suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 103-108

Désargues: un geómetra sin medida

Hace trescientos cincuenta años, en 1661, moría en París, Lyon o Condrieu, no se sabe a ciencia cierta, Gérard Désargues, el padre de un bello edificio geométrico, a caballo entre el arte, la ingeniería y la ciencia.

Désargues había nacido en Lyon en 1591, en el seno de una noble y rica familia. Era el menor de ocho hermanos, de los cuales cuatro eran varones. Su padre, ferviente monárquico al servicio de la Corona Francesa, ocupó diversos cargos en su ciudad de Lyon, desde inquisidor hasta notario real pasando por recaudador de diezmos, tanto de la ciudad como de la diócesis. Su infancia no le resultó nada fácil, debido a la temprana muerte de su madre por tuberculosis, cuando solo contaba con treinta y tres años, y el pequeño Gérard tenía seis.

Dada la buena posición familiar, debió gozar Désargues de todo tipo de facilidades para los estudios y disponer de los mejores maestros, aunque no se sabe con certeza nada sobre el particular. Se sabe que practicó las profesiones de ingeniero y arquitecto, lo que le llevó a reflexionar sobre diversas técnicas, referentes a la perspectiva, al corte y tallado de piedras, a la construcción de relojes de sol, etc. Como ingeniero, por ejemplo, diseñó un sistema para la elevación de aguas en las cercanías de París, y como arquitecto, son de señalar los planos de varios edificios particulares tanto en París como en Lyon. De este modo, a partir de sus trabajos, fue conducido Désargues a la búsqueda de métodos geométricos generales para el tratamiento de las diferentes técnicas a las que debió de enfrentarse.

Era un gran aficionado a las matemáticas, y le gustaba mucho viajar. Así que pasaba varias temporadas en París, donde tenía ocasión de reunirse con los mejores matemáticos de la época. Estableció amistad con Pascal, Mersenne, Mydorgue, Hardy, y conoció a Descartes y Fermat, a todos los cuales comunicaba sus inquietudes y el resultado de sus reflexiones. En 1636, publicó un pequeño texto de perspectiva, a la que consideraba como una aplicación directa de la geometría. Esta obrita fue muy apreciada por Descartes y Fermat, que vieron en ella el gran talento geométrico de su autor. No así ocurrió con los otros matemáticos de la época para los cuales pasó sin pena ni gloria.

Conocedor de la obra de Apolonio, Désargues se interesó por la teoría de las cónicas y elaboró nuevas ideas sobre el tema, siempre en el terreno de la geometría sintética. A finales de 1638, comunicó a Descartes los detalles de su teoría sobre las cónicas que estaba a punto de publicar en un breve tratado. No pareció agradarle mucho a Descartes, discutieron ambos científicos, pero Désargues no desistió de su propósito, y en los primeros meses de 1639, publicó su tratado bajo el título *Brouillon projet d´une atteinte événements des rencontres d´un cone avec un plan* (que Boyer traduce como "Borrador

Santiago Gutiérrez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
hace@revistasuma.es

de un ensayo que trata de los resultados de los encuentros de un cono con un plano"), más apropiado para una tesis o un discurso que para un libro.

El Borrador, como se lo conoce abreviadamente, está imbuido de las ideas sobre perspectiva de los pintores renacentistas y por el principio de continuidad de Kepler. Se sabe que si se proyecta una circunferencia desde un punto exterior al plano que la contiene, se obtiene un cono, y las formas de las secciones de este cono por un plano varían según la inclinación del plano respecto al eje del cono, del mismo modo que la proyección de los rayos de luz de una lámpara proyectan el borde de su pantalla produciendo distintas figuras según incidan sobre una pared o sobre el techo.

No fue bien acogido *El Borrador*. Recibió ataques desde todos los frentes, de una manera especial por parte de Jean de Beaugrand, pudiendo decirse que fue despreciado y olvidado de forma casi general. Hay que exceptuar a Pascal, que supo apreciarlo en todo su valor, y apoyarse en él incluso para algunos de sus propios trabajos.

