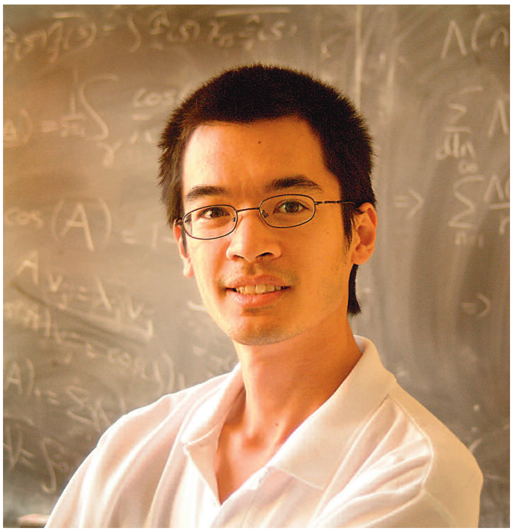
SECCIONES
Noviembre 2013
74
pp. 9-15

Terence Tao

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO



En puertas del tercer milenio

ICM 2006. Palacio de Congresos. IFEMA. Madrid

—Un café, por favor.
—Hola Arantxa ¿qué tal?
—¡¡Qué sorpresa!! No sabía que venías.
—Bueno, ya sabes, es el ICM, en Madrid, una oportunidad histórica.
—Una pausa ¿verdad? Hay tantas conferencias que cuesta trabajo decidirse por una.
—Pues igual que yo – contestó Graham.
—¿Qué te ha parecido el acto inaugural? De los premiados solo conocía a Perelman y Tao.
—Pues no te lo vas a creer pero a Tao lo conozco personalmente.
—¿En serio? – contestó Arantxa sorprendida.
—Sí, coincidimos en una Olimpiada Matemática, en Australia en el año 88, ya hace bastante tiempo.
—Me parece increíble, a raíz del premio he leído algo de Tao pero muy poco.

Tao es un auténtico genio, recuerdo aquel año especialmente porque el viaje fue muy largo pero qué duda cabe que también por la personalidad arrolladora de Tao. De todos los que nos presentamos aquel año era el más pequeño, solamente tenía 13 años. Las pruebas fueron en Canberra, sin embargo, los primeros días los pasamos en Sidney haciendo turismo, la organización fue estupenda, nos enseñaron la ciudad, los colegios... En fin, quién diría que unas olimpiadas matemáticas pudieran ser tan agradables.

Artículo solicitado por *Suma* en ****** de 2011 y aceptado en **** de 2011

Al tercer día nos desplazamos a Canberra, comenzaban las pruebas. Casualidades de la vida me tocó sentarme junto a él. Recuerdo uno de los problemas por su especial dificultad, fue el segundo día:

> Sean a y b enteros positivos tales que $ab+1$ divide a a^2+b^2. Demuestre que
> $$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$
> es el cuadrado de un entero.

Sólo once de los participantes consiguieron resolverlo, obteniendo los 7 puntos que el jurado otorgaba a cada problema. Tao fue uno de ellos.

El estudiante que obtuvo la Mención Especial del jurado por su solución fue el búlgaro *Emmanouil Atanassou*. Una solución contundente y a la vez elegante.

> Supongamos que
> $$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=k$$
> siendo k un número entero
> Entonces, $a^2-kab+a^2=1$ [1]
> Supongamos a partir de ahora que k no es un cuadrado.
> Toda solución de [1] tiene $a>0$; $b>0$ [2]
> Claramente, $a\neq 0$; $b\neq 0$.
> Consideremos una solución (a, b) de [1] con $a\geq b>0$ y supongamos a mínimo.
> Obsérvese que $b<a$, porque si fuera $b=a$, entonces $(2-k)a^2=k$; pero el primer miembro no es positivo.
> Consideremos [1] como una ecuación cuadrática en a.
> Tiene dos raíces, a y a_1. Se tiene $a+a_1=kb$; luego a_1 es un entero.
> Por [2], ya que $b>0$; $a_1>0$. Además, $aa_1=b^2-k$; luego
> $$a_1=\frac{b^2-k}{a}<\frac{a^2-1}{a}<a$$
> El par (a_1, b) satisface [1] y $a_1>0$; $b>0$; $a_1<a$; $b<a$; lo que contradice que a sea mínimo
>
> *Y hemos terminado.*

