SUMA+ 79
Secciones
Noviembre 2015
pp. 41-48

Reflexionar antes de calcular

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

En esta ocasión nuestras propuestas girarn en torno a diferentes maneras de calcular y a la actitud reflexiva que pretendemos promover en los alumnos con relación a esta actividad matemática. Pretendemos con nuestras propuestas propiciar discusiones con los alumnos sobre qué cálculos tiene sentido realizar mentalmente, cuáles con lápiz y papel y cuáles con la ayuda de una calculadora. Propondremos algunas actividades en las que el cálculo con lápiz y papel no es sinónimo de la ejecución de un algoritmo, sino de la puesta en marcha, de manera flexible, de deducciones a partir de otros cálculos de resultado conocido. También comentaremos la necesidad de no restringirnos al cálculo exacto incluyendo entre nuestras propuestas situaciones en las que sea más pertinente un cálculo aproximado. Todas estas situaciones demandan que el alumno antes de disponerse a calcular reflexione sobre qué tipo de cálculo se le pide y cuál es la manera más eficiente de dar la respuesta.

Ell@s tienen la palabra

Cálculo aproximado

Tradicionalmente la enseñanza del cálculo ha tenido como objetivo principal preparar a l@s alumn@s para solucionar situaciones de la vida cotidiana.

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2015 y aceptado en septiembre de 2015

Aunque esta vida cotidiana ha variado sensiblemente, en la mayoría de escuelas se continúa preparando a l@s alumn@s, sin mayores variaciones, en la ejecución correcta y rápida de algoritmos asociados al cálculo exacto y en la resolución de los llamados "problemas aritméticos escolares" que a menudo poco tienen que ver con los cálculos que realizamos los adultos en la vida diaria.

El redondeo, que sí aparece como contenido de diversos cursos de primaria, no se relaciona de manera relevante con el cálculo. En el mejor de los casos, se trata la estimación de resultados de cálculos como un ejercicio de aplicación del redondeo y no como una solución válida para dar respuesta a problemas aritméticos contextualizados o como estrategia de control de resultados de un cálculo exacto.

El cálculo y la vida cotidiana

La realidad es que la mayoría de situaciones que se nos presentan en la vida cotidiana no precisan de cálculo exacto y cuando lo precisan recurrimos a las máquinas. Habitualmente utilizamos el cálculo aproximado, redondeando los números para tener una idea del cómputo global, pero estas situaciones no siempre se reflejan en las aulas. Podrían hacerse presentes, por ejemplo, con pequeños cambios en los enunciados que proponemos habitualmente en el aula. Si en el enunciado:

> Un bocadillo cuesta 2,98 €, somos cinco amigos y queremos comprarnos un bocadillo para cada uno, ¿qué precio pagaremos?

cambiamos la pregunta por:

> ¿tendremos suficiente con 15 €?

promovemos el cambio del que estamos hablando. Seguramente algunos alumnos lo resolverán por cálculo exacto, pero existe la posibilidad de que se presente un segundo tipo de razonamiento:

–Si cada bocadillo costara 3 €, el precio seria 15 €. Como cuestan menos de 3 €, tendremos suficiente con 15 € para comprarnos cinco.

Ante este segundo razonamiento, en la discusión grupal se abren las puertas a la posibilidad de reflexionar sobre la pertinencia del cálculo exacto o del cálculo aproximado en la vida cotidiana.

Cálculo escrito: aproximar para controlar

Otro aspecto a considerar es la utilización del cálculo aproximado como instrumento de control o valoración previa de un cálculo. Imaginemos que proponemos a un alumno que calcule 48x75 y realiza el cálculo que vemos en la imagen 1

```
   48
 x 75
 ----
  240
  336
 ----
  576
```

Imagen 1

Más allá de analizar el error cometido en la ejecución del algoritmo (no colocó el 336 desplazado un lugar hacia la izquierda probablemente porque en nuestro país no ponemos un 0 en el lugar de las unidades de la segunda multiplicación parcial cuando estamos multiplicando por 70) queremos detenernos en el pensamiento que nos cruza la mente ante este tipo de situaciones:

–¿Cómo es que le da este resultado y no se inmuta?

–¿No se da cuenta que no puede dar esto?

Es posible que el alumno le asigne la misma importancia a este error que cuando se descuida «las que lleva» en alguna operación o cuando se equivoca en el resultado de 7x8. Pero el tipo de error que comentamos aquí es de categoría distinta: es un error de magnitud, un tipo de error detectable cuando se antepone la reflexión al cálculo y que vale la pena discutir en nuestras clases.

