

En casi todos los juegos llamados de sobremesa influye en alguna medida el azar. Es verdad que en los juegos de estrategia el resultado puede depender de quién comience el juego, es decir, si lo inicia el primero o el segundo jugador, pero si tenemos que elegir de un montón una serie de fichas de dominó o de *Scrabble*, si nos reparten una mano de cartas, si lanzamos un dado o una moneda o si hacemos girar una ruleta, nuestro siguiente movimiento depende bastante de la suerte que hayamos tenido en esos repartos previos.

En los juegos que dependen del azar, después de enfrentarnos a la aleatoriedad del juego en sí, podemos estudiar las posibilidades que se han puesto en juego, lo que los hacen valiosos para ser utilizados en nuestras clases. La mayoría de los juegos que pueden usarse didácticamente en el área de probabilidad pertenecen a lo que nuestra amiga Ana García Azcárate llama juegos «preinstruccionales». Es decir, juegos que pueden realizarse antes de haber estudiado los conceptos propios que se utilizan e incluso que pueden utilizarse como motivación para esa investigación.

Existen muy diversos materiales que se pueden usar en este tipo de juegos: cartas, dados, ruletas, monedas, etc. Ya en el número 51 de la revista Suma pre-

sentamos en esta misma sección un artículo sobre juegos de azar titulado «La carrera de caballos». En él mostrábamos un par de juegos basados en dados y en los distintos resultados obtenidos al lanzar dos dados y sumar o restar los resultados. En esta ocasión vamos a ver juegos que se basan en el mismo proceso, por lo que, en cierta forma, este artículo es continuación lógica de aquel, pues vamos a seguir con los mismos supuestos.

Los juegos que vamos a incluir en esta ocasión se pueden encontrar en diversas versiones. Incluso, cualquier profesor puede adaptarlos a situaciones más cercanas y cotidianas, pero hemos preferido presentarlos tal y como los conocimos, especialmente los del Grupo Cero de Valencia, que elaboró una excelente relación de actividades para trabajar el azar de las que hemos bebido todos posteriormente. En cierta manera queremos dedicar un homenaje a todos los compañeros del Grupo Cero y en especial al recordado Eliseo Borrás, por eso utilizaremos su misma presentación.

Una característica de estos juegos es que si se practican sin ningún estudio previo pueden considerarse propiamente de azar. Pero en cuanto se hace un estudio de las posibilidades y vuelven a jugarse se convierten, en muchos casos, en juegos de estrategia, pues los jugadores pueden aplicar los conocimientos realizados en el estudio para anticipar sus posibilidades en el juego. Vamos a resaltar este aspecto en los casos en que lo consideramos interesante.

Pero hay que tener claro que tratamos con el azar y por ello, a pesar del estudio teórico que realicemos, siempre nos podemos encontrar con sorpresas, como intentaremos hacer evidente.

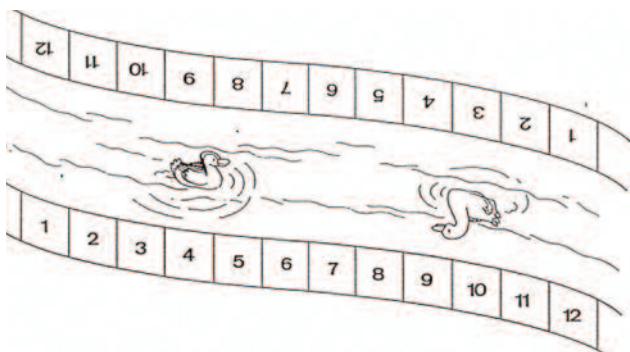


Figura 1: tablero de *La travesía del río*

La travesía del río

Este es un juego para dos jugadores y se necesitan 12 fichas para cada uno, dos dados cúbicos y un tablero como el reproducido en la figura 1.

Reglas del juego

Cada jugador coloca sus 12 fichas en un lado del tablero de la forma que quiera, es decir, no es necesario colocar una ficha en cada casilla, sino que se pueden quedar casillas vacías y colocarse varias fichas en una misma casilla.

Cada jugador, en su turno, lanza los dos dados y suma el valor obtenido. Si el resultado coincide con una casilla en la que hay ficha, se lanza una ficha de esa casilla al río, como si fuese «pan» para los patos.

