suma+ 68
Noviembre 2011, pp. 17-25

El Proyecto Gauss

Se presentan diversos ejemplos de cómo se pueden aprovechar los applets en general, y las actividades presentes en el Proyecto Gauss del ITE en particular, en el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Cada apartado presenta un aspecto distinto que confiere a las actividades ciertas ventajas que podemos disfrutar, así como reflexiones sobre el interés que puede tener su uso. Se destaca el protagonismo que adquieren nuestras propias acciones y la importante ayuda que supone su retroalimentación continua en un escenario visual, dinámico e interactivo.

Palabras Clave: Nuevas Tecnologías, Actividades, Primaria, Secundaria, Aprendizaje y Educación.

The Gauss Project

Several examples of how to profit for learning and teaching of Mathematics from applets, in general, and activities present in the ITE Gauss Project, in particular, are given. Each section shows a different aspect that offers some enjoyable adventages to the activities, as well as thoughts about the interest it can have. The article points at the relevance of our own actions and the great help the steady feedback in a dynamic, interactive and visual background means.

Key words: New Technologies, Activities, Primary, Secondary, Learning & Education.

GeoGebra

El programa GeoGebra[1], libre y gratuito, es ya un referente en todo el mundo como un importante recurso de ayuda a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De sus muchos aspectos destacables (Losada, 2007), resaltaremos en principio que es gratuito, intuitivo y permite convertir en segundos las construcciones en *applet*s, esto es, en pequeñas aplicaciones integradas en páginas web.

El Proyecto

El Instituto de Tecnologías Educativas[2] (ITE) ha creado *El Proyecto Gauss*[3] como parte del Programa Escuela 2.0[4] con el fin de ofrecer materiales educativos digitales que reflejen modos creativos y amenos de aprender matemáticas. Sin duda, el hecho de que el actual director del ITE, Antonio Pérez Sanz, sea también matemático y profesor, ha propiciado una especial atención a su desarrollo. El Proyecto Gauss cuenta hoy con más de 500 actividades que recorren los currículos de matemáticas de 5º y 6º de Primaria y de toda la ESO.

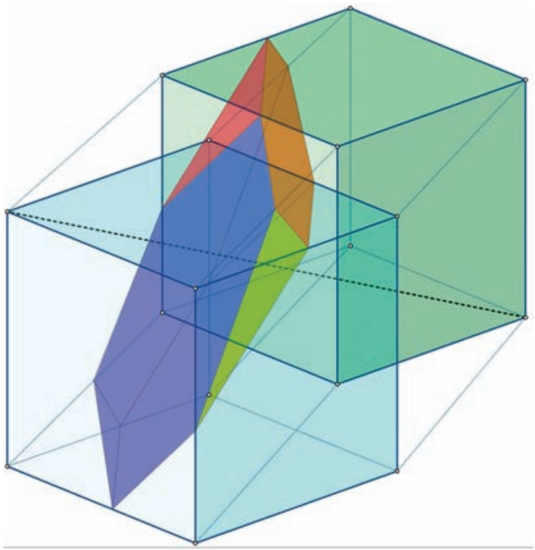
Los culpables del diseño de las construcciones y actividades son los autores de este artículo, asesores técnico-docentes del ITE con amplia experiencia tanto en la docencia de las matemáticas como en el aprovechamiento de las nuevas tecnologías: José Luis Álvarez y Rafael Losada. Este último es también formador del Instituto GeoGebra de Cantabria[5] (IGC), organismo con sede en el CIEM[6] y presidido por el profesor Tomás Recio, que mantiene un convenio de colaboración con el ITE con el propósito de facilitar el desarrollo de actividades e investigaciones de interés común.

Los temas

Cinco bloques (Aritmética, Álgebra, Funciones, Geometría, Estadística y Probabilidad) dividen por temas las actividades de ESO. El bloque de Geometría es el más extenso debido al aprovechamiento de la representación visual de los elementos geométricos y a las facilidades que ofrece GeoGebra como

José Luis Álvarez García
Rafael Losada Liste
Instituto de Tecnologías Educativas. Ministerio de Educación.

software de Geometría Dinámica[7]. La manipulación de elementos geométricos se convierte así en un excelente medio visual donde desarrollar nuestras habilidades matemáticas.

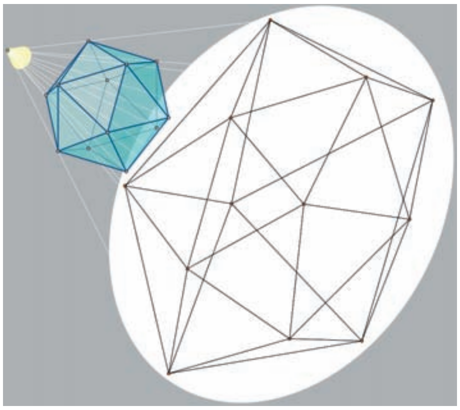


En *Las dimensiones del hipercubo*[8] la animación facilita la visualización de los distintos sólidos que aparecen al seccionar progresivamente un hipercubo

Por su parte, cada una de las actividades de los tres bloques de Primaria (ya que no hay Álgebra ni Funciones) enlaza con otra similar o de nivel ligeramente superior. Estos enlaces ayudan a tratar la diversidad hacia un nivel superior (de Primaria a ESO) o inferior (de ESO a Primaria).

