suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 77-81

Extramuros

A lo largo de la vida profesional se acumulan experiencias que vale la pena recordar y divulgar. Se producen cuando profesores y alumnos traspasamos los límites estipulados en los currículos académicos. Yo las llamo otros límites, pues son incursiones extramuros del círculo perfecto que rodea los programas educativos. De algunas voy a hablar para despedir la sección que concluye con esta séptima entrega. Si lo hago es porque mis alumnos y yo aprendimos de ellas. En su momento fueron adherencias, pero hoy son ya parte de nosotros. Ojalá algo de ellas se adhiera a quienes lean estas líneas.

Los ciegos ven los poliedros

Ser ciega no le impidió a *L* terminar en 2006 el Bachillerato científico. El sentido del tacto con el que los ciegos perciben las cosas se usa muy poco en matemáticas. *L* venía a clase con una máquina de escribir en Braille bastante ruidosa, pero nadie se quejaba de ello. Las actividades y pruebas escritas de los profesores se remitían a una asistenta de la ONCE que las traducía a Braille para *L*. Las fórmulas presentaban dificultades diversas. Por una parte, la letra *a* y la cifra 1 se escribían con el mismo anagrama, distinguiéndose por un símbolo adicional previo. Por otra, las fórmulas y expresiones matemáticas se escribían en línea. Además de hacerlas muy extensas, eso dificulta mucho la identificación de factores comunes entre numeradores y denominadores, por ejemplo. En fin, que con *L* en clase me di cuenta de que ni las matemáticas ni sus procedimientos se diseñaron pensando en los ciegos. ¿Como serían las matemáticas de los invidentes? ¿Hasta qué punto existen unas matemáticas invisibles?

L trazaba figuras a lápiz sobre una hoja de papel plastificado superpuesta sobre una plantilla de goma del mismo tamaño y de varios milímetros de espesor. Gracias a la blandura y el espesor de la plantilla la punta de grafito se hundía en el papel. Lo que trazaba *L* eran, de hecho, surcos que podía reconocer con la yema de un dedo.

Cuando le planteé que tocase algunos sólidos de madera para trazar en el plano lo que 'veía' se mostró sorprendida, pues confesó que nunca se le había planteado semejante actividad. Las figuras 1-8 son las interpretaciones planas realizadas por *L* como consecuencia de su percepción táctil de algunos poliedros. Aquellas figuras marcadas con una flechas corresponden a la versión que ella consideró como definitiva.

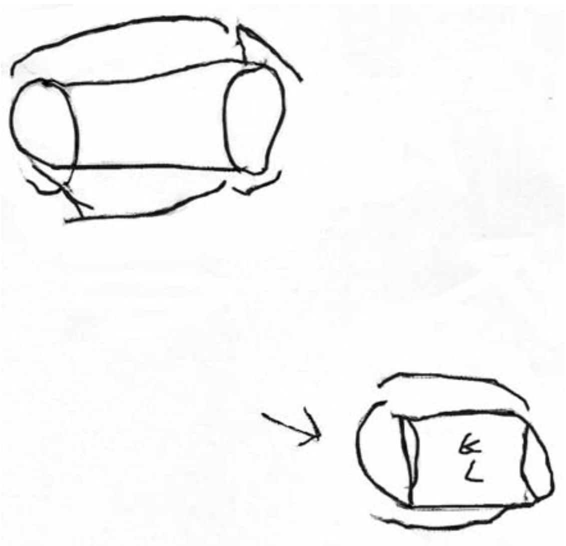

Figura 1: Cilindro (L)

Miquel Albertí Palmer
Institut Vallés, Sabadell
adherencias@revistasuma.es

L representa el cilindro (figura 1) mostrando sus dos caras circulares. Esa es una diferencia radical con la perspectiva visual: las dos caras circulares del cilindro no pueden verse al mismo tiempo, pero sí pueden tocarse a la vez. Ambas se conectan por el tubo que las une, de paredes rectilíneas. *L* destaca el carácter redondeado de esa cara tubular añadiendo sendas curvas a cada uno de los lados de la figura.