Gana el primer jugador que consigue lanzar todas sus fichas al centro del río.

Hay veces en que lanzar todas las fichas al río es complicado y la partida se hace larga y pesada, pues quedan pocas fichas en casillas cuyos valores tardan en salir. Para sortear esto se puede sustituir la tercera regla por la de que gana el jugador que después de 15 ó 20 jugadas tenga menos fichas en su orilla.

Estudio posterior

Igual que pasaba en las «Carreras de caballos» este juego se fundamenta en que no todas las casillas son equiprobables. Por eso no es lo mismo colocar una ficha en una casilla con el 12 que en la del 8. Para saber cuál es más conveniente hay que estudiar todas las posibilidades que se pueden dar al lanzar dos dados y sumar, algo que pueden hacer con facilidad los alumnos de Secundaria y de último ciclo de Primaria y cuyos resultados podemos ver en la tabla 1.

| + | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Tabla 1: sumas posibles de dos dados

| - | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 | 2 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |

Tabla 2: diferencias posibles de dos dados

Como se aprecia, el número que aparece más veces es el 7, seguido del 6 y del 8, y así sucesivamente hasta los extremos. Si se vuelve a jugar, ahora entra en juego la estrategia que elija cada jugador a la hora de repartir las fichas. Siempre aparece el «listo» que coloca sus 12 fichas en la casilla 7 y observa, con desespero, cómo las fichas del contrario, más repartidas, se lanzan mucho más rápidamente al centro del tablero, ya que aunque el 7 sea el resultado que, teóricamente, más veces sale, solo aparece una de cada seis veces.

Lo usual es colocar varias fichas en las casillas centrales e ir colocando cada vez menos a medida que nos acerquemos a los extremos. De todos modos, por muy buena estrategia que se plantee, no olvidemos que estamos en un juego en el que interviene poderosamente el azar y por ello, dos jugadores con exactamente la misma distribución de fichas pueden tener una marcha en el juego muy diferente.

El estudio de los casos posibles al lanzar los dos dados seleccionando qué resultado tiene más posibilidades de salir lleva de una manera intuitiva a la Regla de Laplace, y el hecho de que el azar interviene incluso cuando se utiliza una determinada estrategia nos puede dar pie para introducir la Ley de los grandes números.

La descarga del carro

Igual que hicimos con los caballos, ahora vendría el turno de utilizar la diferencia entre los dos dados para ver las posibilidades de las jugadas. Para este caso utilizamos el juego «La descarga del carro».

Es un juego para dos jugadores en el que se necesitan 18 fichas y un tablero como el mostrado en la figura 2 para cada uno de los dos jugadores, además de dos dados cúbicos.



Figura 2: tablero de *La descarga del carro*

Reglas del juego

Cada jugador coloca en su tablero sus fichas repartidas entre las casillas (situadas en la lona del carruaje) en la forma que quiera.

En su turno, cada jugador lanza los dos dados y resta los valores obtenidos (al valor mayor se le resta el menor). Si en la casilla correspondiente al resultado de la resta hay alguna ficha, éstas se «descargan» del carro.

Gana el jugador que antes se quede sin fichas o que tras 30 jugadas tenga menos fichas en su tablero.

Si se quiere que la partida sea más rápida se puede reducir el número de fichas, ya que el interés del juego, que es estudiar cuál de los resultados tiene más posibilidades de salir, se puede conseguir con menos fichas.

Estudio posterior

Aquí debemos estudiar los resultados posibles que resultan al restar los dos dados, que son menos evidentes que los de la suma. En la tabla 2 tenemos todos los casos posibles.

Igual que en el juego anterior, una vez realizado el estudio, las nuevas partidas que se realicen ya llevan una decisión previa del jugador de dónde es más rentable situar más fichas, por lo que ya existe una estrategia que aplicar a la distribución de las fichas entre las casillas.