Las actividades

Cada actividad se compone de un applet de GeoGebra, una introducción y un *cuestionario*. Este último, *parte esencial* del Proyecto, se diseña específicamente para guiar y graduar la exploración del applet. En algunas ocasiones, debido a la naturaleza de la actividad, el cuestionario es reemplazado por algún proceso de construcción o de autoevaluación.



La treintena de preguntas de la actividad *Ombra mai fu*[9] nos impulsan a realizar una incursión en la matemática discreta

En síntesis, las actividades pretenden aproximarnos a las relaciones abstractas de los conceptos matemáticos mediante *la observación de la respuesta a nuestras acciones por parte de objetos dinámicos interactivos*. Esta respuesta del sistema informático retroalimenta nuestra manipulación al tiempo que cuestiona la validez de nuestra interpretación mental de tales conceptos.

Actitudes y principios

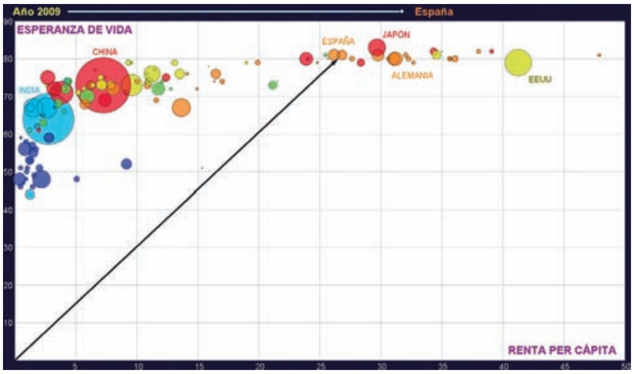
En el espíritu del Proyecto Gauss se antepone la práctica de *competencias generales* a la de algoritmos concretos de resolución. Esto es muy importante, porque significa que para aprovechar al máximo cada actividad debemos mantener una actitud atenta, pero también abierta, curiosa e inquisitiva en vez de pasiva y crédula. Naturalmente, esta actitud supone un esfuerzo que debemos saber apreciar.

El Proyecto Gauss nos ofrece la oportunidad de explorar por nosotros mismos escenarios ricos en contenidos matemáticos, interactuando con ellos. Las profesoras y los profesores, como expertas y expertos socorristas, podemos dirigir, animar (realzar lo positivo y convertir lo negativo en retos que superar), ayudar y valorar, pero las actividades interactivas invitan a que sean alumnos y alumnas *los auténticos protagonistas y las auténticas protagonistas* de su propio aprendizaje. Ellos y ellas son quienes, dependiendo del tipo de actividad, deberán analizar, aplicar, comparar, representar, relacionar, extrapolar, comprobar, reconocer, practicar, investigar, construir, resolver, identificar, generalizar, etc., las situaciones presentadas.

Los materiales

Las actividades del Proyecto Gauss tienen licencia Creative Commons de “Reconocimiento, No Comercial, Compartir Igual”, es decir, hay libertad de copia, modificación y distribución, siempre que compartamos la misma licencia, reconozcamos los créditos y no lo hagamos con fines comerciales.

Además de poder navegar por las actividades en Internet, podemos descargar todos los materiales[10] en local, comprimidos en sendos archivos para Primaria y ESO. La estructura de carpetas es bastante simple. En la carpeta “eso”, por ejemplo, encontramos las subcarpetas “actividades” y “comentarios” (modelos de respuestas). Al abrir la carpeta “actividades”, cualquiera de los archivos de extensión HTM (página web) que aparecen incorpora un menú general que nos permite navegar por todas las actividades.

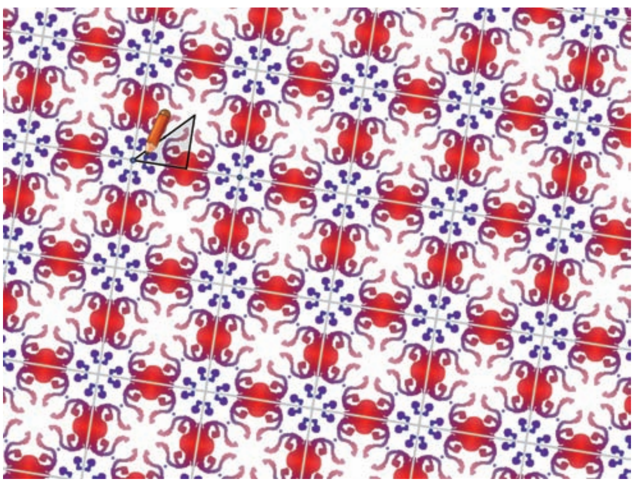


En *Dos siglos*[11] la variable del año posibilita dinamizar la interpretación y comparación de una gran cantidad de datos

Si deseamos cambiar algo en una construcción de GeoGebra basta abrirla en su carpeta. Podemos modificarla como queramos sin necesidad de convertirla de nuevo en applet, pues estos se actualizan automáticamente: solo debemos conservar el nombre del archivo y no moverla a otra carpeta. También podemos editar la página web y, por ejemplo, realizar cambios en el cuestionario.

Protagonismo y comunicación

Siempre resulta satisfactorio sentir nuestra capacidad de interactuación con nuestro entorno. Los applets del Proyecto Gauss presentan cada escenario procurando mantener el equilibrio entre interactividad y claridad. De este modo, podemos explorarlos y conseguir buenos resultados en poco tiempo. Lo importante es poder dirigir la respuesta del sistema hacia nuestros deseos.



