suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
91
julio 2019

sumario

FESPM & Cía

Suma *digital <revistasuma.es>*

suma+ 91
pp. 3-6

Ahora somos un poco más elegantes

El viernes 14 de junio, a propuesta de la ministra de Educación y Formación Profesional, María Isabel Celaá Diéguez, y previa deliberación del Consejo de Ministros en su reunión del día 14 de junio de 2019, se nos concedió, por el Real Decreto 383/2019, la Corbata de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio.

La Orden Civil de Alfonso X El Sabio se destina a premiar a las personas físicas y jurídicas y a las entidades tanto españolas como extranjeras, que se hayan distinguido por los méritos contraídos en los campos de la educación, la ciencia, la cultura, la docencia y la investigación o que hayan prestado servicios destacados en cualquiera de ellos en España o en el ámbito internacional.

La categoría de la corbata es la más alta distinción destinada a corporaciones, instituciones, personas jurídicas, organismos o entidades públicas o privadas.

Este reconocimiento ha sido posible gracias al trabajo de los miles de mujeres y de hombres que desde su fundación han participado de una manera u otra en el desarrollo de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM). Que después de su jornada diaria, en el aula, dedican su tiempo libre a su mejora profesional y la mejora del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas en general.

La FESPM se fundó en el año 1988, formada en un principio por las sociedades Aragonesa, Canaria y las dos existentes en aquellos momentos en Andalucía (que luego se convertiría en la SAEM «Thales»). Se fundó con los fines de:

- Orientar a las sociedades federadas en el objetivo de mejorar la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles. Asesorar a las mismas en cuantos problemas e iniciativas se planteen.
- Representar a las sociedades ante los poderes públicos, entidades y organismos.

— Estimular y organizar el intercambio de información entre las sociedades federadas.
— Promover encuentros nacionales e internacionales para debatir sobre la enseñanza de las matemáticas.

Desde entonces hasta la fecha, la federación ha seguido un proceso continuo de crecimiento, hasta llegar a estar formada en la actualidad por 20 sociedades y contar con más de 6 000 socios, de todas las etapas educativas.

Además hemos impulsado la creación de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) <http://www.fisem.org/> y de la Federación Europea de Asociaciones de Profesores de Matemáticas (FEAPM).

También es miembro del Comité Español de Matemáticas (CEMAT) <http://matematicas.uclm.es/cemat/es/>, ostentando en la actualidad la presidencia de su Comisión de Educación.

En todo este tiempo la FESPM se ha caracterizado por realizar un trabajo riguroso en formación del profesorado bajo la premisa de la formación entre iguales. Donde la cooperación ha primado a la competición y la constitución de redes de intercambio de experiencias y buenas prácticas se ha impuesto a los discursos de los nuevos «gurús» que venden recetas mágicas que solo ellos conocen, pese tener nula o poca experiencia docente garantizando el éxito si las abrazamos sin ningún cuestionamiento. Cuando todas y todos sabemos que en educación no hay certezas absolutas, solo podemos encontrar modelos locales que en algunas circunstancias funcionan relativamente bien.

Ejemplo de estos son las Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), los seminarios federales (lugar de encuentro, análisis y discusión sobre temas que se considera de interés para los asociados y para los profesores de matemáticas en general), jornadas/encuentros sobre un tema monográfico, la revista *Suma*, las múltiples publicaciones del Servicio de Publicaciones o la presencia en las redes sociales. También, junto a la Real Sociedad Matemática Española (RSME) organizamos bienalmente la Escuela Miguel de Guzmán.

En este campo tiene especial relevancia el apoyo al uso de las tecnologías en el aula. Ejemplo de esto es la apuesta decidida por el uso de programas, como GeoGebra, con la creación de institutos específicos adscritos a muchas de las sociedades federadas y la creación de redes de cooperación tanto europeas como latinoamericanas.

También merece una mención especial la apuesta por el uso de las calculadoras. En la FESPM pensábamos que a estas alturas del siglo XXI el debate sobre el uso de las calculadoras en las clases de matemáticas estaría superado y nos ocuparíamos de los nuevos retos que nos ofrecen las tecnologías de la información (redes sociales, aplicaciones para móviles, tabletas…). Pero aunque la investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado que el uso de tecnología, calculadoras en particular, favorece el aprendizaje de ciertos procesos y conceptos y ayuda a superar algunos obstáculos, estas innovaciones no se ven reflejadas en el día a día de la mayoría de aulas y no se encuentran entre las que se presentan en los libros de texto habituales.

Por eso la FESPM ha decidido continuar manteniendo abierto el debate y procurando proporcionar al profesorado de matemáticas que lo desee, un abanico de posibilidades para abordar el extenso currículum de matemáticas de la ESO integrando el uso de la calculadora científica.

Otro foco de interés al que le dedicamos mucho esfuerzo es el alumnado. Esto se puede ver en que ya llevamos 30 ediciones de nuestra Olimpiada Matemática, en la que han participado miles y miles de niñas y niños de segundo de la ESO (en su momento octavo de EGB) en un ambiente de cooperación resolviendo problemas de matemáticas, bien individualmente o en equipo, realizando paseos matemáticos… Desde 2018 se ha iniciado la Olimpiada Nacional dirigida al alumnado de Educación Primaria, las dos primeras ediciones han tenido lugar en Melilla.

Figura 1. La Corbata y otras distinciones de la Orden Civil de Alfonso X el Sabio

También dedicado al alumnado celebramos cada 12 de mayo el Día escolar de las matemáticas. La fecha elegida coincide con el nacimiento del insigne matemático y educador español Pedro Puig Adam. Con él se inició, en buena parte, la renovación de la enseñanza de las matemáticas en España en la década de los cincuenta del siglo pasado, movimiento del que la FESPM se siente heredera. Desde entonces, cada año ha tenido lugar esta celebración centrándola en un tema que relaciona las matemáticas con algún otro campo del conocimiento.

En el ámbito de la cooperación internacional participamos en el proyecto europeo «Mobile MAthsTRails in Europe» (MOMATRE), programa Erasmus + que tendrá su continuidad con «Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe» (MaSCE). Así como venimos realizando un encuentro anual con nuestros compañeros portugueses de la Associação de Professores de Matemática (APM).

Estas son algunos de los méritos y circunstancias, como recoge el Real Decreto de concesión, que han hecho acreedora a la FESPM de la más alta distinción del Estado en los campos de la educación, la ciencia, la cultura, la docencia y la investigación.

El acto de entrega de la distinción, en Madrid el 4 de julio de 2019, coincidió con el segundo día de las 19 JAEM en A Coruña (del 3 al 6 de julio). Asistieron al evento el secretario y el presidente de la FESPM, así como otros miembros de la FESPM, tal como muestra la fotografía.

Figura 2. De izquierda a derecha: Alejandro Tiana Ferrer (secretario de Estado de Educación), Luis Balbuena Castellano, María Jesús Luelmo Verdú, María Isabel Celaá Diéguez (ministra de Educación y Formación Profesional), Francisco Martín Casalderrey, Agustín Carrillo de Albornoz Torres y Onofre Monzó del Olmo

+⁺

artículos

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 9-14

Matemática a enseñar o matemática para enseñar. El caso del cálculo de áreas de figuras planas

Gabriel R. Soto
Cintia M. Negrette
Anahí L. Díaz

Las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas problemática han comenzado a focalizarse en la construcción de un conocimiento matemático profesional necesario para buenas prácticas docentes. Presentamos un camino hacia el horizonte matemático del concepto de áreas de figuras planas. Esto nos permite tensionar la matemática escolar y la matemática de la formación, así como consolidar un esquema para el diseño de dispositivos de formación profesional de profesores de matemática, tanto en formación como en ejercicio.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, Horizonte del conocimiento matemático, Desarrollo profesional de profesores de matemática.

Mathematics to teach or mathematics for teaching. The case of computing areas of plane figures

Research on the teaching of mathematics has begun to focus on the construction of a professional mathematical knowledge necessary for good teaching practices. We present a path towards the mathematical horizon of the concept of area of plane figures. This allows us to constrat the school mathematics and the mathematics of teacher´s development, as well as to consolidate a scheme for the design of professional development devices for both pre- and in-servce mathematics teachers.

Keywords: Mathematics knoledge for teaching, Horizon content knowledge, Profesional development of mathematics teachers.

¿Cuánta matemática tiene que saber quien enseña matemática? La vigencia de esta pregunta se evidencia en los trabajos de Klein (2016), Santaló (1993), Ma (2010), Ball, Hill y Bass (2005), Usiskin (2002), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), Godino (2009), Proulx (2009), Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Estos autores proponen tensionar la matemática escolar y la matemática de la formación, para lograr una comprensión más profunda acerca de la matemática escolar, como una herramienta efectiva de desarrollo profesional.

Inspirados en el concepto de *horizonte del conocimiento matemático* (HCK), introducido por Ball, Thames y Phelps (2008: 403) y que identifica el tipo de conocimiento matemático que un profesor debe saber para establecer relaciones entre todos los conceptos matemáticos incluidos en el mapa curricular de la escuela, comenzamos a buscar oportunidades para explicitar dichas tensiones: números racionales (Soto, 2016), secciones cónicas (Soto, 2012) y resolución de ecuaciones algebraicas (Soto, 2015), entre otras.

El presente trabajo contiene el análisis del horizonte matemático del concepto de área de figuras planas, que funcionó como base de un dispositivo de formación destinado a profesores de enseñanza primaria y secundaria en ejercicio.

Artículo solicitado por *Suma* en diciembre de 2017 y aceptado en abril de 2018

Uno de los objetivos de este dispositivo es el de analizar cómo se deben modificar las formas de calcular áreas de figuras planas a medida que sus propiedades geométricas y topológicas cambian. Empezamos identificando al triángulo como figura básica para calcular áreas de *polígonos simples* para mostrar cómo la noción de triangulación de figuras planas se modifica cuando la propiedad de *simple* se abandona. Esto nos permite obtener la fórmula general de Green para el cálculo de áreas de figuras planas, que aparece recurrentemente en la formación de profesores de matemáticas.

Áreas de figuras planas

El cálculo del área de rectángulos ha sido un problema enfrentado por la humanidad desde hace más de 3 000 años aproximadamente (Soto, 2015), y este concepto y su cálculo se introducen primeramente en la escuela. Justamente, el concepto de área de figuras planas y su cálculo está presente en los diseños curriculares a partir del cuarto y hasta el noveno año de escolaridad en Argentina, (ver Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, 2018). Si nos concentramos en el cálculo de áreas de triángulos: la fórmula más popular en los programas de la escuela es $(b \times h)/2$, donde b es la medida de alguna de las bases del triángulo y h es la altura correspondiente. La validez de esta fórmula se basa en el hecho de que siempre un triángulo se puede pensar como la mitad de un rectángulo (¿por qué?). Y es a partir de la fórmula para calcular el área de un triángulo como se obtienen fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos de n lados como se indica en la figura 1.

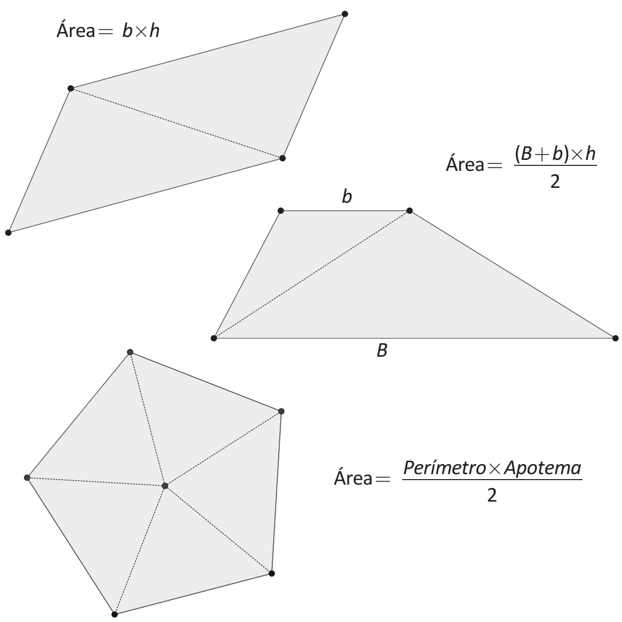


Figura 1. Polígonos para los que usualmente se obtienen en la escuela fórmulas para el cálculo del área

Es importante puntualizar que existen otras fórmulas para calcular el área de un triángulo, algunas de las cuales se presentan en el siguiente :

Teorema (*Fórmulas para el cálculo del área de un triángulo*). Dado un triángulo *ABC,* donde las longitudes de sus lados son respectivamente *c*, *a* y *b*, sus ángulos son *A, B* y *C* y el radio de la circunferencia que contiene a sus vértices es R, su área se puede obtener mediante las siguientes fórmulas:

i. $A=\sqrt{s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}$ donde $s=\frac{a+b+c}{2}$

ii. $A=\frac{a\times b\times \operatorname{sen} C}{2}$

iii. $A=\frac{\frac{a^2}{2}\times \operatorname{sen} B\times \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B+C)}$

iv. $A=\frac{a\times b\times c}{4R}$

La primera fórmula es la fórmula de Herón. Una demostración muy interesante se puede encontrar en Nelsen (2001). La prueba de la validez de este teorema queda a cargo del lector.

Uno de los ingredientes para obtener las fórmulas de áreas de la figura 1 es la posibilidad de *triangular* figuras planas. Para fijar ideas necesitamos la siguiente definición:

Sea *P* un polígono simple de *n* lados. Una *triangulación* para *P* es una descomposición de *P* en triángulos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. cada triángulo está totalmente contenido en *P*;
2. los vértices de cada triángulo son vértices de *P*;
3. los triángulos dos a dos tienen a lo sumo un lado en común.

Se sigue entonces que la descomposición del pentágono regular de la figura 1 no satisface una de las condiciones de la definición (¿por qué?). Sin embargo las descomposiciones del pentágono de la figura 2 si satisfacen las condiciones de la definición.

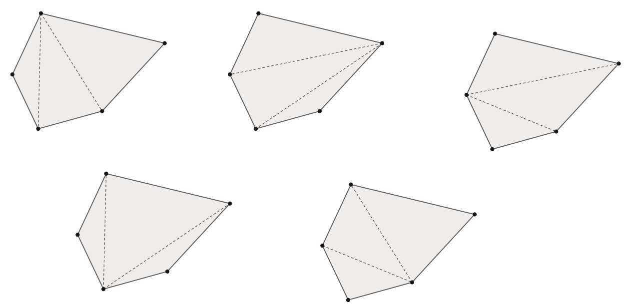


Figura 2. Triangulaciones diferentes de un pentágono

Este tipo de triangulaciones depende de la existencia de diagonales en polígonos simples entendidas como segmentos cuyos extremos son vértices de *P* y están contenidas en *P*. El hecho de que siempre es posible triangular una figura plana simple de acuerdo a la anterior definición se resume en el siguiente teorema:

> **Teorema** (*de triangulación*). Todo polígono *P* simple de *n* vértices puede ser particionado en triángulos añadiendo cero o más diagonales.

La demostración de este resultado se puede ver en O'Rourke (1993). Se basa en que todo polígono de *n* vértices tiene un vértice convexo (o un ángulo interior menor a 180º) y una diagonal, como las definidas en la figura 3.