A la salida de la prueba lo comentamos. Tao me dijo que ese problema tenía unas implicaciones matemáticas más allá de una olimpiada, se podía relacionar con muchas ramas de las matemáticas y que le había parecido interesante abordarlo desde la teoría de números. Quizás por eso ahora esta considerado un experto en teoría analítica de números.

Resulta que fue el medallista de oro más joven en la historia de las olimpiadas matemáticas.

Abril, 1983. *Tiny Terence, 7, Is high school Whiz*

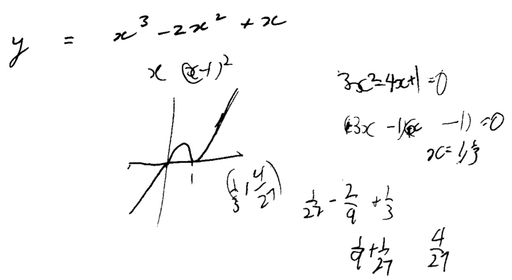
Terence Tao nació en Adelaida en 1975, de padre pediatra y madre profesora de Secundaria. Desde muy pequeño mostró una gran aptitud hacia las matemáticas, su padre comenta que aprendió a contar con dos años viendo Barrio Sésamo.

La gran capacidad que mostraba fue un problema, pues muchos de sus profesores no estaban preparados para formar a un alumno con esas características. Suerte que por aquellas fechas se encontraba en la ciudad dando clase en un college M. A. Clements. El profesor Clements leyó en el periódico: «Tiny Terence, 7, is high school Whiz» y quedó sorprendido al observar que la comunidad educativa intentaba ayudar a un niño con capacidades especiales. Por cuestiones personales y profesionales Clements había decidido tiempo atrás abandonar su carrera profesional en el mundo de la educación matemática.

¿Un niño de siete años asistiendo a un instituto de secundaria? Sí, Tao pasaba dos días a la semana en el instituto con niños de once y doce años estudiando matemáticas y física. El resto de los días iba a su escuela de primaria.

Unos meses más tarde, en junio, Clements fue invitado a dar una conferencia sobre la identificación de niños superdotados en matemáticas. Al final de la ponencia el padre de Tao le invitó a su casa para que tuviera una charla con el pequeño. Clements quedó muy impactado, cuando llegó a su casa Tao se encontraba leyendo un libro titulado "Calculus". Desde ese día Clements decidió ayudar a Tao en todo lo que necesitase.

El día antes de su cumpleaños, el 17 de julio, Clements volvió a su casa y comenzó a seleccionar diferentes pruebas para detectar la excepcionalidad matemática. Clements elaboró un plan que se alargaría durante el verano. Comenzó con un test de 60 preguntas, Tao respondió correctamente a todas. Nunca ningún niño tan joven había conseguido contestar a todas las preguntas del test.



Respuesta de Tao a la pregunta ¿representa la gráfica de $x^3 - 2x^2 + x$?

Pregunta 58
Si $(p : q) : r = \Delta : (q : r)$, encuentra Δ.
Terence escribió:

$$\frac{p/q}{r} = \frac{\Delta}{q/r} \Rightarrow \frac{p}{qr} = \frac{\Delta}{q/r} \Rightarrow \frac{p}{r} = \frac{\Delta}{r} \Rightarrow \frac{p}{r^2} = \Delta$$

Las pruebas demostraban una capacidad fuera de lo común, además Tao había demostrado un talento especial para aprender matemáticas de forma autónoma convenciendo a sus padres de que las clases de matemáticas en el colegio eran totalmente inútiles. Ante tales evidencias los padres de Tao decidieron que no estudiaría matemáticas en la escuela. Durante el siguiente curso Tao asistió a las clases de Geografía en la clase de niños de diez años, de Química en la clase de once años y Física en la clase de doce años en Blackwood High School, sin abandonar sus estudios de estructuras algebraicas, análisis, etc.