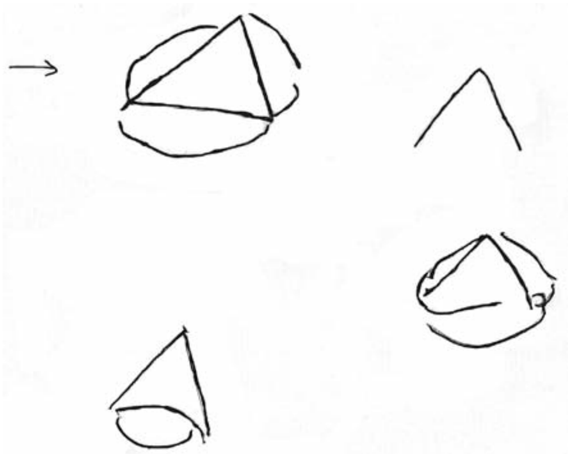

Figura 2: Cono (L)

El estudio del cono (figura 2) comienza con el trazo de un ángulo reflejando el carácter triangular del vértice. Pasa también por la representación estándar que incorpora a ese ángulo el círculo de la base. Como ya sucedía en el cilindro, la cara circular del cono también se hace 'visible', pues se toca al mismo tiempo que el resto. Sin embargo, *L* no parece satisfecha y se decanta por enfatizar el aspecto triangular del sólido redondeando con arcos circulares cada uno de sus tres lados. El resultado es equivalente al que tendría la representación del cilindro anterior con una de sus caras circulares colapsada en un punto.

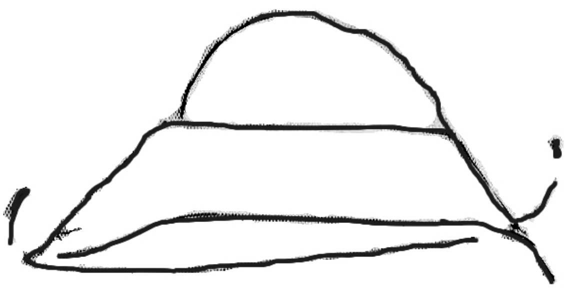

Figura 3: Tronco de cono (L)

Para la representación del tronco de cono, *L* parece fijarse en la estructura trapezoidal que transversalmente posee el sólido (figura 3) y la completa con una curva para cerrar la circularidad de su cara pequeña. La mayor de las caras circulares no fue rodeada para destacar también su circularidad. Obsérvese el intento de completar la figura con arcos circulares, pero que no acaba de cuajar. La perspectiva táctil del tronco de cono parece diferir un poco de la del cilindro.

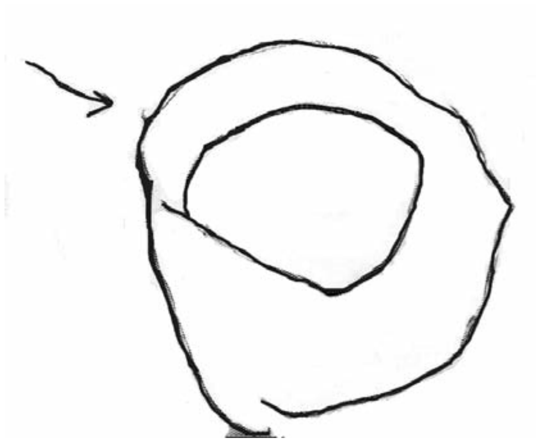

Figura 4: Esfera (L)

La esfera plantea un problema que *L* resuelve trazando dos círculos concéntricos para indicar quizá la disminución del diámetro de la circunferencia a medida que uno se aproxima a los polos del sólido (figura 4).

Figura 5: Semiesfera (L)

La semiesfera (figura 5) comparte perspectiva con la del cono y el cono truncado, pues muestra una 'visión' o tacto transversal de la pieza. Todo ello rodeado del círculo correspondiente a la cara plana del sólido.

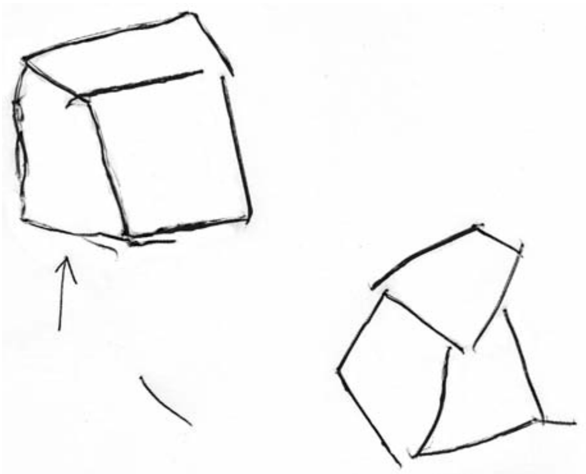

Figura 6: Cubo (L)

Del cubo sorprende su representación tan visual (figura 6). Solo se trazan tres caras. *L* podía tocar las seis caras del poliedro, pero ya su estudio preliminar muestra únicamente tres de las caras. Tal vez para reflejar la perpendicularidad de las aristas, pues su versión definitiva mejora sensiblemente los ángulos formados por éstas en los vértices. Desde luego, no se diría que es esta la representación ciega y táctil de un cubo.