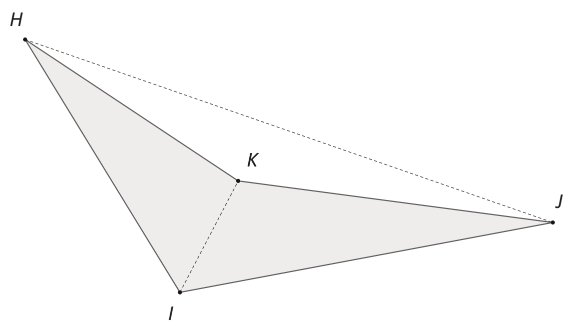


Figura 3. El cuadrilátero *HIJK* tiene dos diagonales, una totalmente contenida en el interior y la otra no.

Cada triangulación de un polígono de *n* vértices utiliza *n* – 3 diagonales y produce *n* – 2 triángulos (¿por qué?) (O'Rourke, 1993). Leonard Euler, en 1758 aproximadamente, demostró que cualquier polígono convexo de *n* lados admite $t_n = \dfrac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}$ triangulaciones diferentes.

Este número, se denomina *el n-ésimo número de Catalan* (Gardner, 2014). Un detalle interesante es que en 1730 el matemático chino Antu Ming estudió estos números, independientemente del trabajo de Euler (Larcombe, 2011). Por ejemplo, el número de triangulaciones diferentes de un pentágono es $t_n = 5$, como se muestra en la figura 2.

Como vivimos en el mundo de las coordenadas, gracias a René Descartes (¡por supuesto!), y tres puntos no alineados determinan un único triángulo (¿por qué?), resulta interesante preguntarse si es posible utilizar las coordenadas de los vértices del triángulo para obtener su área.

> **Teorema** (*Fórmula para el área de un triángulo*). El área de un triángulo de vértices *A, B* y *C*, denotado por (*A, B, C*), cuyas coordenadas son respectivamente (x_1, y_1), (x_2, y_2) y (x_3, y_3), será:

$$(A,B,C) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad [1]$$

Para demostrarlo basta considerar los lados del triángulo como vectores y usar el producto vectorial. Ver Poole (2007: 26), Grossman (2007: 257) y Klein (2016: 5), entre otros.

La fórmula [1] involucra el determinante de una matriz 3×3, lo que sugiere que el orden en el que enumeramos los vértices del triángulo va a fijar su signo: si los vértices del triángulo se recorren en sentido antihorario, va a tener signo positivo (¿por qué?). En general, para un polígono simple de *n* lados se tiene el siguiente resultado, conocido como la *fórmula de la lazada* (Braden, 1986):

> **Teorema**: Si los vértices de un polígono simple de *n* lados de coordenadas (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_n, y_n), se ordenan de acuerdo al recorrido antihorario de su perímetro, entonces su área es:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \qquad [2]$$

donde $x_{n+1} = x_1$ e $y_{n+1} = y_1$

La demostración se basa en la posibilidad de triangular cualquier polígono simple, haciendo inducción sobre el número de vértices.

Hasta ahora todos los resultados asociados al cálculo de áreas encerradas por polígonos requieren que los mismos sean simples, es decir, polígonos cuyos lados no se intersecten entre sí en puntos que no sean sus vértices. Cabe preguntarse entonces si es posible generalizar la fórmula [2] para calcular el área de un polígono *no simple*, como el que se muestra en la figura 4.

El resultado establecido en el teorema de triangulación para un polígono depende de la existencia de diagonales, entendidas estas como se mencionó anteriormente. Ahora bien, en el caso de polígonos no simples, la existencia de diagonales enteramente contenidas en el interior deja de ser cierta como se puede observar en la figura 4.

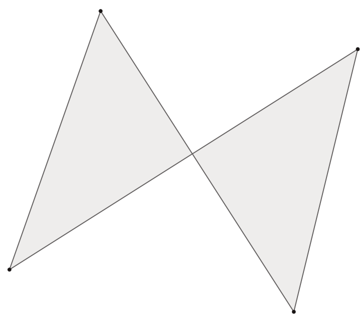


Figura 4. Polígono no simple
sin diagonales contenidas en su interior.

Supongamos que etiquetamos con 1, 2, 3… $n-1$, n los vértices del polígono que queremos triangular, de modo que sean recorridos en sentido antihorario. Si denotamos $(1, 2, \ldots, n)$ el área del polígono $1,2,3,\ldots n{-}1,n$ y si 0 es cualquier punto del plano, entonces el área del polígono estará dada por el siguiente resultado:

Teorema (*Fórmula para el área de un polígono*). Si la frontera del polígono se recorre en sentido antihorario $1,2,\ldots,n-1,n$, su área es:

$$\begin{aligned}(1,2,\ldots,n) = (0,1,2)+(0,2,3)+\ldots \\ \ldots+(0,n-1,n)+(0,n,1)\end{aligned} \qquad [3]$$

donde cada terna representa el área del triángulo cuyos vértices son las coordenadas de dicha terna. Cada área se calcula utilizando la fórmula [1]. Más aún, $(1, 2, \ldots, n)$ no depende de la elección del punto 0.

Para demostrarlo se hace inducción sobre el número de vértices (Klein, 2016: 12).

Si queremos calcular el área del polígono *HIJK* de la figura 3 usando la fórmula [3], tenemos que enumerar sus vértices. Por ejemplo, $H = 1$, $I = 2$, $J = 3$ y $K = 4$ entonces la fórmula [3] se lee:

$$\begin{aligned}(1,2,3,4) = (0,1,2)+(0,2,3) \\ +(0,3,4)+(0,4,1)\end{aligned}$$

donde el punto 0 coincide con H. Entonces $(0, 1, 2) = 0$ (¿por qué?), $(0, 2, 3)$ corresponde al área del triángulo *HIJ*, $(0, 3, 4)$ corresponde al área del triángulo *HJK* que es negativa al ser recorrido en sentido horario y $(0, 4, 1) = 0$ (¿por qué?).

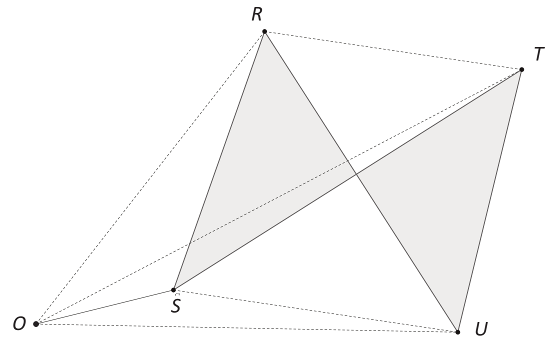


Figura 5. Triangulación del cuadrilátero *RSTU* utilizando un punto auxilar *0*.

Ejercicio 1

Para el polígono que aparece en la figura 4, utilizar la triangulación sugerida en la figura 5 para determinar las coordenadas de sus vértices de modo tal que el área encerrada resulte cero, positiva o negativa.

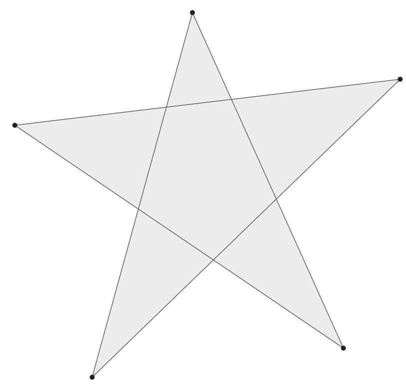


Figura 6. Estrella pitagórica

Ejercicio 2

Calcular el área encerrada por la estrella pitagórica que aparece en la figura 6 utilizando la fórmula [3].

La idea de triangulación que utiliza la fórmula [3] sirve también para aproximar áreas de figuras curvilíneas. Veamos el caso del área encerrada por una circunferencia de centro O y radio r. Para ello dividamos la región encerrada por la circunferencia en triángulos ORT como indica la figura 7. Si el punto O es el origen, utilizando la representación de puntos del plano mediante coordenadas polares y la fórmula [4], se tiene que:

$$(O,R,T) = \frac{r^2 \times \operatorname{sen} \varepsilon}{2} \quad \text{(¿por qué?)}$$

Notar que el área (O, R, T) es positiva, (¿por qué?). Si definimos $\varepsilon = 2\pi/n$, donde n es el número de triángulos de la triangulación, el área del círculo se aproxima por:

$$\frac{n \times r^2 \times \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}}{2}$$

Si aumentamos el número de triángulos, o equivalentemente $n \to \infty$, el área del círculo resulta $A = \pi \times r^2$.

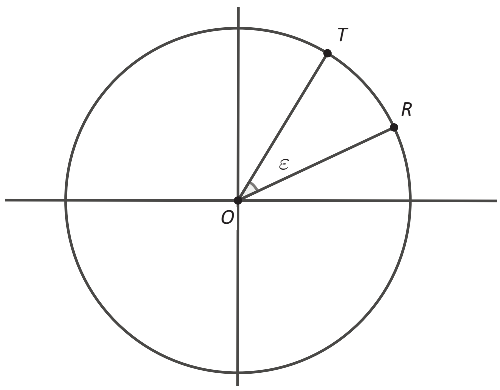


Figura 7. Triangulación de una circunferencia

Si pensamos ahora en una figura curvilínea cualquiera, podemos aproximar su área como hicimos con la circunferencia y estableciendo el sentido de recorrido antihorario, obtenemos el siguiente corolario del conocido teorema de Green (Marsden y Tromba, 2004: 505):

> **Teorema** (*Área encerrada por curvas planas*). Si la frontera de una curva cerrada simple se recorre en sentido antihorario, el área encerrada por ella es:

$$\frac{1}{2}\oint (x\,dy - y\,dx) \qquad [4]$$

Para demostrarlo seguimos las ideas de Klein (2016: 14). Sin pérdida de generalidad tomamos el punto O como el origen de coordenadas del plano cartesiano. Definiendo el triángulo OPP_1 cuyos vértices tienen coordenadas $(0, 0)$, (x, y) y $(x + dx, y + dy)$, como se muestra en la figura 8, entonces tenemos:

$$(O,P,P_1) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x\,dy - y\,dx)$$

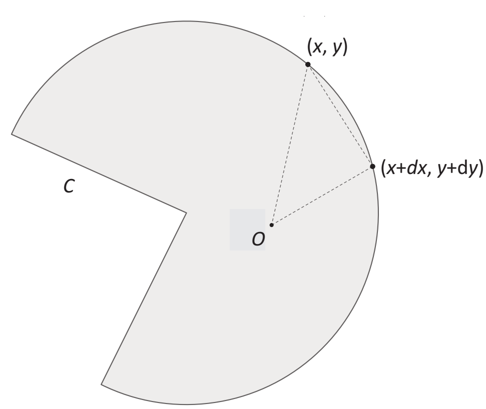


Figura 8. Triangulación del área encerrada por la curva C

Para aproximar el área encerrada por la curva C, sumamos las áreas de todos los triángulos como el anterior mediante los que particionamos el área. Si hacemos que $dx \to 0$ y $dy \to 0$ simultáneamente obtenemos la clásica fórmula de Green [4].

Reflexiones finales

Este trabajo pretende presentar una forma de tensionar la relación entre la matemática escolar y la matemática profesional en el contexto de dispositivos de formación docente. Hacer explícito el horizonte de un concepto de la matemática escolar ofrece una herramienta de desarrollo profesional tanto para futuros profesores como para profesores en ejercicio, así como también permite establecer relaciones con generalizaciones de conceptos enseñados —la fórmula de Herón es un caso particular de la fórmula de Bramagupta (Coxeter y Greitzer, 2013: 73-76)—, o con matemática especializada (Rosenberg, Spillane y Wulf, 2008).

Los caminos hacia el horizonte no son únicos, por tanto el presente trabajo lejos está de ser exhaustivo. A modo de cierre queremos dejar las preguntas para la reflexión que emergieron en la implementación de este dispositivo sobre las prácticas docentes:

— ¿Es necesario enseñar un catálogo de fórmulas para hallar el área de figuras planas?
—¿Qué saberes movilizan los estudiantes alrededor del concepto de área?
— ¿Cómo esta realización del horizonte matemático del concepto de área puede incidir en la forma de pensar y planificar la ense-

ñanza del concepto de área y su cálculo en la escuela?

— ¿Cómo incide el uso de las tecnologías (software de geometría dinámica) en la pertinencia de este horizonte matemático al momento de pensar la enseñanza del concepto de cálculo de área de figuras planas?

Este trabajo fue financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (FI 028). Agradecemos a María de Gracia Mendonça, Mónica González, Eliana Gómez, Llanet Da Luz Pereira y Nelson Villagra sus importantes observaciones durante el desarrollo de este trabajo.

Referencias bibliográficas

Ball, D., H. Hill y H. Bass (2005), «Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide?», *American Educator* n.° 29, 14-17, 20-22, 43-46.

Ball, D., M. Thames y G. Phelps (2008), «Content knowledge for teaching: What makes it special?», *Journal of Teacher Education* n.° 59, 389-406.

Braden, B. (1986) «The Surveyor's Area Formula», *The College Mathematics Journal* n.° 17, 326-337.

Carrillo, J., N. Climent, L. C. Contreras y M. C. Muñoz-Catalán (2013), «Determining specialized knowledge for mathematics teaching», *CEMRE 8. Working group 17*, 2985-2994.

Coxeter, H. S. M., y S. L. Greitzer (2013), *Retorno a la Geometría*, Red Olímpica, Buenos Aires.

Gardner, M. (2014), *The magic and mysteries of numbers*, Scientific American, New York.

Godino, J. (2009), «Categorías de análisis de los conocimientos del Profesor en Matemática», *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* n.° 20, 13-31.

Grossman, S. (2007), *Álgebra Lineal (6.ª Edición)*, Mac Graw Hill Interamericana, México.

Kichenassamy, S. (2009), «Brahmagupta's derivation of the area of a cyclic quadrilateral», *Historia Mathematica* n.° 37, 28–61.

Klein, F. (2016), *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volumne II. Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

Larcombe, P. J. (2000), «The 18th Century Chinese Discovery of the Catalan Numbers», *Mathematical Spectrum*, n.° 32, 5-7.

Ma, L. (2010), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Routledge, Nueva York.

Marsden, J., y A. Tromba (2004), *Cálculo vectorial. (5.ª edición)*, Pearson Addison Wesley, Madrid.

Ministerio de Educación (2018), *Colección Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP)*, Argentina. Documentos obtenidos el 18 de marzo de 2019 en: <https://www.educ.ar/recursos/132584/coleccion-nucleos-de-aprendizaje-prioritarios-nap?>.

Nelsen, R. (2001), «Heron's Formula via proofs without words», *The College Mathematical Journal* n.° 32, 290-292.

O'Rourke, J. (1993), *Computational Geometry in C*, Cambridge Press University, London.

Poole, D. (2007), *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, Cengage Learning, México.

Proulx, J. y N. Bednarz (2009), «Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire ? Un éclairage fondé sur une analyse des recherches», *Proceedings of Espace Mathématique Francophone (EMF-2009)*. Dakar, Senegal, 129-142.

Rosenberg, S., M. Spillane y D. Wulf (2008), «Heron triangles and Moduli Spaces», *Mathematics Teacher* n.° 101, 656-663.

Santaló, L. (1993), *La geometría en la formación de profesores*, Red Olímpica, Buenos Aires.

Schoenfeld, A., y J. Kilpatrick (2008), «Toward a theory of proficiency in teaching mathematics», en T. Wood (Ed. serie) y D. Tirosh (Ed. vol) I*nternational Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, Sense Publishers, Rotterdam, 341-376.