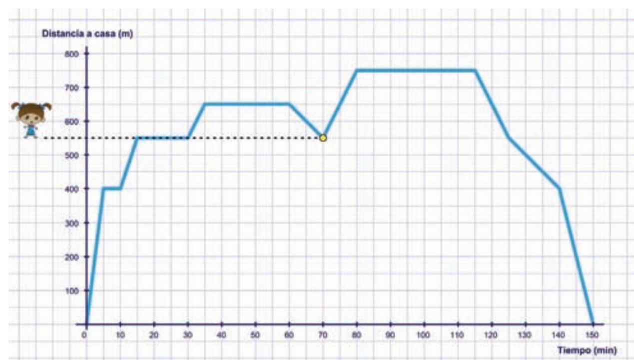
Mosaico periódico del grupo *442 creado con la actividad *Creador de mosaicos*[12] en 15 segundos. (Vale, en 20...)

Es impensable que en un entorno abierto a todo tipo de diversidad se produzca la misma respuesta en todos nosotros. Podemos aprovechar la natural pluralidad de observaciones y respuestas para fomentar y dirigir el debate argumentado, lo que además brindará nuevas oportunidades de mejorar la expresión, la (auto) estima, la comprensión y el respeto mutuo. De hecho, aunque en algunas actividades se propone explícitamente una redacción de conclusiones, en un entorno de aprendizaje en grupo podemos además aprovechar distintos mecanismos (discusión, cooperación, explicación, puesta en común...) que enriquezcan la realización de la actividad.

Lectura y comprensión

El protagonismo comienza por la lectura individual. Debemos leer la introducción a la actividad para conocer su contexto, el objetivo que persigue y, cuando sea preciso, algunas instrucciones sobre el uso del applet.

Pero, sobre todo, es esencial una correcta interpretación de las preguntas del cuestionario, lo que supone un esfuerzo de atención y concentración que debemos reconocer. La dificultad en la correcta comprensión de los textos a menudo estribará en la precisión de los términos empleados más que en la extensión del texto. La brevedad de estos debe animarnos a releerlos, varias veces si es preciso: unos pocos segundos de especial atención pueden evitarnos muchas confusiones.

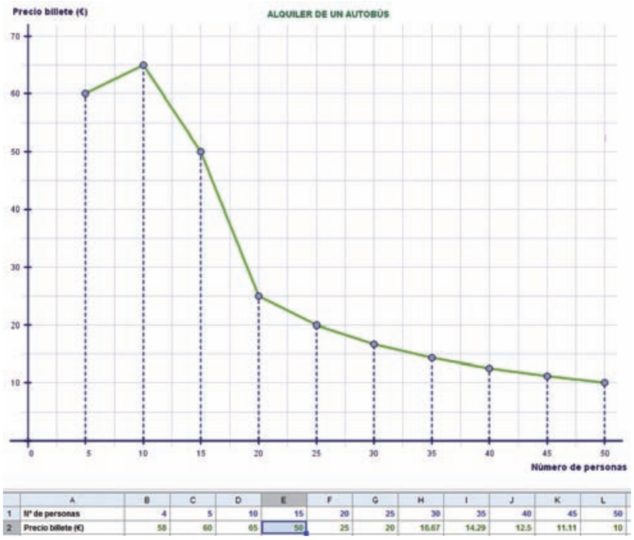


En *Una tarde de paseo*[13] debemos completar la información verbal con ayuda de la información gráfica

Pluralidad de representaciones simultáneas

En el propio nombre (o en el nombre propio) de GeoGebra aparece la intención de la representación simultánea de la **Geo**metría y el ál**Gebra**. Esta es la idea básica del creador del programa, Markus Hohenwarter: dos ventanas adyacentes con los mismos objetos matemáticos, una para cada representación, algebraica y gráfica. La hoja de cálculo que integra GeoGebra añade otra posibilidad de representación, la tabular.

En diversas actividades se aprovecha como recurso didáctico la adaptación inmediata de todas las representaciones al cambio efectuado en cualquiera de ellas. La pluralidad de representaciones ofrece dos grandes ventajas. Por una parte, permite apoyarnos en un tipo de representación (inicialmente, la gráfica) para comprender mejor la otra (inicialmente, la algebraica). Por otra parte, cada tipo de representación focaliza la atención en ciertos aspectos conceptuales del objeto representado, por lo que la pluralidad de representaciones favorece una comprensión más profunda del objeto matemático.

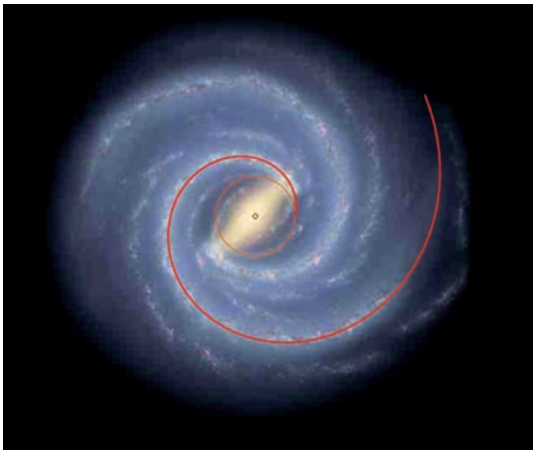


La actividad *Enunciados, tablas y gráficas*[14] permite la interacción con la representación tabular en el mismo escenario que la representación gráfica

Modelización

Un buen modelo es a menudo la causa de una buena comprensión. Las fórmulas y gráficos estáticos son habituales modelos matemáticos, pero suelen exigir bastante experiencia para su correcta interpretación. Los materiales físicos, usados como modelos, son de gran utilidad en el aprendizaje, pero en ocasiones presentan algunos problemas: disponibilidad, limitaciones de uso, opacidad, peligrosidad, fragilidad, etc. Los modelos virtuales añaden a los modelos matemáticos estáticos algunas cualidades muy valiosas: interactividad, dinamismo y adaptabilidad.

