suma+ 75
Artículos
Marzo 2014
pp. 35-44

Un paseo histórico por la invención de los logaritmos

Carlos Dorce

La publicación del *Mirifici Logartihmorum Canonis Descriptio* en 1614 significó la presentación de una idea que su autor, el escocés John Napier, hacía años que iba dándole vueltas: los logaritmos. Con ellos, las fórmulas de la prostaféresis iban a dar paso a las tablas logarítmicas y a las futuras reglas de cálculo, ya que la simplificación en las operaciones aritméticas que implicaban era muy superior a la de cualquier método ideado anteriormente. Así pues, los logaritmos fueron pensados únicamente como el equivalente a nuestras actuales calculadoras y éste es el relato de su invención.

Palabras clave: Historia de las Matemáticas, logaritmos, Napier, prostaféresis, divulgación.

A journey through the invention of logarithms

The publication of *Mirifici Logartihmorum Canonis Descriptio* in 1614 introduced an idea which the Scottish author, John Napier, had been thinking about for ages: logarithms. Along with them, prostaphaeresis formulae were going to open up logarithm tables and future slide rules since the simplification in the arithmetic operations involved was far more superior to any other method used so far. Thus, logarithms were just the equivalent to our modern calculators and this is the history of their invention.

Key words: History of Mathematics, logarithms, Napier, prostaphaeresis, divulgation.

En 1614, justo ahora se cumplen 400 años, John Napier (Castillo de Merchiston, 1550-Edimburgo, 4 de abril de 1617) publicaba la que sería una de las obras más importantes dentro de la historia de las matemáticas: el *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* («Descripción de la maravillosa regla de los Logaritmos»). En este trabajo, la palabra «logaritmo» (del griego *logos* (razón) y *arithmos* (número)) fue acuñada por primera vez y se abrió la puerta a una de las ideas más brillantes del siglo XVII. Napier se propuso simplificar los largos cálculos que los navegantes, comerciantes, mercaderes, banqueros, astrónomos,... tenían que hacer para llevar a cabo su trabajo. También introdujo el punto decimal que aún utilizamos para separar la parte entera de la parte decimal en un número y su empeño por la simplicidad le hizo escribir una *Rabdologia* (Napier, 1617) donde hizo famosas las reglas que llevan su nombre y que llenan las secciones matemáticas de los museos de la ciencia y de historia de la ciencia: Londres, Oxford, Florencia,...

Por lo tanto, éste va a ser un paseo por una de las ideas más importantes de la historia, quizá comparable a lo que significó el descubrimiento del cálculo diferencial a finales del mismo siglo o a la demostración de la imposibilidad de la resolución de la ecuación quíntica en el XIX.

Artículo recibido en *Suma* en ****** de 2012 y aceptado en **** de 2013

Una pincelada histórica

Los antecedentes históricos de los logaritmos nos remontan a los problemas de aritmética mercantil de la matemática babilónica. Conservamos tablas cuneiformes que dan el exponente al que se debe elevar una cierta base para obtener un número dado, como por ejemplo (Neugebauer, 1945):

0;15	2	[$\log_{16}$ = 0;15]
0;30	4	[$\log_{16}$ = 0;30]
0;45	8	[$\log_{16}$ = 0;45]
1	16	[$\log_{16}$ = 1;0]
1;15	32	[$\log_{16}$ = 1;15]
1;30	64	[$\log_{16}$ = 1;30]

Este tipo de tablas, que nos muestran un cierto dominio de las propiedades de las potencias, fueron utilizadas como auxiliares en problemas sobre el cálculo del tiempo que ha de pasar para convertir una cierta cantidad de dinero en otra a un interés dado. Un ejemplo de esto lo encontramos en el cálculo del tiempo necesario para convertir 1 *maneh* de plata en 64 *maneh* a un interés del 20% anual (Knuth, 1972). El escriba señala que en 5 años 1 *maneh* se convierte en 2 aplicando interés simple ($I = C_0 rt = 1 \cdot 0{,}2 \cdot 5 = 1$ y $C_5 = C_0 + I = 1 + 1 = 2$) y, por lo tanto, cada cinco años el capital se va doblando. Entonces «encuentra el inverso de 2, obteniendo 1», es decir, $\log_2 2 = 1$. Para pasar de 2 *maneh* a 32 se necesita multiplicar por 16 y el escriba calcula $\log_2 16 = 4$, para concluir que en un tiempo de $\log_2 32 = \log_2 2 + \log_2 16 = 5$ períodos de 5 años, los 2 *maneh* pasarán a ser 64. Consecuentemente, se necesitan 5 + 25 = 30 años para dar respuesta al problema.

Los antecedentes históricos de los logaritmos nos remontan a los problemas de aritmética mercantil de la matemática babilónica.