Si promovemos la actitud de estimar el resultado de una operación antes de buscar el resultado exacto, ante la pregunta del resultado de 48x75, un alumno pensaría: «redondeo 48 a 50 y 75 a 80; por tanto, el resultado final dará aproximadamente 4000 (80x50)».

Cuando ese alumno acabe de ejecutar el algoritmo para dar la respuesta exacta podrá detectar que ha cometido algún error, sabrá que no es posible que 576 sea el resultado correcto de una operación que da aproximadamente 4000.

Un tipo de actividades que puede ayudarnos a promover esta actitud reflexiva delante del cálculo es el planteamiento de preguntas de múltiple opción como las que vemos en las imágenes 2 y 3.

¿Aproximar o acotar?

En la imagen 3 vemos que utilizar el redondeo para determinar si una operación tiene un resultado «razonable» puede presentar dificultades: ¿cuál es límite para que la distancia o diferencia entre el resultado real obtenido en el intento de cálculo exacto y el obtenido a partir del redondeo sea considerada como indicadora de error?

Una estrategia a tener en cuenta es el uso de cotas para definir el intervalo en el que estará la solución. Es decir, más que aproximar los números que intervienen en la operación siguiendo las reglas de redondeo, se trataría de dar dos valores que indiquen un intervalo donde con total seguridad estará el resultado de la operación.

Veamos un primer ejemplo con el caso de la resta 765 – 629 cuya discusión podemos acompañar del uso de la línea numérica (imagen 4).

–Buscamos la cota superior del resultado: como 765 es menor que 800 y 629 es mayor que 600, la distancia a la que están 765 y 629 es menor que 200.

–Buscamos la cota inferior: como 765 es mayor que 750 y 629 es menor que 650, la distancia a la que está 765 y 629 es mayor que 100.

–El resultado de la resta, por tanto, necesariamente ha de estar entre 100 y 200.

Veamos un segundo ejemplo con la multiplicación 375,65x6,23.

–Buscamos la cota superior del resultado: como 375,65 es menor que 400 y 6,23 es menor que 7, el resultado no puede ser superior a 2800 (400x7).

–Buscamos la cota inferior: como 375,65 es mayor que 300 y 6,23 es mayor que 6, el resultado de la multiplicación no puede ser inferior a 1800 (300x6).

977 + 944	
a	9.921
b	921
c	1.921

1.746 – 482	
a	164
b	1.264
c	1.864

Imagen 2

5.977 + 4.944	
a	9.921
b	10.921
c	11.921

746 – 482	
a	164
b	264
c	364

Imagen 3

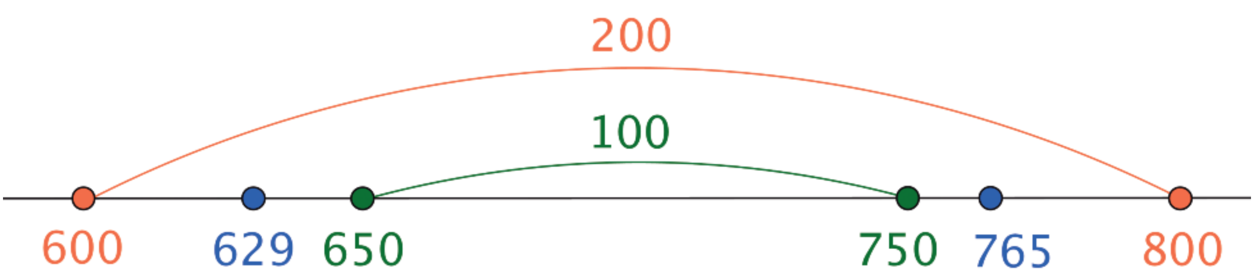

Imagen 4

–El resultado de la multiplicación necesariamente ha de estar entre 1800 y 2800.

El ejemplo anterior nos lleva a hacer un comentario respecto a las dudas que nos plantea la ejercitación de multiplicaciones de decimales con largas listas de estas multiplicaciones simplemente para que ejecuten un algoritmo entre números enteros y practiquen la correcta colocación de la coma.

Si lo que pretendemos es que practiquen el algoritmo de la multiplicación entre números enteros seguro que encontramos actividades de práctica más productiva que la que aquí aparece involucrada y podremos discriminar mejor, en aquellos alumnos que no encuentran el resultado correcto, donde está el fallo: si en el trabajo con números naturales o con los decimales. Pero si queremos trabajar las particularidades involucradas en la multiplicación de decimales pueden ser más adecuadas otro tipo de propuestas como las de las imágenes 5 y 6.

