

# Kurt Gödel: la fuerza de la lógica

ANTONIO PÉREZ SANZ  
JOAQUÍN COLLANTES HERNÁEZ

*Todo error obedece a factores externos (tales como la emoción y la educación); la razón, por sí sola, no yerra.*

Kurt Gödel



## 14 de enero de 1978

Después de entregarle el original a la enfermera el doctor Greenway se detuvo antes de firmar la copia del acta de defunción tras echarle una última ojeada y subrayó la fecha que aparecía sobre su firma:

14 de enero de 1978

el nombre y las fechas que encabezaban el documento:

Kurt Friedrich Gödel,

28 de abril de 1906-14 de enero de 1978

y el último párrafo:

víctima de desnutrición e inanición

provocada por trastornos mentales

Metió el papel en una carpeta en la que con letra casi de manual de caligrafía había escrito el nombre del paciente y la guardó en un archivador, no sin recordar en ese momento cómo se dulcificaba el gesto agrio del que había sido su paciente mientras sus labios intentaban trazar lo que quería ser una sonrisa con la que lo recibía cada vez que entraba en su habitación, dispuesto a jugar la única partida de ajedrez que jugaron juntos.

## En puertas del tercer milenio

Los médicos de la planta, a la vista del enfermo que acababa de ingresar, reconocieron que nunca habían visto nada semejante. No se explicaban cómo podía seguir vivo aquel anciano que parecía un cadáver viviente y que permanecía, sin reaccionar a ningún tipo de estímulo, en posición fetal desde que lo acostaron en la cama. Pero se sorprendieron al comprobar que sí reaccionaba contra los que intentaban quitarle las gafas o cambiarlo de la posición que él había elegido: sobre el costado derecho y justo al borde del colchón.

Sólo el doctor Greenway supo quién era el paciente que había ingresado de urgencia la mañana del 29 de diciembre en el hospital de Princenton. Y al leer su nombre en la lista de recepción subió inmediatamente a la habitación que le habían adjudicado para encontrarse con un hombre con el cuerpo destruido, un muñeco roto que apenas pesaba 30 kilos y del que, como signo de vida, solamente destacaba el brillo intenso de los ojos miopes tras las gafas que no quiso abandonar ni un solo momento.

El diagnóstico del médico que ordenó su ingreso en el hospital era tan impresionante como contundente. El doctor Greenway leyó:

Sufre desnutrición grave, paranoia aguda con alucinaciones, ataques de pánico, hipocondría y depresión aparecida en un principio en crisis intermitentes para terminar haciéndose aguda. Sufre bloqueo de los conductos urinarios por hipertrofia de la próstata. Durante años se ha negado a aceptar ayuda médica. Ha tenido rachas de normalidad que han ido espaciándose hasta desaparecer en la actualidad, aunque solamente su mente continua intacta en un cuerpo prácticamente muerto. Diagnóstico: muy grave, y a mi juicio, en estado terminal.

El doctor Greenway no tiró la toalla.

—Está usted intentando un imposible. Este hombre no tiene solución, ya está fuera de este mundo.

### Teorema de completitud

En el sistema axiomático de la lógica de primer orden, si una afirmación es verdadera, entonces puede demostrarse.

Sin hacer caso del comentario de su colega, colocó una mesa baja junto a la cabecera de la cama, del lado sobre el que estaba acostado el enfermo. Y sobre la mesa un tablero de ajedrez. Y sobre el tablero, muy despacio, fue colocando las piezas sin quitarle ojo al que todo lo observaba atentamente, a la espera de una reacción que solamente llegaría cuando, con el Rey Negro en una mano y el Rey Blanco en la otra el médico, sonriendo, le preguntó al enfermo:

—¿Negras o blancas?

El enfermo, con un gesto casi imperceptible, señaló la mano que contenía la pieza negra. Cuando, con un hilo de voz, dijo: peón reina, el doctor Greenway supo que, aunque mínima, aún había esperanza de salvar al hombre que era considerado un genio de las matemáticas.

Así pasaron seis días durante los cuales la partida avanzaba lentamente con claro retroceso de las piezas blancas ante el ataque, tan lento como despiadado, de las piezas negras. Hasta que un día, cuando solamente defendían al rey blanco la reina, un caballo, un alfil, una torre y dos peones, el doctor, al entrar en la habitación se encontró con que el matemático había cerrado los ojos solamente para volver a abrirlos apenas un minuto antes de su muerte, ocho días después. Pero lo que no sabía el médico es que el matemático había abandonado la partida, y la habitación y el hospital para asistir como espectador privilegiado a la rápida película de su vida antes de exhalar su último suspiro.