Resulta particularmente sugerente y vistosa, a menudo incluso sorprendente, la búsqueda de modelos geométricos que se adapten a formas y fenómenos naturales.

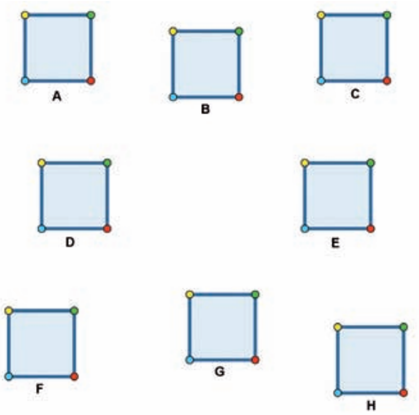


En *Unas curvas muy enrolladas*[15] debemos ajustar el modelo matemático al fenómeno real

Manipulación y retroalimentación

Para conocer los objetos físicos, si son pequeños (y se dejan) les damos vueltas con las manos y si son grandes damos vueltas alrededor de ellos. En ambos casos, el fin es variar el punto de vista para facilitar una composición mental de la forma y naturaleza del objeto. De la misma forma, para conocer bien los objetos matemáticos, nada mejor que darles vueltas. Habitualmente, una imagen estática ofrece la visión de un estado particular, mientras que una imagen dinámica muestra mucha más información sobre el estado general de un objeto.

Un cuadrilátero puede “parecer” un cuadrado, pero para estar seguros lo mejor es tirar de sus vértices. Si al mover un vértice el cuadrilátero pierde la forma cuadrada ya no hace falta que probemos a mover los demás vértices: ya hemos *demostrado* que no es un cuadrado, lo que nos conduce a probar con el siguiente cuadrilátero. De esta forma, el comportamiento de cada figura como respuesta a nuestras acciones nos dirige a otras acciones, retroalimenta nuestras decisiones.



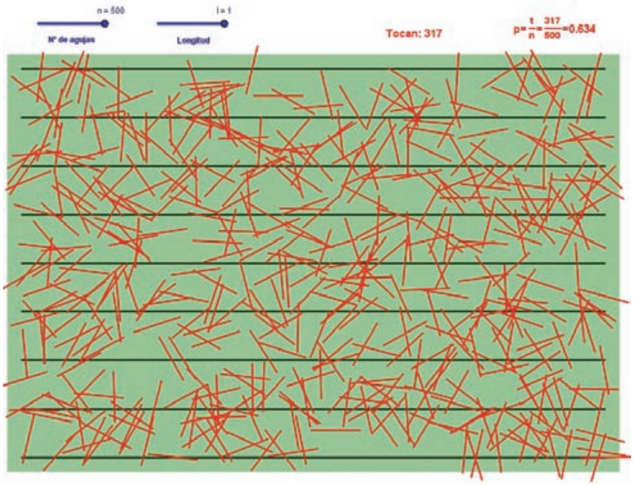
Siete de estas figuras son en realidad *Falsos cuadrados*[16], pero solo podremos desenmascararlos al intentar modificar su forma

Finalmente, si encontramos un cuadrilátero que al trasladarlo, girarlo, escalarlo, etc., varía de posición o cambia de tamaño, pero se mantiene cuadrado, entonces "puede ser" un cuadrado. No tenemos una demostración, solo una ***comprobación***. Pero, una vez descubierta la condición del objeto, podremos plantearnos, de forma natural avanzar un paso más y preguntarnos si existe alguna ***razón lógica*** (en la forma en que ha sido construido, por ejemplo) para que tal cuadrilátero "deba ser" un cuadrado.

Simulación y experimentación

Existen espacios escolares especialmente dotados para la realización de algunos tipos de actividades: aulas de música, gimnasios y pabellones deportivos, laboratorios de biología, física y química, talleres de tecnología, laboratorios de idiomas, aulas de informática... Pero, ¿y laboratorios de matemáticas? ¿Se conserva todavía la falsa creencia de que el aprendizaje de las matemáticas no precisa de la experimentación? ¿O se considera que bastan la tiza y la pizarra para realizar suficientes experimentos matemáticos?

Afortunadamente, si tenemos acceso a las nuevas tecnologías (pizarras digitales, ordenadores, proyectores, Internet...) la situación puede mejorar mucho. A fin de cuentas, ¿la propia existencia del mundo informático no se debe en gran medida a avances matemáticos? Facilitar el uso de las nuevas tecnologías en las clases de matemáticas tal vez ayude a amortizar esa deuda histórica.