Tanto en los juegos de caballos que estudiamos en el anterior artículo como en los éste mantenemos una secuencia metodológica similar: una vez que estemos aproximadamente en la mitad del juego, y hay ya casillas vacías, interesa hacer un estudio experimental sobre los resultados que se obtienen. Para ello se le pide al alumnado que vaya anotando en una tabla las veces que sale cada resultado, incluso aquellos en los que no puedan eliminar una de las fichas porque la casilla ya esté vacía. De esta forma les sale una pirámide, aproximadamente, con los resultados posibles. Sin embargo, puede ocurrir que los resultados no se ajusten a los resultados teóricos. Por ejemplo, puede ser que en la descarga del carro nos salga más veces el 2 que el 1, aunque teóricamente no debería ser así. Conviene aclarar a los alumnos que en nuestros juegos solo realizamos un número pequeño de lanzamientos y los resultados teóricos describen el comportamiento conforme aumenta el número de ensayos y el número de observaciones es muy grande.

Par e impar

Este juego, que se basa en los mismos principios que los precedentes, lo localizamos hace ya años en

la revista de nuestros colegas portugueses de la *Associação de Professores de Matemática*, concretamente en el número 3 de *Educação e Matemática* de julio de 1987, aunque lamentamos no tener los datos de sus autores ni el título exacto del artículo.

Es un juego para dos jugadores y solo se necesitan dos dados cúbicos.

Reglas del juego

Se lanza una moneda y el jugador que gane elige ser «par» o «impar».

A continuación, en su turno, el jugador lanza los dos dados y suma los valores conseguidos. Si el resultado tiene la misma paridad que él ha elegido, se anota un punto; en caso contrario, pasa el turno.

Gana el jugador que tenga más puntos después de haber jugado 20 turnos, o los que el profesor estime oportuno.

Variantes

Se puede hacer el juego con las mismas reglas, pero calculando la diferencia de los valores de los dados o bien el producto de esos valores.

Estudio posterior

Una vez realizados varios juegos la pregunta que el alumnado debe contestar es si se trata de un juego equitativo, es decir, si los dos jugadores tienen la misma probabilidad de ganar. Para ello basta utilizar la tabla 1 para la suma y la 2 para la diferencia y comprobar que en esos casos sí es un juego equitativo.

El problema se plantea en el producto. Basta hacer la tabla 3 para comprobar fehacientemente que en este caso el jugador que elija «par» tiene más posibilidades de ganar. Lo interesante ahora es pedir a los alumnos que modifiquen las condiciones

del juego, con el producto, de forma que sea un juego equitativo. Es decir, en lugar de elegir entre «par» e «impar», qué condiciones habría que imponer para que los dos jugadores tengan la misma posibilidad de ganar.

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|----|----|----|----|----|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 |

Tabla 3: productos pares e impares en dos dados

A partir de la tabla se puede ver que una buena idea sería conseguir menos de 11 o conseguir más de 11. Pero el problema es que el primer caso tiene una probabilidad de $19/36$, mientras que en el segundo sería de $17/39$.

Una posibilidad de juego equitativo sería despreciar el 1 y el 36 y que entonces se elija entre la posibilidad de que el resultado del producto tenga una sola cifra frente a la de que el resultado del producto tenga dos cifras. De este modo, el juego del producto es equitativo. Pero pueden aparecer otras propuestas muy interesantes y sorprendentes.

Tableros a elegir

Este juego está adaptado de uno que encontramos en la revista Uno.

Es un juego para varios jugadores, pongamos como ejemplo tres, y se necesitan dos dados cúbicos.

Debemos tener varios tableros, uno para cada jugador, que podrían ser, por ejemplo, como los que aparecen en la figura 3.

Reglas del juego

Se sortea el turno de juego y cada uno de los jugadores elige, según ese turno, un tablero entre los que en ese momento queden sin elegir.

En su turno, cada jugador, lanza los dos dados, suma los valores obtenidos y se anota un punto si el resultado de la suma no está en su tablero.

Gana el primer jugador que consigue llegar a diez puntos.



Figura 3: Tableros a elegir

Estudio posterior

Este juego lo planteamos una vez que se ha realizado el estudio de la suma de los valores posibles al lanzar dos dados cúbicos, con lo que el alumno ya tiene una idea de cuántas posibilidades hay de que salga cada uno de los resultados. Aunque también se puede realizar alguna partida sin haber hecho el estudio y que nos sirva de justificación para llevarlo a cabo.