El cálculo con potencias no tuvo demasiada repercusión dentro de las matemáticas griegas a excepción del uso que Arquímedes (s. III a.C.) dio a los exponentes en el sistema de numeración de octadas (10^8) que desarrolló en el *Arenario* (Heath, 1921). Los números entre el 1 y el 10^8 formaban el «primer orden» y el 10^8 pasaba a ser la unidad de los números de «segundo orden», es decir, desde el 10^8 hasta el 10^{16}. La clasificación continúa hasta el orden 10^8-ésimo, formado por los números comprendidos entre el $10^{8(10^8-1)}$ y el $10^{8\cdot 10^8}$, y desde el 1 hasta el $10^{8\cdot 10^8} = P$, quedaba determinado el «primer período». El «segundo período» estaba formado por todos los números entre P y P^2 y estaban a su vez divididos en primer orden, segundo orden..., y orden 10^8-ésimo. El sistema se terminaba en el período 10^8-ésimo, es decir, en el número P^{10^8}.

También las matemáticas desarrolladas en la India jainista de los siglos IX y X recogieron la idea de logaritmo en el cálculo de exponentes. En el comentario *Dhavalâ* de Vîrasena (c. 816) nos encontramos con el concepto de *ardhacheda* de una cantidad, definido como el número de veces sucesivas que ha de ser dividido por la mitad para obtener un resultado positivo menor o igual que 1. No es difícil comprobar pues que el *ardhacheda* de 8, por ejemplo, es 3 ya que $2^3 = 8$, y, por lo tanto, existe un paralelismo absoluto entre el cálculo del *ardhacheda* y nuestro $\log_2$. Las potencias de 2 jugaron un papel destacado en la literatura jainista y no es extraño ver que este «logaritmo» emergiese de manera natural. Por ejemplo, ya en el Anuyoga Dwâra Sûtra, escrito a principios del siglo I a.C., Âryaraksita utilizó el sistema posicional de numeración en base 10 y estimó el número de personas que existían en el mundo como «un número que cuando se expresa mediante "denominaciones" [...] ocupa veintinueve posiciones», el cual se puede dividir por 2 un total de 96 veces (es decir, el número que se corresponde con la potencia 2^{96} = = 79 228 162 514 264 337 593 543 950 3 36)[1]. Por lo tanto, estamos delante de un número cuyo *ardhacheda* es 96 (Shah, 2009). Del mismo modo, Vîrasena también definió el *varga-salâkâ* como el *ardhacheda* del *ardhacheda* ($\log_2 \log_2$), el *trikaccheda* como el equivalente del $\log_2$, el *caturhaccheda* como el de $\log_4$ y el *pancccheda* como el de $\log_5$(Jain, 2011). Con estas definiciones, un siglo más tarde Nemicandra (s. X) describió algoritmos equivalentes a nuestras reglas actuales:

$$\log ab = \log a + \log b$$
$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

Si bien las matemáticas en todo este período estuvieron íntimamente asociadas a cálculos relacionados con la cosmología y cosmogonía jainistas, el concepto de logaritmo no sufrió importantes novedades posteriormente. ¿Cuál fue la razón? ¿Por qué si buscamos cálculos similares en las obras de los matemáticos indios de los siglos XII, XIII, etc., no volvemos a encontrarnos con ellos a excepción de alguna aparición muy aislada, como es el caso de las obras de Hemcandrasûri (c. 1107)? La clave para responder a esta pregunta puede estar perfectamente asociada al desarrollo que tuvo la trigonometría en la misma India y que fue transmitida al mundo árabe por su utilidad para la astronomía. Fijémonos en que desde su aparición en los primeros *Siddhantas* de los siglos IV y V y en las obras de Aryabhata (Kusumapura, c.476-c.555), la función seno no se limitó a ser un operador computacional sino que se vio acompañada de tablas que hicieron muy fácil su uso. Sin embargo, esta distribución tabular no siguió a la invención india del logaritmo y dado que la astronomía aún no lo utilizaba explícitamente demasiadas veces, probablemente nadie vio la necesidad de dar el salto que en el siglo XVII darían Napier y Joost Bürgi (Lichtensteig, 28 de febrero de 1552-Kassel, 31 de enero de 1632) en Europa.

Aún y así, con el paso del tiempo los cálculos requeridos en trigonometría esférica para establecer efemérides planetarias o determinar eclipses con suficiente precisión cada vez eran más largos (y tediosos). Las tablas trigonométricas cada vez tenían más cifras y, por lo tanto, el producto de dos senos o de dos cosenos cada vez significaba una labor más larga. Por ejemplo, cojamos el *Libro del Relogio dicho de la piedra de la sombra* que Rabiçag (s. XIII) incluyó en los *Libros del Saber de Astronomía* de Alfonso X el Sabio, rey de Castilla entre 1252 y 1284 (Rico y Sinobas, 1866). Este tratado sobre la construcción de un reloj de Sol fue basado en una obra homóloga escrita por al-Battânî (Harran, c.850-Qasr al-Jiss, 929) tres siglos antes y, por ejemplo, en él nos encontramos con la fórmula del cálculo del azimut α del Sol en función de su altura h (Dorce, 1999):

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{R\left(\text{sen}\,r + \text{sen}\,f\right)}{\cos\phi}$$

donde ϕ es la latitud, r es la amplitud ortiva, f la «diversidad del horizonte» y se calculan mediante las fórmulas:

$$\text{sen}\,r = R\frac{\text{sen}\,\delta}{\cos\phi}$$
$$\text{sen}\,f = \frac{\text{sen}\,h\cdot\text{sen}\,\phi}{\cos\phi}$$