En 1985, con tan solo diez años Tao tenía conocimientos matemáticos suficientes como para emprender los estudios de grado en la Universidad de Flinders. Aunque los test y las pruebas que había realizado incitan a pensar que sus capacidades cognitivas están preparadas para un primer curso de grado, sus padres tenían serias dudas sobre si dejarle ir o no, ir a alguna clase y en 1989 realizó su inscripción formal en la Universidad de Flinders.

Sus padres cuentan que por aquella época Tao estaba especialmente orgulloso de un programa que había realizado en Basic sobre los números perfectos.

```
Ready
10 rem perfect numbers
15 rem to calculate perfect numbers
20 input n
30 if n<6 the print "none": goto 200
35 if n=6 then print "6 only":goto 200
40 print "6";
45 for i=3 to 26
46 rem limit n to 2↑25*(2↑26-1)
47 let y=2↑i-1
50 rem next loop is to check if 2↑i-1 is prime
52 for l=2 to int(sqr(y))
53 if y/l=int(y/l) then 70
54 if y*2↑i-1 > n then 200
55 next l
57 print "," ; y*2↑i-1;
70 next i
200 print
201 print "(this program was writen on 26/8/83)
300 end
```

(Primera Publicación de Terence: *Número perfectos*)

Tao envío el programa a una revista de estudiantes de matemáticas llamada *Trigon* en el sur de Australia y ésta fue su primera publicación matemática.

En Princeton

—Después de varios años estuve sin saber mucho de él, al fin y al cabo solo fue un amigo que conocí en una olimpiada matemática. Intercambiamos alguna que otra carta pero la pérdida de contacto fue inevitable.
—Una pena Graham, ¿quién te iba a decir que Tao sería una de las grandes mentes del siglo XXI?
—El caso es que yo seguí mis estudios y él siguió acumulando premios y publicaciones.

Después de la Secundaria comenzó sus estudios en la Universidad de Flinders en 1989, allí obtuvo su grado 1991 y su máster en 1992. La universidad le otorgo la Medalla Universitaria por sus estudios.

A partir de ahí su capacidad le ha permitido optar a multitud de becas y premios. Tras terminar sus estudios de grado y máster en Flinders obtuvo una beca de la Austalian-American Fulbright Comission para cursar sus estudios de posgrado en Princeton.

Con solo 20 años ya estaba doctorado por la Universidad de Princeton.

—¿Un genio no crees? A veces pienso si esta a la altura de los grandes matemáticos o incluso si los ha superado. ¿Es el siguiente Gauss?
—¡Hombre ! Gauss es Gauss.
—Sí pero a raíz de la medalla he indagado un poco y sus publicaciones son impresionantes, en su web tiene entre publicados, enviados y en preparación 227 artículos, ha escrito 12 libros, en su blog tiene una media de 6 entradas mensuales y no entradas triviales. Por no mencionar los premios y títulos que ha obtenido, creo que tiene todos: Salem, Ramanujan, SASTRA, Ostrowski, Premio al investigador del Instituto Clay, la medalla Fields ahora, en fin, podría seguir pero creo que no es necesario.