Soto, G. (2012), «Secciones Cónicas: ¿y esto, para qué me sirve?», *Serie "B" Trabajos de Matemática. Notas de Cursos XXXV. Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina*, Vol. 61, Editorial Sima, 69-92.

— (2012), *(Des)-haciendo matemática* (2.ª Edición), Editorial Universitaria Patagónica, Buenos Aires.

— (2016), «Matemática a enseñar o para enseñar. El caso de las fracciones», en P. Scott y Á. Ruíz (Eds), (2015). *Educación Matemática en las Américas, Volumen 3: Formación Continua*, Comité Interamericano de Educación Matemática, República Dominicana, 341-350.

Usiskin, Z. (2002), «Teachers' Mathematics: A Collection of Content Deserving To Be A Field», obtenido el 18 de abril del 2018 en: <http://www.cbmsweb.org/archive/NationalSummit/WG_Speakers/usiskin.pdf>.

Gabriel R. Soto
Cintia M. Negrette
Anahí L. Díaz
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
<gsoto@unpata.edu.ar>

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 15-22

Pensamiento computacional y aprendizaje de las matemáticas a través de Scratch

Víctor López
Edelmira Badillo
Cristina Simarro
Digna Couso

Presentamos una breve secuencia formativa realizada en la asignatura de Aprendizaje de las Matemáticas con futuros maestros del grado de Educación Primaria. Se propone a los estudiantes diseñar mediante el lenguaje de programación por bloques Scratch un pequeño videojuego del Pong, donde una pelota se mueve aleatoriamente y rebota por toda la pantalla, y mediante una pala se debe evitar que la pelota se cuele por la parte inferior de la pantalla. El diseño de este videojuego lleva a los estudiantes a enfrentarse en pequeños grupos a distintos retos, tanto matemáticos como computacionales, a partir de los cuales surgen diferentes estrategias de resolución. A través de la discusión de las estrategias llevadas a cabo por los estudiantes pretendemos identificar algunas de las oportunidades didácticas que ofrece Scratch en la enseñanza y aprendizaje de la matemática escolar.

Palabras clave: Scratch, Programación, Pensamiento computacional, Geometría, Resolución de problemas.

Computational thinking and mathematics learning using Scratch

We present a brief instructional sequence in Mathematics Education course for pre-service primary school teachers. Students have to design a simple Pong videogame using programming language Scratch, in which a ball moves randomly around the screen, and players have to move a spade to avoid the ball slip down. The design process brings students to face both mathematic and computational challenges, and different strategies arise. By discussing those strategies, we aim to identify some of the learning opportunities offered by Scratch for mathematics teaching and learning in school.

Keywords: Scratch, Programming, Computational thinking, Geometry, Problem solving.

En los últimos años ha habido una eclosión de herramientas educativas vinculadas a las actividades de programación, robótica y otras actividades que se engloban dentro del paraguas llamado «pensamiento computacional». Esta idea aparece actualmente en muchos de los nuevos currículos y planes educativos. Por ejemplo, la idea de «usar las matemáticas y el pensamiento computacional» se considera una de las ocho prácticas científicas clave del K12 Next Generation Science Education Standards (NRC, 2012), y también es uno de los elementos centrales del reciente paradigma educativo STEM o STEAM (Simarro, López, Cornellà, Peracaula, Niell y Estebanell, 2016). Las actividades de programación y robótica se multiplican tanto en contextos formales (en asignaturas de programación, vinculada a la enseñanza-aprendizaje de otros contenidos curriculares, a través de proyectos STEAM) como no formales (extraescolares, clubs de programación, concursos y ligas de diseño de robots), y su presencia se observa en todas las etapas educativas (desde las *beebots* preescolares hasta las competiciones universitarias de robots).

Detrás de este enfoque educativo subyace la idea de que aprender a pensar computacionalmente (y aprender pensando computacionalmente) es clave para la resolución de problemas

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

y para el diseño de todo tipo de soluciones (Wing, 2006), usando estrategias como la división de problemas complejos en módulos de tamaño inferior, la secuenciación de procesos largos y complejos en *pasos*, la organización de datos reconociendo patrones lógicos, la generalización de casos concretos para llegar a situaciones abstractas y generalizables, el uso de algoritmos para automatizar soluciones, o la validación y revisión constante de las soluciones propuestas (Selby y Woollard, 2014). Por un lado, este enfoque construccionista está en clara sintonía con el enfoque indagativo y modelizador del ámbito científico (Wagh, Cook-Whitt y Wilensky, 2017), pero por el otro, no se trata de habilidades excluyentes para los profesionales STEM, sino de competencias transversales para la ciudadanía (Zapata-Ros, 2015). En este sentido, autores como Brennan y Resnick (2012) han puesto el énfasis en que aprender a pensar computacionalmente no pasa solamente por aprender conceptos computacionales (secuencias, bucles, paralelismos, eventos, condicionales, operadores y datos), sino además por participar de las prácticas computacionales (incrementar e iterar, testear y depurar, reutilizar y combinar, abstraer y modularizar) y de las perspectivas computacionales (expresar, conectar y cuestionar). Estas prácticas y perspectivas, además, ayudan a entender la próxima naturaleza de las prácticas profesionales científicas, matemáticas e ingenieriles, cada vez más inmersas en un mundo digital y donde la modelización computacional ha redefinido la propia naturaleza de estas disciplinas (Weintrop y otros, 2016).

El lenguaje de programación Scratch

Dentro del amplio abanico de herramientas que promueven el desarrollo del pensamiento computacional, la plataforma de programación Scratch es sin duda la que más acogida y éxito está teniendo en la escuela (Maloney y otros, 2010). Heredero del lenguaje de programación LOGO, se trata de un sencillo lenguaje de programación por bloques desarrollado por el MIT (Massachusetts Institute of Technology) que puede ser usado tanto *online* como *offline*. Permite a los estudiantes a partir de 6 años crear y compartir una gran variedad de creaciones (animaciones y narraciones, presentaciones, imágenes interactivas, simulaciones, juegos, etc.), mediante la construcción de bloques de programación a partir de piezas, como si se tratara de un sencillo rompecabezas. Cada pieza constituye una línea de código, con los que el usuario puede definir variables, cambios en la apariencia de los personajes, funciones condicionales («si», «solo si», «siempre que», etc.), funciones lógicas y operadores matemáticos («y», «o», «+», «mayor que», etc.), así como los *inputs* que hagan ejecutar cada elemento del programa («al pulsar una tecla», «al mover el ratón», etc.). Los distintos colores (figura 1) representan diferentes tipos de funciones: azul para el movimiento de los objetos, morado para la apariencia, marrón para los eventos, verde para los operadores matemáticos y amarillo para los elementos de control. Su interfaz de programación permite ver a la vez el código que se crea (las piezas en bloques) y un escenario con personajes que interactúan según las reglas que se le determina con este código. Cada usuario puede guardar y compartir sus pequeños proyectos, pero también reusar los proyectos de otros usuarios.

Figura 1. Principales piezas de código que, debidamente conectadas y secuenciadas, permiten generar pequeños programas

Scratch, pensamiento computacional y aprendizaje de las matemáticas

Una de las áreas del conocimiento donde este lenguaje de programación ofrece mayor interés es la de matemáticas. Las primeras investigaciones en torno al papel de Scratch en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas resaltan su potencial en la construcción de significado de las ideas matemáticas. Benton, Hoyles, Kalas y Noss (2017) proponen un enfoque metodológico *ScratchMaths*, que resulta ser facilitador tanto para profesorado como alumnado en primaria para construir el concepto de algoritmo y de giro total de 360º en un polígono. A su vez, Calao, Moreno-León, Correa y Robles (2015) encuentran una mejora significativa del pensamiento matemático en grupos experimentales de estudiantes de sexto de primaria (11-12 años) que han recibido formación en Scratch cuando se evalúa sus habilidades de modelización matemática, razonamiento, formulación y resolución de problemas y comparación y ejecución de procesos y algoritmos. No es casual que el currículo de matemáticas para primaria en Cataluña, por ejemplo, incluya dentro de la dimensión «resolución de problemas», que la programación y la robótica educativa requieren estrategias que favorecen las habilidades de resolución de problemas. De igual manera, se resalta la importancia del papel de los recursos, como por ejemplo los materiales manipulativos, visuales y las TIC, puesto que favorecen la experimentación, el razonamiento y la comprensión de las ideas matemáticas, así como su transferencia para la interpretación de fenómenos del mundo (Burgués y Sarramona, 2013).

Un ejemplo de reto matemático y computacional: diseñar un mini-juego de Pong

Una actividad que ejemplifica este potencial educativo de Scratch para promover el pensamiento computacional en el área de matemáticas es el diseño del mini-juego llamado Pong. Es una actividad inspirada en la que propone Córdova (2013) con estudiantes de primaria, y consiste en definir los elementos básicos del juego y sus interacciones usando el lenguaje Scratch. En este juego, se espera que la pelota pueda moverse libremente por toda la superficie de la pantalla, y rebotar al tocar los laterales y el extremo superior (figura 2). El jugador, controlando el movimiento horizontal de la pala, debe interceptar la pelota siempre que se desplaza hacia el extremo inferior de la pantalla, hacerla rebotar y evitar así que el balón se cuele por la parte inferior de la pantalla. Este juego para un jugador es, de hecho, la versión previa para hacer un juego de Ping-Pong para dos jugadores, uno de los primeros videojuegos de primera generación que apareció en las máquinas recreativas de los años setenta del siglo pasado (David, 2004).

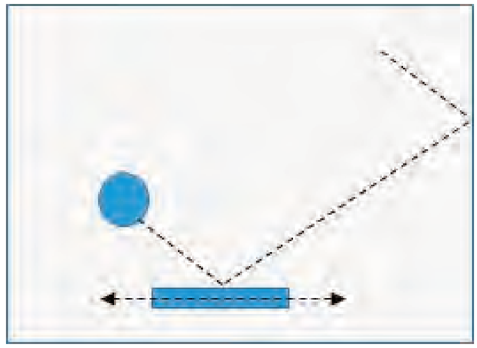


Figura 2. Representación de los elementos del juego Pong y de sus movimientos

Esta actividad no solo ha sido ampliamente usada en Scratch (en la plataforma hay decenas de programas hechos por estudiantes de todo el mundo), sino que se enmarca en la Competencia 1 del listado de competencias básicas del ámbito matemático (Burgués y Sarramona, 2013), que se concreta en la capacidad de traducir un problema en lenguaje matemático o una representación matemática utilizando variables, símbolos, diagramas y modelos adecuados.

Esta actividad ha sido realizada en el curso 2017-18 en la asignatura Aprendizaje de las Matemáticas, dentro del grado de Educación Primaria de la UAB. En ella han participado un total de 80 estudiantes, organizados en pequeños grupos de 3-4 miembros. La actividad se plantea en forma de taller, de 2 horas y 30 minutos de duración, y se enmarca en una secuencia formativa más amplia en la que los estudiantes posteriormente deben exponer las ideas clave desarrolladas durante el taller. Para guiar el trabajo en pequeños grupos, a lo largo del taller se plantea a los estudiantes tres retos:

— El reto de definir y ejecutar el movimiento del balón y de la pala.
— El reto de definir la interacción entre el balón y la pala.
— El reto de refinar o ampliar el juego para mejorar su funcionamiento e incorporar comportamientos que añadan realismo y motivación.

A través de los retos que se plantean al alumnado participante, a continuación, presentamos y discutimos cuáles son las estrategias de resolución que emergen en los diferentes grupos de trabajo, así como las oportunidades didácticas que identificamos tanto para desarrollar el pensamiento matemático como el computacional.

El reto de definir y ejecutar el movimiento del balón y de la pala

El taller, de hecho, empieza planteando a los estudiantes qué elementos debe tener el juego para funcionar. En una actividad de exploración de ideas previas seguida de una puesta en común en la pizarra digital (figura 3), los estudiantes identifican los objetos físicos; las magnitudes que definen el comportamiento de estos objetos físicos; las reglas que determinan la interacción entre los personajes; así como otros elementos que permitirían mejorar el juego, haciéndolo más realista o más emocionante para un jugador.

Una vez realizada la discusión inicial, se propone a los estudiantes el reto de definir y ejecutar el movimiento de los dos principales objetos que intervienen en el juego: el balón y la pala. Para ello, se les plantea la siguiente demanda:

a) El lenguaje Scratch tiene un conjunto de bloques de programación de color marrón llamado «Eventos», que son necesarios para ejecutar cada bloque de piezas. ¿De qué maneras se puede hacer ejecutar el movimiento de la pelota y el movimiento de la pala? ¿Qué diferencias existen y por qué?

b) El lenguaje Scratch tiene un conjunto de bloques de programación de color azul, que permiten definir el movimiento de los personajes. ¿De qué maneras se puede definir el movimiento de los objetos con Scratch y cuál es más conveniente para definir el movimiento de la pala y el movimiento de la pelota?

A partir de esta doble demanda (definir cada movimiento mediante bloques de programación y a su vez definir la manera en cómo se ejecuta cada bloque), afloran múltiples discusiones. Los estudiantes se percatan de las diferencias entre el movimiento del balón y de la pala: el balón se mueve en todas direcciones, mientras que la pala solo lo hace en el eje horizontal. Esto les lleva a preguntarse qué tipo de coordenadas ayudan a describir mejor cada movimiento, apareciendo así la distinción entre describir el movimiento mediante los ejes X e Y (coordenadas cartesianas) o mediante pasos en una dirección y giros respecto esta dirección (coordenadas polares).

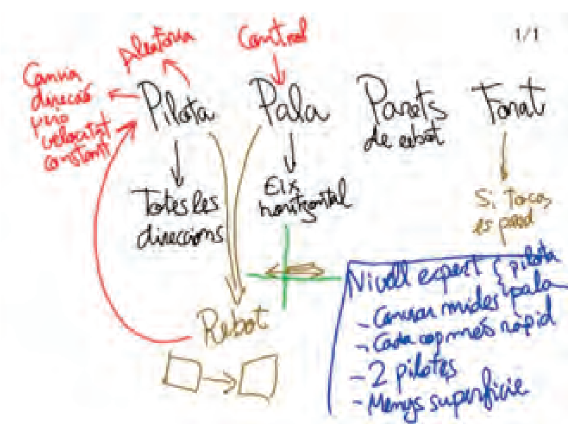


Figura 3. Puesta en común en la pizarra de los elementos que debe contener el juego

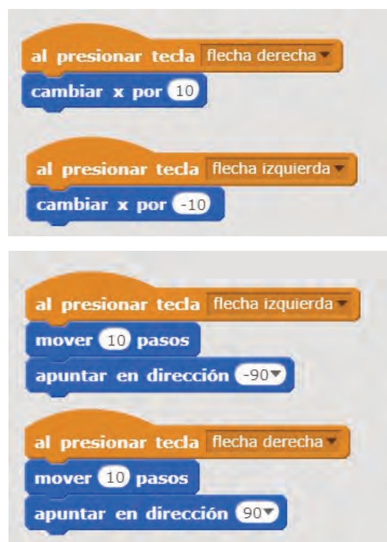


Figura 4. Dos propuestas diferentes para definir el movimiento de la pala, mediante coordenadas cartesianas (arriba) y polares (abajo)

En la figura 4 se observan las dos propuestas para definir el movimiento de la pala, ambas pensadas para que el jugador controle este movimiento con las flechas laterales del teclado. Mientras un grupo aboga por definir el desplazamiento lateral sumando y restando valores a la posición X de la pala, el segundo grupo aboga por girar la pala 180º y hacerla avanzar siempre hacia la dirección en la que apunta. A su vez, este disenso lleva a una nueva cuestión: ¿cuál es la mejor solución desde el punto de vista computacional? Esto permite plantear una importante perspectiva computacional: ¿todo código en un programa informático debe tender al máximo de simplicidad?