Désargues publicó, como era su costumbre, sólo unos pocos ejemplares del librito (50 copias), sin afán crematístico, y para repartir entre sus colegas de París. Del escaso interés con que fue recibido da cuenta el hecho de que han desaparecido los cincuenta ejemplares distribuidos. No se supo nada de Désargues y su obra hasta dos siglos después. Habían sido borrados de la historia. Quedaba, eso sí, una cierta memoria de su paso por este mundo, a través de la referencia que de él hacía Pascal. Así, en su *Essay pour les coniques*, después de citar un teorema de Désargues, escribe, en referencia al autor:

> Quisiera decir que debo a sus escritos lo poco que he descubierto por mi mismo sobre el tema.

Además de *El Borrador*, había publicado Désargues otras obras, como los cuadernos *Lecciones de tinieblas*, sobre las cónicas, y un *Manual de perspectiva dirigido a los teóricos*.

Los antecedentes

Para comprender la obra de Désargues conviene tener en cuenta las ideas y los problemas planteados por los pintores del renacimiento. A diferencia de los pintores medievales, con sus figuras más bien simbólicas y de formas planas, los renacentistas tienen como principal objetivo la descripción del mundo real. Esto les plantea el problema de cómo trasladar al lienzo plano el mundo real tridimensional. Sobreviene así el uso de la perspectiva.

Aunque algún pintor anterior se ocupó ya de esta cuestión, fue Leon Batista Alberti (1404 – 1472) el primero que dedicó una obra, *Della Pittura* (1435), al tema de la perspectiva. Al tratar de reproducir en el lienzo una escena real, decía, el ojo humano actúa como un punto desde el cual se proyectan los rayos visuales sobre la escena, y de este modo el cuadro resulta ser una sección de esa proyección.

Poco antes de 1480, es Piero Della Francesca el que establece los principios matemáticos de la perspectiva en su obra *De perspectiva pingendi*. Incluso Leonardo da Vinci trató el problema de la perspectiva en un libro que se perdió, y era tan consciente Leonardo del trasfondo matemático del tema que en su *Trattato Della pintura* comienza diciendo: "Nadie que no sea matemático lea mis obras". Desgraciadamente, los matemáticos de la época no se percataron del trasfondo matemático que había en el tema de la perspectiva.

Hubo de pasar un siglo para que surgiera entre los matemáticos la pregunta: ¿Qué propiedades geométricas se conservan entonces en el paso de la escena real a la escena pintada? Este es el problema que trataban de abordar los matemáticos del siglo XVII y que toma Gerard Désargues como principal ocupación. Sin embargo, cabe plantearse por qué no orientó Désargues su actividad a trabajar con los métodos algebraicos siguiendo a los grandes de la época, como Descartes, Fermat, y todos los asiduos al Círculo de Mersenne. Probablemente, porque Désargues era a fin de cuentas un ingeniero y arquitecto, por tanto un técnico más que un científico, que no admite la teoría por sí misma, no le interesan la investigación y la elaboración teórica más que en la medida en que:

> …puedan ofrecer al espíritu un medio de lograr algún conocimiento…de las cosas que puedan traducirse en actos para la conservación de la salud o en sus aplicaciones en la práctica de algún arte.

Cuando elabora su teoría sobre las cónicas, en *El Borrador*, no pretende otra cosa que encontrar los principios geométricos que permitan racionalizar la perspectiva, el trazado de planos, la construcción de relojes de sol… en definitiva, las distintas técnicas gráficas en cuyas aplicaciones trabaja.

Le ocurrió a Désargues con la geometría sintética algo parecido a lo que le pasó a Fermat con la teoría de números. Ninguno de los dos encontró eco entre los colegas para sus preocupaciones.