Este cálculo, que se puede considerar de los más sencillos que podemos encontrar en un manual de astronomía medieval, no deja de ser largo si consideramos que contiene una suma, dos productos y tres divisiones, y más si tenemos en cuenta que las razones trigonométricas estuvieran dadas con un mínimo de dos fracciones sexagesimales de precisión. ¿Podían, pues, los astrónomos buscar algún método que ahorrara su precioso tiempo? La respuesta afirmativa a esta pregunta tendría que esperar al Renacimiento europeo y las conocidas fórmulas de la prostaféresis (del griego προσθεσι (suma) y αφαιρεσι (diferencia)):

$$\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left(\cos\left(A-B\right)+\cos\left(A+B\right)\right)$$
$$\text{sen}\,A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left(\text{sen}\left(A-B\right)+\text{sen}\left(A+B\right)\right)$$
$$\text{sen}\,A\cdot\text{sen}\,B = \frac{1}{2}\left(\cos\left(A-B\right)-\cos\left(A+B\right)\right)$$

Imaginemos que hay que calcular el producto $2\cos 37^{\text{o}}\cos 21^{\text{o}}$ y para facilitarnos la operación, vamos a suponer que el astrónomo disponía ya de las fracciones decimales que Abû al-Hasan al-Uqlîdisî (Damasco, c.920-íd., c.980) introdujo en el mundo árabe[2] y que Simon Stevin (Brujas, 1548-La Haya, 1620) hizo lo propio en Europa. Cojamos como referencia la tabla para la función seno elaborada por Nicolás Copérnico (Torun, 19 de febrero de 1473-Frombork, 24 de mayo de 1543) en su famoso *De Revolutionibus Orbium Coelestium*, donde están calculados los senos con cinco cifras decimales de todos los ángulos entre 0º y 90º para todos los múltiplos de 10' (Copérnico, 1543). En dicha tabla, los datos que tenemos son $\cos 37^o = 0{,}79864$ y $\cos 21^o = 0{,}93358$ y, por lo tanto:

$$2\cos\ 37^o \cos\ 21^o = 2\cdot 0{,}79864 \cdot 0{,}93358 = \\ = 1{,}4911886624$$

Con las fórmulas de la prostaféresis, es posible reducir este producto a una única suma:

$$\cos\left(37^o + 21^o\right) = \cos 58^o = 0{,}52992$$

$$\cos\left(37^o - 21^o\right) = \cos 16^o = 0{,}96126$$

Por lo tanto

$$2\cos 37^o \cos 21^o \approx 0{,}52992 + 0{,}96126 = 1{,}49118$$

Distintas fuentes apuntan a que ya en el siglo X el astrónomo egipcio Ibn Yûnus (m. 1009) fue capaz de demostrar por primera vez la fórmula de la prostaféresis para el producto de dos cosenos, aunque esta afirmación parece provenir de una confusión cometida por el historiador francés Jean Baptiste Delambre en el siglo XIX (Berggren, 1986). Así pues, la primicia de las fórmulas se traslada directamente a Europa y a la figura del monje alemán Johannes Werner (Nuremberg, 14 de febrero de 1468-íd., mayo? de 1522). Werner siempre estuvo interesado por la trigonometría esférica y a principios del siglo XVI ya había empezado a escribir diversos libros sobre la resolución de triángulos esféricos como el *Liber de triangulis sphaericis* («Libro sobre el triángulo esférico»), aunque la idea del método de la prostaféresis fue posterior a 1505 (Björnbo, 1907). Las obras del alemán fueron ampliamente conocidas por sus contemporáneos y fue el austriaco Georg Joachim Rheticus (Feldkirch, 16 de febrero de 1514-Kosice, 4 de diciembre de 1574) quien las publicó en Cracovia treinta y cinco años después de su muerte. Así pues, a partir de 1557 las fórmulas de la prostaféresis estuvieron al alcance de cualquier astrónomo y matemático que pudiera tener en sus manos el *De triangulis sphaericis*. Sin embargo éste no parece ser el camino por el que llegaron a quien posteriormente fue el personaje que les sacó mayor provecho: Tycho Brahe (Knutstorp, 14 de diciembre de 1546-Praga, 24 de octubre de 1601). Si bien parece plausible que el gran astrónomo danés y su discípulo Paul Wittich (Wroclaw, c.1546-Viena, 9 de enero de 1586) llegaran a la fórmula por sí mismos alrededor de 1580, no es descartable que Brahe hubiese podido acceder a los tratados de Werner durante alguna de sus visitas a Wittenberg en los años anteriores, ciudad en las que dichas obras parece que circularon a partir de la segunda mitad del siglo XVI. Fuera como fuese, Brahe vio enseguida la gran utilidad de las fórmulas para facilitar los cálculos astronómicos y las recogió en un tratado básico de trigonometría escrito para sus ayudantes en su observatorio de Uraniborg. A pesar de este primer uso en Dinamarca, la primera publicación de dicho método no apareció hasta que en 1588 el alemán Nicolaus Reimers Baer, también conocido por Reimarus Ursus (Hennstedt, 2 de febrero de 1551-Praga, 16 de octubre de 1600), elaboró su *Fundamentum astronomicum* (Thoren, 1988).