Además de definir el movimiento de la pala, la discusión se vuelve aún más intensa cuando se enfrentan al reto de definir el movimiento del balón. A diferencia de lo que ocurre con la pala, el balón debe moverse *solo* por la pantalla, sin ir controlando su movimiento con el teclado. Algunos estudiantes, por ejemplo, proponen un patrón de movimiento a partir de una secuencia de órdenes que simulen un movimiento caótico por toda la pantalla (figura 5, izquierda), pero pronto se dan cuenta que en cada partida el balón se moverá igual. Después de múltiples versiones, la mejor solución propone definir una dirección aleatoria inicial, que en cada partida sea distinta y que permita al balón desplazarse libremente y de forma indefinida.

Igual como ocurre con el movimiento de la pala, desde el punto de vista computacional, los estudiantes discuten sobre cómo combinar las diferentes piezas de código. Por ejemplo, se dan cuenta que si la pieza «apuntar en dirección» se introduce dentro de la pieza de control «por siempre» el movimiento de la pelota no es el esperado. En otras palabras: que las piezas de código no cumplen la propiedad conmutativa.

El reto de definir la interacción entre el balón y la pala

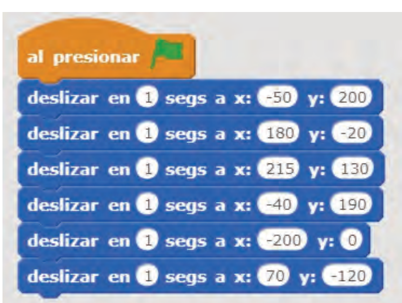
Una vez definidos estos dos movimientos (figuras 4 y 5), los estudiantes pronto se dan cuenta que con esto no basta, y que hay que definir la interacción entre balón y pala. Para ello, se les plantea la siguiente demanda:

Ahora que ya están definidos los 2 movimientos, debemos definir la interacción entre los dos personajes: la pelota debe rebotar sobre la pala, y en caso de no hacerlo, perder el juego.

c) El lenguaje Scratch tiene un conjunto de bloques de programación de color amarillo llamado «Control», que sirven para estructurar, secuenciar las órdenes que recibe cada personaje. Se pueden definir repeticiones (finitas o infinitas), y también condiciones del estilo «si … entonces ….». ¿De qué maneras se puede definir la interacción que se da en el rebote? Ten en cuenta que Scratch no tiene una opción del estilo «si un personaje toca a otro, que rebote», sino que hay que definir matemáticamente el rebote para poder introducir un algoritmo concreto en el lenguaje Scratch.

d) Igual que has hecho en el apartado anterior, utilizando las piezas «Control», prueba a definir qué ocurre cuando el balón se cuela por debajo (no conseguimos hacerla rebotar). Al igual que antes, Scratch no tiene una opción del estilo «si un personaje toca un lateral, que pierda», sino que hay que definirla. Prueba a traducir esta expresión matemáticamente, para luego traducirla de nuevo al lenguaje Scratch.

La construcción de un algoritmo que defina el rebote de la pelota sobre la pala supone posiblemente el mayor reto matemático a lo largo



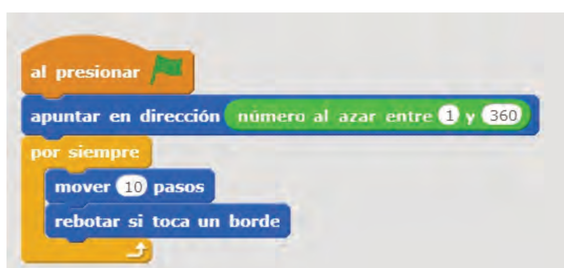


Figura 5. Dos propuestas diferentes para definir el movimiento del balón, mediante definición de desplazamientos entre puntos en el plano (izquierda) y mediante una dirección inicial aleatoria y una repetición de pasos (derecha).

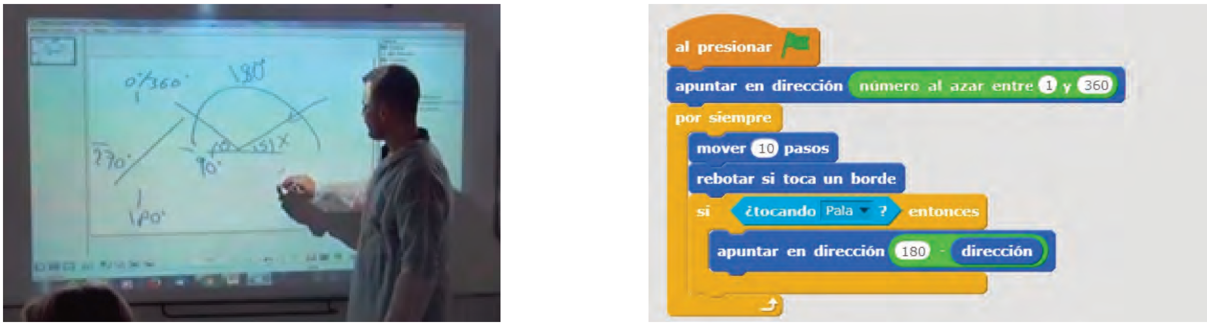


Figura 6. Un estudiante trata de resolver matemáticamente la definición del rebote (izquierda), y posteriormente traducir esta relación en el lenguaje computacional de Scratch (derecha)

del taller. Puesto que todos los grupos de estudiantes han usado las coordenadas polares para definir el movimiento del balón (figura 5, derecha), de forma intuitiva, el rebote es concebido inicialmente como un cambio en el signo del ángulo. Es común durante la discusión en pequeños grupos oir expresiones como: «cuando rebota, pasa de apuntar a 40º a –40º, ya que es ángulo inverso». Esto tendría sentido si no fuera porque en el lenguaje Scratch, todo ángulo se define a partir del eje vertical y, por lo tanto, el algoritmo necesario para definir el rebote horizontal requiere de una relación entre ángulos suplementarios. Es decir, se requiere considerar que los ángulos de entrada y de salida del rebote sumen 180º, lo que puede traducirse en lenguaje Scratch mediante un programa como el representado en la figura 6 (derecha).

En la discusión sobre qué algoritmo permite relacionar estos ángulos surgen diferentes estrategias. Algunos grupos de estudiantes siguen una estrategia de ensayo y error, mientras que otros buscan relaciones a través de simetrías en el plano.

En paralelo a la definición de qué le sucede al balón al tocar a la pala, los estudiantes deben definir también qué sucede cuando este se cuela por debajo de la posición de la pala. Algunos grupos de estudiantes optan por describir esta condición usando de nuevo los ejes de coordenadas. En este caso, para usar la relación de valor de Y inferior a –150, ya que define el semiplano que vendría a ser el borde inferior de la pantalla (figura 7, izquierda). Otros grupos optan por incorporar al nuevo juego un nuevo personaje, en este caso una simple barra horizontal que actúe de borde inferior, y definen la opción «tocando borde», igual que anteriormente se ha hecho con el «tocando pala». A su vez, la manera de representar en Scratch que se pierde la partida también es diferente en cada grupo. Entre una amplia variedad de formatos originales para representar en el juego que se ha perdido, los estudiantes proponen que el balón desparezca, cambie de aspecto, o bien aparezca un texto o sonido que indique que se ha perdido.

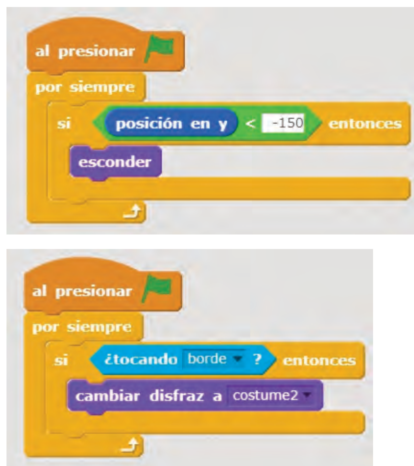


Figura 7. Dos maneras de definir qué sucede cuando el balón se cuela por debajo: definiendo la posición Y (arriba) o definiendo tocar otro personaje (abajo)

A lo largo de este reto, además, son múltiples las discusiones, dudas y cuestiones sobre cómo las distintas piezas deben ordenarse unas dentro de otras, secuenciarse, usarse en paralelo, etc. Sin duda, este contexto de discusión y construcción de conocimiento es otra evidencia de la generación de interesantes oportunidades de aprendizaje, tanto de ideas computacionales, como conectadas también al desarrollo del proceso de

Figura 8. Dos propuestas distintas de ampliación del juego: añadiendo dificultad creciente (izquierda) o realismo (derecha)

razonamiento y pensamiento conjetural del currículo de matemáticas por competencias. Por ejemplo, los estudiantes no solo deben usar los controles de tipo «si … entonces…» y «por siempre…», sino que deben decidir cómo se combinan entre ellos, ya que no es lo mismo un «por siempre si» que un «si por siempre».

El reto de refinar y ampliar el juego

El desarrollo del trabajo en pequeños grupos genera diferentes ritmos de trabajo, que en gran medida vienen dados por la experiencia previa de cada grupo en el lenguaje Scratch, el pensamiento computacional y los entornos de programación en general. Así, a aquellos grupos que han logrado los dos retos anteriormente presentados, es decir, que ya disponen de una versión funcional del videojuego de Pong, se les proponen diferentes retos avanzados. Estos pueden ser en torno a ampliar el juego para hacerlo más emocionante, ya sea añadiendo vidas, puntos, obstáculos, etc. Por ejemplo, uno de los grupos se le ocurre que el balón se mueva más rápido cada vez que rebota, para así hacer que el juego sea acelerado y con dificultad creciente. Para ello, definen la variable «velocidad» de manera que el balón ya no se mueve a 10 pasos por unidad de tiempo, sino a «velocidad» pasos por unidad de tiempo, y a su vez determinan que tras cada rebote la velocidad incrementa en un punto (figura 8, izquierda). Otros grupos optan por modelizar comportamientos físicos que añadan realismo al rebote. Por ejemplo, un estudiante propone añadir realismo reproduciendo un rebote que no sea perfecto, sino con pequeñas desviaciones aleatorias de ±10º, que simulan posibles irregularidades de la superficie de la pala (figura 8, derecha).

Conclusiones

Este taller realizado con estudiantes para maestros del grado de Educación Primaria ofrece múltiples oportunidades de aprendizaje, que permiten identificar el potencial del lenguaje de programación Scratch para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

	Pensamiento matemático	Pensamiento computacional
El reto de definir y ejecutar el movimiento del balón y de la pala	• Coordenadas polares y cartesianas, y su idoneidad para describir cada movimiento • Valores fijos y aleatorios dentro de un rango	• Eventos automáticos o controlados • Secuenciación de órdenes • Bucles de repetición • Optimización del código
El reto de definir la interacción entre el balón y la pala	• Ángulos suplementarios • Simetrías • Semiplanos definidos por inecuaciones	• Bucles de repetición • Condicionales • Tiempo de ejecución de un comando
El reto de refinar y ampliar el juego	Modelización de fenómenos más realistas o más emocionantes, etc.	Depuración del código para hacer el programa más eficiente, reparar elementos que no funcionan, etc.

Tabla 1. Principales ideas, razonamientos y perspectivas relacionadas con el pensamiento matemático y el pensamiento computacional que se movilizan para cada uno de los retos

Para resolver los retos que se les plantean, los estudiantes deben movilizar tanto ideas y razonamientos del pensamiento matemático como del pensamiento computacional (tabla 1). De hecho, esta coordinación entre lo matemático y lo computacional es especialmente interesante desde la perspectiva del establecimiento de conexiones intramatemáticas y extramatemáticas en el aula de matemáticas (Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015).

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al proyecto PECOFIM (ARMIF2016 00031) y a los grupos de investigación educativa ACELEC (2017S GR1399) y GIPEAM (2017SGR101).

Referencias bibliográficas

Benton, L., C. Hoyles, I. Kalas y R. Noss (2017), «Bridging Primary Programming and Mathematics: some findings of design research in England», *Digital Experiences in Mathematics Education*, vol. 3, n.º 2, 115-138.

Brennan, K., y M. Resnick (2012), «New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking, *Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association*, Vancouver, 1-25.

Burgués, C., y J. Sarramona (coord.) (2013), *Competències bàsiques de l'àmbit matemàtic. Identificació i desplegament a l'educació primària*, Generalitat de Catalunya. Departament d'Educació. Direcció General d'Educació Infantil i Primària, Barcelona.

Calao, L. A., J. Moreno-León, H. E. Correa y G. Robles (2015), *Developing mathematical thinking with Scratch. Design for teaching and learning in a networked world,* Springer International Publishing, 17-27.

Cordova, P. (2013), *Crear jocs amb Scracht*, <https://crearjocs.blogspot.com.es/2013/07/pong.html>.

Ellis, D. (2004), *A Brief History of Video Games. Official Price Guide to Classic Video Games*, Random House, 3-5.

Gamboa, G., E. Badillo y M. Ribeiro (2015), «El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: Geometría y medida en educación primaria», *PNA*, 10(1), 1-24.

Maloney, J., M. Resnick, N. Rusk, B. Silverman y E. Eastmond (2010), «The scratch programming language and environament», *ACM Trans. Comput. Educ.,* 10(4), Article 16.

NRC (2012), *A framework for K-12 Science Education. Practices, Crosscutting Concepts and Core Ideas*, The National Academies Press, Washington, D.C.

Selby, C., y J. Woollard (2014), *Refining an understanding of computational thinking,* University of Southampton.

Simarro, C., V. López, P. Cornellà, M. Peracaula, M. Niell y M. Estebanell (2016), «Més enllà de la programació i la robòtica educativa: el pensament computacional en l'ensenyament STEAM a infantil i primària. Ciències» *Revista del Professorat de Ciències d'Infantil, Primària i Secundària*, 32, 38-46.

Wagh, A., K. Cook-Whitt y U. Wilensky (2017), «Bridging Inquiry-Based Science and Constructionism: Exploring the Alignment Between Students Tinkering with Code of Computational Models and Goals of Inquiry», *Journal of Research in Science Teaching*, 54, 615-641.

Weintrop, D., E. Beheshti, M. Horn, K. Orton, K. Jona, L. Trouille y U. Wilensky (2016), «Defining Computational Thinking for Mathematics and Science Classrooms», *Journal of Science Education and Technology*, 25(1), 127-147.

Wing, J. M. (2006), «Computational Thinking», *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.

Zapata-Ros, M. (2015), «Pensamiento computacional: Una nueva alfabetización digital», *Revista de Educación a Distancia*, 46, 1-47.

Víctor López
<victor.lopez@uab.cat>

Edelmira Badillo
<edelmira.badillo@uab.cat>

Digna Couso
<digna.couso@uab.cat>

Cristina Simarro
<cristina.simarro.rodriguez@uab.cat>

Universitat Autònoma de Barcelona

suma+
Artículos
Julio 2019
91
pp. 23-31

La vida cotidiana en la clase de matemáticas[1]

José María Sorando Muzás

Muchas personas están enemistadas con las matemáticas desde la escuela, fruto de una enseñanza rutinaria y, a sus ojos, carente de otra finalidad que su propia dificultad. Ese bloqueo les impide como adultos aprovechar el pensamiento matemático para comprender la realidad y tomar las mejores decisiones. Una de las vías para revertir esa situación es la integración en el aprendizaje de elementos de la vida cotidiana.