Pero hay rasgos en él de auténtico genio, sino fíjate como describe su trabajo:

No tengo ninguna habilidad mágica. Miro un problema, y si veo algo parecido a lo que he hecho antes, pienso que tal vez esa idea funcione con el problema. Si no funciona, entonces pienso en un pequeño truco que haga que funcione un poco mejor.
Juego con el problema, y después de un tiempo, me imagino que es lo que está pasando. La mayoría de las personas, ante un problema de matemáticas, tratar de resolverlo directamente. Pero incluso si lo consiguen podrían no entender exactamente lo que hicieron.
Antes de trabajar en todos los detalles, yo trabajo en la estrategia. Una vez que tengo una estrategia, un problema muy complicado puede dividirse en una gran cantidad de miniproblemas. Realmente no he estado nunca satisfecho solamente con la solución. Quiero ver qué pasa si hago algunos cambios, si sigue funcionando mi estrategia.
Si experimentas lo suficiente obtienes una comprensión más profunda. Después de un tiempo, se obtiene una idea de lo que funciona y lo que no funciona. No se trata de ser inteligente o incluso rápido. Es como escalar un acantilado: Si eres muy fuerte y rápido y tienes un montón de cuerda, ayuda, pero hay que diseñar una buena ruta para llegar hasta allí.
Haciendo cálculos con rapidez y conociendo una gran cantidad de hechos es lo mismo que el escalador de roca con fuerza, rapidez y buenas herramientas. Aún así todavía necesitas un plan —que es la parte más difícil—y hay que ver el panorama completo.


Tao recibiendo la Medalla Fields. 2006. Madrid

El Mozart de las Matemáticas

Tao es un un auténtico genio de las Matemáticas, en el sentido más amplio de la palabra. Sus líneas de investigación son el análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales, teoría de la representación y teoría de números.

A este respecto Tao comentó en una entrevista:

> Trabajo en muchas áreas, pero no las considero desconectadas. Tiendo a ver las matemáticas como un tema único, me siento especialmente feliz cuando tengo la oportunidad de trabajar en un proyecto que implica varios campos a la vez.

A Tao le gustan los problemas y como hemos visto los analiza hasta obtener una comprensión total. Ha aportado grandes resultados en varias conjeturas, una de ellas la conjetura de Kakeya, cuyo enunciado es demasiado complicado, aunque si podemos plantear la pregunta que formuló Soichi Kakeya en 1917:

> ¿Qué aspecto tendrá el conjunto plano de área mínima dentro del cual sea posible mover un segmento orientado (aguja) hasta invertir su posición?

La respuesta es bastante sorprendente, de hecho, podemos hacer que el área sea menor que cualquier número elegido. La dimensión fractal del conjunto trazado por la aguja también es interesante de obtener, de hecho en el plano siempre es 2.

Estos conjuntos pueden tener medida cero de Lebesgue, la conocida construcción Besicovitch en el plano. La conjetura se ha convertido en un tema central del Análisis Armónico contemporáneo. Tanto por sus conexiones directas con la transformada de Fourier n-dimensional como por dar lugar a una serie de preguntas inquietantes en torno a dos paradigmas del Análisis: la medida de Lebesgue y la teoría de integrales singulares. Tao junto con J. Bourgain resolvieron la conjetura para $n = 2$.

Otra rama de investigación es la teoría de ecuaciones no lineales del tipo Schröringer. Tao ha aportado comprensión sobre una de ellas y en particular ha demostrado la existencia de soluciones para dicha ecuación. Este trabajo ha sido realizado en colaboración con otros cuatro matemáticos: James Colliander, Markus Keel, Gigliola Staffilani, y Hideo Takaoka. El grupo ha llegado a ser conocido como el «equipo I», donde la I denota muchas cosas distintas —entre ellas, «interacción»—. El término se refiere a la forma en que la luz puede interaccionar consigo misma en un medio como el cable de fibra óptica; esta autointeracción está reflejada en el término no lineal en la ecuación de Schröringer estudiada por el equipo. El término *interacción* se refiere también a las interacciones entre los miembros del grupo; en efecto, la colaboración es el *sello de la casa* de Terence Tao.