Brahe vio enseguida la gran utilidad de las fórmulas para facilitar los cálculos astronómicos y las recogió en un tratado básico de trigonometría

En resumen, se puede concluir perfectamente que a finales del siglo XVI, las fórmulas de la prostaféresis y su aplicación a la conversión de productos y divisiones en sumas y diferencias eran perfectamente conocidas en los círculos matemáticos europeos. Además, es bien conocido la gran labor que el equipo de Brahe realizó para compilar tablas numéricas y astronómicas con precisión, y los astrónomos trabajaban con tablas de hasta quince cifras decimales. Sin embargo, el método seguía siendo suficientemente largo como para que no sobreviviese a la muy próxima aparición de los logaritmos. La prueba es que tanto Bürgi como Napier conocían perfectamente las fórmulas de la prostaféresis y ello no fue capaz de quitarles de la cabeza la idea de mejorar la simplificación de los cálculos. Por un lado, Bürgi había coincidido con Wittich en Kassel y el segundo le puso al corriente del nuevo paso que habían dado las matemáticas. Por el otro, Napier aprendió las reglas de Werner a través del también escocés John Craig (m. 1620). Craig fue médico del rey Jacobo VI de Escocia, rey de Escocia entre 1567 y 1625 y de Inglaterra e Irlanda entre 1603 y 1625, y acompañó al monarca en su viaje a Dinamarca para conocer a su futura esposa, la princesa Ana, hija del rey Federico. Por aquellas casualidades del destino, una gran tormenta obligó a la delegación escocesa a refugiarse no muy lejos del observatorio de Brahe en la isla de Hven, donde Craig aprendió los nuevos métodos del danés (Boyer, 1969). Otra posibilidad es que Craig obtuviera las fórmulas directamente de Wittich en un viaje a Frankfurt poco antes de 1580 (Gingerich y Westman, 1988).

Napier vislumbró su nuevo método a partir de una idea muy distinta.

Si bien las fórmulas de la prostaféresis eran de una gran y contrastada utilidad, Napier vislumbró su nuevo método a partir de una idea muy distinta. Napier no sólo era un buen aficionado a la astrología sino que empezó a cavilar sobre la correspondencia entre una serie aritmética y una serie geométrica. En 1484, Nicolás Chuquet (París, c.1450-Lyon, c.1490) había publicado su *Triparty en la science des nombres* («Tres partes sobre la ciencia de los números») en la que había acuñado las palabras «millón», «billón», «trillón»,... y a través de la *Arismetique* (1520) de Estienne de La Roche (Lyon, c.1470-Francia, c.1530), este tratamiento de los números muy grandes se hizo bastante popular por su simplicidad. Por otro lado, en 1544, Michael Stifel (Esslingen, 1487-Jena, 19 de abril de 1567) en su *Arithmetica integra* abrió la puerta al estudio de las potencias tal y como lo entendemos hoy en día (Stifel, 1544). Stifel consideró la correspondencia entre las progresiones:

...–4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4…
...1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8	16…

A partir de aquí, dedujo rápidamente que $2^m \cdot 2^n = 2^{m+n}$ y $2^m : 2^n = 2^{m-n}$,y que estas propiedades podían ser utilizadas para calcular productos y divisiones entre potencias de 2, ya que el producto de los dos elementos de la segunda fila que ocupan las posiciones m y n, respectivamente, es igual al elemento que ocupa la posición $m+n$. Por ejemplo: $32 \cdot 128 = 2^5 \cdot 2^7 = 2^{5+7} = 2^{12} = 4\,096$. Por la posición «expuesta» del 5, del 7 y del 12 en la fila superior, Stifel bautizó a dichos números con el nombre de «exponentes». Con la popularización de las fracciones decimales de Stevin, la nomenclatura de Chuquet y la idea de Stifel, sobre todo a través del *Rechenbuch* («Libro de aritmética») de Simon Jacob (Coburg, c.1500-Frankfurt, 24 de junio de 1564), publicado en 1560 pero que tuvo diversas exitosas ediciones durante el resto del siglo XVI, las tablas logarítmicas no tendrían que hacerse esperar demasiado.

John Napier nació en el castillo de Merchiston, un pueblo cercano a Edimburgo, en el año 1550. La familia Napier había destacado a lo largo de los años por su servicio a la Corona y eran gente muy influyente en Escocia. El abuelo de John, por ejemplo, había caído a manos de las tropas inglesas en la batalla de Flodden Field de 1513, y si se busca en el árbol genealógico, incluso nos encontramos con algún Napier ocupando el cargo de gobernador del castillo de Edimburgo. La historia hizo que una deuda del rey Jacobo I (rey de Escocia entre 1406 y

1437) con la familia los asentase en Merchiston, de manera que a mediados del siglo XVI, los Napier ya se habían construido un castillo como emblema de la región. El padre de John, Archibald Napier, se había casado con Janet Bothwell en 1549 con tan solo 15 años de edad, así que cuando John asomó su cabecita al nuevo mundo, los Napier tenían asegurada su imprescindible continuidad dinástica. Años más tarde, Archibald fue nombrado caballero y en 1582 le fue encargada la importante tarea de dirigir la Royal Mint escocesa, lo que venía a ser la Casa de la Moneda.