Palabras clave: Vida cotidiana, Didáctica, Recursos, Problemas, Alumnado.

Everyday life in the mathematics class

Many people are at odds with mathematics from school, the result of a routine teaching and, in their eyes, devoid of any other purpose than their own difficulty. This blocking prevents them as adults from taking advantage of mathematical thinking to understand the reality and make the best decisions. One of the ways to reverse this situation is the integration into learning elements of daily life.

Keywords: Daily life, Didactic, Resources, Problems, Students.

La ciencia sin vida lo vuelve a uno arrogante. La vida sin ciencia lo hace a uno inútil.

Isidoro de Sevilla (560-636)

Según la RAE, alienación es el «estado de ánimo en el que el individuo se siente ajeno a su trabajo». ¿No es ese el sentir que se adivina en los rostros de bastantes estudiantes en clase de Matemáticas? Si tal cosa ocurre, ¿son nuestras clases una experiencia alienadora? Esto suena muy fuerte. Ante cuestiones incómodas para docentes, me parece un buen consejo este que en una ocasión recibí: «recuerda el alumno que eras». Permitidme hacerlo.

Abstracción y vida

Mediados los años 70 del siglo pasado, al terminar el Bachillerato decidí estudiar la licenciatura en Ciencias Matemáticas. Lo hice, como casi todos mis nuevos compañeros, sin saber qué me esperaba en la universidad. Era una elección basada, por una parte en el prestigio que entonces tenían los estudios científicos; y, por otra, en la habilidad y el gusto por calcular derivadas e integrales, desarrollados en el Curso de Orientación Universitaria. De forma imprecisa, pensaba que estudiar la carrera de Matemáticas sería un gran festival de acertijos con símbolos matemáticos.

En aquella universidad y en aquel momento se impartía una matemática bourbakista, alejada de cualquier intuición, referencia histórica o aplicación.

Artículo solicitado por *Suma* en julio de 2017 y aceptado en julio de 2018

El impacto fue brutal y algunos abandonaron pronto. Una materia se llevaba la palma en cuanto a abstracción e impenetrabilidad, el álgebra. Recuerdo mi perplejidad al observar que el texto seguido, pese a titularse Álgebra Lineal y Geometría, carecía de dibujo alguno. Salvo las referencias aritméticas iniciales, pronto transitamos por estructuras que no podíamos relacionar con nuestra experiencia, ver ni tocar, etéreos arcanos que solo habitaban en las mentes privilegiadas. Había sido educado en la obediencia, así que, aunque no supiera de qué se trataba aquello, de dónde venía ni a dónde iba, yo estudiaba y promocionaba con buenas calificaciones. Pero, al llegar a tercer curso, un día me atreví a formular una pregunta a quien había sido mi profesor de Álgebra durante tres cursos consecutivos, con énfasis especial en la Teoría de Grupos Finitos, su tema de investigación. Era una pregunta sencilla: «Profesor, esto de los grupos, ¿de dónde viene? y ¿para qué sirve?».

Las matemáticas debieran ser presentadas a todo el alumnado como obra cultural y humana. Conocer su historia y sus conexiones les da finalidad...

Esperaba una respuesta rápida y consoladora, pero la respuesta que obtuve, su ausencia más bien, iba a ser inquietante a corto plazo e iluminadora en mi futuro profesional. Me respondió el profesor, en un rasgo de sinceridad que primero me enojó pero aún hoy le sigo agradeciendo: «Pues no sé decirte. Ya me informaré y te digo».

En aquella pobre respuesta de quien hasta entonces yo consideraba un sabio tuve la plasmación del viejo cuento chino titulado *El cazador de dragones*. Aquel cuento que habla de un aventajado alumno de la escuela de cazadores de dragones que, al terminar brillantemente sus estudios y no encontrar dragón alguno que cazar, decidió ganarse la vida… enseñando a cazar dragones.

Mi decepción inicial dio paso a una búsqueda que todavía no ha terminado, intentando saber de dónde procede, dónde está y para qué nos sirve esta prodigiosa construcción del intelecto humano llamada matemáticas. Busqué entonces, siendo estudiante, porque necesitaba encontrar un sentido a tantas horas de estudio. Busqué luego, siendo profesor de secundaria, porque me propuse no ser otro maestro de la caza de dragones, sino de un pensamiento matemático que pueda ser valioso en las vidas de mis alumnos. Sigo buscando ahora, dedicado a tareas de divulgación, para mostrar a quienes ya no son estudiantes que, aunque ignoradas, las matemáticas siguen en su mundo y les pueden proporcionar claves para enfrentar los problemas cotidianos.

Con respecto a la teoría de grupos, con el tiempo y por mi propia búsqueda (no gracias a la institución académica) fui sabiendo de los tres problemas clásicos griegos, pendientes de solución por muchos siglos (la cuadratura del círculo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo, todos ellos con regla y compás). Supe también de los intentos de solución de las ecuaciones mediante radicales, con el atasco en la de quinto grado. Conocí la historia de Evariste Galois, quien murió antes de cumplir los 21 años, en un duelo al amanecer, tras garabatear con prisas en una carta póstuma sus geniales ideas que habían de cambiar el destino del álgebra, con las que otros zanjaron aquellos antiguos problemas pendientes e irresolubles. Supe de los 17 grupos de simetría clasificados por Fedorov y de su presencia en la cristalografía, en la mecánica cuántica, en los mosaicos de la Alhambra o en el arte mudéjar aragonés. Me asombré años más tarde al conocer que el teorema de clasificación de grupos finitos consta de más de 15 000 páginas y fue fruto del trabajo de más de 100 investigadores entre 1955 y 1983, etc. Una sola de esas referencias hubiera calmado mi inquietud universitaria, pero aquel profesor no pudo ofrecerme lo que no conocía.

Sirva este largo recuerdo personal para extraer esta conclusión: las matemáticas debieran ser presentadas a todo el alumnado como obra cultural y humana. Conocer su historia y sus conexiones les da finalidad, algo que es fundamental para conseguir en los estudiantes un verdadero respeto (no temor) y un fundado aprecio (no un prestigio vago) hacia ellas. Si llegase el caso de que algunos de esos alumnos y alumnas siguieran estudios especializados posteriores, sobre ese respeto y ese aprecio será posible, con mayor convicción y solvencia, navegar en la abstracción. Y de todas las conexiones, las más efectivas para esos fines son las que se refieren a la vida cotidiana, al ser reconocibles y vividas por cada estudiante.

Desencuentros

Es necesario poner en valor ese carácter universal y democrático del pensamiento matemático, aplicable a toda situación y, en distintos grados, accesible a cada persona. Necesidad que es más acuciante al constatar el evidente desencuentro entre una gran parte de la población y las matemáticas, transmitido al alumnado por las familias, el vecindario o los medios de comunicación. Es un triste hecho que atraviesa fronteras. Según Adrián Paenza (2008: 12): «El miedo a las matemáticas es masivo, extendido y universal».


Diario de Yucatán
yucatan.com.mx
Portada | Mérida | Yucatán | México | Internacional | Deportes | Espectáculos

El 95% de alumnos de primaria le tiene "miedo" a las matemáticas

Lunes, 11 de septiembre de 2017 - 8:58 pm

Figura 1

Un desencuentro que se expresa en tantos anuncios, concursos de TV, comentarios de calle e incluso declaraciones de personajes públicos que despreocupadamente reconocen su incompetencia matemática. Esto último sorprendente en quienes tanto cuidan su imagen en otros aspectos superficiales.

Cuántas veces habremos oído frases como «las matemáticas son para gente muy inteligente» o «después de estudiarlas, nunca las utilicé» o «¿para qué sirve estudiarlas si ya hay calculadoras y ordenadores?». Y, sabiéndolo, no faltan quienes aprovechan comercialmente ese anumerismo de muchos consumidores. Una gran cadena de muebles ofertaba este año descuentos del «50% del 50%», en vez de ofertar el 25%. Se puede suponer por qué.

Volviendo a las aulas, otra evidencia de ese desencuentro está en la anulación del sentido común que parte del alumnado experimenta en clase de matemáticas, como si lo que allí se trata fuera ajeno al mundo real. Puede expresarse en repartos donde una sola de las partes es mayor que el total a repartir, en medidas inmensas para pequeños objetos, en precios descabellados, en inexplicables confusiones sobre cuestiones prácticas (calcular la pintura necesaria para pintar una piscina inundándola de pintura, por ejemplo), etc. ¿Por qué ofrecen resultados absurdos que en la vida real jamás aceptarían? Porque entienden las matemáticas como aplicación mecánica de algoritmos y nada más (típica pregunta en primaria: «¿Es un problema de dividir o de multiplicar?»). A sus ojos, esa matemática no es terrestre, está en otro planeta (como lo estaban para mí las estructuras algebraicas en mis albores universitarios), un planeta extraño del que hay que escapar cuanto antes dando un resultado, el que sea.

Como docentes conviene que revisemos de qué maneras estamos abonando esas actitudes de distanciamiento y desafecto. Identifico varias:

— Excesivo énfasis en el cálculo primero (Primaria) y en el álgebra después (Secundaria), como rutinas justificadas en sí mismas.
— Confusión entre problemas y ejercicios repetitivos, a favor de estos últimos.
— Presentación de los *problemas* al final de cada tema, a modo de justificación de los conceptos y sus propiedades. La construcción del conocimiento ha seguido el camino inverso, de la resolución de un problema y su generalización surgió la teoría.
— Rigidez del profesorado para aceptar soluciones alternativas a la prevista. En oca-

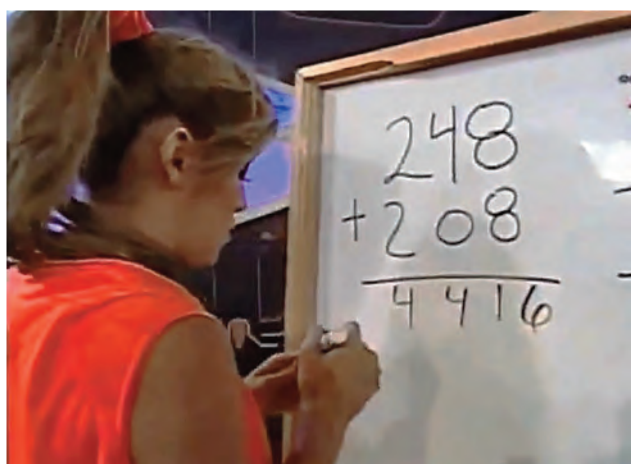


Figura 2. Esta concursante en TV (universitaria) se justificaba: «Los números nunca fueron mis amigos»

siones, la principal pregunta que se plantea el alumnado es «¿qué quiere que le responda?».

— Falsa realidad. Utilizar elementos cotidianos no conduce a situaciones de vida cotidiana. ¿Alguien averiguó la edad de una persona mediante ecuaciones? ¿Algún granjero hizo recuento de sus conejos y sus gallinas contando previamente cabezas y patas? Recordaba Andrés Sopeña en *El florido pensil. Memoria de la escuela nacionalcatólica*: «Es que muchos problemas estaban mal planteados. Porque, por ejemplo, ningún niño iba a dar a otro dos reales por nada; solo para comprobar que ahora el otro tenía el duplo del dinero que juntaban entre los dos cuando antes tenía un tercio. ¿Y qué? ¿Con eso qué?».

Frente a esas prácticas, como se ha visto tan clásicas, propongo para nuestras clases: menos prisas, menos definiciones, menos apuntes, menos tiempo dedicado a cálculos y ecuaciones, menos recetas; pero más situaciones reales, más formular preguntas, más sorpresas, más búsquedas, más ensayos de estrategias y más intercambio de ideas en grupo. Menos ¿cómo? y más ¿por qué?[2]. Decía Martin Hairer, galardonado en 2014 con la Medalla Fields: «Enseñar las matemáticas a través de rutinas les quita todo lo interesante». Y Conrad Wolfram, artífice del motor de búsquedas Wolfram Alpha: «Paremos de enseñar a calcular y empecemos a enseñar matemáticas». Por todo ello, resolvamos en las aulas cuestiones de la vida cotidiana… al menos de vez en cuando.

Vida cotidiana y resolución de problemas

En este mundo cambiante donde reina la inmediatez, las promesas a largo plazo tienen peor acogida que antaño. Hoy resulta arduo esperar del alumnado un acto de fe sobre los beneficios futuros de un aprendizaje matemático que perciben como algo ajeno. Para despertar su interés conviene integrar en ese aprendizaje elementos curiosos, inesperados o cotidianos. ¿Cómo conseguirlo? Para promover la curiosidad y la sorpresa hay muchos recursos didácticos que no son el objeto de este artículo. Para dar entrada en las clases a lo cotidiano conozco los siguientes caminos posibles, pero habrá más. Encontrarlos es un reto a la creatividad docente.

— Ejercicios en contextos. Una tarea rutinaria lo es menos cuando está inserta en un tema o atañe a un personaje de interés para el alumnado. Un profesor francés usó la celebración de los goles del delantero Pogba para plantear ejercicios del teorema de Pitágoras y, para el mismo fin, yo mismo utilicé una escena de la película *Misión Imposible III* (Sorando, 2018: 121-123). En ambos casos, aparte del factor motivacional, en lo estrictamente matemático se trataba de ejercicios convencionales.

Figura 3. La pitagórica celebración de Pogba (Diario *As* 15/11/2016)

Tal vez os estéis preguntando: «¿Pogba o *Misión Imposible* son vida cotidiana?». Según se mire. Volveremos sobre ello.

— Contar historias. Articular un relato próximo y creíble nos acerca a una tarea que, enunciada sin más y por sí misma, tal vez para el alumnado carezca de interés. Porque los profesores somos contadores de historias… sí, también los de matemáticas. Y quien no lo asume, probablemente está contando en sus clases una repetitiva y mala historia interminable. Un problema matemático puede empezar por «esta mañana, al venir al instituto he visto…» o «¿sabéis qué dijeron ayer en la televisión?» o «han estrenado una película donde…». Con bien poco traemos a nuestra vida la tarea.

— Ejercitar la mirada matemática. Para ello, ofrecer imágenes ricas en sugerencias matemáticas sin hacerlas explícitas de entrada: «¿Qué os parece este anuncio, esta noticia?, ¿veis algo especial en esta fotografía?». Que sean los estudiantes quienes aplicando su curiosidad sobre ellas, den forma a las cuestiones.
— Aplicaciones reales. Siempre que no precisen una amplia explicación previa para poder comprender la naturaleza de la tarea matemática. Por ejemplo, en el IES Valle del Jiloca de Calamocha (Teruel), en el marco del proyecto interdisciplinar *Parque agrícola de los secanos del Jiloca*[3] se buscaba conocer la densidad (semillas/ área) conseguida con cada método de siembra. Fue necesario calcular áreas de parcelas irregulares, lo cual derivó en el aprendizaje práctico de la triangulación y de la fórmula de Herón del área de un triángulo, conocidos sus lados. También se realizaron muestreos y posteriores estadísticas sobre el crecimiento de las distintas semillas.
— Situaciones problemáticas de la vida propia y familiar. Siempre que sea posible, a mi juicio esta es la vía más deseable y fructífera. Según Emmanuel Kant, persona es quien ante una situación examina lo que puede hacer, analiza qué debe hacer y después lo hace. Desde ese punto de vista, la educación entendida como desarrollo personal debiera cultivar la resolución de problemas, donde las matemáticas juegan un papel esencial, proporcionando conceptos, instrumentos y método. Pero, dicho lo cual, la solemnidad de la cita kantiana no debiera llevarnos a identificar *problemas* con asuntos trascendentes o decisivos. Nuestros problemas de aula debieran ser estimulantes, curiosos y, a ser posible, divertidos.