Su nacimiento, el 28 de abril de 1906 y sus primeros años en Brno, en la actual República Checa, junto a unos padres de posición acomodada, de origen alemán, junto a su neurosis y fiebres reumáticas infantiles, fueron la primera imagen fija seguida, a velocidad de vértigo, por sus

años de estudiante de física y matemáticas en la universidad de Viena. Ya en 1928, dentro de sus investigaciones para su tesis doctoral, Gödel focaliza su interés hacia los fundamentos de la matemática. Se sumerge en la lectura de *Los elementos de lógica teórica*, de Hilbert y Ackherman. Por lo tanto, la obra lógica de Gödel hay que relacionarla desde el principio con el programa formalista de Hilbert. Su tesis doctoral, *La completitud de los axiomas del cálculo funcional de primer orden*, dirigida por Hans Hahn y Fürtwängler y leída en 1930 incorpora su famosa prueba de la suficiencia semántica del cálculo lógico de primer orden... ¡Y solamente tenía 11 páginas! Estas escasas páginas le abrieron las puertas para ejercer como *privatdozent*, profesor sin derecho a sueldo, en la universidad de Viena hasta su marcha a Estados Unidos.

## Viena y los teoremas de incompletitud

En la siguiente escena que pasa por su cabeza, a las 16,45 horas del día 26 de agosto de 1930, un Gödel sonriente, abre la puerta de la habitación para entrar en el ambiente ruidoso y ahumado del Café Reichsrat comprobando que, como siempre, llegaba tarde a su cita. Sentados al velador de mármol que consideraban suyo, el que estaba en el rincón del café, junto al ventanal que se abría a la Ringstrasse, le esperaban Menger, Carnap, Feigl y Waismann, entre otros miembros de Círculo de Viena, impacientes por ver el trabajo que Gödel les había asegurado que les mostraría aquella tarde. Así que, sentándose y dejando la carpeta que llevaba encima de la mesa, a modo de saludo, les espetó a los que esperaban:

—La ciencia no tiene respuestas a todas las preguntas.

## El Círculo de Viena

Surgió con el nombre de Sociedad Ernst Mach —figura señera del racionalismo antimetafísico— a partir de las reuniones mantenidas en 1907 entre el matemático Hans Hahn, el economista Otto Neurath y el físico Philipp Frank para hablar, fundamentalmente, sobre filosofía y ciencia con un interés positivista lógico. Su premisa era que lo que no es verificable empíricamente no tiene sentido.

A partir de 1922, y con la incorporación del matemático Moritz Schlick como líder del Círculo, las reuniones del ya definitivamente Círculo de Viena se hicieron cada vez más regulares y numerosas, señalando como objetivo prioritario la propagación de una visión científica del mundo. En 1929 el Círculo preparó un manifiesto en el que se definía como movimiento científico y filosófico, consolidándose como un movimiento fundamental en la historia de la filosofía y la ciencia del siglo XX. En el manifiesto aparecían como miembros:

Gustav Bergmann, filósofo y matemático

Rudolf Carnap, físico y filósofo

Herbert Feigl, filósofo

Philipp Frank, físico

Kurt Gödel, matemático

Hans Hahn, matemático

Victor Kraft, filósofo e historiador

Karl Menger, matemático

Marcel Natkin, matemático

Otto Neurath, sociólogo

Olga Hahn-Neurath, matemática

Theodor Radakovic, filósofo

Moritz Schlick, filósofo y físico

Friedrich Waismann, filósofo

Además de los socios habituales, el Círculo contaba con un cierto número de simpatizantes entre los que se destacaban Albert Einstein y Bertrand Russell —residentes en Alemania e Inglaterra, respectivamente—, Ludwig Wittgenstein y Karl Popper, que residieron en Viena pese a no formar parte directa del círculo ni asistir a sus famosas reuniones.

Y aunque ya muchos científicos se habían hecho tal cuestión, Kurt Gödel fue el primero en demostrar rigurosamente esta aseveración construyendo su demostración sobre el lenguaje preciso de la lógica simbólica y utilizando el rigor de las matemáticas para demostrar, sin lugar a dudas, que las mismas matemáticas son incompletas. Gödel debió dejar atónitos a sus oyentes con afirmaciones tan simples y al mismo tiempo tan sorprendentes como:

—En cualquier sistema formal que incorpore al aparato de la lógica los principios y reglas de la aritmética elemental hay sentencias bien construidas que no son demostrables, es decir que no se pueden ni refutar ni demostrar, por tanto son indecidibles. Y si añadimos estas sentencias como axiomas, aparecen otras nuevas no demostrables. Es decir, el sistema es incompleto.

Como remate, añadió:

—La consistencia de estos sistemas no puede probarse dentro de ellos mismos.