No se sabe cual fue el primer contacto de John con las instituciones académicas, ya que bien pudo haber estudiado en Edimburgo como haber sido tutelado por buenos profesores. Fuera como fuese, en 1563 fue matriculado en el St. Salvator's College de la universidad de St. Andrews y dada su alta posición social, un sirviente le acompañó en esta nueva etapa. Paralelamente, la Reforma había llegado a Escocia y también la plaga de peste que había asolado el continente europeo. John no debió quedar impasible a todo esto y si tenemos en cuenta que a los tres meses de su llegada a St. Andrews recibió la noticia de la muerte de su madre, ¿podemos imaginarnos el cambio que debió suponer para un chaval de 13 años todas aquellas circunstancias? John enseguida se vio envuelto en los debates religiosos y poco a poco fue convirtiéndose en un fanático protestante. Probablemente, coincidió en varias ocasiones con el líder reformista John Knox (1514-1572), de modo que sus posibles encuentros con el fundador del presbiterianismo debieron ser definitivos en el pensamiento del adolescente. Así pues, aceptando un punto de leyenda en todo este relato, Archibald Napier decidió que su hijo debía alejarse de St. Andrews y John, a sus 14 años, y su sirviente se embarcaron en un viaje por Europa que duró alrededor de siete años, ya que la siguiente noticia que tenemos de él es que con 21 años estaba en Merchiston preparándose para su boda con Elizabeth Stirling. El contrato de matrimonio se firmó en 1572 y la pareja se casó un año más tarde.

A partir de aquí, la vida de Napier se vio atada a sus intereses políticos y administrativos de modo que

Figura 1. John Napier (1550-1617)

cuado en 1588 la Armada Invencible del rey Felipe II (rey de España entre 1556 y 1598) fue derrotada por los ingleses, él ya era un icono de la lucha protestante. Prueba de ello es que en 1593 escribió el *Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* («Descubrimiento de toda la revelación de San Juan»), un libro que tuvo mucho éxito tanto en su versión original en inglés como en sus traducciones al alemán, holandés y francés, y que hizo que su nombre adquiriera una gran reputación como erudito (Gibson, 1914). Napier estudió el Apocalipsis tal como San Juan lo había descrito e intentó dar un sentido racional a sus ideas. Además, predijo el día del juicio final entre 1688 y 1700, atacó sin prejuicios a la iglesia católica, tachó al papa de anticristo y se convirtió en un alegato propagandístico para que el rey Jacobo VI liderara la lucha anticatólica.

Si resulta que Napier era un cabecilla dentro de la lucha de la Reforma... ¿dónde encaja la invención de los logaritmos en toda esta historia? Durante su reinado, Jacobo VI fue capaz de poner orden dentro de la Iglesia escocesa y su proceso de «anglicanización» pudo haber provocado que Napier diera un paso atrás. Por un lado, a partir de 1594 su genio se desplazó a los artilugios mecánicos y, dejando de lado su interés momentáneo por la magia, la superstición y la astrología, se dedicó a idear máquinas de defensa que nunca fueron construidas y cuyos bocetos él mismo destruyó antes de morir (Gladstone-Millar, 2003). Por otro, Napier se hizo cargo de la administración de Merchiston, sus tributos, sus inventarios, sus cosechas,... y aquí nos encontramos con la mente brillante delante de los continuos cálculos que debía de suponer su trabajo. Así, en el prefacio de su *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* Napier dejó muy claras sus intenciones:

> Ya que nada es más tedioso, colegas matemáticos, en la práctica de las artes matemáticas que los grandes retrasos sufridos en el tedio de las largas multiplicaciones y divisiones, el cálculo de razones y la extracción de las raíces cuadradas y cúbicas, y en las cuales no sólo se ha de considerar el retraso de tiempo sino también la molestia de los muchos errores tontos producidos; le he estado dando vueltas a mi mente y, por el arte seguro y expeditivo, podría ser capaz de mejorar estas dificultades citadas. Después de pensar lo suficiente, finalmente he encontrado una regla maravillosa para hacer los procedimientos más cortos, y tal vez la manera en la que el método surgió se establece en otros lugares. Realmente, en lo que concierne a estas materias, no hay nada más útil que el método que he encontrado. Así, todos los números asociados a las multiplicaciones y divisiones de números y a las largas y arduas extracciones de las raíces cuadradas y cúbicas son todos rechazados en la obra, y su lugar lo ocupan otros números en su sustitución, los cuales hacen las mismas operaciones rechazadas a través de sumas, restas y la división entre dos o tres únicamente. Como realmente el secreto se hace mejor si es común a todos, tal como pasa con todas las cosas buenas, es una tarea agradable establecer el método para el uso público de todos los matemáticos. Así, los estudiantes de matemáticas aceptarán y disfrutarán libremente de este trabajo que ha sido producido por mi benevolencia. *Farewell*.