La primera tarea en una situación adornada por anécdotas y vivencias, será formular buenas preguntas; luego, separar la información relevante de la que no lo es; a continuación, diseñar un modelo matemático, o hacer una tabla, o un gráfico, aplicar una notación adecuada, etc. Después, razonar sobre este planteamiento ya en terreno matemático, haciendo conjeturas y diseñando búsquedas; y al final, solo al final, realizar los cálculos pertinentes, para los cuales usemos los medios tecnológicos a nuestro alcance. El objetivo, como recomendaban Hairer y Wolfram, es pensar matemáticamente, no hacer cuentas.

¿Qué es la vida cotidiana?

Esa pregunta no es de respuesta tan obvia como a primera vista puede parecer. Se pueden distinguir al respecto varias categorías de hechos que pueden cruzarse y complementarse:

— *Todo lo que vivo y me importa*. Cuando en la primera clase de cada curso, buscando conocer a mis alumnos y alumnas, les preguntaba «escribe algo que sea importante para ti» solían repetirse estas respuestas: «mi familia», «mis amigos», «sacar buenas notas y pasar de curso», «las redes sociales», «los videojuegos», «el deporte que practico», «mi mascota» y «mi pueblo» (bas-

Figura 4. Camino a la escuela (Pascal Plisson 2013)

tantes familias aunque viven en la ciudad tienen sus raíces en un pueblo al que regresan en días festivos y vacaciones). En otro lugar y tiempo tal vez las respuestas fueran otras porque las urgencias cotidianas también lo fueran (por ejemplo, el camino a la escuela puede ser una cómoda rutina en una moderna ciudad o una aventura penosa y arriesgada en un medio rural del Tercer Mundo).

Cualquiera de esos núcleos de vivencias e intereses del alumnado son fuentes prioritarias de situaciones a explorar pues, además de acercar las matemáticas a sus vidas, conllevan autoestima («soy importante») y cercanía afectiva con el profesorado («le importo»). Nuestra labor como docentes de matemáticas consiste en mostrar que existe una mirada matemática eficaz en la comprensión y gestión de tales situaciones.

— *Todo lo que vivo, aunque no me importe*. El profesorado, como observador externo, puede advertir otros elementos cotidianos que influyen en la vida del alumnado y que les pasan inadvertidos por su edad e inexperiencia. Nuestra misión como educadores incluye abrir sus ojos a esa realidad ignorada, lo que conlleva a menudo sensibilizarles hacia lo familiar y lo social. Puede ser el caso del sistema de transportes que usan a diario, el reparto de las tareas domésticas, la pensión de sus abuelos, las noticias de fraude y corrupción, los sistemas electorales, los datos de desigualdad social, el recibo de la luz, las ofertas comerciales, la dieta alimenticia, etc.

— *Todo lo que me importa, aunque no lo viva directamente*. Quedan, además, aquellos elementos cotidianos que no afectan a sus vidas pero pueden llegar a interesarles, movidos por una actitud de curiosidad sobre lo cercano (hallazgos y sucesos destacables, lugares y edificios del barrio, horarios comerciales, reciclaje de residuos, geometría de envases y de logotipos, etiquetado de productos de consumo, regulación del tráfico, etc.). Pero también pueden interesarles por una interiorización de hechos y contextos externos, incluso de ficción, que entran en nuestras casas a través del televisor e Internet (una teleserie de éxito, clasificaciones deportivas, una campaña publicitaria, etc.). En unos y otros, el profesorado compartirá su propia mirada matemática y además deberá *estar al día*, porque lo que ayer era cotidiano hoy no lo es (¿quién se acuerda de la pionera red social Tuenti, tan extendida entre el alumnado hace 10 años?) y quién sabe cuánto durará lo más actual, que no por fugaz carece de potencial matemático.

Por ejemplo, en 2016 hacía furor el juego Pokemon Go y hubo profesores que vieron en él oportunidades de aprendizaje. Se publicaron artículos como «Aprende matemáticas con Pokemon Go» de Clara Grima en *Cienciaxplora* (28/07/2016) y «Solo hace falta un poco de matemática para localizar a ese Pokémon que sale en el radar» de Matías S. Zavia en *Gizmodo* (08/11/2016). En 2017 lo que hacía furor era el Spinner y también hubo quienes le sacaron partido para el aula, con actividades de cálculo mental asociadas.

En 2018 no hay juego de moda, pero hemos tenido el Mundial de Fútbol en Rusia. Los alumnos españoles estaban ya de vacaciones, pero el curso seguía en el hemisferio austral. En la prensa argentina se publicaron titulares como «Las matemáticas: del Mundial a las aulas. Los chicos pueden aprender matemáticas con la selección» en *La Voz* (07/06/2018).

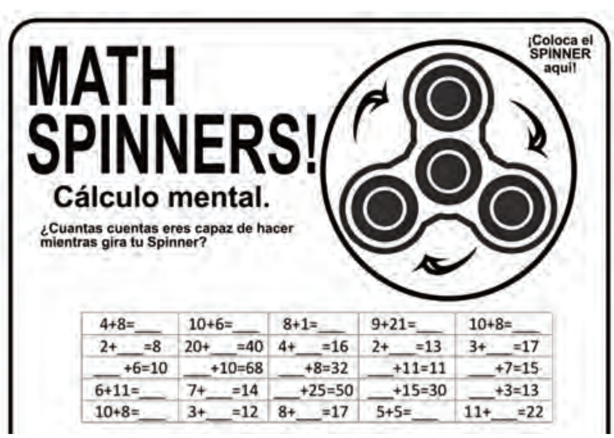


Figura 5

— *La cotidianeidad matemática*. Se trata de una cotidianeidad forzada por el profesorado, al poner de relieve e incluso organizar efemérides matemáticas. Si en las categorías anteriores se hacía matemático lo cotidiano (lotería de Navidad, sorteos de la Champions League, etc.), ahora nos referimos a hacer cotidiano lo matemático. Ejemplos: Día de Pi, semana matemática, días pitagóricos, días capicúas, descomposición factorial del Año Nuevo, Día Escolar de las Matemáticas, etc.

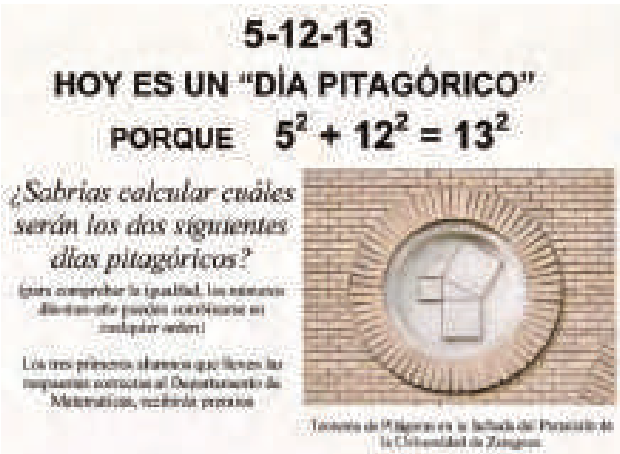


Figura 6

Resulta complejo definir *lo cotidiano* y aún *la realidad*. Para sus investigadores, algo tan abstracto como el teorema de Clasificación de Grupos Finitos fue un elemento central de su realidad cotidiana durante años. Quizás por ello este sea el momento de dejar bien claro que las matemáticas no se justifican solo en sus aplicaciones, existiendo motivaciones intrínsecas como la superación de un reto intelectual («porque está ahí», que dijera George L. Mallory preguntado por su obstinación en escalar el Everest) y otras de tipo estético, que defendía G. H. Hardy. Además, como escribió Pedro Puig Adam (1945): «El único conocimiento que nunca se aplica es el que no se tiene».

En este artículo no se propone una enseñanza utilitarista de las matemáticas sino, como ya se dijo, mostrar que, de un tipo u otro, las matemáticas tienen finalidad. Y ahí dar cabida a situaciones cotidianas que, de forma incomprensible, a menudo están ausentes en una educación que se dice comprensiva.

Y no olvidemos que nuestra propia actitud hacia las matemáticas será el primer y tal vez más convincente mensaje que llegará al alumnado. En palabras de Willy Servais (1980): «Enseñar es un oficio difícil, tal vez despiadado, pues no podemos enseñar a nuestros alumnos lo que nosotros no somos. Lo mejor de nuestra enseñanza es, en fin de cuentas, la humanidad que haya en nosotros. Si no proponemos nada humano, nuestro papel es irrisorio».

40 años después

Si hoy recibiera una pregunta similar a la que 40 años atrás hice a mi profesor de Álgebra, «¿para qué las matemáticas?», mi respuesta sería: «Las matemáticas que aprendas en el colegio y en el instituto te permitirán comprender mejor la realidad, lo cual te hará disfrutarla más; y también te ayudarán a tomar las decisiones más acertadas, que es algo importante para vivir mejor». Disfrutar y vivir bien son objetivos universales. Creo que esa respuesta la comprende cualquiera.

Referencias bibliográficas

Paenza, A. (2008), *Miedo a la matemática*, En línea: <http://goo.gl/EPzRix>.

Puig P. (1945), *Apología de la inutilidad*, discurso en la Escuela de Ingenieros Industriales, Madrid. En línea: <https://goo.gl/MpM4B2>.

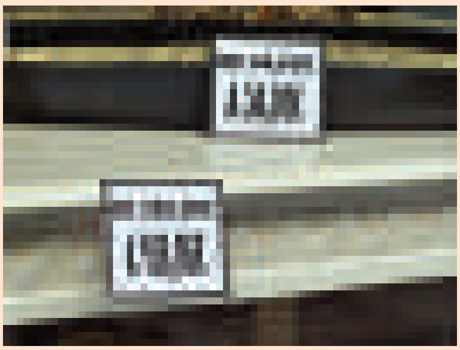
Servais, W. (1980), «Humanizar la enseñanza de la Matemática», *Revista de Bachillerato* n.º 13, M.E.C. Madrid, 3-22,. En línea: <https://goo.gl/MivVMW>.

Sorando, J. M. (2018), *100 escenas de cine y televisión para la clase de Matemáticas* (2ª edición), FESPM. Badajoz, 121-123.

Anexo. Actividades de aula

En cada una de las siguientes situaciones, tras recopilar y exponer la información, es muy interesante que sean los chicos y chicas quienes planteen sus propias preguntas. En este caso, seremos nosotros.

Analiza matemáticamente estas ofertas



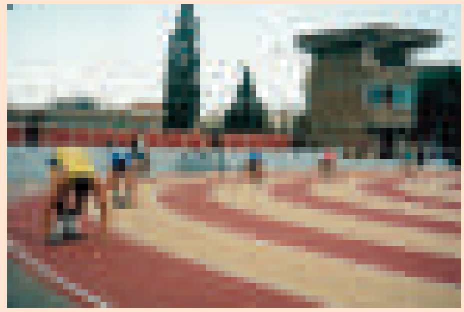
Quitar el 21% del precio final es quitar el IVA? ¿Qué porcentaje habría que quitar para conseguirlo? ¿Esta oferta es mejor o peor para el cliente? ¿Es mejor un descuento de 21 € o del 21%? ¿Qué % de descuento se aplica en la segunda foto? ¿Qué opinas?

La pensión de la abuela

En octubre de 2017, los jubilados salen a la calle y se hacen oír. ¿Por qué protestan?
Cada cual puede pedir a su abuelo o abuela la carta del Ministerio de Empleo y Seguridad Social donde, a primeros de año, se le informaba de una subida del 0,25% de su pensión. Centrémonos en el caso de la abuela Francisca. Su pensión a partir del 1 de enero pasaba a ser de 637,70 € mensuales. Al mismo tiempo, los noticiarios informaban de que el IPC interanual había subido un 3%. Se estima que en el próximo lustro el IPC subirá, por término medio, un 1,8% anual y que las pensiones lo seguirán haciendo en un 0,25%.
¿Realmente ha mejorado con la última subida la economía de la abuela? Calculemos año a año, durante el próximo lustro, la evolución de la pensión y la del IPC; también, la variación del poder adquisitivo. Las expresaremos como funciones, algebraicamente y mediante gráficas. Compararemos las situaciones actual y a cinco años vista.

Atletismo

En la clase hay tres compañeros que practican el atletismo. Uno de ellos, Juan, corre los 400 m lisos. Este sábado le hice una foto en la salida.



Unos corredores están más adelantados que otros. ¿Por qué motivo? ¿Cuál es la compensación que se debe dar al corredor de la calle 2 con respecto al de la calle 1? Busca los datos necesarios. Para el resto de las calles, ¿hay siempre la misma compensación o es diferente? Razónalo sin necesidad de calcularlas una a una.

La *caña doble*

Analiza matemáticamente esta publicidad:,

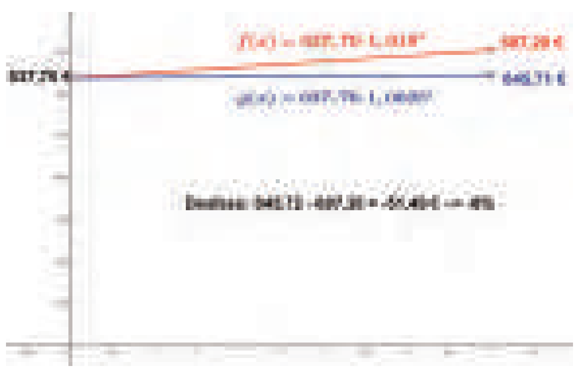


Figura 7. La pensión de la abuela

Descuento de cumpleaños

Una importante cadena de tiendas de cultura y ocio envía a sus clientes registrados esta tarjeta de felicitación cuando llega su cumpleaños:

HOY ES UN BUEN DÍA PARA PENSAR EN TU EDAD ,
SI LA MULTIPLICAS POR 3 FAMILIARES QUE NO SE ACORDARÁN DE TU CUMPLE,
LE SUMAS 15 LLAMADAS QUE TENDRÁS QUE RESPONDER (MÁS O MENOS),
LO MULTIPLICAS POR 2 BESOS QUE TE DARÁ CADA PERSONA QUE VEAS
Y LO DIVIDES ENTRE 6 REGALOS QUE RECIBIRÁS (QUIZÁS ALGUNO MÁS)
TE SALDRÁ UN NÚMERO ,
SI LE RESTAS TU EDAD Y LO MULTIPLICAS POR 2 VECES QUE TENDRÁS
QUE HACER ESTA OPERACIÓN (COMO POCO), OBTENDRÁS
EL DESCUENTO QUE TE REGALAMOS (%) EN TU PRÓXIMA COMPRA

¡FELICIDADES!

¿Cuál sería tu descuento este año? ¿Y al año que viene? ¿Siempre el mismo? ¿Por qué?