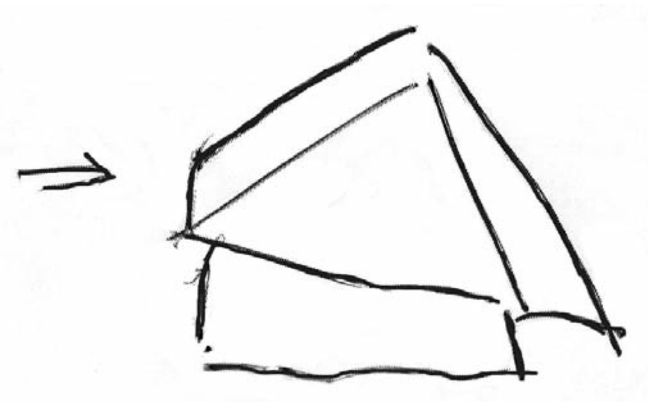

Figura 7: Prisma triangular (L)

Para el prisma triangular, *L* sigue un principio observado en el caso del cono y cilindro, pero con una salvedad importante. Es verdad que añadiendo a un lado de la cara triangular el rectángulo que, de hecho, es la pared del poliedro. Sin embargo, no hace lo mismo con los otros lados de esta cara. Más bien se diría que duplica la cara triangular para mostrar las dos bases paralelas del sólido (figura 7). El rectángulo añadido al lado del triángulo en primer plano conecta los dos triángulos paralelos que componen este prisma.

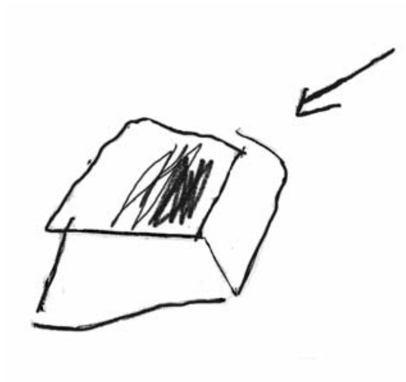

Figura 8: Tronco de pirámide (L)

La representación que efectúa *L* del tronco de pirámide sigue la misma pauta que la observada en el cubo. La diferencia aquí estriba en que una de las caras cuadradas es mayor que la otra. Eso es lo que da lugar al poliedro y eso es lo que parece inspirar el aspecto trapezoidal de las dos caras laterales dibujadas en primer plano (figura 8).

Entre esas representaciones se distinguen dos grupos principales. Uno se caracteriza por un marcado carácter geométrico. Son las representaciones correspondientes a figuras de caras planas que *L* parece querer trazar respetando los ángulos (cubo, prisma triangular y tronco de pirámide). En el otro grupo impera el carácter topológico donde *L* enfatiza el carácter circular de algunas de las caras (cilindro, cono, tronco de cono, esfera y semiesfera).

Suma natural de irracionales

En 2009 daba clase a dos grupos de cuarto de la ESO. Un resultado que casi ninguno de esos alumnos acabó de digerir por completo fue que los números decimales cuya parte periódica consta sólo de la cifra 9 sean enteros. Por ejemplo, que 4,99999...sea igual a 5. Una justificación de este hecho es que si este número se multiplica por 10, su parte decimal no cambia:

$$10 \cdot 4{,}99999... = 49{,}99999...$$

La coma se ha desplazado una cifra a la derecha. Todos estuvieron de acuerdo con esto y lo aceptaron. La diferencia entre este número y el anterior proporciona un número cuya parte decimal es periódica y consta únicamente de la cifra 0:

$$\begin{array}{r} 49{,}99999... \\ -4{,}9999... \\ \hline 45{,}0000... \end{array}$$

Se trata del número 45. Y, por lo tanto:

$$9 \cdot 4{,}9999... = 45$$

$$4{,}9999... = \frac{45}{9} = 5$$

Todos comprendieron el proceso. Sin embargo, nadie lo aceptó. Lo veían, pero no se lo creían. Ahondé más en la herida dividiendo 45 entre 9. Sabían que el resultado de la división tendría que dar 5, pero las dudas acudieron cuando el 5 de mi división (figura 9) les pareció diferente del suyo:

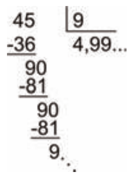

Figura 9: División abierta de 45 entre 9

–Esta división está mal hecha, objetaron algunos.
–El resto tiene que ser siempre menor que el divisor, reclamaron otros.
–¿Por qué?, repliqué. ¿Porque os han dicho que teníais que hacerlo así? No hago sino aplicar el algoritmo de la división que conocéis para demostraros que, efectivamente, cuatro coma nueve periódico es cinco.
–Pero no puede ser, porque siempre quedará algo entre el cuatro coma nueve y el cinco. El cinco viene después, insistieron.
–Esto es porque imagináis una cantidad finita de decimales. No queda nada entre los nueves del período y el cinco. Los nueves no tienen fin y los dos símbolos, el 4,999... y el 5, representan al mismo número.

Se estaban enfrentando por primera vez al hecho de tener que aceptar un resultado lógico que contradice esquemas previos. La demostración obedecía la misma lógica por la que se habían garantizado otros resultados matemáticos a lo largo de la ESO. Pero este contradecía su intuición. Una intuición que debían revisar y domesticar, pues ya no garantizaba la certeza.

La revisión de esquemas propios suele llevar largo tiempo y forma parte del proceso de maduración matemática. El cambio no se produce sin reflexión. Por lo visto, a *M* le dio por reflexionar sobre la cuestión y utilizó este resultado para dar una respuesta insólita a la pregunta de si la suma de números irracionales era siempre un número irracional. Lo hizo un año más tarde, como alumno de 1º de Bachillerato. *M* creó dos números decimales infinitos y no periódicos (irracionales) cuya suma daba como resultado un decimal periódico cuya parte periódica estaba compuesta únicamente de nueves (figura 10). Por lo tanto, la suma de irracionales no es que pudiese ser racional, incluso podía ser entera.

El número *x* de la figura 10 es irracional porque su parte periódica es infinita (basta continuar la secuencia) y no es periódica. El número *y* lo es porque se deriva directamente de *x*, cifra a cifra. La suma de ambos es 2,9999…. Es decir, 3:

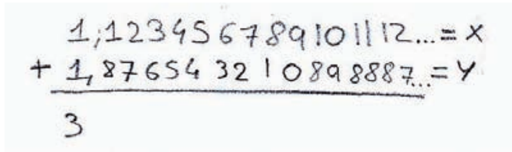

Figura 10: La suma de irracionales puede ser natural (M)

No es este el tipo de respuesta más corriente. Otros cayeron en la cuenta de que bastaba sumar un número irracional cualquiera con su opuesto. Como el resultado es cero, la suma de irracionales puede ser racional y entera:

$$\pi + (-\pi) = \pi - \pi = 0$$

El teorema de Mambrino

El crucigrama del diario El País del 20 de enero de 2011 incluía una definición sorprendente. Era la diez vertical: todos los números de tres cifras iguales son divisibles por éste (tres palabras). Se trataba de un pequeño teorema en el que jamás había reparado (figura 11). El 37 es un número primo demasiado grande como para hablar de él con frecuencia.

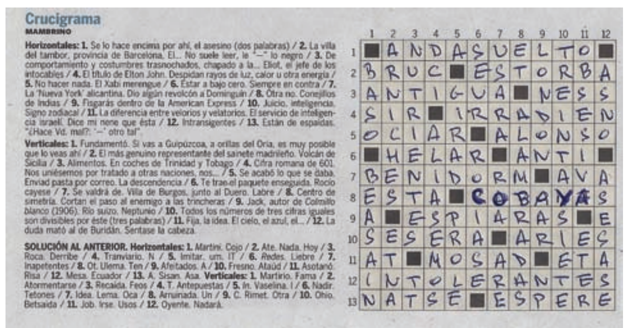

Figura 11: Crucigrama de Mambrino (El País, 20/01/2011)

Pedí a mis alumnos de cuarto de la ESO y de bachillerato que tratasen de redactar una respuesta. Algunos no supieron enfocar el problema; otros lo enfocaron bien, sobre todo dirigiendo su atención hacia la comprobación experimental y exhaustiva de que el teorema es cierto para 111, 222, 333, ...,