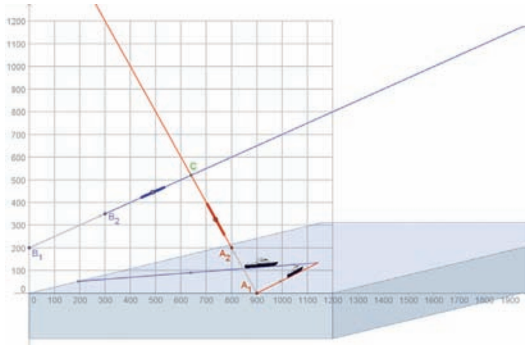


En *La aguja de Buffon*[17] podemos observar el resultado de simular centenares de veces el lanzamiento de una aguja

Animación

Otra posibilidad que ofrece GeoGebra es la de automatizar el movimiento de los objetos. Podemos optar por un desplazamiento "geométrico" (por ejemplo, el de un punto sobre una circunferencia), controlado desde el teclado, o por un desplazamiento "aritmético", controlado por un deslizador numérico. En este último caso, también podemos optar por un movimiento desasistido (animación automática).

La animación resulta de particular interés en aquellas simulaciones o modelizaciones en donde uno de los factores determinantes sea, precisamente, el tiempo.

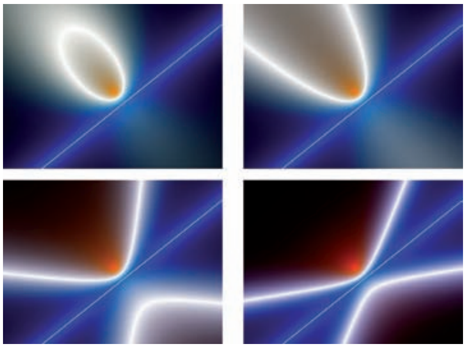


En *Barcos en la niebla*[18] la doble animación 2D-3D ayuda a comprender el problema y permite comprobar la corrección de nuestros cálculos

Visualización y plástica

Si una imagen vale por mil palabras, ¿cuánto vale una cámara fotográfica? ¿Y una cámara de video? Elucubraciones aparte, las imágenes pueden ayudarnos a adquirir práctica en la visualización mental de relaciones y conceptos matemáticos.

La actividad ***La hipérbola*** permite crear mapas de color en función de la proporción, variable a nuestra elección, de la distancia de cada punto del plano a un punto y a una recta determinados. El proceso empleado es resultado de una investigación[19] realizada en el IGC relacionada con el comando *Color Dinámico* de GeoGebra. Algunas de las imágenes obtenidas de esta forma muestran, además, gran belleza plástica.



Imágenes de *La hipérbola*[20]. Los tonos rojizos denotan una mayor proximidad del foco, los azules de la directriz y el blanco el equilibrio en la proporción establecida

La calidad estética del escenario es un aspecto al que, desgraciadamente, no se suele prestar el cuidado que merece. Las propiedades de estilo de los objetos nos permiten mejorar notablemente el atractivo visual de nuestras construcciones, a las que, además, podemos añadir elementos gráficos (fondos estáticos o imágenes dinámicas) que la realcen todavía más, aunque procurando, al mismo tiempo, evitar un exceso de complejidad, de barroquismo, que pueda dificultar la exploración.

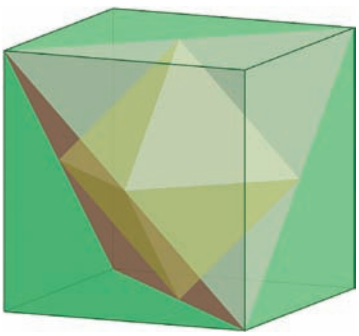
Exploración e investigación

Lo que más placer proporciona
no es el saber, sino el estudiar;
no es la posesión, sino la conquista;
no es el estar aquí, sino el llegar allá.

Carl Friedrich Gauss

La curiosidad por explorar diferentes entornos es natural, pero estos han de tener un mínimo de complejidad, de riqueza, para estimularla. Por "escenario rico" no nos referimos a la cantidad de elementos que aparecen, sino a la cantidad y profundidad de inmersiones que permite. Por supuesto, el grado adecuado de riqueza, de profundidad, dependerá de nuestra propia experiencia. Un escenario puede resultar de lo más estimulante en una etapa y demasiado pobre en otra más avanzada.

Por fortuna, podemos encontrarnos con relativa frecuencia en escenarios dotados de diversas profundidades de exploración, debido a la presencia de relaciones con diferentes grados de dificultad para su observación y análisis. Por ejemplo, las relaciones existentes entre los diferentes sólidos platónicos y sus elementos distinguibles pueden abordarse, con distinta profundidad, en diversas etapas educativas. Su manipulación en Educación Primaria puede permitir la observación de elementos claramente identificables y cuantificables, como la forma de las caras, su número o la cantidad de aristas concurrentes en un vértice, mientras que en la ESO permite investigar relaciones menos evidentes, como las existentes entre elementos de dos sólidos de distinto tipo.