En 1932 Gödel forma parte activa del seminario de lógica de Hans Hahn, el matemático director de su tesis y es asiduo a los Coloquios de Menger (reuniones promovidas por el matemático Karl Menger con el que más tarde Gödel coincidiría en América). Durante estos años las reuniones con el Círculo de Viena serán determinantes para Gödel por la oportunidad de establecer amistad con muchos de sus miembros, amistad que continuaría en Estados Unidos cuando ya la mayoría de sus componentes se habían exiliado allí.

### 1933-1940: cuatro viajes a América

A lo largo de estos años Gödel realizó cuatro viajes a Estados Unidos. En el primero, en octubre de 1933,

*A pesar de que él era ario y no tenía que temer la represión desatada contra sus colegas judíos, Gödel despreciaba la actitud agresiva y hostil del gobierno nacional-socialista hacia la cultura y su control asfixiante de la ciencia y la vida universitaria*

descubriría el ambiente liberal Instituto de Estudios Avanzados (IAS) de Princeton en contraste con el asfixiante de Viena, en el que rectores, decanos y profesores fueron obligados a afiliarse al nazi Frente Patriótico.

El segundo fue en agosto de 1935. Al empezar el curso en el IAS una profunda depresión le obligó a regresar a Viena. Gödel recordaría siempre el año que le esperaba, 1936, como el peor de su vida, ya que tuvo que ser internado en el sanatorio de enfermedades nerviosas de Rekawinkel. El matemático estaba solo ya que la mayoría de sus amigos y compañeros habían emigrado; su mentor, Hans Hahn, había muerto en 1934 y el profesor Moritz Schlick, había sido abatido a tiros en las escaleras de la universidad por uno de sus alumnos.

El 20 de septiembre de 1938 Gödel se casó con Adele Thusnelda contra la voluntad de su familia, que se negaba rotundamente a admitir en el seno familiar a una mujer divorciada, católica, seis años mayor que él y

que trabajaba en el cabaret *Nachtfalter* de Viena. Pero, contra todo pronóstico, tuvieron finalmente que reconocer que su presencia actuaría positivamente en el ánimo y salud de Gödel, y que su papel como paciente esposa sería esencial en sus relaciones, incluso imprescindible durante sus crisis, sobre todo al final de su vida, época en que cuidó a su marido con una dedicación ejemplar, a pesar de que ella, a su vez, estaba gravemente enferma.



Kurt Gödel junto a su mujer, Adele Thusnelda, en 1938

En 1938, en su tercer viaje a América, pudo viajar con un permiso de salida de las autoridades alemanas, imprescindible tras la anexión a Austria III Reich. Pero los barcos hacia Inglaterra y Estados Unidos salían atestados, de tal manera que fue imposible encontrar un segundo pasaje en el New York para Adele, que tuvo que quedarse en Viena. John von Neumann consiguió que Gödel impartiera un seminario sobre Teoría de Conjuntos durante los meses de noviembre y diciembre de 1938. En la Universidad de Notre Dame en South Bend, cerca de Chicago, impartiría como profesor invitado de febrero a junio de 1939 cursos de lógica elemental con la ayuda de su amigo vienés Karl Menger, exiliado en 1936.

Ya en Princeton, Gödel se encontró en su ambiente, propiciado por la amistad de von Neumann, Einstein, Morgenstern y otros profesores que había conocido en Austria y Alemania y que ahora estaban refugiados en Estados Unidos y con actividad investigadora y docente en esa universidad. Allí trabajó sobre su artículo La consistencia del axioma de elección y de la hipótesis generalizada del continuo, que publicaría incompleto, a modo de inicio, en el volumen de noviembre de los Proceedings of the National Academy of Sciences. El artículo completo se publicaría el año siguiente.

De vuelta en Viena, en agosto de 1939 Gödel es llamado a filas. El matemático fue consciente de que si estallaba la guerra su salida hacia los Estados Unidos sería prácticamente imposible. Para eludir el alistamiento alegó problemas de corazón motivados por unas fiebres reumáticas, incluso esgrimió imprudentemente su estancia en el sanatorio de Purkersdorf, especializado en enfermedades nerviosas.

Kurt Gödel decidió que la única solución era huir. A pesar de que él era ario y no

## Sobre las sentencias formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas afines

Marzo de 1931: un artículo publicado en una revista especializada al alcance de muy pocos, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, el artículo más importante de la lógica matemática del siglo XX, y quizás de toda la historia de la matemática, va a catapultar a la fama mundial entre la colectividad científica a un extraño joven de tan solo 25 años.

En este artículo, que tan sólo ocupa 26 páginas del número 38 de la revista, un resultado estrella va poner patas arriba todo el panorama matemático de la época: el teorema de incompletitud, que desde entonces sería conocido como «teorema de Gödel».

Se trata de un resultado que viene a enterrar de manera definitiva el sueño de Hilbert de dotar a las matemáticas de una formalización completa aceptada universalmente.