EL Borrador

En *El Borrador* trata Désargues de unificar la visión de las cónicas utilizando sus ideas sobre la perspectiva. Considera dos operaciones, la proyección y la sección, y establece una serie de conceptos que le permiten encontrar los invariantes a través de estas operaciones.

a. El punto del infinito

Según se ha dicho uno de los elementos inspiradores de sus teorías para Désargues ha sido el principio de continuidad de Kepler. Este principio, lleva a Kepler a considerar que las rectas no se interrumpen en los extremos, sino que continúan a través de un nuevo punto que llama punto del infinito. Resulta así que las rectas pueden ser consideradas como círculos, cuyos extremos se unen a través del punto del infinito, y cuyo centro está así mismo en el infinito.

Se sabe que practicó las profesiones de ingeniero y arquitecto, lo que le llevó a reflexionar sobre diversas técnicas, referentes a la perspectiva, al corte y tallado de piedras, a la construcción de relojes de sol, etc.

Désargues, retoma esta idea aunque en un sentido diferente a Kepler. Lo que le interesa no es tanto la continuidad como la generalidad, así en lo que se refiere a la intersección de dos rectas. Al completar los puntos de la recta con el punto del infinito, se puede decir que dos rectas siempre tienen al menos un punto en común, incluso en el caso de las paralelas. Para estas últimas el punto común es el del infinito, resultando ser el mismo punto para cada conjunto de rectas paralelas. Como quiera que hay infinitos conjuntos de rectas entre sí paralelas, semejante convenio introduce en el plano una infinidad de puntos del infinito. Si consideramos el plano determinado por dos rectas paralelas, sobre él existe ya esa infinidad de conjuntos distintos de paralelas, esto es, una infinidad de puntos del infinito, todos los cuales supone Désargues se hallan sobre una recta, que es la recta del infinito del plano, y supone así mismo que esta recta es común a todo conjunto de planos paralelos entre sí.

Estas suposiciones de Désargues no contradicen, antes bien completan, el espacio euclídeo. Lo amplían, evitando tener que recurrir en su discurso a los casos de excepción.

b. La razón doble

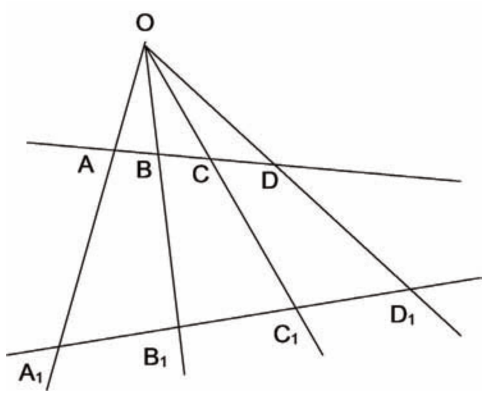
Pappus (s. IV) había definido el concepto de razón doble de cuatro puntos alineados A, B, C y D como el cociente

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}$$

de razones de segmentos orientados, esto es, considerados con su signo.

Anteriormente, Menelao (s. II) había introducido este mismo concepto pero sobre círculos máximos de una esfera.

Ambos matemáticos habían probado que dados cuatro puntos alineados, A, B, C y D, para otros cuatro puntos A_1, B_1, C_1 y D_1, en posición tal como indica la figura, no varía la correspondiente razón doble.



Désargues vuelve sobre este concepto pero desde su propio punto de vista, a saber, con las operaciones de proyección y sección, si bien conserva la definición de razón doble como un concepto métrico. Prueba entonces que la razón doble de cuatro puntos en línea recta es invariante si se someten los cuatro puntos a las operaciones de proyección y sección. Tal resultado no aparece en *el Borrador*, de 1639, sino en el apéndice de la obra *Manière universelle de G. Désargues pour practiquer la perspective* (1648), de su amigo y alumno Abraham Bosse (1611-1678).

c. Concepto de involución

El término de involución es el único de los ideados por Desargues que se ha conservado hasta hoy, y resulta central en el pensamiento del autor. Lo define como la relación que existe entre un par de puntos A, B y otro par A_1, B_1, situado en la recta AB, si se puede encontrar un quinto punto O tal que

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OA_1}\cdot\overline{OB_1}$$

El punto O es el centro de la involución. Puede haber varias parejas de puntos que estén en una misma involución. En particular, si un punto C es tal que

$$\overline{OA}\cdot\overline{OB}=\overline{OC}^2$$

C es un punto doble de la involución. En ese caso, existen dos puntos dobles simétricos respecto del centro. Los puntos A y B, se dicen conjugados, como cualquier pareja de puntos que pertenezcan a una involución. Un punto doble es conjugado de sí mismo. Désargues se plantea entonces, dado que en una involución cualquier punto tiene su conjugado, ¿cuál es el conjugado del centro? Y responde, el punto del infinito.