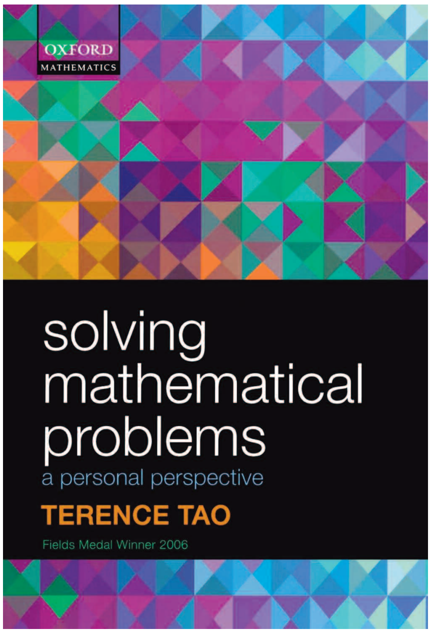
La Teoría de la Relatividad ha sido también objeto de sus estudios, en particular los llamados mapas de ondas. Einstein decía que la gravedad es una onda no lineal, de hecho resolver completamente las ecuaciones diferenciales que describen la gravedad es un problema no trivial que a día de hoy, aún esta pendiente de comprender en el sentido mencionado por Tao. Sin embargo, suponiendo que las ecuaciones tienen una simetría cilíndrica las ecuaciones se vuelven más fáciles de manejar. Un aspecto de estas ecuaciones se conoce como *mapas de ondas* y Tao ha diseñado un camino para llegar a su comprensión.

La versatilidad de Tao es muy grande y una prueba de ello es que se atreve con cualquier tema que le interese. Un ejemplo lo tenemos en la demostración de la conjetura de saturación de los coeficientes de Littlewood-Richardson en la teoría de la representación, formulada por A. A. Klyachko en 1998, y la conjetura de Horn para los autovalores de matrices hermitianas bajo la adición.

> —¡¡Impresionante !! —dijo Arantxa, totalmente asombrada.
> —Pues aún no acaba la cosa, porque podrías pensar que con tal producción de artículos e investigaciones Tao no tiene tiempo para más, pero no es así. Te recomiendo que leas algunos de sus libros, son una auténtica joya. Mira, me he traído uno para que me lo firme.

—¿Sobre qué trata?
—Pues este en particular, aporta como dice el título, una perspectiva personal sobre técnicas y herramientas para resolver problemas típicos de las Olimpiadas Matemáticas. Habla sobre Teoría de Números, Álgebra, Análisis, Geometría partiendo desde prácticamente Secundaria. La primera edición es de 1992, con motivo de la medalla Fields lo han vuelto a editar.
—¿Crees que lo tendrán aquí?
—Sí, de hecho esta en el stand de Oxford University Press, si quieres vamos para allá.
—¡Si tienen todos sus libros!

En 2008 comenzó ha publicar en formato libro una serie de entradas en su blog: *Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog* y continuó: *Poincare's legacies: pages from year two of a mathematical blog*, vols. I y II en 2009, *An epsilon of room*, vol. I en 2010, *An epsilon of room*, , vol. II en 2010, y tiene otros cuatro en preparación.



Teorema de Green-Tao

La infinitud del conjunto de los números primos es un resultado bien conocido por todo el mundo, Euclides nos dejó una bella demostración constructiva de ello. Sin embargo, a lo largo de la historia, los matemáticos hemos pretendido encontrar algún orden dentro del conjunto de los números primos.

Pero los números primos encierran muchos misterios, alentados por conjeturas muy antiguas sobre sus propiedades. Una de ellas son las propiedades aditivas y algunas conjeturas son:

Conjetura de los primos gemelos (Euclides): Existen infinitos números primos p tales que $p+2$ también es primo.

Conjetura de Goldbach par (Euler 1742): Todo número par $n \geq 4$ es la suma de dos números primos.

Conjetura de Goldbach impar (Goldbach 1742): Todo número impar $n \geq 7$ es la suma de tres números primos. Recientemente el matemático peruano Harald Andrés Helfgot ha publicado un artículo con la demostración: *Major arcs for Goldbach's theorem.*

Conjetura de Levy: Todo número impar $n \geq 7$ es la suma de un primo con el doble de otro primo.