El teorema establece que en todo sistema formal deductivo que incluya al menos los principios y reglas de la aritmética existen proposiciones que no se pueden demostrar ni refutar y que, por tanto, son «indecidibles». La existencia de estas proposiciones hace que el sistema sea «incompleto».

Una simple y triste consecuencia de este resultado va a hacer tambalear todo el edificio de las matemáticas: los axiomas y las reglas de la aritmética formal son incapaces de probar por sus propios medios que están libres de contradicción. Es decir, que una proposición puede resultar al mismo tiempo verdadera y falsa. En definitiva, que no podemos decidir si el sistema es consistente.

John von Neumann se encargará de darle el espaldarazo definitivo:

—Puesto que has probado la indemostrabilidad de la consistencia como continuación natural de tus resultados anteriores, no publicaré nada al respecto.

Ese año, los cursos de Von Neumann en Princeton tuvieron como tema central los teoremas de incompletitud de Gödel.

President Cleveland con destino a San Francisco. Por fin, el día 4 de marzo de 1940 Kurt Gödel y su esposa, agotados tras dos meses de viaje, pisaron el continente en el que residirían hasta su muerte.

### La casa definitiva: 129, *Linden Lane*

Gödel se afincó en Princeton. Hasta 1946 como miembro ordinario del IAS; en 1946 pasará a ser miembro permanente, en 1948 adquirió la nacionalidad americana y en 1953 es elegido miembro de la National Academy of Sciences lo que provocaría que, al fin, el IAS reconociera su status de profesor titular, algo que su amigo von Neumann venía reclamando desde su llegada. Sus excentricidades de aquella época retrasaron tal nombramiento ya que el claustro de profesores se preguntaba si lo que ya era clara paranoia de su compañero, no acabaría siendo peligrosa para la marcha del centro e incluso para ellos. Cuando finalmente decidieron concederle la plaza de profesor titular, especificaron en su contrato que en caso de enfermedad se podría retirar con una pensión adecuada.

El mes de septiembre del año 1949 Gödel y Adele compraron, con la ayuda de Oppenheimer, la que sería su casa definitiva, en el número 129 de Linden Lane, en Princeton. A su vuelta de un viaje a Europa, para visitar a los supervivientes de su familia, Adele encontró a su marido en buen estado de salud y ánimo. Instalados ya en la nueva casa disfrutaron de un periodo de equilibrio, un periodo de inespe-

rada tranquilidad que permitiría a Adele ocuparse de todo lo relativo a la puesta a punto de su nuevo hogar, y a Gödel centrarse en sus trabajos con una salud y un equilibrio casi olvidado.

Por aquella época Gödel dejó a un lado sus trabajos sobre lógica y se orientó, influenciado por su colega y amigo Einstein, hacia la filosofía y la física, discutiendo con él aspectos filosóficos y matemáticos de la Teoría de la Relatividad, a la vez que se ocupaba de la cosmología relativista, buscando y encontrando, además, soluciones novedosas a las ecuaciones del campo gravitatorio de la relatividad general que sorprenderían al mismo Einstein.

Ese año Gödel publica en *Reviews of modern physics* el artículo titulado Un ejemplo de un nuevo tipo de soluciones cosmológicas a las ecuaciones del campo gravitatorio de Einstein, el que pone de manifiesto la existencia de soluciones cosmológicas en las que no se puede definir un tiempo absoluto, abriendo la posibilidad teórica de viajar a cualquier región del pasado, presente y futuro y regresar a la posición inicial.

En 1951 todo pareció volverse negro. Gödel cayó en una profunda depresión a causa de una hemorragia por ulcera de duodeno que necesitó urgente hospitalización. El sueño de que los problemas de salud se hubieran terminado estallaron en pedazos, y a pesar de los cuidados de su esposa el matemático adelgazó considerablemente pues se alimentaba prácticamente sólo con papillas de bebé. Por esas fechas se estableció el Premio Einstein que tendría carácter trianual. En esa primera convocatoria el premio sería compartido entre Julian Schwinger y Kurt Gödel.

Para Gödel la noticia supuso una inyección de optimismo no sólo por el prestigio del premio en sí, sino también porque los



Adele y Kurt en su casa de Linden Lane (Princeton, 1949)

15.000 dólares de dotación que lo acompañaban supondrían una ayuda estimable para sus continuos gastos médicos. El 14 de marzo de 1951, en la ceremonia de entrega del premio, Oppenheimer presentó a Julian Schwinger y disertó sobre su obra, mientras que von Neumann lo hacía sobre la de Gödel, incidiendo en la importancia de los teoremas de incompletitud y en que este trabajo fuera al fin valorado como se merecía, añadiendo, antes de que una cerrada ovación de los presentes confirmara sus palabras, que la obra de este lógico genial marca un hito en la historia de la ciencia. Einstein entregó los galardones personalmente y al imponérselo a Gödel, exclamó:

—Éste, mi querido amigo, es para ti, aunque no lo necesites.