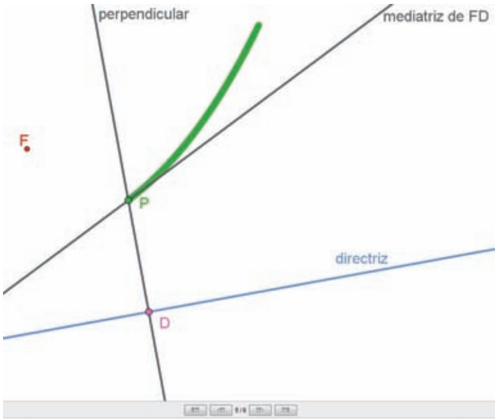


Una imagen de *Omnipoliedro*[21]

Construcción

GeoGebra se halla provisto de sistemas especialmente diseñados para facilitar la observación de los procesos constructivos. El *Protocolo de Construcción* muestra el historial de objetos creados y permite secuenciar su aparición en la *Barra de Navegación por Pasos de Construcción*. Como resultado, disponemos de un excelente visualizador de las etapas relevantes en cualquier construcción.

Una forma de aprovechar estas ventajas en una actividad consiste en incluir en ella tres applets de GeoGebra. En el primero, mostramos cuál es el objetivo que perseguimos, es decir, la construcción ya realizada. En el segundo, exponemos el proceso seguido en la construcción, usando el sistema de navegación mencionado. En el tercero, dejamos la ventana vacía con las herramientas necesarias o suficientes e invitamos a reproducir en ella el anterior proceso constructivo.



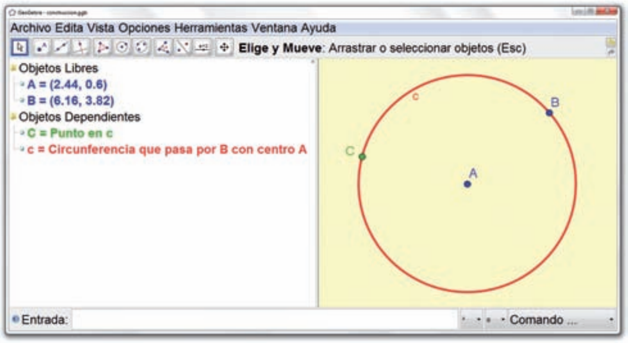
Un paso del proceso constructivo que aparece en el segundo applet de *Construcción de la parábola*[22], como parte del estudio de la función cuadrática

Orientación

Con frecuencia, podemos observar que las actividades hacen uso intencionado de distintas estrategias para orientar la atención hacia las cuestiones que se plantean (¿a qué estamos, a setas o a relojes?). Algunas de las posibilidades con las que podemos contar al diseñarlas son:

- Ocultación de los elementos superfluos de la construcción y diversos modos de presentación e interactuación disponibles en el menú Opciones de GeoGebra.
- Resaltado, mediante la aplicación de distintos estilos (color, grosor, sombreado...), de los elementos principales.
- Organización de los elementos en la pantalla, adecuada a la interactividad permitida.
- Empleo de capas (GeoGebra admite diez capas de profundidad) que controlen el modo en que los objetos gráficos se superponen.

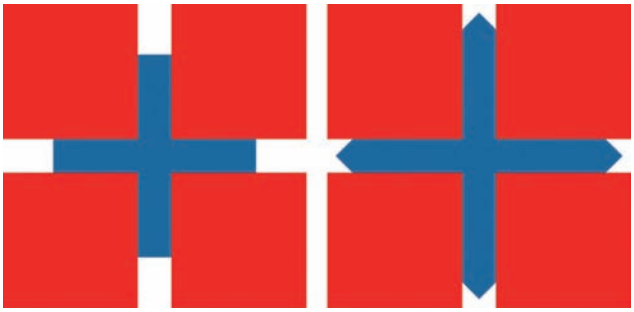
- Uso de LaTeX en fórmulas y ecuaciones.
- Aprovechamiento de la generación aleatoria de números para provocar la aparición de situaciones similares con datos o parámetros diferentes.
- Utilización de casillas para el control de escenas y visualización de objetos.
- Exposición de únicamente las partes de la interfaz de GeoGebra que se usarán (Vista Gráfica, Vista Algebraica, Hoja de Cálculo, Barra de Menús, Barra de Herramientas, Barra de Entrada).
- En el caso de hacer visible la Barra de Herramientas, también podemos personalizarla, bien limitando las herramientas disponibles, bien mostrando herramientas creadas por nosotros mismos.



En los *Talleres*[23] podemos practicar gradualmente los procedimientos básicos de construcción de objetos geométricos y algebraicos

Percepción e interpretación

Tanto en Primaria como en ESO, la sección *La necesidad de medir* del bloque de Geometría se halla dedicada específicamente a la realización de actividades que pretenden alertarnos sobre los peligros que encierra confiar ciegamente (valga la paradoja) en nuestra percepción y experiencia visual. Las imágenes pueden ser de mucha ayuda, pero también podemos malinterpretarlas. Por eso necesitamos verificar nuestras estimaciones mediante las oportunas mediciones (o mediante argumentaciones lógicas).



Dos imágenes de *Eclipse parcial*[24]. Aunque no lo parezca, los cuadrados azules, parcialmente eclipsados por los rojos, son del mismo tamaño.