Como es evidente, el alumno que puede elegir intenta escoger el tablero que tiene menos posibilidades de salir al lanzar los dos dados, por lo que deben estudiar las probabilidades de cada tablero en función de los números que están incluidos en él.

El estudio para los tres tableros seleccionados muestra que el más interesante para escoger sería el tercero, ya que la probabilidad de que apareciera uno de esos valores al lanzar los dos dados es de $11/36$, mientras que los otros dos tableros, tienen una probabilidad igual de $12/36 = 1/3$.

El propio profesor puede modificar los tableros cambiando los números que forman parte de él y ampliando o disminuyendo la cantidad de jugadores que participan. Solemos jugar con grupos de tres o

cuatro jugadores, ya que las partidas suelen ser rápidas y apasionantes, aunque si hay más jugadores se puede reducir el número de puntos a alcanzar para que no duren excesivamente, especialmente si alguien tiene la mala suerte de elegir un tablero que puntúa poco.

Nosotros preferimos que los tableros tengan una probabilidad similar de conseguir puntos, aunque se pueden establecer también tableros con mucha diferencia. En ese caso, si se juegan distintas partidas, una vez terminada la primera, el orden de elegir los tableros para la siguiente sería el orden inverso a la puntuación que hayan obtenido en la partida anterior. El que haya obtenido menos puntuación elige el primero, después el segundo por la cola, y así sucesivamente.

Tres ruletas

Hay un juego, que recuerda levemente al anterior, pero en el que la dificultad del estudio es mucho mayor. Ya no depende de los dados, si no de las propias ruletas que hacen de tablero.

Suele estar previsto para jugarse entre dos jugadores y sólo se necesitan tres ruletas como las mostradas en la figura 4.

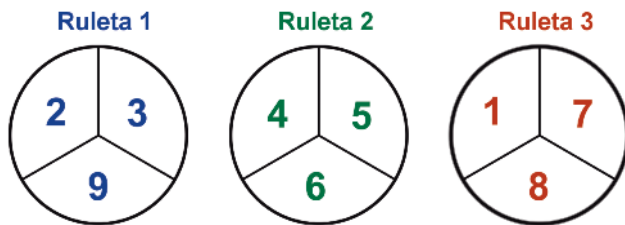


Figura 4: Tres ruletas

Reglas del juego

Se sortea el orden de juego y, según ese orden, cada jugador elige una ruleta.

Se hacen rodar las dos ruletas a la vez y el jugador que consiga una puntuación mayor se anota un punto.

Se juegan cinco turnos y se vuelven a elegir las ruletas.

Gana el jugador que tenga más puntuación al terminar cuatro manos (es decir, un total de veinte tiradas).

Estudio posterior

El estudio de este juego, que a simple vista es similar al anterior, nos depara la sorpresa de que es un juego que, en teoría, tiene una estrategia ganadora. Es decir, siempre hay un jugador que, independientemente de la ruleta que elija el otro jugador, puede «teóricamente» ganar. Insistimos en lo de teóricamente porque como siempre que interviene el azar, los casos que se estudian según las probabilidades teóricas no tienen porqué coincidir con las frecuencias que se obtengan posteriormente al efectuar el experimento.

En este caso, el segundo jugador en elegir siempre tiene ventaja, ya que puede elegir una ruleta que gane (repetimos que eso es en teoría) a la elegida por el otro jugador. Para ello basta hacer un diagrama de árbol y estudiar las posibilidades en que gana una ruleta a otra. Nos encontramos con la tabla 4.

| Ruleta | Gana a la ruleta | Pierde con la ruleta |
|--------|--|--|
| 1 | 3 con probabilidad de 5/9 frente a 4/9 | 2 con probabilidad de 1/3 frente a 2/3 |
| 2 | 1 con probabilidad de 2/3 frente a 1/3 | 3 con probabilidad de 1/3 frente a 2/3 |
| 3 | 2 con probabilidad de 2/3 frente a 1/3 | 1 con probabilidad de 4/9 frente a 5/9 |

Tabla 4: opciones de ruletas

Por tanto, si el primer jugador elige la ruleta 1, basta que el segundo elija 2; si el primero elige la 2, el segundo le gana tomando la 3, y si el primero coge la 3, el segundo debe elegir la 1.