En junio de 1951 la Universidad de Yale le concede un doctorado honoris causa, y en diciembre es invitado por la *American Mathematical Society* para hablar en la prestigiosa conferencia Gibbs como el primer lógico al que le ofrecían tal honor. En dicha conferencia, titulada Algunos teoremas básicos sobre los fundamentos de las matemáticas y sus implicaciones filosóficas, el matemático meditaba sobre la relación de su obra con el conocimiento humano con argumentos no matemáticos, sino filosóficos.

En 1952 la Universidad de Harvard le concedió el doctorado honoris causa con una mención como el descubridor de la verdad matemática más significativa del siglo XX.

## Paseando con Einstein

Durante años Einstein y Gödel pasearon juntos todos los días. Formaban parte del paisaje de Princeton recorriendo el camino que iba de Fuld Hall hasta Olden Farm.

Habían congeniado desde el primer momento, cuando Gödel llegó a Princeton en 1933 en su primera visita. Tras su incorporación definitiva en 1940 se harían inseparables a pesar de los veintiocho años de diferencia y de sus caracteres antagónicos: Einstein era extrovertido, alegre y reía por todo; mientras que Gödel era introvertido, profundamente serio y solitario.

Gödel era de los pocos colegas de Princeton al que Einstein consideraba como un igual. Los dos amigos hablaban de ciencia pero también sobre música, política o religión, temas en los que coincidían. Einstein, en alguna ocasión aseguró:

—Si voy a mi oficina en el Instituto de Estudios Avanzados es únicamente para tener el privilegio de volver luego a casa paseando con Gödel.

La peculiar pareja hacía que todos se volvieran a su paso. Digna de mención es la anécdota ocurrida en 1947 cuando Gödel se nacionalizó norteamericano. Al llevar siete años como residente en los Estados Unidos, sus amigos lo convencieron para adoptar la nacionalidad americana. Como todo solicitante de la misma, Gödel debería demostrar tener un conocimiento general del contenido de la Constitución Americana respondiendo a unas sencillas preguntas. Además, necesitaba dos avalistas que respondieran de su reputación y lo acompañaran al examen oral ante un juez local.

Gödel se presentó con dos padrinos de lujo: Albert Einstein, sobradamente conocido y respetado, y Oskar Morgenstern. El juez que tenía que examinarlo era amigo de Einstein, pero Gödel no quiso privilegios y preparó el examen concienzudamente... tanto que encontró resquicios en el entramado legal que

En agosto de 1950 Gödel presentó en el Congreso Internacional de Matemáticos (ICM) de Cambridge, Massachussets, su trabajo titulado *Universos rotatorios en la teoría general de la relatividad*, nuevas soluciones de las ecuaciones del campo gravitatorio, que determinan diversos universos posibles, todos ellos rotatorios, espacialmente homogéneos y finitos en los que la existencia de líneas cerradas de tipo temporal depende la rotación.

hacían de la Constitución Americana un sistema inconsistente que permitiría la instauración de una dictadura en el país. Morgenstern le contestó que eso era algo completamente absurdo y que bajo ningún concepto debía mencionarlo en la entrevista ante el juez, ya que pondría en peligro la obtención de la nacionalidad. Cuando llegó la cita, Einstein y Morgenstern insistieron en que se limitara a presentarse, dar las respuestas de rigor y los tópicos aprendidos de memoria y se fuera con la nacionalidad recién adquirida en el bolsillo. Pero las sospechas de los padrinos, como se vería, no eran infundadas. El juez Philipp Forman, impresionado por la categoría intelectual de los testigos, comenzó la entrevista diciendo:

—Hasta ahora usted tenía la nacionalidad alemana.

A lo que Gödel contestó:

—Perdone, señor juez: austriaca.

Y el juez, sin inmutarse, añadió:

—Ah, ya. De todos modos su país tuvo que sufrir una horrible dictadura. Afortunadamente, eso no puede suceder en América.

—¡Todo lo contrario! —exclamó Gödel. Yo sé cómo puede ocurrir. Y puedo probarlo.

Y comenzó a disertar con vehemencia sobre el mecanismo que había descubierto en el texto de la Constitución hasta que el juez, probablemente advertido con anterioridad por Einstein, le interrumpió:



Albert Einstein y Kurt Gödel

*... encontró resquicios en el entramado legal que hacían de la Constitución Americana un sistema inconsistente que permitiría la instauración de una dictadura en el país*

—Tampoco creo que sea cuestión de meternos en honduras...

Y comenzó a hacerle las preguntas rutinarias. Es un misterio qué fue lo que Gödel había descubierto.