El secreto de los logaritmos, la invención surgida más de veinte años antes que iba a significar un gran paso en la simplificación del cálculo, ya estaba a punto para ser revelado.

Si bien el *Plaine Discovery of the whole Revelation of Saint John* había sido escrito en inglés para llegar al gran público, el texto del *Mirifici Logartihmorum Canonis Descriptio* (Napier, 1614) con sus 57 páginas de explicación y sus 90 páginas de tablas logarítmicas iban a estar en latín, el idioma erudito de los ambientes académicos e intelectuales. El libro no contiene el método de construcción y el propio Napier explica que prefiere comprobar primero la aceptación que tiene su obra:

> Espero el juicio y censura que tengan que hacer los eruditos, antes de que la publicación temeraria del resto sea expuesta a las detracciones de los envidiosos.

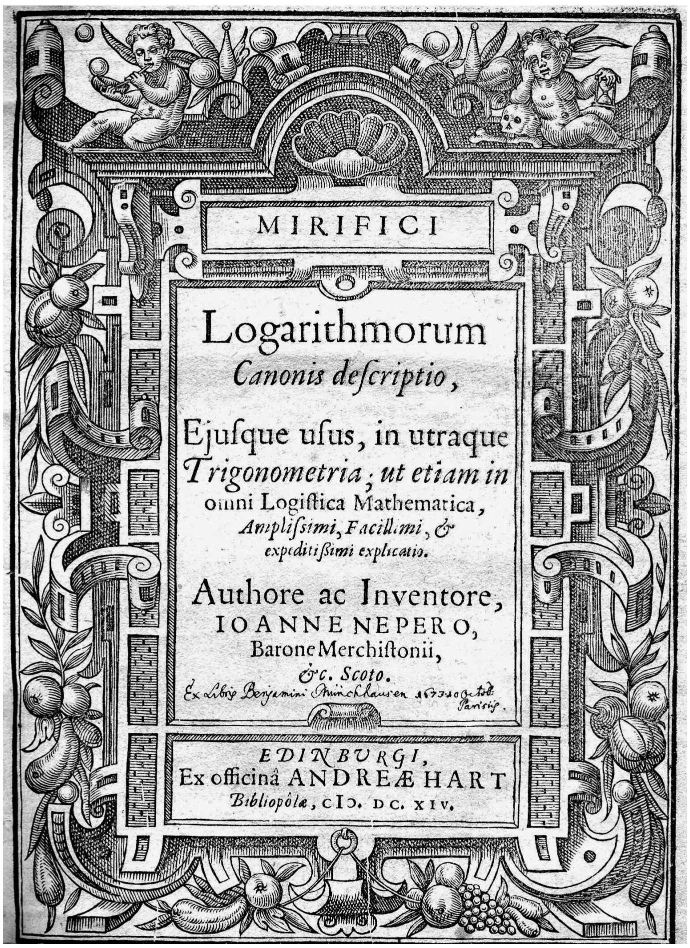

Figura 2. El *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614)

Pero no había nada que temer. La aceptación de los logaritmos fue inmediata tanto en Inglaterra y Escocia como en el resto de Europa. El navegante y cartógrafo inglés Edward Wright (Garveston?, octubre de 1561-Londres, noviembre de 1615), por ejemplo, *Fellow* en el Gonville & Caius College de Cambridge, enseguida vio la importancia de la *Descriptio* y se propuso la tarea de traducirlas al inglés para hacerlas accesibles a cualquier tipo de público. Wright murió en 1615 y su obra fue publicada tres años más tarde por su hijo Samuel (Wallis, 1976). También en 1615, Henry Briggs (Warley Wood, febrero de 1561-Oxford, 26 de enero de 1630), profesor del Gresham College de Londres, escribió al profesor James Ussher del Trinity College de Cambridge (Hobson, 1914):

> Napier, Lord de Merchiston, ha puesto en mi cabeza y manos su trabajo con sus nuevos y admirables logaritmos. Espero verlo este verano, si Dios quiere, ya que nunca he leído un libro que me haya placido tanto o me haya dado más satisfacción.

Briggs visitó a Napier y después de pasar un mes juntos, lo volvió a visitar al año siguiente y no hubo una tercera visita en 1617 porque Napier había muerto. Para poner un último ejemplo, el mismo Johannes Kepler (Weil der Stadt, 27 de diciembre de 1571-Regensburg, 15 de noviembre de 1630) que había estado batallando durante años con los cálculos de las posiciones de Marte, no dudó en incluir una carta elogiando a Napier en la dedicatoria de su *Ephemerides* sin saber que el escocés había fallecido algo más de dos años antes. Posteriormente, en 1624 Kepler publicó su propia tabla de logaritmos en el *Chilias logarithmorum* (Kepler, 1624)

La *Descriptio* contiene únicamente ciertas consideraciones sobre el concepto de logaritmo, sus principales propiedades y sus aplicaciones a la resolución de triángulos planos y esféricos. Así, después de cinco definiciones introductorias sobre tipos de movimiento, en la sexta Napier da su definición del logaritmo:

> Por lo tanto, el logaritmo de cualquier seno es el número que define muy de cerca la línea que aumenta uniformemente, en el mismo tiempo que la línea del seno del total ha disminuido proporcionalmente en ese mismo seno, entendiendo que los dos movimientos son sincrónicos i empezando todo con la misma velocidad.