Resolución de problemas

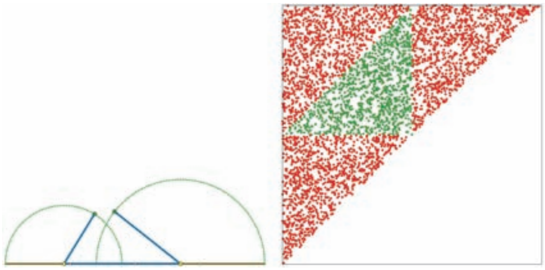
La visualización e interacción con el escenario en el que se desarrolla un problema, además de añadir atractivo y estimular la curiosidad por resolverlo, favorece su comprensión. Por otra parte, la disponibilidad de distintas herramientas, así como la facilidad con la que podemos deshacer y ensayar distintas acciones, nos anima a continuar en la búsqueda de un camino hacia la solución. En algunos casos, incluso podemos modificar las condiciones iniciales e investigar en qué medida los cambios afectan a la cantidad o naturaleza de las soluciones.

En *De camino al trabajo*[25] se ofrecen las pistas suficientes para reconstruir un camino y calcular la distancia recorrida

Verificación y argumentación

Las actividades han sido diseñadas para favorecer que nuestros ensayos y tanteos deriven en la formulación (explícita o no) de conjeturas susceptibles de ser verificadas o refutadas. Este juego de manipulación, observación y comprobación es el caldo de cultivo del objetivo perseguido: la argumentación lógica.

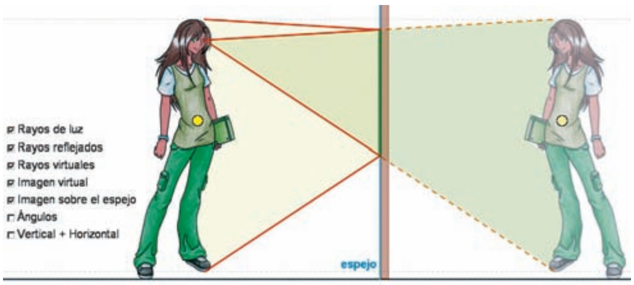
Normalmente, surgen distintas argumentaciones sobre la causa de un mismo comportamiento. Es sabido que existen cientos de demostraciones (es decir, argumentaciones lógicas y formales) del Teorema de Pitágoras. Una argumentación es siempre bienvenida, pues si no podemos aceptarla por ser demasiado débil, nos ofrece la oportunidad para redargüir o contraargumentar por qué no la aceptamos.



En *Un triángulo... probablemente*[26] calculamos la probabilidad de poder construir un triángulo al cortar en tres segmentos, al azar, un segmento dado

Demostración

En ocasiones, la verificación de alguna relación o propiedad dirige a su vez hacia una argumentación más formal, una demostración. Por ejemplo, en la actividad ***Espejo*** (¿cuál es la altura mínima que debe tener un espejo vertical para poder ver nuestra propia imagen completa?) no cuesta mucho esfuerzo observar la invarianza de la longitud de nuestra imagen según la vemos "sobre" el espejo. Si nos situamos frente a un espejo, y perfilamos sobre él nuestra silueta (el contorno de nuestra cabeza, por ejemplo) veremos que todas las longitudes se han reducido a la mitad.



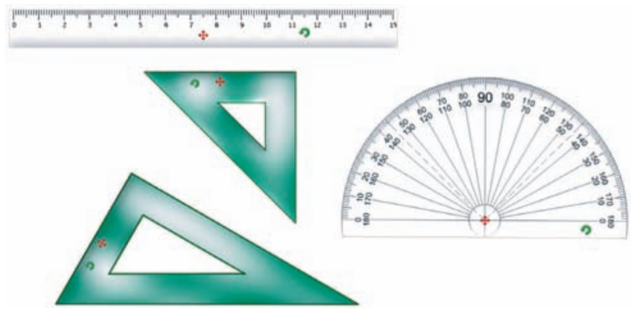
La actividad *Espejo*[27] muestra una situación cotidiana en donde el ojo es el vértice de dos triángulos en "posición de Tales"

La comprobación de que esta proporción, exactamente la mitad, no varía al acercarnos o alejarnos del espejo hace saltar a la boca una pregunta natural (que aprendemos a formular bastante precozmente, en comparación con otras): ¿por qué? La respuesta a esta pregunta es a menudo difícil, incluso en matemáticas. Pero, gracias al poder de la demostración matemática, a veces podemos sustituir la causa o razón última por la verificación lógica. Esta certeza irrefutable, sin llegar a satisfacernos plenamente en todos los casos, al menos nos permite asegurar que no nos engañamos, algo extremadamente valioso y exclusivo del universo matemático.

Personalización

Podemos aprovechar muchas actividades para realizar distintas versiones de ellas de forma sencilla. Por ejemplo, en algunas actividades basta cambiar algunos valores numéricos o posiciones de puntos en la construcción (archivo GGB) para obtener situaciones similares pero no idénticas. Si conservamos el nombre de los objetos, modificando únicamente sus valores, podremos seguir beneficiándonos de los sistemas de comprobación o autoevaluación que la actividad pueda incorporar, pues los valores concretos generalmente no les afecta.

Otra forma de diversificar una actividad consiste, simplemente, en cambiar las preguntas del cuestionario. En este sentido, algunos applets son tan polivalentes que han sido etiquetados como "multiusos". Como ejemplo, GeoGebra nos permite recrear reproducciones ad hoc de material habitual, como fichas, reglas, transportadores, etc., lo que, además de salvar el posible inconveniente de falta de disponibilidad en número suficiente, permite la interacción de estos materiales en el escenario virtual.