999. Fue *S*, alumna de 2º de bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales, quien ofreció una explicación más clara. La invité a que la hiciese pública ante toda su clase. Su exposición fue recibida con aplausos. La figura 12 reproduce su redacción autógrafa:

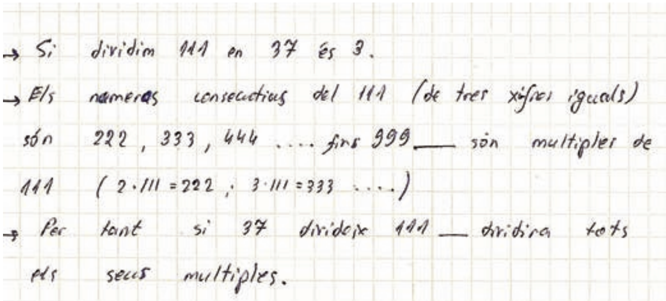
→ Si dividim 111 en 37 és 3.
→ Els nombres consecutius del 111 (de tres xifres iguals) són 222, 333, 444 .... fins 999 ___ són múltiples de 111 (2·111 = 222 ; 3·111 = 333 ....)
→ Per tant si 37 divideix 111 ___ dividirà tots els seus múltiples.

Figura 12: Explicación del teorema del crucigrama de Mambrino (S)

S redactó su explicación invirtiendo el orden del razonamiento explicado en clase. La primera línea debería haberse escrito en segundo lugar. Esta es la traducción de su autógrafo respetando el orden con el que llevó a cabo su exposición:

– Los números consecutivos al 111 (tres cifras iguales) son: 222, 333, 444, ... hasta 999, son múltiplos de 111 (2·111=222, 3·111=333, ...).

– Si dividimos 111 entre 37 es 3.

– Por tanto, si 37 divide 111, dividirá todos sus múltiplos.

Una vez la cuestión quedó clara, escribí una versión más formal en las pizarras de algunas aulas:

$$aaa = a\cdot 100 + a\cdot 10 + a\cdot 1 = a\cdot(100+10+1) = a\cdot 111 = a\cdot 3\cdot 37$$

Desde entonces me refiero a este resultado como el Teorema de Mambrino. Invité a mis alumnos y alumnas a que fuesen más allá. ¿Era cierto el teorema para los números con más de tres cifras iguales? Tal vez algunos siguen preocupados por ello.

La clave del problema está en si los números 11, 111, 1.111, ... que son los que dan lugar a números de 2, 3, 4, ... cifras iguales son primos o no. Las factorizaciones de los diez primeros números de esta serie son:

Cifras iguales	*Factorización*
2	11 (primo)
3	3·37
4	11·101
5	41·271
6	3·7·11·13·37
7	239·4649
8	11·73·101·137
9	3^2·37·333667
10	11·41·271·9091
...	...
19	1·111·111·111·111·111·111 (primo)

Se observan ciertas pautas. Cuando la cantidad de cifras iguales es par, el número correspondiente es divisible por 11:

$$aaaaaaaa = a\cdot 11111111 = 11000000 + 110000 + 1100 + 11 =$$
$$11\cdot(1000000 + 10000 + 100 + 1) = 11\cdot 1010101 = \textit{múltiplo de } 11$$

Cuando la cantidad de cifras iguales es múltiplo de 3, el número correspondiente es divisible por 37:

$$aaaaaa = a\cdot 111111 = 111000 + 111 = 111\cdot(1000+111) =$$
$$111\cdot 1111 = \textit{múltiplo de } 111 = \textit{múltiplo de } 37$$

Esta sección comenzó junto a la vibrante línea, a veces continua, a veces discontinua, que separa la tierra del mar. Todas esas adherencias aluden a los granitos de arena que se te quedan entre los dedos de los pies al volver de la playa. Una incomodidad que el llanto de las ostras convierte en perla. Maestros y profesores somos responsables de la arena que incomoda a niños y adolescentes. Por más que quieren, no consiguen desprenderse de ella. No se lo permitimos. De hecho, anhelamos que la arena que les adherimos jamás se desprenda de ellos. Mientras no la asimilan, es incómoda. Pero en cuanto pasa a formar parte de la persona y se integra en ella, la incomodidad desaparece. La persona educada ha asimilado sus adherencias. Contribuir a dichas transformaciones es un gran privilegio.

ADHERENCIAS ■

Este artículo fue solicitado por *Suma* en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011 para su publicación.