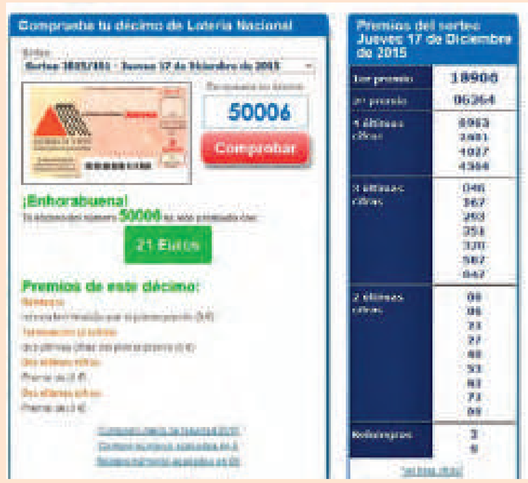
Camino de clase

Describe cuál es tu camino diario de casa a clase. Haz estimaciones razonadas de la distancia que recorres, por diversos métodos. Obtén con Google Maps la distancia exacta que recorres. ¿Qué errores absolutos y relativos has cometido en cada estimación? Analiza las causas de esas diferencias.
Si vienes caminando: ¿Qué tiempo tardas? ¿Cuál es tu velocidad media? Estima razonadamente el número de pasos que das.
Si vienes en el autobús urbano: ¿Qué frecuencia tiene? ¿Cuál es la probabilidad de que al llegar a la parada debas esperar menos de 3 minutos?

Buen sueldo

En TV han dicho: «Messi duplicará su salario fijo, de los 22,8 millones actuales a los 39,4 de la temporada que viene» (La Sexta 09/03/2016). ¿Qué te parecen esos datos?
¿Cuál es el salario por hora de Messi? ¿Cuántas pensiones de la abuela se pueden pagar con su próximo sueldo? Si se le aplicara la misma revalorización que a la pensión, ¿cuál sería su nuevo salario? ¿Qué porcentaje de subida va a tener realmente?

Lotería



Observa esta captura de pantalla de la web de la Organización Nacional de Loterías del Estado. Corresponde a la comprobación de premios de alguien que jugaba 3 € y ganó 21 €. ¿Cuántos premios diferentes acumuló? ¿Cuál es la probabilidad de ser agraciados con esa múltiple coincidencia?

Una suerte sospechosa

Ganar el Gordo de la lotería es muy poco probable pues hay 100 000 números en juego. Para mejor apreciarlo, imagina una pila de 100 000 hojas de papel y estima su altura. Piensa luego que un boleto es solo una hoja de esa torre.
Un conocido político, hoy condenado por fraude fiscal, en 12 años cobró 10 veces el primer o el segundo premios de la lotería. Calcula cuál es la probabilidad de que tal cosa ocurra si durante ese tiempo se juega un número de lotería en cada uno de los 103 sorteos anuales. Relaciónalo de nuevo con la altura de una pila de hojas de papel. «Tengo mucha suerte» declaraba el interesado entre risas. Si no fue la suerte, ¿cuál parece ser la explicación?

José María Sorando Muzás
<jmsorandom@gmail.com>

1 Este artículo es la versión actualizada de la ponencia del mismo título que fue presentada por el autor en el VIII CIBEM (Madrid, julio 2017).

2 En recuerdo del gran Jorge Wagensberg (1948-2018), autor de tantos libros esclarecedores. Entre ellos, *A más cómo, menos por qué* (Metatemas. 2006).

3 En línea: <http://parqueagricola.blogspot.com/>.

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Comisión Ejecutiva

Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Secretario General: Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Vicepresidente: Juan A. Martínez Calvete
Tesorera: Encarnación Amaro Parrado

Secretarías

Técnica adjunta: Bienvenido Espinar Cepas
Revista *Suma*: Iolanda Guevara Casanova y Daniel Sierra Ruiz
Relaciones internacionales: M.ª Claudia Lázaro del Pozo
Servicio de publicaciones: Juan Martínez-Tébar Giménez
Actividades y formación del profesorado: Juana M.ª Navas Pleguezuelos
Actividades con alumnos: Luisa Almazán Álvarez
Divulgación: Inmaculada Conejo Pérez

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidente: Manuel Sol Puig
C/St Ramon 29. 08340 Vilassar de Mar

Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1.ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
Presidente: Juan Agustín Noda Gómez
C/ La Isa, 33, Cercado Mesa, 38205, La Laguna, S/C de Tenerife

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
IES Universidad Laboral, Avda de la Mancha sn, 02006 Albacete

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas «Tornamira»-Matematika Irakasleen Nafar Elkartea
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedade de Ensinantes de Ciencias de Galicia (ENCIGA)
Presidente: María Inés García Seijo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Jesús Diego Rodríguez García
IES Enrique Nieto. Departamento de Matemáticas
C/ Avenida de la Juventud, 4. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas «A prima»
Presidenta: Elena Ramírez Ezquerro
Facultad de Ciencia y Tecnología Edificio Científico Tecnológico, CCT; C/ Madre de Dios, 53. 26006 Logroño

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX
Presidente: Daniel Ruiz Aguilera
C/ Miquel Capllonch, 30, 3A. 07010 Palma. Illes Balears

Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»
Presidente: Salvador Guerrero Hidalgo
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática «Agustín de Pedrayes»
Presidente: Rubén Pérez Zamanillo
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Asociación Castellana y Leonesa de Educación Matemática «Miguel de Guzmán»
Presidentea: M.ª Encarnación Reyes Iglesias
IES Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
Facultad de Matemáticas. Universidad de Murcia.
Campus de Espinardo. 30100 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática «Ventura Reyes Prósper»
Presidente: Antonio Molano Romero
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: Carmen Espeso Ortiz
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. Despacho 3215
C/ Rector Royo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Asociación Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana «Al-Khwarizmi»
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Euskadiko Matematika Irakasleen Elkartea «EMIE 20+11»
Presidenta: Ana Fernández de Betoño Sáenz de Olamendi
Berritzegune de Vitoria-Gasteiz
Avda. Gasteiz, 93. 01009 Vitoria-Gasteiz (Araba)

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 33-40

Las estadísticas avanzadas en el baloncesto

Paulo González Ogando

Las estadísticas avanzadas son una forma de estudiar lo que ocurre en una cancha de baloncesto a través del análisis de datos objetivos. Permiten una mirada más profunda que las estadísticas tradicionales y evalúan de manera más certera la aportación de un jugador o la producción de un equipo. El baloncesto está sufriendo una pequeña revolución en este sentido, y en poco más de una década hemos pasado de las planillas que no pasaban de una docena de datos por jugador, a un torrente cada vez mayor de estadísticas en espera de ser analizadas.

Palabras clave: Deporte, Estadística, Correlación, Divulgación, Secundaria y Bachillerato.

Advanced Statistics in Basketball

Advanced stats are a way to study what happens on a basketball court through objective analysis. They allow a more-in-depth look than traditional stats, and they evaluate more accurately the contribution of a player or the production of a team. Basketball is undergoing a small revolution in this way, and in just over a decade we have gone from a few data in box scores to an increasing quantity of statistics waiting to be analyzed.

Keywords: Sport, Statistics, Correlation, Popular science, Middle and High School.

«Statistics are like bikinis. What they reveal is suggestive, but what they conceal is vital»[1] es una cita de Aaron Levenstein (Murray, 2010), quien fue profesor en el Baruch College de Nueva York, aunque en el mundillo del baloncesto suele atribuirse al entrenador Božidar Maljković (Shell y de Andrés, 2008). Los aficionados al deporte son con frecuencia consumidores habituales, algunos casi compulsivos, de estadísticas y números que contribuyan a mejorar su conocimiento del juego, de lo que sucede sobre la cancha, estadio o pista.

Las estadísticas tradicionales

Uno de los deportes en los que tradicionalmente más patente ha sido este hecho es el baloncesto, y hoy es sencillo encontrar no solo los resultados de los encuentros, sino también estadísticas sencillas por jugador como puntos anotados, faltas cometidas o tiros intentados y convertidos, en partidos tan lejanos en el tiempo como la primera final del torneo NCAA[2] (1939) o —solo los puntos por jugador— incluso en la final del primer Campeonato de España de 1933[3].

Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2017 y aceptado en diciembre de 2018

Durante los últimos años, la importancia de las estadísticas en los deportes profesionales ha crecido de forma gradual, y este crecimiento ha llegado al aficionado sobre todo desde la aparición de *Moneyball* (Lewis, 2003), un famoso libro (y posterior película) que narra la historia de un equipo de béisbol que utiliza enfoques estadísticos novedosos e inusuales como ayuda en la toma de decisiones directivas en el camino hacia la consecución del éxito deportivo. Esta popularización de las estadísticas deportivas se ha hecho, de la mano de Internet, accesible hoy en día para todo el mundo. En baloncesto existen multitud de páginas web en las que datos numéricos y estadísticos gozan de especial atención; algunas de las que más alcance tienen son, por ejemplo:

www.82games.com
www.basketball-reference.com
www.apbr.org
www.keyhoops.com
www.nbastuffer.com

La NBA (National Basketball Associaton) es la competición de baloncesto más importante del mundo. Al principio de la década de los 80, momento en el que introduce en el juego los tiros triples (de 3 puntos), pasó a incluir en sus planillas estadísticas (conocidas por el anglicismo *box score,* figura 2) los siguientes apartados:

- Tiros de campo (incluyen los de 2 y 3 puntos) intentados (FGA), convertidos (FGM) y en porcentaje de acierto (FG%).
- Tiros triples, de 3 puntos, intentados (3FGA), convertidos (3FGM) y en porcentaje de acierto (3FG%).
- Tiros libres, de 1 punto, intentados (FTA), convertidos (FTM) y en porcentaje de acierto (FT%).
- Puntos totales anotados (PTS).
- Faltas personales cometidas (PF).
- Asistencias (AST).
- Rebotes defensivos (DREB), ofensivos (OREB) y totales (REB).
- Tiros taponados (BLK).
- Pérdidas de balón (TO).
- Recuperaciones de balón (STL).
- Minutos jugados (MIN)[4].

En la actualidad se toman muchos más datos de los que hemos situado en un *box score* tradicional. No hace tanto, cada equipo solía disponer de algún entrenador asistente cuya labor era anotar cualquier estadística que el equipo técnico hubiese decidido que era digna de estudio. Hoy esas estadísticas se hacen públicas en la página web <http://stats.nba.com/>, hay del orden de 100[5]. Para poder llevar a cabo una recogida de datos

Figura 1. Logotipo de la NBA

Figura 2. Un *box score* tradicional

de tal calibre, la NBA usa un sistema llamado Sport VU (Shea, 2014). Son seis cámaras instaladas en la pasarela situada en lo alto de cada pabellón, además de un software específico que realiza un seguimiento de todos los jugadores y del balón 25 veces por segundo [6]. Este sistema proporciona una cantidad enorme de datos esperando a ser analizados, pudiendo conseguir más información de la que tradicionalmente se disponía.

Así, nace el planteamiento de cómo usar esos datos básicos —ya sea por partido o por temporada— para analizar el desempeño de un jugador o un equipo (Winston, 2009). Existen multitud de parámetros que se basan en los datos incluidos en los *box scores* tradicionales y que pretenden proporcionar información sobre algún aspecto concreto del juego. El análisis del baloncesto a través de evidencias objetivas y estadísticas se conoce como APBRmetrics (Association for Professional Basketball Research Metrics).

Pace and space

Desde que Erik Spoelstra popularizó el término *pace and space* [7], este se ha extendido y asumido con rapidez, y es ampliamente reconocido entre los analistas que esta es, en la NBA, la era del *ritmo y el espacio*, como podríamos traducir al castellano esa expresión inglesa [8].

Las estadísticas avanzadas a nivel de equipo comienzan con el conocimiento del ritmo al que se juega. Por poner un ejemplo [9], Los Nets, en la temporada 2012-13, eran el quinto equipo que menos puntos por partido recibía, pero eran a la vez el equipo que más lento jugaba, que menos posesiones disponía por partido. Basándonos en estadísticas por partido, diríamos que eran un buen equipo en el terreno defensivo, pero algunas estadísticas avanzadas nos muestran que, ajustadas a su ritmo, tenían una eficiencia bastante peor. La tasa defensiva (explicada más adelante), por ejemplo, situaba al equipo como el 17.º de los 30 de la liga.

Cuando dos equipos se enfrentan, básicamente tendrán el mismo número de posesiones cada uno, por tanto para el análisis del choque, las estadísticas que no se ajusten al ritmo pueden llegar a ser inútiles. Por ello, es crucial saber cómo hallar el número de posesiones, dato que posteriormente se utiliza en el cálculo de un buen número de estadísticas avanzadas. Aunque existen distintas formas de calcular el número de posesiones, como la propuesta por Kubatko y otros (2007), a día de hoy la NBA lo hace así [10]:

$$\text{posesiones} = 0,96 \cdot \left(\text{FGA} - \text{OREB} + \text{TO} + 0,44 \cdot \text{FTA}\right)$$ [11]

El factor 0,44 está fundamentado en varios motivos: que un jugador anote y reciba una falta, lanzando así un tiro libre que no supone una posesión, que se lance un tiro libre por una falta flagrante o técnica, o que cuando se hace una falta sobre un lanzamiento triple, se tiran tres tiros libres. La NBA ha determinado que sobre el 44% de los tiros libres suponen posesión [12].

Igualmente, el factor 0,96 se explica por los llamados rebotes ofensivos de equipo, situaciones en las cuales tras un tiro fallado un defensor toca el balón y lo impulsa fuera de banda; la posesión continúa pero no se apunta rebote ofensivo a ningún jugador.

Algunas estadísticas avanzadas

Así, las estadísticas avanzadas hacen uso de las estadísticas más básicas, las que podemos llamar tradicionales, para intentar alcanzar una comprensión más profunda de lo sucedido durante los partidos. El número de estadísticas de este tipo es muy grande, y más que se siguen desarrollando; en estas páginas no hay espacio para todas ellas, pero vamos a tratar de enumerar algunas de las más habituales.

Si no se hace ninguna aclaración al respecto, la definición de una estadística está sacada de <http://stats.nba.com/help/glossary/>. Además, los datos específicos de las tablas han sido extraídos de <http://stats.nba.com/players/advanced-leaders/>.

Effective Field Goal Percentage (EFG%), o porcentaje efectivo de acierto en los tiros de campo. Para valorar la calidad del tiro, mejora al porcentaje simple de acierto en los tiros de campo, pues da a los triples un 50% más de importancia ya que estos suponen un 50% más de puntos. Se calcula como:

$$EFG\% = \frac{FGM + 0,5 \cdot 3FGM}{FGA}$$

True Shooting Percentage (TS%), o porcentaje verdadero de tiro. Al igual que el EFG%, trata de medir la eficiencia de un jugador en el tiro, pero incluye también los tiros libres, cosa que no hace el EFG.

$$TS\% = \frac{(PTS)}{2 \cdot \left(FGA + 0,44 \cdot FTA\right)}$$

En la tabla 1 podemos ver un ejemplo de las medidas más habituales para evaluar el acierto en el tiro de los jugadores: el porcentaje de acierto en tiros de campo (FG%), el porcentaje efectivo de acierto en los tiros de campo (EFG%) y el porcentaje verdadero de tiro (TS%). Hemos incluido los datos de los cuatro jugadores más votados en la elección del MVP (premio al jugador más valioso de la temporada) de 2017 [13].

Jugador	FG%	EFG%	TS%
Russell Westbrook	42,5	47,6	55,4
James Harden	44,0	52,5	61,3
Kawhi Leonard	48,5	54,1	61,0
LeBron James	54,8	59,4	61,9

Tabla 1. FG%, EFG% y TS%

Vemos cómo hay un jugador que, teniendo FG% y EFG% muy superiores a los demás, tiene un TS% casi igual a otros dos, debido a su menor acierto en los tiros libres. O cómo la escasa diferencia en FG% entre Harden y Westbrook se ve aumentada en los otros dos porcentajes a causa de la gran cantidad de triples anotados por Harden.