Nosotros presentamos el juego, inicialmente, formando grupos de tres jugadores. Cada uno elige una ruleta y juegan una mano. Al acabar se compara cuál ha sido la ruleta que ha ganado y en qué orden se ha elegido esa ruleta. Una vez puesto en común se pasa al juego por parejas y se les pide que busquen la estrategia ganadora.

Ya que hemos estudiado qué ocurre, al menos de forma teórica, si juegan dos jugadores, no creemos que signifique un reto muy complicado para nuestros lectores hacer un estudio sobre lo que ocurre si juegan tres.

Cinco monedas

Dado que, como dijimos al principio, este artículo es una continuación lógica del que publicamos hace años sobre la Carrera de caballos, queremos incluir aquí un juego parecido a aquel, pero que se practica con monedas en lugar de con dados.

Este juego lo encontramos en un material elaborado por Mauricio Contreras para un curso a distancia sobre juegos. Es para varios jugadores pudiendo jugar hasta seis, pero lo ideal son tres o cuatro. Se disponen de cinco monedas, un tablero como el de la figura 5 y una ficha de distinto color por jugador.

Reglas del juego

Se sortean los turnos y cada jugador, por turno, elige una de las soluciones posibles del número de caras que se obtienen al lanzar las cinco monedas y coloca su ficha.

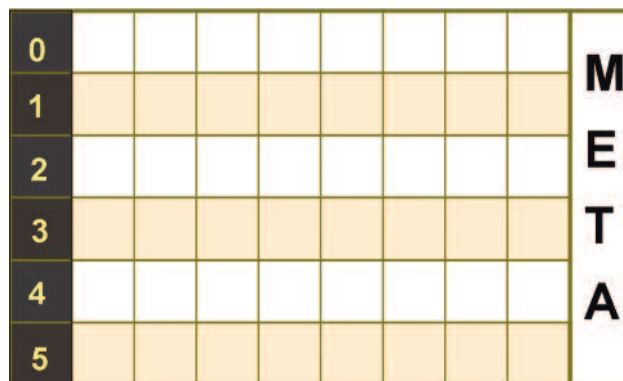


Figura 5: Cinco monedas

Ahora cada jugador, en su turno, lanza las cinco monedas. La ficha del jugador que esté en la casilla correspondiente al número de caras obtenidas avanza un lugar, independientemente de que sea la ficha del jugador que ha lanzado las monedas.

Gana el primer jugador que consigue llegar a la meta.

Estudio posterior

Basta hacer un mero diagrama en árbol para comprobar que de las 32 situaciones posibles que pueden darse al lanzar cinco monedas, en solo un caso se obtienen ninguna o cinco caras. Hay 5 oportunidades de conseguir una cara, las mismas que de conseguir cuatro caras. Por último, para obtener dos o tres caras, hay un total de 10 posibilidades en cada caso. Los resultados tienen las mismas probabilidades que las del juego Asalto al castillo, que ya estudiamos en el artículo del nº 51 de Suma.

La colmena

Para terminar vamos a incluir un juego en el que comprobaremos que cambiando una sola condición puede pasar de ser meramente de azar a ser un juego de estrategia.

Es un juego para dos jugadores en el que cada uno de ellos tiene un tablero como el de la figura 6 (página siguiente) y un conjunto de fichas. Además, se dispone de un dado con diez caras o, en su defecto, se puede construir una ruleta con los valores del 1 al 10.

Reglas del juego

Cada jugador, en su turno, lanza dos veces el dado o hace rodar dos veces la ruleta. Calcula la suma de los valores obtenidos en las dos ocasiones.

Coloca una ficha en la casilla correspondiente de su tablero al valor resultante de la suma solo si está libre. No puede haber más de una ficha por casilla.

En el caso de que su casilla esté ocupada no puede colocar su ficha, pero el jugador contrario debe retirar la ficha de su tablero que estuviese en la casilla correspondiente a ese resultado.

Gana el primer jugador que consigue completar con fichas una diagonal de cuatro o cinco casillas.



Figura 6: La colmena

Variante

Con estas reglas, la partida tiene dificultad para terminar, por eso se puede plantear, si se quiere jugar con esas condiciones, jugar una serie de tiradas, por ejemplo 20, y entonces gana quien tenga más diagonales de tres casillas completas.