En 1957, el mismo año en que es elegido miembro de la American Academy of Arts and Sciences y cuando aún no había superado la ausencia de Albert Einstein, desaparecido dos años antes, fallece su entrañable amigo Joseph von Newmann, el padre de la teoría de juegos. Von Newmann, como muchos de los primeros investigadores que trabajaron sobre la energía atómica, subestimó el peligro de las radiaciones a que se exponía en los ensayos nucleares y en agosto de 1956 le detectaron un cáncer que acabaría con su vida el 8 de febrero de 1957, a los cincuenta y tres años. Este segundo impacto vino a ahondar el dolor producido por la muerte de Albert Einstein en 1955.

La década de los sesenta fue para Gödel la época de prestigiosos reconocimientos. En 1968 fue elegido miembro extranjero de la Royal Society ya que el año anterior había sido nombrado miembro honorario de la London Mathematical Society, a la vez que el prestigioso Amherst College le concedía un doctorado honoris causa. Dos años antes, en el año 1966, rechazó vehementemente la propuesta de nombramiento como miembro honorario de la Academia Austriaca de Ciencias como una inequívoca ruptura con su pasado

## La recta final: 1970-1978

Desde 1970, sus crisis de hipocondría eran cada vez más agudas unidas a rachas intermitentes de euforia en la que hacía todo tipo de planes de trabajo, que quedaban en nada en cuanto volvía la depre-

## Las 26 páginas más famosas de la lógica matemática

Las obras completas de Kurt Gödel ocupan un único y breve volumen de tan solo cuatro capítulos titulado: *Kurt Gödel. Obras completas*.

### Capítulo 1

Contiene un breve resumen de las ideas fundamentales del artículo y presenta un esbozo de la idea principal de la demostración del teorema 11. Aquí Gödel precisa la terminología y notación a usar:

Para las consideraciones metamatemáticas resulta indiferente qué objetos usemos como signos primitivos. Usemos números naturales como tales signos. Por tanto, una fórmula será una secuencia finita de números naturales y una deducción será una secuencia finita de secuencias de números naturales.

Así, Gödel aritmetiza el sistema formal permitiendo definir «fórmula», «deducción» o «fórmula deducible» en términos del propio sistema de los Principia. Define los signos de clase como una fórmula de PM con exactamente una variable libre del tipo de los números naturales y los ordena mediante una relación  $R(n)$  que a su vez puede ser definida en el sistema PM.

### Capítulo 2

En este capítulo, hace una descripción precisa del sistema formal P con el que va a trabajar. Es un sistema en el que a los axiomas de Peano se les añade la lógica del sistema PM.

$0 \rightarrow$ <i>cero</i>	$0 \rightarrow$ 1
$s \rightarrow$ <i>siguiente</i>	$s \rightarrow$ 3
$\neg \rightarrow$ <i>negación</i>	$\neg \rightarrow$ 5
$\forall \rightarrow$ <i>o</i>	$\forall \rightarrow$ 7
$\Pi \rightarrow$ <i>para todo</i>	$\Pi \rightarrow$ 9
$( \rightarrow$ <i>signo puntuación</i>	$( \rightarrow$ 11
$) \rightarrow$ <i>signo puntuación</i>	$) \rightarrow$ 13

Se definen los signos primitivos del sistema: constantes, variables de tipo 1, de tipo 2, de tipo  $n$ , signos de primer tipo, de tipo  $n$ , los signos de clase, fórmulas, sentencias, axiomas...

El teorema VI es el famoso *Teorema de incompletitud de Gödel* que, adaptado a un lenguaje más prosaico de cómo él lo presenta, dice lo siguiente:

*Teorema VI:*

En el sistema P, aunque lo completemos con nuevos axiomas, hay siempre alguna sentencia  $\alpha$  que ni ella ni su negación son deducibles en el sistema.

Gödel lo demuestra construyendo la famosa sentencia (*17 Gen r*) que afirma de sí misma que no es deducible.

### Capítulo 3

En este capítulo introduce el concepto de relación (o clase) aritmética y completa el teorema VI con otros dos:

*Teorema VIII:*

En cada uno de los sistemas formales mencionados en el teorema VI hay sentencias aritméticas indecidibles.

*Teorema IX:*

En todos los sistemas formales mencionados en el teorema VI hay problemas indecidibles de la lógica pura de predicados de primer orden.

### Capítulo 4

Kurt Gödel culmina su obra con el último teorema, el broche final:

*Teorema XI:*

Sea K una clase recursiva primitiva y consistente de FÓRMULAS. Entonces, ocurre que la SENTENCIA que dice que K es consistente no es K-deducible. En especial, la consistencia de P no es deducible en P, suponiendo que P sea consistente (en caso contrario, toda fórmula sería deducible).