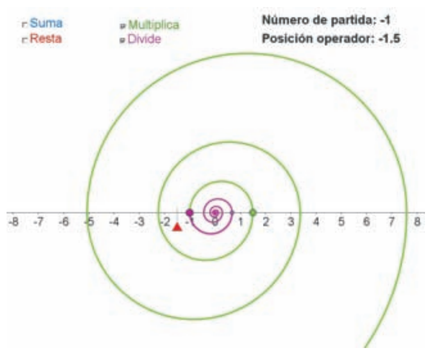


En la actividad *Escuadra y cartabón*[28] podemos analizar por sus características geométricas algunos instrumentos de dibujo muy conocidos

Práctica e iteración

El reconocimiento nos produce placer mental y la repetición es la forma más evidente de lograr ese reconocimiento. La observación de la repetición en el tiempo, como al reconocer un rostro o una melodía, y en el espacio, como al apreciar la simetría de una estrella de mar, es inherente al proceso de aprendizaje.

Ahora bien, la iteración mecánica, algorítmica, no ofrece más recompensa que un adiestramiento marcial en procedimientos puntuales. Gracias a las máquinas, a las calculadoras y a los ordenadores, podemos liberar gran parte de nuestro tiempo y dedicarlo a aprendizajes más creativos. Pocas cosas hay más alejadas de la auténtica matemática que un procedimiento rutinario. Si realmente deseamos adquirir y manejar estrategias poderosas y generales que nos permitan abordar una gran diversidad de problemas, debemos practicar, practicar mucho, todo lo que podamos y tal vez durante toda la vida, pero en procesos complejos, diversos e interconectados, abiertos y profundos.

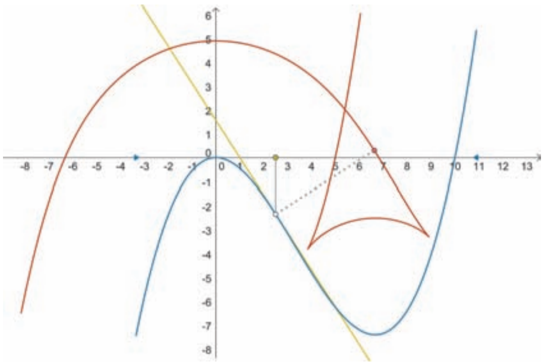


En *Más, menos, por, entre*[29] podemos visualizar el resultado de iterar sucesivas veces la misma operación aritmética

Conclusiones

En este artículo hemos recorrido rápidamente algunas de las características y ventajas que podemos disfrutar con actividades como las que encontramos en el Proyecto Gauss.

Estas actividades pueden servir de medio conductor para un gran número de conexiones de muy diversa naturaleza: conexiones entre imágenes estáticas y dinámicas, entre imágenes físicas y mentales, entre matemáticas y realidad, entre distintas áreas de las matemáticas y entre estas y otras áreas del conocimiento, entre diferentes conceptos y representaciones, entre percepción y lógica, entre opinión y argumentación., entre orden y belleza...



La técnica de trazado *Offset*[30] puede servir de cauce para el estudio de la curvatura de la gráfica de una función

El acceso a los ordenadores e Internet está permitiendo que, paulatinamente y en todo el mundo, las aulas de matemáticas puedan convertirse en verdaderos laboratorios, bolas de cristal en donde profesoras, profesores, alumnas y alumnos podamos explorar el universo matemático.

La presentación de escenarios suficientemente ricos en contenidos matemáticos para animar a su exploración, como puente entre la acción física y la proyección mental, guiados por cuestionarios graduados que estimulen la interacción con el medio, puede favorecer una visión de las matemáticas mucho más creativa, mucho más apasionada y mucho más humana. Es decir, mucho más auténticamente matemática. ■

NOTAS

1 http://geogebra.org
2 http://ite.educacion.es
3 http://recursostic.educacion.es/gauss/web
4 http://plane.gob.es/escuela-20
5 http://geogebra.es
6 Centro Internacional de Encuentros Matemáticos, Castro Urdiales, http://www.ciem.unican.es
7 http://geometriadinamica.es
8 ESO > Geometría > Cuerpos
9 ESO > Geometría > Cuerpos
10 http://recursostic.educacion.es/gauss/web/materiales_didacticos/materiales_didacticos.htm
11i ESO > Estadística y Probabilidad > Recuento
12 ESO > Geometría > Grupos de isometrías
13 ESO > Funciones > Características
14 ESO > Funciones > Características
15 ESO > Geometría > Figuras curvas
16 Primaria > Geometría > Polígonos
17 ESO > Estadística y Probabilidad > Estimación
18 ESO > Álgebra > Ecuaciones y sistemas
19 R. Losada, http://geogebra.es/color_dinamico/color_dinamico.html
20 ESO > Funciones > Funciones concretas
21 ESO > Geometría > Cuerpos
22 ESO > Funciones > Funciones concretas
23 ESO > Geometría > Procedimientos
24 Primaria > Geometría > La necesidad de medir
25 Primaria > Geometría > Escalas y planos
26 ESO > Estadística y Probabilidad > Estimación
27 ESO > Geometría > Tales y Pitágoras
28 Primaria > Geometría > Ángulos
29 ESO > Aritmética > Patrones
30 ESO > Funciones > Características

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Losada, R (2007). GeoGebra: La eficiencia de la intuición. *Gaceta de la RSME* vol. 10.2, pp. 223-239.

Este artículo fue recibido en SUMA en diciembre de 2010 y aceptado para su publicación en julio de 2011