Como se puede apreciar por las reglas, todo el proceso depende del azar, ya que no tenemos posibilidad de seleccionar dónde colocar las fichas para adelantar una diagonal que nos interese. Las fichas se colocan aleatoriamente según nos indiquen los dados. Por ello, lo que se plantea es cambiar la regla 3 de forma que el juego se convierta en un juego de estrategia. La nueva redacción de la regla 3 sería la siguiente.

En el caso de que su casilla esté ocupada, el jugador puede optar por una de las tres posibilidades siguientes:

- Hacer que el otro jugador retire de su tablero la ficha que tenga en la casilla del mismo número obtenido al sumar los resultados de los dados o las ruletas.
- Poner una ficha en una de las siete casillas centrales que esté desocupada.
- Volver a lanzar los dados o las ruletas.

Para no entrar en un bucle sin fin en la opción *c*, si el jugador selecciona la opción *c* y vuelve a salir una casilla ocupada tiene que elegir forzosamente la opción *a* o *b*.

Bibliografía

GRUPO ALQUERQUE (2006), «La carrera de caballos», *Suma*, nº 51 Febrero, pp. 61-63, Madrid.

GRUPO CERO DE VALENCIA (1995), *Matemáticas para la Educación Secundaria*, 3 vol. M.E.C. y Edelvives, Madrid.

HERNÁN, FRANCISCO Y CARRILLO, ELISA (1988), «Recursos en el aula de matemáticas», *Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje*, nº 34, Síntesis, Madrid.

LAKONA, E. (1999): «Del cálculo probabilístico al razonamiento estocástico: un punto de vista diacrónico», *Uno*, nº. 22, pp. 55-61, Graó, Barcelona.

Despedida y cierre

Cuando a finales del siglo pasado los entonces directores de SUMA, Emilio Palacián y Julio Sancho, nos ofrecieron participar en un nuevo proyecto para la revista nos sentimos muy honrados. Introdujeron nuevas secciones, denominadas en su conjunto Rincones, que más tarde se convertiría en Po-

liedro, nombre que nos parecía muy adecuado por ser una forma de ver distintas caras de una misma realidad, una matemática más lúdica, divulgativa y didáctica.

Nunca imaginamos que íbamos a estar durante trece años ininterrumpidamente «jugando» con nuestros lectores. Durante este tiempo hemos tenido el orgullo y el placer de compartir espacio con personas de gran renombre en el mundo de la matemática, muchos de ellos amigos cercanos.

Ahora que llega al fin la sección de Juegos, creemos merecernos un descanso. Pero no queremos irnos sin dar las gracias. En primer lugar a todos aquellos directores que han seguido confiando en nosotros durante estos años y que en cada cambio de directiva nos han solicitado continuar con nuestro trabajo, que hemos hecho lo

mejor que hemos podido y sabido. Muchas gracias, de corazón, a Emilio Palacián, Julio Sancho, Inmaculada Fuentes, Francisco Martín, Tomas Queralt, Onofre Monzó, Iolanda Guevara y Miquel Albertí. En segundo lugar queremos dar las gracias a todos nuestros lectores (bueno, a esos que han «fusilado» nuestros textos y dibujos en artículos aparecidos en revistas iberoamericanas, sin citarnos, a esos no), especialmente a aquellos que han utilizado nuestras aportaciones en el aula y han seguido investigando allí donde nosotros lo dejamos, dando lugar a nuevos artículos, como los de nuestro amigo Guido. A todos muchas gracias.

Y como nos conocemos, sabemos que esta despedida no será definitiva, ya que una vez que nos hayamos tomado un descanso nos volveremos a encontrar en las páginas de juegos de DIVULGAMAT o en nuestra propia página del grupoalquerque.es. Hasta siempre.

GRUPO ALQUERQUE DE SEVILLA
Constituido por

JUAN ANTONIO HANS MARTÍN
CC Santa María de los Reyes

JOSÉ MUÑOZ SANTONJA
IES Macarena

ANTONIO FERNÁNDEZ -ALISEDA REDONDO
IES El Majuelo

<juegos@revistasuma.es>