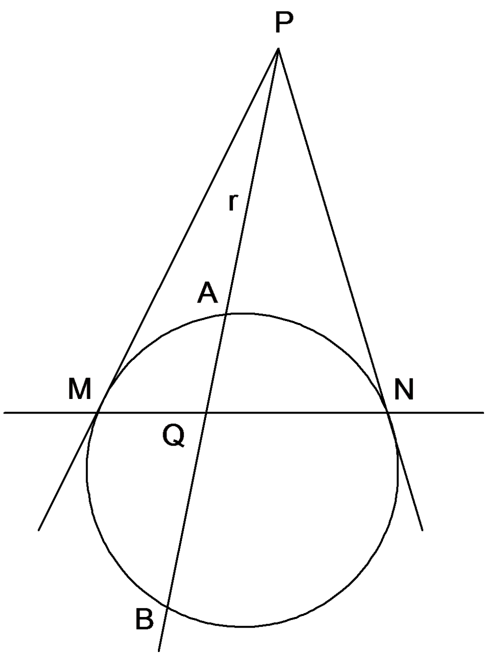
A continuación pasa Désargues a demostrar que cuatro puntos en involución se transforman, a través de proyecciones y secciones, en otros cuatro puntos también en involución. Es decir, una relación involutiva se conserva a través de proyecciones y secciones.

d. Cuaterna armónica

Hoy conocemos como cuaterna armónica la formada por cuatro puntos alineados cuya razón doble es igual a -1, según la definición de Möebius (1827), pero Désargues había introducido esta noción de otra forma. Para él, los puntos A, B, C y D forman una cuaterna armónica si pertenecen a una involución en que C y D son los puntos dobles y A y B son conjugados. Como quiera que se trata de una involución, y según se deduce de lo anterior, la cuaterna armónica se conserva a través de proyecciones y secciones.

e. Polos y polares

Supongamos una circunferencia y un punto P exterior a ella. Consideremos todas las rectas que pasando por P cortan a la circunferencia, incluidas las tangentes.



Cada recta cortará a la circunferencia en dos puntos, por ejemplo, la recta *r* corta a la circunferencia en A y B. Entonces, en *r* habrá un cuarto punto Q en posición armónica respecto de P, A y B. El conjunto de los cuartos puntos de todas las rectas consideradas demuestra Désargues que están sobre una recta, que llama polar de P. Si el punto P es exterior a la circunferencia, como en la figura, la polar de P une los puntos de tangencia, M y N. Si P es interior, sigue un razonamiento análogo para ver que la polar es exterior a la circunferencia.

Como hace con frecuencia, Désargues proyecta esta figura desde un punto exterior al plano que la contiene, y considera una sección de esa proyección. La circunferencia se transforma en una cónica, y, al conservarse la cuaterna armónica, extiende Désargues sus resultados sobre polos y polares a una cónica cualquiera.

> *Conocedor de la obra de Apolonio, Désargues se interesó por la teoría de las cónicas y elaboró nuevas ideas sobre el tema, siempre en el terreno de la geometría sintética.*

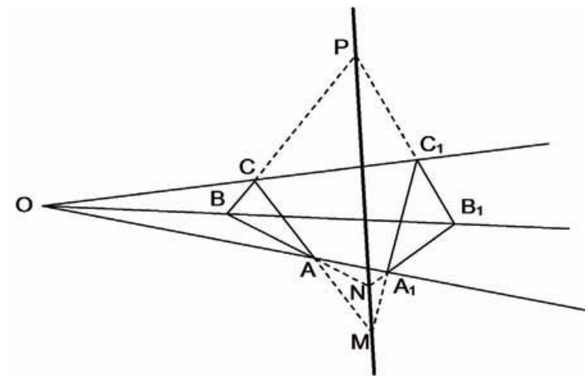
Define entonces un diámetro de una cónica como la polar de un punto del infinito. Demuestra, a partir de aquí, diversas propiedades sobre diámetros, diámetros conjugados y asíntotas.