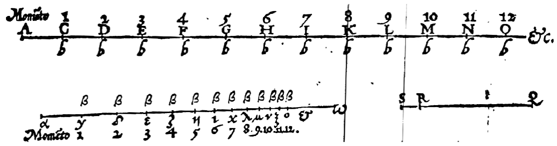

Figura 3

Napier considera una semirrecta AB por la que se desplaza un punto B con velocidad uniforme, es decir, suponiendo que se desplaza a una velocidad constante v, su posición sobre la semirrecta viene dada por la expresión . Al mismo tiempo, un punto Q se desplaza por el segmento CD con una velocidad que disminuye proporcionalmente a la distancia que le queda por recorrer hasta llegar al punto D.

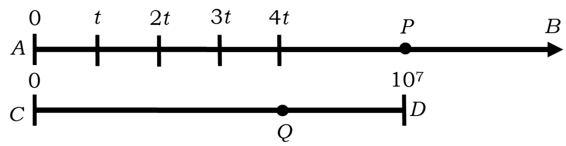

Figura 4

Supongamos que la posición del punto Q para un determinado tiempo t es $x(t)$. Para un cualquier intervalo de longitud t y cualquier número natural n, si P está en la posición $y(nt)$, entonces Q está en $x(nt)$, y la condición que Napier hace cumplir a Q es justamente que $CD - x((n+1)t) =$ $= K[CD - x(nt)]$, para una determinada constante K. Las condiciones iniciales que supone son una velocidad inicial de $v = 10^7$, y una distancia de $CD = 10^7$, y, por lo tanto, la posición $x(t)$ cumple:

$$10^7 - x\left(\left(n+1\right)t\right) = K\left[10^7 - x\left(nt\right)\right]$$

Por lo tanto:

$$x\left(nt\right) = 10^7 - K\left[10^7 - x\left(\left(n-1\right)t\right)\right] =$$
$$= \ldots = 10^7 - K^n\left[10^7 - x\left(0\right)\right]$$

Como $x(0) = 0$, la posición de Q viene dada por la expresión $x(nt) = 10^7 - 10^7K^n$. Consecuentemente, considerando $\tau = nt$, se tiene:

$$x(\tau) = 10^7 - 10^7 K^{\frac{\tau}{t}} = 10^7\left(1 - k^{\tau}\right)$$

Pese a que la definición de Napier implica esta distribución es series discretas de intervalos, su definición y su posterior uso permiten perfectamente este paso a la recta real. Expresado todo en términos del continuo, si y es la distancia AP y x la distancia QD, el punto P se mueve a una velocidad constante igual a $dy/dt = 10^7$, mientras que la velocidad de Q es $d(10^7 - x)/dt = x$. Por lo tanto, estamos delante de la relación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{10^7}{-x} \Rightarrow y(x) = -10^7 \ln x + C$$

Imponiendo las condiciones iniciales, $0 = -10^7 \ln 10^7 + C$. Consecuentemente, Napier ha definido el «logaritmo» $y(x) = -10^7 \ln x + -10^7 \ln 10^7$, o, equivalentemente:

$$y = -10^7 \ln \frac{x}{10^7} = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7}$$

al que llamaremos LogNap x. Tras la definición, Napier calcula LogNap $10^7 = 0$, y da una serie de proposiciones alrededor de la propiedad:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \text{LogNap } a - \text{LogNap } b = \\ = \text{LogNap } c - \text{LogNap } d$$

La *Descriptio* continúa con la descripción de sus tablas logarítmicas, las cuales están pensadas claramente para poder abordar problemas trigonométricos tales como la resolución de triángulos rectángulos ABC con y . Así, las tablas están distribuidas en siete columnas:

1. Columna primera: ángulo B, de 0º a 45º para cada uno de los 60’ del grado.
2. Columna séptima: ángulo $C = 90º - B$, de 90º a 45º para cada uno de los 60’ del grado.
3. Columna segunda: sen B, calculado para un radio $R = 10^7$.
4. Columna sexta: sen C, calculado para un radio $R = 10^7$.
5. Columna tercera: LogNap(sen B).
6. Columna quinta: LogNap(sen C).
7. Columna séptima: LogNap(sen C) – LogNap(sen B) = LogNap(tan C). Por lo tanto, Napier considera logaritmos negativos.