Fijémonos ahora en la siguientes series: 3, 7, 11 y 7, 37, 67, 97, 127, 157. Ambas están formadas por números primos y ambas son progresiones aritméticas, la primera de tamaño 3 y diferencia 4 y la segunda de tamaño 6 y diferencia 30.

Ya en 1770 Lagrange y Waring establecieron que dada una progresión aritmética de números primos de tamaño k y razón d, tenemos que d es divisible por todos los números primos menores que k. En particular, no hay progresiones aritméticas de números primos de tamaño infinito.

Más adelante Dirichlet demostró que dados a y b enteros primos entre sí, la progresión aritmética $a+$nb, donde $n \in \mathbb{N}$ contiene infinitos número primos.

En 1940, Paul Erdös demuestra que existe una constante $c<1$ e infinitos primos p tales que $q-p<$c $\cdot\ln(p)$, donde q representa el número primo que sigue a p. En 2005, Daniel Goldston, Janos Pintz y Cem Yildrim probaron que el resultado es válido para toda constante $c > 0$.

Con estos antecedentes Tao quiso resolver la siguiente pregunta

> ¿Existen progresiones aritméticas de tamaño *k* mayor o igual a 3 formadas solamente por números primos? Y, si fijamos el tamaño *k*, ¿cuál es la cantidad de tales progresiones aritméticas?

En 2004 Tao junto con el matemático inglés Ben Green enunciaron y demostraron el teorema que lleva su nombre:

> Los números primos contienen progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

> —¡¡Wait!!, digo espera Arantxa!! —dijo Graham sobresaltado a la vez que salía corriendo por el hall del palacio de congresos.
> Arantxa le siguió con curiosidad. De repente y sin darse cuenta se encontró en mitad de una conversación:
> —Hi Graham, Did you remember me? —saludó Tao.
> —Hi Tao. What happiness to return to meeting!! —dijo Graham emocionado.

Terence Tao publicó en su cuenta de *Google+* una foto. En ella se puede ver al gran Paul Erdös, con 72 años en aquel momento, y al propio Terence Tao con 10 añitos (la foto es de 1985)

Bibliografía

Australian Mathematics Trust (1988), *Mathematical Olympiads, The 1988 Australian Scene*, Canberra.

Becheanu, M. (2001),*International Mathematical Olympiads 1959-2000,* Academic Distribution Center, Freeland, Maryland.

Bellot Rosado, F., y M.ª A.López Chamorro (1994), *Cien Problemas de Matemáticas, Combinatoria, Álgebra, Geometría,* ICE Universidad de Valladolid.

Bourgain, J. (2007); «The work of Terence Tao», *Notices Amer. Math. Soc.,* March, 399-401

Córdoba Barba, A., *El conjunto de Kakeya.*

Clement, K. (1984), «Terence Tao»*, Educacional Studies in Mathematics,* August , vol. 15, n.º 3, 213-238.

Libros publicados por Terence Tao

(1992), *Solving Mathematical ProblemsA Personal Perspective* , Deakin University Press. [Reimpresión: 2006, Oxford University Press.]

(2006), *Analysis Vol. I, Analysis Vol. II,* Hindustan Book Agency

(2006), *Additive Combinatorics*, Cambridge University Press [con Van Vu].

(2006), «Nonlinear dispersive equations: local and global analysis», *CBMS regional conference series in mathematics.*

(2008), *Structure and Randomness: pages from year one of a mathematical blog*, American Mathematical Society.

(2009), *Poincare's legacies: pages from year two of a mathematical blog,* vols. I y II, American Mathematical Society.

(2010), *An epsilon of room*, vol I, Graduate Studies in Mathematics, 117, American Mathematical Society.

(2010), *An epsilon of room*, vol II, Graduate Studies in Mathematics, 117, American Mathematical Society.

(2011), *An introduction to measure theory,* Graduate Studies in Mathematics, 126, American Mathematical Society.

Topics in random matrix theory [en preparación].

Higher order Fourier analysis [en preparación].

Compactness and contradiction [en preparación].

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí. Madrid
SMPM