En todo esto parte Désargues de las teorías de polos y polares de Apolonio, si bien, mientras Apolonio hace su estudio por separado según el tipo de cónica de que se trata, Désargues, como ya se ha indicado, unifica el estudio de todas las cónicas, tratándolas como un solo objeto.

El teorema de Désargues

Este teorema es quizá lo más conocido y divulgado de Désargues. No aparece en su *Borrador*, y fue publicado en 1648 por su amigo Abraham Bosse, como apéndice de su libro *Manière universelle de G. Désargues pour pratiquer la perspective* (El método universal de Désargues para la práctica de la perspectiva). Dice así:

> Si dos triángulos están situados de manera que las rectas que unen pares de vértices correspondientes concurren en un punto, entonces los puntos de intersección de los pares de lados correspondientes están en línea recta, y recíprocamente.



Así, las rectas AA_1 , BB_1 , CC_1 concurren en el punto O, y entonces las parejas de lados AB y A_1B_1 , AC y A_1C_1 , BC y B_1C_1 , se cortan, respectivamente, en los puntos N, M y P, que yacen sobre la misma recta.

Désargues demostró este teorema tanto para el plano como para el espacio. La demostración para el caso de las tres dimensiones es bastante sencilla y sólo exige los axiomas de incidencia, pero para dos dimensiones es más complicada y, curiosamente, requiere una hipótesis añadida, la de existencia del espacio de tres dimensiones. Es decir, paradójicamente, hay que salirse del plano para demostrar una propiedad del plano.

EL fracaso de Desargues

Cabe ahora preguntarse, ¿por qué no fueron aceptadas en su día las teorías de Désargues? Los historiadores suelen aducir dos tipos de razones. Una razón atribuible al propio Désargues, y otra a las tendencias de la época.

El lenguaje que utilizaba era prácticamente ininteligible para los contemporáneos. Así, por ejemplo, llamaba *palmas* a las rectas. Cuando en una recta aparecían señalados varios puntos, la llamaba *tronco*, pero, si en la recta aparecían tres pares de puntos en involución, entonces era un *árbol.* A una sección cónica la llamaba *coup de rouleau* (un golpe de rodillo), etc. Parece que con esta terminología pretendía comunicarse mejor con los ingenieros y arquitectos de poca formación matemática, eliminando por otra parte la ambigüedad de los términos usuales en la época. Lo cierto es que hacía su lectura difícil y engorrosa para los matemáticos.

> El Borrador, *como se lo conoce abreviadamente, está imbuido de las ideas sobre perspectiva de los pintores renacentistas y por el principio de continuidad de Kepler.*

La segunda razón que suele apuntarse como causa del escaso éxito de sus trabajos la puso muy bien de manifiesto Descartes, quien al conocer del propio Désargues los detalles de sus trabajos, aun reconociendo el valor de la obra y el talento de su autor, no pudo por menos de quedarse defraudado por no contemplar Désargues el punto de vista algebraico, caballo de batalla de las ideas de la época. Hay que tener en cuenta que para los problemas científicos del momento y los cálculos requeridos por la nueva tecnología resultaban mucho más efectivos los métodos algebraicos que las consideraciones de la geometría sintética.

El renacimiento de Desargues

Sin embargo, si resulta sorprendente su fracaso inicial, más sorprende si cabe que, aunque hubo de esperar doscientos años, Désargues surgiera de nuevo de entre las cenizas. ¿Cuál fue la suerte de este su renacimiento? ¿Cómo es posible que esa extraña geometría en que no se postula ningún tipo de métrica, tan despreciada en su día, haya podido convertirse en la base y fundamento de la geometría proyectiva, desarrollada por matemáticos de primera fila de los siglos XIX y XX?