Estas tablas son las que posteriormente ocuparán las 90 últimas páginas de la obra. Antes, Napier se dedica a explicar como aproximar logaritmos de senos que no están en su tabla y abre un segundo libro resolviendo problemas concretos de trigonometría plana y esférica. Por ejemplo, si en un triángulo rectángulo ABC se sabe que la hipotenusa $a = BC$, y $c = AB$, el ángulo C se calcula a partir de LogNap(sen C) = LogNap c – LogNap a. De este modo, Napier escribe toda una serie de capítulos donde pone de manifiesto la gran utilidad que tienen sus logaritmos y la inmensa simplicidad en los cálculos que aportan. Por lo tanto, no es de extrañar que Edward Wright quedara absolutamente maravillado con esta obra. Wright era autor del primer mapa del mundo elaborado en Inglaterra (1599) y había conseguido dividir el meridiano terrestre de acuerdo con la proyección que Gerardus Mercator (Rupelmundo, 5 de marzo de 1512-Duisburgo, 2 de diciembre de 1594) había publicado en 1569. Por lo tanto, Wright debía de estar acostumbrado a resolver problemas de trigonometría esférica para sus diversos mapas y tratados y por fin tenía una calculadora que le simplificaba la tarea increíblemente. Su versión de las tablas logarítmicas redujo en una cifra decimal todos los números y sus logaritmos pueden expresarse mediante:

$$\text{LogWri } x = \frac{1}{10} \text{LogNap } (10x) = \\ = -10^6 \ln \frac{x}{10^6} = 10^6 \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^6}$$

El motivo fue que Wright pensó que esto facilitaba aún más los cálculos e interpolaciones.

Napier había iniciado un camino que, sin embargo, aún podía ser mejorado. La intervención de Briggs tendría mucho que ver en ello y, de hecho, en esas dos visitas de los veranos de 1615 y 1616 en las que estuvieron juntos se cimentaron las bases de nuestros logaritmos decimales. A partir de ese momento, el concepto de logaritmo ya sería indisociable de cualquier actividad matemática posterior.

Bibliografía

Berggren, J. L. (1986), *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo.

Björnbo, A. A. (1907), *Ioannis Verneri: De Triangulis Sphaericis, Libri Quatuor; De Meteoroscopiis, Libri Sex; cum Prooemio Georgii Ioachimi Rhetici; In Abhandlungen zur Geschichte der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, begrundet von Moritz Cantor*, XXIV, Heft, Band I *De Triangulis Sphaericis*, B.G. Teubner, Leipzig.

Boyer, C. B. (1969), *A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, Inc. Edició castellana en Alianza Editorial, Madrid, 1999.

Copérnico, N. (1543), *De Revolutionibus Orbium Coelestium, Libri VI*, Nuremberg.

Dorce, C. (1999), «Sobre el cuadrante solar de Alfonso X el Sabio», Asclepio, Volumen LI-Fascículo 2, 167-184.

Gibson, G. A. (1914), *Napier's Life and Works*, Glasgow, Proceeedings of the Royal Philosophical Society of Glasgow.

Gingerich, O. i Westman, R. S. (1988), «The Wittich connection: conflict and priority in late sixteenth-century cosmology», *Transactions of the American Philosophical Society,* vol. 78, American Philosophical Society.

Gladstone-Miller, L. (2003), *John Napier: logarithm John*, National Museum of Scotland Publishing, Edimburgo.

Heath, T. (1921), *A History of Greek Mathematics*, Clarendon Press, Oxford. [Reeditado en Dover Publications, Inc., New York, 1921.]

Hobson, E. W. (1914), *John Napier and the Invention of Logarithms, 1614; a lecture*, Cambridge University Press, Cambridge.

Jain, P. (2011), «Dhavalâ Mathematics of Vîrasena: on History of Jaina Mathematics in India», *International Journal of Physical and Mathematical Sciences*, vol. 2, nº. 1, 88-98.

Kepler, J. (1624), *Chilias logarithmorum*, Caspar Chemlin, Marburg. [Reproducido en J. Kepler (1960), *Gesammelte Werke*, volume IX, Mathematische Schriften, C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München.]

Knuth, D. E. (1972), «Ancient Babylonian Algorithms», *Communications of the ACM*, vol. 15, n.º 7, july, 671-677.

Napier, J. (1614), *Mirifici Logratihmorum Canonis Descriptio; Ejusque usus in utraque Trigonometria; ut etiam in omni Logitica Mathematica, Amplissimi, facillimi, and expeditissimi explicatio*, Edimburg.

— (1617), *Rabdologia, seu Numerationis per virgulas libri duo: cum appendice de expeditissimo multiplicationis promptuario*, Edimburg.

Neugebauer, O. (1945), *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Series, 29, New Haven, Connecticut.

Rico y Sinobas, M. (1866). *Libros del Saber de Astronomía del rey D. Alfonso X de Castilla,* vol. IV, Madrid.

Shah, R. S. (2009), «Jaina Mathematics: Lore of Large Numbers», *Butlletin of the Marathwada Mathematical Society*, vol. 10, n.º 1, junio, 43-61.

Stifel, M. (1544), *Arithmetica integra*, Johannes Petreius, Nuremberg.

Thoren, V. (1988), «Prosthaphaeresis revisited», *Historia Mathematica*, 15, 32-39.

Wallis, P. J. (1976), «Edward Wright», *Dictionary of Scientific Biography*, 14, Charles Scribner's Sons, New York, 513-515.

Carlos Dorce
Facultad de Matemáticas (Universidad de Barcelona)

1 El uso del sistema posicional pudo haber sido añadido en comentarios realizados en los siglos VI y VII. Véase Shah, 2009.

2 Los tratados astronómicos árabes trabajaron siempre con fracciones sexagesimales.