Gödel esboza una demostración. Sabedor de las consecuencias del mismo, en el último párrafo del artículo, anuncia una generalización y una prueba detallada del teorema XI. Sin embargo, este trabajo nunca se llevó a cabo. Realmente, no hizo falta. Nadie se atrevió a poner en duda las conclusiones de este breve, denso, contundente y definitivo artículo.

sión crónica que ya no lo abandonaría. Sufría alucinaciones y en su paranoia aseguraba que tenía pinchado el teléfono, lo que le llevaba a utilizar claves absurdas para hablar con sus amigos, convencido así de despistar a los posibles espías. Aseguraba también estar vigilado por el FBI por sus opiniones contrarias a la guerra de Vietnam y que alguien lo había hechizado por medio de hipnosis.

Su desprecio por el mundo académico va en aumento. En 1972 había aceptado entusiasmado, en la que sería su última aparición pública, el doctorado honoris causa concedido por la Universidad Rockefeller de Nueva York a instancias del profesor Wang. Tres años después, en mayo de 1975, aceptaría también el nombramiento como miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas del Instituto de Francia. Sin embargo, cuando la universidad de Princeton decide, al fin, concederle el doctorado honoris causa, Gödel comenta a sus amigos que llega con retraso, ya que lo lógico hubiera sido recibirlo al mismo tiempo que sus doctorados honoris causa en Yale y Harvard, en 1951 y 1952. En septiembre renuncia también a la Medalla Nacional de Ciencia que debería entregarle en Washington el presidente de los Estados Unidos, Gerald Ford.

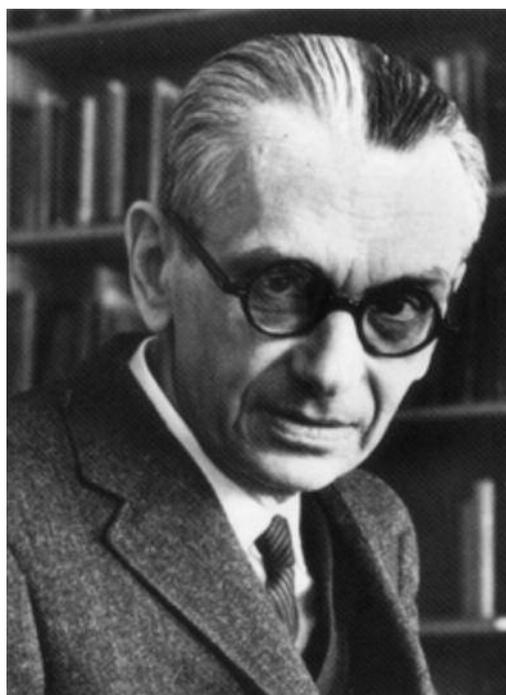
Durante este año, encerrado cada vez más en sí mismo, solamente comparte sus ideas sobre economía, filosofía y matemáticas con Oskar Morgenstern y Hao Wang. Wang, lógico, filósofo y matemático de origen chino, llegó a la Universidad Rockefeller de Nueva York en 1967, contratado como profesor de lógica. Impresionado por los trabajos de Gödel le haría continuas visitas a Princeton hasta establecerse entre ambos una sólida amistad. Fruto de estas reuniones, escribiría sus Reflexiones sobre Kurt Gödel que tanto aportó al conocimiento de la vida y obra del matemático; y también las obras De las matemáticas a la filosofía y Un viaje lógico: de Gödel a la filosofía.

El punto de inflexión llegó con el ingreso de Adele en el hospital, en el mes de julio de 1977. Durante los meses que estuvo internada Gödel se despreo-

*Su peso iba a menos mientras su paranoia iba a más, hasta el punto de que se desentendía de los que lo rodeaban para hablar solamente de sus enfermedades, las reales y las inventadas por su hipocondría*

cupó de su propia salud. Incapaz de desenvolverse en una casa en la que la presencia de Adele era insustituible, abandonó los hábitos imprescindibles, empezando por la alimentación. Los amigos más cercanos, como Morgenstern y Hao Wang, se ocuparon como pudieron ya que rechazaba toda ayuda.

Y la situación empeoró cuando el 26 del mismo mes de julio, su querido amigo Oskar Morgenstern falleció. Tras conocer la noticia, Gödel cayó en un estado de ensimismamiento del que apenas lograrían sacarlo la vuelta de Adele a casa y el fiel Hao Wang con sus atenciones. Desde la muerte de Einstein, Gödel había convertido a Morgenstern en el inseparable amigo que siempre estaba dispuesto a escucharle cuando sus depresiones lo agobiaban. Entonces Gödel reclamaba con vehemencia la presencia de este matemático nacido en Silesia, que había estudiado



Profundidad en el pensamiento y en la mirada

también en la Universidad de Viena, donde había conocido a Gödel. En 1944 Morgenstern publicaría conjuntamente con John von Neumann la gran obra por la que sería internacionalmente conocido: *Theory of Games and Economic Behavior*, su teoría de los juegos que tanta influencia tendría en el mundo de la economía.