Désargues


Poncelet


Chasles


Philippe de la Hire

En medio de la hostilidad general hacia la geometría sintética, y en particular hacia la geometría proyectiva, fueron dos alumnos y amigos de Désargues, los que se ocuparon de trabajar y comunicar las enseñanzas del maestro. Eran estos, Abraham Bosse (1611-1678), autor del citado libro *Manière universelle de G. Désargues pour pratiquer la perspective*, y Philippe de la Hire (1640-1718), que entusiasmado con las ideas de Désargues, se dedicó a profundizar en el tema, llegando a demostrar unos 300 teoremas recogidos en su obra más importante, *Secciones Conicae* (1685), todo ello después de haber encargado realizar una copia manuscrita de *El Borrador,* para su uso personal, que le serviría de punto de partida en su iniciación. Pero, la copia había sufrido análogo destino que los ejemplares de la propia obra.

Casualmente, en el año 1847, el matemático francés Michel Chasles encontró una copia de *El Borrador* en una librería de viejo de París. No era el original, se trataba de la copia realizada para Philippe de la Hire. Sirvió, al menos, para que N. G. Poudra editara la obra de Désargues en 1864.

El término de involución es el único de los ideados por Désargues que se ha conservado hasta hoy, y resulta central en el pensamiento del autor.

Muy recientemente, hacia 1950, las investigaciones de René Taton, con la ayuda al parecer de Pierre Moisy, permitieron descubrir en la Biblioteca Nacional de París un ejemplar del original, que tiene la particularidad de contener un apéndice y una fe de erratas del propio Désargues.

Con todo, puede decirse que Désargues siguió y sigue siendo un desconocido, pues poco se difunde y se comenta de sus trabajos si exceptuamos el citado teorema sobre los triángulos perspectivos, que llegó hasta nosotros no como contenido de sus obras sino a través de uno de sus alumnos, como producto de sus lecciones.

La geometría proyectiva

Durante el siglo XVIII, lo mismo que en el XVII, no resultó la geometría sintética digna de atención por parte de los matemáticos. Y es en el XIX cuando aparecieron los trabajos de Gaspard Monge (1746 – 1818), bajo el título de *Tratado de geometría descriptiva* (1799), la figura de Charles Brianchon (1785 – 1864) con su estudio sobre la aplicación de la geometría a los problemas militares, y, sobre todo, la obra de J. Victor Poncelet (1788 – 1867), *Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras*, aparecida en 1822, aunque elaborada ocho o nueve años antes, y en la cual destaca sobretodo su principio de dualidad.

Más tarde, es el suizo Jacob Steiner (1796 – 1863) quien, siguiendo el camino de Poncelet, lleva el principio de dualidad hasta las últimas consecuencias. Así, dice que una cónica, en virtud del principio de dualidad, se puede considerar formada tanto por puntos como por rectas, éstas tangentes a la cónica, que resulta ser de ese modo la envolvente del conjunto de rectas.

En este ambiente de trabajos, ocurre el mencionado hallazgo, por parte de Chasles (1793 – 1880), de la copia de *El Borrador* de Désargues. Se comprende el avance que supuso en el desarrollo de la geometría proyectiva. El propio Chasles después de publicar en 1852 su *Tratado de geometría superior,* y reconociendo sin duda la validez de las ideas de Désargues, saca a la luz un *Tratado de las secciones cónicas* (1865). Todavía define en él la razón doble como razón de longitudes, es decir recurriendo a una métrica. Es el alemán Karl von Staud (1798 – 1880) quien libera a la geometría proyectiva de todos sus recursos a la métrica, definiendo la razón doble a partir del cuadrilátero completo.

HACE ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Kline Morris (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid: Alianza Universidad

Carl B. Boyer (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos

Jean-Paul Collette (1985): *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores

Este artículo fue solicitado por *Suma* en mayo de 2011 y aceptado en septiembre de 2011 para su publicación.