42 × 56 = 2.352	132 × 15 = 1.980
4,2 × 56 =	13,2 × 15 =
4,2 × 5,6 =	132 × 1,5 =
42 × 5,6 =	13,2 × 1,5 =

Imagen 5. Deduce los resultados de estas multiplicaciones

2,57 x 1,4 = 3598	15,2 x 45 = 684
4,25 x 1,6 = 68	0,7 x 56 = 392

Imagen 6. Coloca una coma para que las siguientes igualdades sean correctas

Para actividades como esta última la estrategia de contar cifras decimales de los factores para deducir la colocación de la coma en el resultado suele fallar, pero la acotación se presenta como una estrategia inmejorable.

El resultado de la operación 11,6x3,45 estará entre 33 (11x3) y 48 (12x4), por lo que si debemos colocar una coma al número 4002 no lo haremos ni entre el 4 y el 0 (4,002) ni entre el 0 y el 2 (400,2). El resultado adecuado es 40,02, que está entre 33 y 48.

La existencia de este tipo de actividades no implica denostar el «truco» de contar cifras después de la coma (es mucho más rápido y es el método que oirán de sus padres), sino que se trata de analizar sus limitaciones y su alcance y reflexionar sobre qué matemáticas se esconden tras él.

Cuando para calcular 2,57x1,4 multiplicamos 257x14 debemos ser conscientes que multiplicamos el primer factor por 100 y el segundo por 10, con lo cual el resultado que buscamos ha quedado multiplicado por 1000. Al mover la coma tres lugares hacia la izquierda estamos dividiendo entre 1000 el número obtenido para compensar el desajuste generado por considerar a los números sin sus comas.

Antes de dejar este tema, quisiéramos hacer un último comentario sobre la multiplicación de decimales, el redondeo y el contexto de la vida cotidiana. Delante de una situación del tipo:

> ¿Cuánto pagaré por 1,250 kg de carne que cuesta 9,75 €/kg?

una respuesta exacta como 12,1875 € carece de todo sentido. La respuesta que esperamos de nuestros alumnos, y para ello debemos plantear la discusión correspondiente, es el resultado redondeado. Es decir, 12,19 € o, mejor aún, 12,20 €.

Cálculo exacto

¿Mentalmente, con lápiz y papel o con calculadora?

La respuesta a esta pregunta depende de las circunstancias en que se haya de realizar el cálculo. Si es un cálculo que se plantea en el contexto cotidiano, la respuesta dependerá de las herramientas disponibles en aquel momento: ¿son números pequeños?, ¿tenemos una calculadora o papel y lápiz a mano? Si se plantea en un contexto escolar depende de los objetivos didácticos que se persigan con la propuesta.

Si estamos evaluando la automatización de las tablas pediremos que lo hagan mentalmente. Por ejemplo, proponiendo el trabajo con *applets* como el que aparece en la entrada «Juegos de ejercitación» del blog del PuntMat[1], con una actividad que involucre el estudio de regularidades como el que se propone en la entrada «Práctica productiva de tablas» del mismo blog[2], o con otro tipo de actividades donde no necesariamente se asocie el cálculo mental al cálculo rápido, sino al cálculo sin anotaciones ni calculadoras[3].

En la imagen 6 vemos a una alumna realizando una de estas tareas: se trata de clasificar los números de dos cifras según la cantidad de pasos que necesite el producto de sus cifras para llegar a un número menor que 10. Por ejemplo, el número 17 solo necesita un paso: 1x7=7. Anna está pintando de amarillo las celdas de todos los números que requieren solo un paso. El número 28 requiere de dos pasos porque 2x8=16 y 1x6=6. Por eso Anna está pintando de verde las celdas de los números que requieren dos pasos. El número 98 requiere tres pasos: 9x8=72, 7x2=14 y 1x4=4 (Anna está pintando de naranja las celdas de los números que requieren tres pasos).

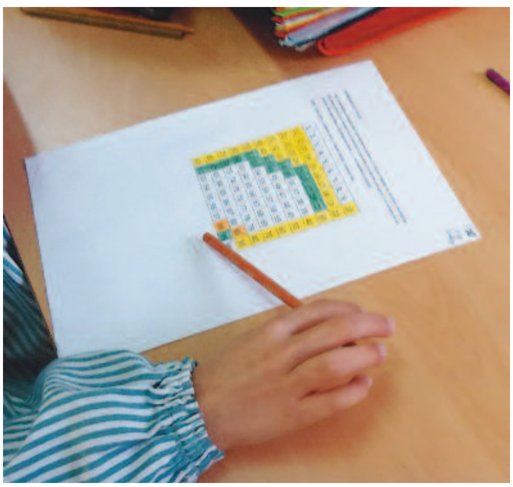

Imagen 6

Las preguntas que podemos plantearle en este momento son interesantes:

¿Cuántos colores necesitará?

