suficientes para argumentar la solución propuesta. Observamos que alrededor del 69 % de los estudiantes fueron capaces de conjeturar una solución para los dos problemas, pero solo el 12,32 % de alumnos en el problema 1 y el 8,7 % de alumnos en el problema 2 verificaron y argumentaron la solución conjeturada. Además, aproximadamente en el 90% de respuestas se detectó una estrategia de resolución y, por tanto, se puede concluir que los participantes tuvieron intuición suficiente y técnicas matemáticas adecuadas para abordar los problemas de extremos propuestos. Por tanto, parece razonable pensar que el colectivo de alumnos de secundaria sería capaz de resolver problemas de máximos y mínimos por métodos elementales, hecho que permitiría trabajar estos problemas en clase antes del segundo curso de bachillerato. No obstante, son necesarias más investigaciones para estudiar la incidencia que tiene en el aprendizaje la resolución de problemas de extremos por métodos elementales y para contrastar el nivel de comprensión de los alumnos cuando resuelven estos problemas por métodos elementales, en contraposición con la utilización de técnicas de cálculo diferencial.

Agradecimientos

Al Ministerio de Economía y Competitividad, por financiar el proyecto EDU2011-23240, la Beca FPI BES-2012-053575 y la Estancia de corta duración al extranjero EEBB-I-14-08541. Al Departamento Catalán de Economía y Universidades, por financiar GIPEAM, Grupo de Investigación 2014-SGR972.

Referencias bibliográficas

Departament d'Ensenyament (2007), *Decret 143/2007, de 26 de juny, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyaments de l'educació secundària obligatòria*, Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Barcelona.

Departament d'Ensenyament (2008), *Decret 142/2008 de 15 de juliol, pel qual s'estableix l'ordenació dels ensenyament del batxillerat*, Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya, Barcelona.

Mayer, R. E. (1986), *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*, Ediciones Paidós, Barcelona.

Modica, E. (2010), «Maximum and minimum problems solved using an algebraic way», *Teaching Mathematics and Its Applications,* n.º 29, 41-47.

Moreno, S., y C. A. Cuevas (2004), «Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial», *Educación matemática,* n.º 16, 93-104.

Pérez, R., I. Berenguer, L. Berenguer, B. Cobo, M. D. Daza, F. Fernández, M. Pasadas y A. M. Payá (2002), «El problema isoperimétrico y el Cálculo de Variaciones», *Suma*, n.º *39*, 99-102.

Pólya, G. (1981), *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving*, John Wiley and Sons, Nueva York.

Schoenfeld, A. H. (1985), *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando.

Tall, D. (1997), «Functions and calculus», en J. Bishop y otros (wds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 289-325.

Valle, M. C., M. A. Juárez y M. E. Guzmán (2007), «Estrategias generales en la resolución de problemas de la olimpiada mexicana de matemáticas», *Revista Electrónica de Investigación Educativa,* n.º 9(2).

Miquel Ferrer Puigdellívol
Universitat Autònoma de Barcelona
<miquel.ferrer.puigdellivol@uab.cat>

1 El criterio de la segunda derivada hace referencia a utilizar la condición suficiente de extremo de una función de una única variable real para determinar si un valor crítico es un máximo o un mínimo relativo. En otras palabras, verificar que, para cierto punto, la primera derivada se anula, pero la segunda derivada presenta, para el punto en cuestión, signo positivo (mínimo local) o negativo (máximo local).

2 Como Mayer (1986, 429), consideramos que una «estrategia» es una técnica general para resolver problemas y, aunque no garantiza que el resolutor encuentre la solución, constituye una guía para resolver la tarea planteada.

3 Se entiende que un cuadrado es un caso degenerado de rectángulo, en el que todos los lados son iguales y todos los ángulos son rectos.

4 El problema isoperimétrico pretende hallar, de entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro fijado, una región de área mayor. Consultar Pérez y otros (2002) para más información sobre este problema.