La larga ausencia de su mujer se dejó plasmar en el cuerpo del matemático, que llegó a bajar en su peso hasta los cuarenta kilos. Su peso iba a menos mientras su paranoia iba a más, hasta el punto de que se desentendía de los que lo rodeaban para hablar solamente de sus enfermedades, las reales y las inventadas por su hipocondría. Abruñaba a sus amigos telefoneándoles constantemente para pedirles ayuda al sentirse falsamente acosado por la policía, vigilado por seres extraños, acechado por los vecinos y perseguido por médicos que querían inyectarle medicamentos en estado de experimentación.

Convencido de que estaba en marcha una conspiración para envenenarlo hervía varias veces las verduras que comía y el agua que bebía, auto-recetándose toda clase de medicamentos sin hacer caso de los consejos de los médicos, convencido de que todos formaban parte de la conspiración y de que los medicamentos que le recetaban eran pócimas para mermar sus capacidades físicas y mentales.

Su estricta dieta llegó a componerse de un huevo duro y una taza de té por la mañana y una pequeña porción de verdura a la hora del almuerzo. Alcanzó tal estado de debilidad que siempre tenía frío, de tal manera que, cuando acudía a su despacho, se arropaba con tres o cuatro jerséis de lana gruesa superpuestos, bufanda de lana, guantes y un abrigo que a veces ni siquiera se quitaba en todo el día, ante el estupor de quienes lo contemplaban vestido así en plena primavera y hasta en verano.

Desde que en el mes de julio de 1976 se jubilara del IAS (Instituto de Estudios Avanzados) como profesor emérito se agudizaron sus problemas de salud y, sobre todo, su paranoia, dado que ahora no entretenía parte de su tiempo en el instituto y se dedicaba obsesivamente a observarse ya que se tomaba la temperatura y la tensión varias veces al día, anotando las incidencias en un cuaderno que siempre llevaba en el bolsillo.

El 29 de diciembre de 1977, ante la insistencia de Adele y de Hao Wang, el único amigo que le quedaba en quien poder confiar, Kurt Gödel cedió y permitió que le hospitalizaran. Ingresó en el hospital de Princeton, el mismo en el que 22 años antes había fallecido Albert Einstein.

Hao Wang se dio cuenta de la gravedad de la situación nada más entrar en la casa. El hogar de los Gödel, pulcro y cuidado hasta extremos exagerados hasta entonces —y de dudoso gusto estético en la decoración, según el juicio general de quienes lo visitaban— aparecía ahora como si hubiera sido abandonado por los dos ancianos que recibieron al recién llegado como si no fueran conscientes de su presencia, como si no lo vieran. Cuando Wang consiguió al fin que Adele reaccionara estuvieron de acuerdo en que la única solución para salvar la vida de Kurt era su ingreso urgente en un centro hospitalario.



La tumba de Kurt y Adele en el cementerio de Princeton, Nueva Jersey (Estados Unidos)  
(Foto: Antonio T. Colombo)

## Epílogo

La partida de ajedrez no llegaría a su final. Kurt Gödel había puesto punto final a la partida de la vida. El doctor Greenway estampó su firma en el certificado.

14 de enero de 1978,

Kurt Friedrich Gödel. 28 de abril de 1906 - 14 de enero de 1978;

Causa de la defunción: Desnutrición e inanición provocada por trastornos mentales.

Metió la copia en una carpeta en la que una letra casi de manual de caligrafía había escrito el nombre del paciente, y la guardó en un archivador, no sin recordar en ese momento cómo se dulcificaba el gesto agrio del que había sido su paciente, mientras sus labios intentaban trazar lo que quería ser una sonrisa con la que lo recibía cada vez que entraba

en su habitación, dispuesto a jugar la única partida de ajedrez que jugaron juntos.

## Referencias bibliográficas

- FRESÁN, J. (2007), *Gödel. La lógica de los escépticos*, Editorial Nivola, Madrid.
- GÖDEL, K. (1981), *Obras completas*, Alianza Universidad, Madrid.
- GÖDEL, K. (2006), *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines*, KRK Pensamiento. Oviedo.
- GRANNEC, Y. (2012), *La Déesse des petites victoires*. Ed. Anne Carrière, París
- HOFSTADTER, D.R. (2007), *Gödel, Escher, Bach*, Tusquets Editores, Barcelona
- NAGEL, E., NEWMAN, J.R. (1999), *El Teorema de Gödel*, Editorial Tecnos, Madrid

ANTONIO PÉREZ SANZ  
*IES Salvador Dalí (Madrid)*

JOAQUÍN COLLANTES HERNÁEZ  
*IES Salvador Dalí (Madrid)*