¿Qué número de dos cifras requiere más pasos?

¿Por qué se aprecia una suerte de simetría en el cuadro que está obteniendo?

Si estamos practicando un algoritmo, el cálculo se hará con lápiz y papel. Claramente, aunque hablemos de práctica de un algoritmo lo podemos plantear en un ambiente de resolución de problemas. Por ejemplo, en substitución de una página repleta de multiplicaciones de números de 5 cifras por números de una cifra podemos proponer a los alumnos que completen el diagrama que aparece en la imagen 7 de todas las maneras posibles usando un 2, un 4, un 5 y un 9, que efectúen todas las multiplicaciones resultantes (24 en total) y a partir de allí les podemos pedir que identifiquen los dos mayores resultados obtenidos, que expliquen por qué han obtenido tan pocos resultados de tres cifras, que indiquen si entre los resultados obtenidos hay más pares o impares, u otras cuestiones que el maestro considere interesantes (se pueden cambiar los números propuestos por 1, 2, 3 y 4 o por 6, 7, 8 y 9 para que las multiplicaciones resulten más adecuadas al nivel de dificultad buscado).

Imagen 7

Si lo que estamos haciendo es profundizar en nuestro conocimiento sobre el comportamiento de las operaciones permitiremos el uso de la calculadora. Por ejemplo, si queremos ir un poco más allá que simplemente decir que la potenciación no es conmutativa podemos proponer a los alumnos que, calculadora en mano, decidan cuál de los elementos de cada pareja es mayor: ¿3^{10} o 10^3?, ¿5^6 o 6^5?…Podrán conjeturar que el resultado mayor se obtiene cuando el número más grande está en el exponente, afirmación que debemos apenas matizar proponiendo algunas parejas en que intervienen el 1 o el 2, como: 2^4 y 4^2 o 1^n y n^1.

Deducciones en el ámbito del cálculo

El cálculo mental está presente tanto en la ejecución de algoritmos como en el deseable control del resultado de una operación realizada con calculadora:

–Si pedimos a una calculadora que multiplique 127x816 y nos da 109347 debemos saber de inmediato que algo hemos hecho mal (en este caso apuntar 861 en lugar de 816), porque un número terminado en 7 multiplicado por un número terminado en 6 no puede terminar en 7.

–Si pedimos a una calculadora que multiplique 127 x 816 y nos da 13872 debemos saber de inmediato que algo hemos hecho mal (en este caso apuntar 17 en lugar de 127), ya que 127 x 816 tiene que ser mayor que 81600.

El cálculo mental no está presente únicamente en los cálculos exactos sino también en los cálculos aproximados (cuando acotamos 45,8 x 7,3 entre 280 y 460 o cuando decimos que 738 : 4 es aproximadamente 20 estamos haciendo cálculos mentales).

Esta extensa presencia del cálculo mental en las diferentes actividades aritméticas hace necesario dedicarle tiempo a practicarlo y a mejorarlo, pero para ello es fundamental tener muy presente que la base de un buen cálculo mental no es la memorización de resultados sino el establecimiento de fuertes vínculos entre diferentes cálculos que permitan a partir de los cálculos memorizados deducir nuevos resultados.

Citaremos algunos ejemplos de las deducciones a las que hacemos referencia:

67 + 9 da lo mismo que 67 + 10 – 1

82 : 4 da lo mismo que la mitad de 41

El 5 % de 360 es igual que la mitad de 36

84 : 7 da lo mismo que 70 : 7 + 14 : 7

La expresión decimal de dieciséis tercios es 5,333…, porque 16 / 3 = 5 + ⅓

Entendemos que es fundamental fomentar que «ell@s tengan la palabra». Tenemos que generar espacios para discutir cómo hemos hecho un cálculo mental para contrastar estrategias y evolucionar en el desarrollo de las mismas.

Para fomentar estas discusiones nos gusta proponer lo que Fosnot & Dolk (en su libro *Young mathematicians at work*, publicado por Heinemann en 2001) llaman minilecciones. En las imágenes 8, 9 y 10 exponemos algunos ejemplos donde ilustramos la idea básica de estas minilecciones: proponemos un cálculo con su resultado, pre-

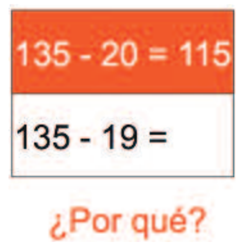

Imagen 8

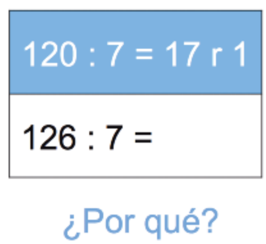

Imagen 9

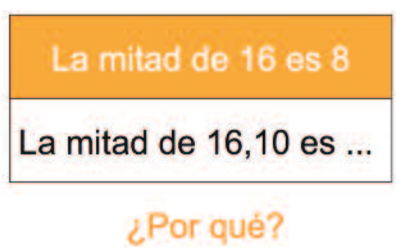

Imagen 10

guntamos el resultado de un cálculo relacionado con el primero y pedimos explicitación de la estrategia utilizada.

Esto lo podemos hacer en una discusión grupal de manera oral y también se puede hacer de manera individual y por escrito (en este caso la importancia de la explicación es central porque no faltará aquel alumno que se siente más seguro siguiendo mecánicas y dará el resultado de la segunda operación sin siquiera mirar el resultado de la primera).

Las deducciones de cálculos también deben ser fomentadas en el ámbito de los cálculos con lápiz y papel. En este ámbito no solo calculamos ejecutando algoritmos sino que también podemos trabajar la deducción de resultados de cálculos a partir de otros resultados conocidos haciendo anotaciones sobre el papel. Algunos ejemplos:

–Calculando 1002-756 podemos anotar 999-753 que fácilmente nos lleva al resultado 246 (el uso de propiedades, como la compensación en la resta, no está restringido a los cálculos mentales, también las podemos usar cuando el tamaño de los números hacen natural el uso de anotaciones para no retener información en la memoria disponiendo de la ayuda de un papel y un lápiz)

–Dividiendo 4200 : 12 podemos anotar 2100 : 6 que tendrá el mismo cociente, a su vez anotar 700 : 2 y concluir que el resultado es 350.

–Calculando el 15% de 380 podemos anotar:

10% de 380 = 38

5% de 380 = 38 : 2 = 19

15% de 380 = 38 + 19 = 57

Para alentar a los alumnos que ante un cálculo, mentalmente o disponiendo de material para hacer anotaciones, utilicen estrategias alternativas eficientes les proponemos actividades que involucran la confrontación entre las estrategias de dos personajes a los que podríamos bautizar «el algorítmico» y «el vida fácil». En la imagen 11 se ven los dos personajes afrontando una situación que requiere sumar 265 + 98: el «algorítmico» lo hace sumando en columnas y el «vida-fácil» se plantea calcular 265 + 100 – 2.

Reflexión final

En esta entrega de «Ell@s tienen la palabra» hemos comentado la necesidad de llevar al aula la existencia de diferentes tipos de cálculo: aproximado y exacto.

Imagen 11. Extraída de Barba, D & Calvo, C (2005) 3x6.mat Ed. Barcanova

No con la intención de presentarlos como contrapuestos sino como complementarios. Hemos comentado el papel del cálculo aproximado en el control de la corrección de cálculos exactos pero también se complementan en relación a que el cálculo aproximado necesita de cálculos exactos aunque este se haga con números más accesibles, por su tamaño o por tratarse de unidades seguidas de ceros.

Hemos intentado presentar situaciones y tareas que promocionen que los alumnos tomen la palabra en el momento de decidir qué tipo de cálculo es más pertinente en cada momento, si lo harán mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de una calculadora y si harán el cálculo que les hemos propuesto u otro que ellos consideren más fácil, que los conduzca al mismo resultado, pudiendo explicar el motivo de esta coincidencia.

Para profundizar

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001), *Children learn mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University, Utrecht.

Barba, D., y C. Calvo (2011), «Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos», en J. E. García (coord.): *Elementos y razonamientos en la competencia matemática*, [Recurso electrónico] IFIIE, Madrid, 47-78.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 «Juegos de ejercitación»:
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/09/jocs-dexercitacio.html>

2 “Práctica productiva de tablas”:
<http://puntmat.blogspot.com.es/2015/05/practica-productiva-taules.html>

3 «Casillas de multiplicación»::
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2013/09/graella-multiplicacio.html>

«Tablas y poliedros:»:
<http://appletspuntmat.blogspot.com.es/2014/05/taules-i-poliedres.html>