Efficiency Rating (EFF), índice de eficiencia. Se trata de un sistema muy simple y poco revelador, pues asigna la misma importancia a datos que tienen claramente pesos diferentes en el juego, lo cual lleva a sobrestimar ciertas tipologías de jugador y a infravalorar otras. En un partido, la eficiencia de un jugador se calcula como:

$$\begin{aligned} EFF = {} & PTS + REB + AST + STL - TO - \\ & - \left(FGA - FGM\right) - \left(FTA - FTM\right) \end{aligned}$$

Player Efficiency Rating (PER) [14], o índice de eficiencia del jugador. Elaborado por el analista John Hollinger (2002), se trata de un índice que mide la productividad de un jugador por minuto de juego, para lo cual suma todas las aportaciones positivas de un jugador y resta todas las negativas, con pesos distintos de 1. Una característica esencial de este valor es que está ajustado para que la media de los jugadores sea 15 (Winston, 2009).

Como apunta David Berri [15], un fallo importante de este índice es que un jugador con muy malos porcentajes de tiro (menos del 25% en triples, menos del 33% en tiros de campo) puede incrementar su PER… haciendo más tiros; esto procede de los pesos incorrectos asignados en la fórmula. Y tiene poco sentido el suponer que un jugador puede mejorar su contribución aumentando aquello que hace mal.

Hollinger ha desarrollado otro índice llamado *Game Score* (GS), o marcador del partido, que tiene la misma finalidad que el PER, medir la actuación de un jugador durante un partido. Se trata de una simplificación del propio PER, y de hecho tiene sus mismos defectos. Se calcula de la siguiente manera [16]:

$$\begin{aligned} GS = {} & PTS + 0,4 \cdot FGM - 0,7 \cdot FGA - \\ & - 0,4 \cdot \left(FTA - FTM\right) + 0,7 \cdot OREB + \\ & + 0,3 \cdot DREB + STL + 0,7 \cdot AST + \\ & + 0,7 \cdot BLK - 0,4 \cdot PF - TO \end{aligned}$$

Un método analítico que puede proporcionar información para entender la relación entre diferentes variables es el estudio del coeficiente de correlación lineal entre dos variables (Severini, 2015).

David Berri ha encontrado [17], evaluando datos de la temporada 2005-06, fuertes correlaciones (del orden de 0,98) tanto entre el GS y el PER, como entre el GS y la tasa de eficiencia. Esto nos permite sugerir que las propuestas de Hollinger son simplemente una recomposición de la eficiencia, pero que las tres ordenarán la actuación de los jugadores casi siempre de la misma manera. Además, con datos de la temporada 2004-05, ha encontrado también una correlación de 0,95 entre la eficiencia y los puntos anotados (Berri y otros, 2006), mostrando qué jugadores se ven sobrevalorados con estos índices: aquellos que destacan en anotación.

Player Impact Estimate (PIE), o impacto estimado del jugador. Se trata de una medición que busca indicar la contribución estadística del jugador o el equipo respecto de las estadísticas totales de los partidos en los que juega. Busca mejorar la eficiencia antes comentada incluyendo las faltas personales cometidas y añadiendo un denominador, gracias al cual la NBA cree que no es necesario considerar el ritmo empleado.

La página web oficial de la NBA asegura, sin más explicación, que la correlación entre el PIE de los equipos y el porcentaje de partidos ganados es de 0,953[18], lo cual supondría una dependencia bastante fuerte.

La estadística total del jugador equipo o partido se calcula así:

$$\begin{aligned}\text{estad. total} = {} & \text{PTS} + \text{FGM} + \text{FTM} - \text{FGA} - \\ & - \text{FTA} + \text{DREB} + 0{,}5 \cdot \text{OREB} + \text{AST} + \\ & + \text{STL} + 0{,}5 \cdot \text{BLK} - \text{PF} - \text{TO}\end{aligned}$$

Valor que se usa en el cálculo del PIE:

$$\text{PIE} = \frac{\text{estadística total del jugador o del equipo}}{\text{estadística total del partido}}$$

En la tabla 2 utilizamos otra vez a los mismos jugadores de la tabla 1 para mostrar sus tasas de eficiencia (EFF), tasa de eficiencia del jugador (PER) e impacto estimado del jugador (PIE). Las tres pretenden medir lo mismo con un valor único, la actuación general de cada jugador.

Jugador	EFF	PER	PIE
Russell Westbrook	33,8	30,6	23,0
James Harden	32,4	27,4	19,0
Kawhi Leonard	25,3	27,6	17,4
LeBron James	31,0	27,0	18,3

Tabla 2. EFF, PER y PIE

Usage Percentage (USG%), o porcentaje de uso. Es el porcentaje de jugadas del equipo *utilizadas* por un jugador. Se calcula mediante las posesiones terminadas por ese jugador, en función del número de posesiones totales mientras el jugador está en pista. Se calcula así:

$$\text{USG\%} = \frac{\text{FGA} + 0{,}44 \cdot \text{FTA} + \text{TO}}{\text{posesiones}}$$

En la temporada 2016-17 el jugador con mejor porcentaje de uso fue Russell Westbrook(figura 3[19]), con un 40,8%[20]. Pero no solo del año, sino que fue el dato más alto alcanzado desde que se tienen datos al respecto, 1986[21], lo que nos permite deducir que desde entonces no ha habido en la liga un equipo tan centrado en un solo jugador como los Oklahoma City Thunder lo estuvieron en Westbrook, quien por otra parte fue premiado con el MVP de la temporada.

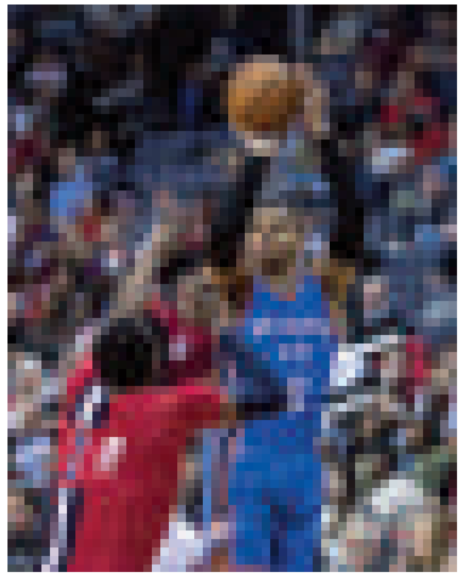


Figura 3. Russell Westbrook (0) y John Wall (2)

Offensive rating/ deffensive rating, o tasa ofensiva/ tasa defensiva, que fueron creadas por Dean Oliver (2004). Se hallan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\text{tasa ofensiva} &= \text{puntos anotados/posesiones}\\ \text{tasa defensiva} &= \text{puntos recibidos/posesiones}\end{aligned}$$

Se trata de un parámetro a nivel de equipo, pero si se calculan con los puntos logrados mientras un determinado jugador está en cancha, también puede ser revelador a nivel de jugador. Como comentamos con anterioridad, en ocasiones es necesario realizar un ajuste al ritmo empleado para poder evaluar con acierto la eficiencia ofensiva o defensiva.

Los dos siguientes parámetros se pueden calcular, si bien no a partir de las estadísticas tradicionales que hemos venido usando en los anteriores, sí a partir de lo que solemos llamar *play-by-play* (que empezó a registrarse en 1986), el desarrollo paso a paso de todo lo que ocurre durante el partido, incluyendo los cambios de jugadores; esto último permite conocer en todo momento cuáles son los quintetos que ambos equipos tienen en cancha.

Índice +/-. Esta estadística se calcula mediante el diferencial de puntos logrado por el equipo cuando el jugador está en cancha y en el banquillo. Se puede expresar por 48 minutos (duración de un partido NBA) o por 36 minutos, para relativizar el tiempo jugado. El mayor problema que presenta para calibrar la actuación de un jugador concreto, es que depende de la calidad de los demás jugadores en cancha. Así, los mejores en este apartado siempre pertenecen a los mejores equipos.

Índice +/- ajustado. Resulta una mejor aproximación que el parámetro anterior, pues el +/- se ajusta al resto de jugadores presentes en la cancha en cada momento. Esta estadística indica con cuántos puntos adicionales contribuye un jugador a la anotación de su equipo en comparación con el jugador medio de la liga durante la duración de un partido típico, considerado de 100 posesiones (Winston, 2009). Descrito por Dan Rosenbaum[22], se considera ajustado dado que parte del +/- anterior y aplica un modelo de regresión lineal para incluir el impacto de los demás jugadores en pista; los resultados han sido centrados para que el jugador medio de la liga tenga un +/- ajustado de 0. Esta estadística está limitada en su valor por el elevado tamaño de la muestra necesario para minimizar los errores de estimación o por su incapacidad para discernir los efectos de dos jugadores que habitualmente coinciden en sus minutos de juego.

Por último, citaremos un parámetro bastante usado en una de las webs especializadas en baloncesto que más visitas reciben, *Basketball Reference*. Es, además, una buena muestra de la complejidad que pueden llegar a alcanzar los cálculos de este tipo de estadísticas avanzadas.

Win Shares (WS), o contribución a la victoria. Para calcular la aportación de un jugador al éxito de su equipo, este índice usa estadísticas del jugador, del equipo y de la liga. Y está calculado de forma que la suma de los datos de todos los jugadores de un equipo dado será aproximadamente igual al número de victorias del equipo en la temporada. Fue desarrollado por Bill James (2001) originalmente para el béisbol, y posteriormente adaptado para el baloncesto por Justin Kubatko, fundador de *Basketball Reference*.

Su cálculo es bastante complejo, y hacerlo a mano llenaría varias páginas, aunque podemos encontrarlo pormenorizado en *Basketball Reference*[23]. Para comprender en qué consiste, el primer paso se encuentra en el cálculo de otras estadísticas avanzadas más sencillas como la tasa defensiva, los puntos producidos o las posesiones ofensivas (disponibles en Oliver, 2004). Se usan estadísticas del jugador, del equipo y del total de la liga, con ellas se obtienen un dato marginal ofensivo y otro defensivo para cada jugador, una forma de valorar su producción en relación con el total de la liga. Por último, se suman estos dos datos y se obtiene la WS.

Un último ejemplo

Para terminar, vamos a mostrar un ejemplo de cómo las estadísticas avanzadas pueden ofrecer una visión distinta a las tradicionales.

Según *Basketball-Reference*[24], durante la temporada 2016-17 Marc Gasol (figura 4[25]) ha cogido 6,3 rebotes totales (ofensivos y defensivos) por partido, lo que le ha colocado como el 60.º en rebotes por partido, el 32.º en su posición (la de pívot o *center*). Teniendo en cuenta además que es el 26.º en minutos jugados por partido, parecen datos suficientes para poder calificarle como un mal reboteador.

Observando su forma de jugar durante los partidos, da la sensación de que su entrenador no le encomienda estar pendiente de los rebotes ofensivos debido a motivos tácticos (distribución de juego en el poste alto, balance defensivo). Por ello, nos fijaremos en los rebotes defensivos, que sí parecen estar entre las tareas asígnadas. Aquí es el 35.º, con 5,5 por partido. Mejor, pero aún así lejos de la élite, pues sería el 18.º entre los pívots, y son muchos los analistas que le consideran uno de los candidatos a mejor pívot de la liga[26].

Pero si valoramos las estadísticas avanzadas, podemos dar una vuelta al análisis. Consideraremos un parámetro que aún no habíamos tenido en cuenta: el porcentaje de rebotes defensivos (DREB%), calculado como el porcentaje de veces

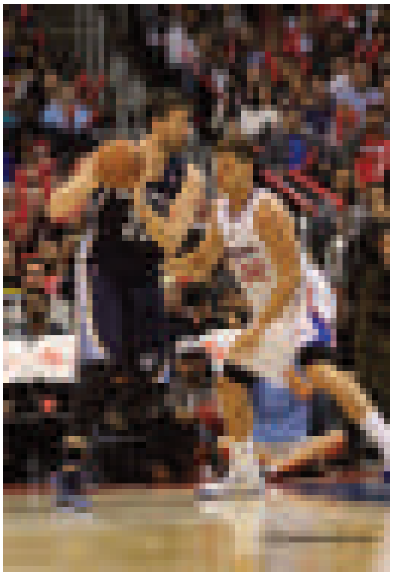


Figura 4. Marc Gasol (33) y Blake Griffin (32)

que un jugador o equipo coge el rebote, respecto del total de jugadas en las que un rebote está disponible. Pues bien, según datos de <www.82games.com> [27], el equipo de Marc Gasol, los Grizzlies, cogen un mayor porcentaje de rebotes defensivos cuando Gasol está en la cancha que cuando está sentado. Y esto ha sido así durante las siete últimas temporadas, y solo en las dos primeras del jugador en la liga no sucedía.

Una estadística avanzada muestra así que, quizás, Marc Gasol no sea tan mal reboteador. Esto se podría explicar incidiendo en que destaca impidiendo que el rival coja el rebote, y aunque no lo coja él mismo sí favorece que acabe en manos de un compañero. Y si bien se trata de una estadística con bastante *ruido*, pues depende bastante de los compañeros y rivales que haya en pista en cada momento, esta nueva estadística nos obliga, al menos, a revisar nuestra valoración inicial en base a las estadísticas tradicionales, y puede conseguir aportar una nueva información que estas no transmitían.

Algunas propuestas para el aula

El artículo apunta hacia diversas posibilidades en cuanto a la utilización didáctica que puede darse a la información presentada. Si bien puede no ser demasiado adecuado para trabajar en su totalidad, sí se pueden extraer algunas ideas de las aquí expuestas para trabajar conceptos estadísticos utilizando el deporte como punto de partida, pues se trata de un área que conecta muy bien con cierto tipo de alumnado.

En 1.º de Bachillerato, tanto en la rama científico-tecnológica como en la de ciencias sociales, se incluye entre los estándares de aprendizaje evaluables el análisis del grado de dependencia lineal entre dos variables, extrayendo conclusiones a partir del cálculo del coeficiente de correlación lineal.

Una posible tarea para el alumnado de este nivel consiste en extraer de la propia página web de la NBA los datos necesarios para calcular dicho coeficiente en el caso de la eficiencia y los puntos anotados (o en alguno de los otros ejemplos mencionados más arriba). Aparte de reforzar la comprensión del concepto matemático y ayudar a la mecánica realización de cálculos con un objetivo real contextualizado, la tarea se completa con la confrontación de los datos obtenidos por el alumnado con los expuestos por David Berri, a los que ya hemos aludido. Si además el cálculo se hace tomando los datos de temporadas diferentes, el análisis del coeficiente se hace más interesante al poder tener en consideración posibles variaciones temporales, pudiendo concluir si se trata de un aspecto constante o variable en el tiempo.

En este nivel incluso se podría proponer alguna tarea de investigación de mayor dificultad, como tratar de encontrar alguna situación similar a la del ejemplo de Marc Gasol, en la cual las estadísticas tradicionales parezcan indicar alguna conclusión que las estadísticas avanzadas maticen en otra dirección. Si bien para un profano en baloncesto puede parecer una tarea muy complicada, si el alumnado es seguidor habitual de este deporte entonces es perfectamente accesible.

En niveles más bajos de la ESO se incide en la estadística descriptiva unidimensional, lo cual abre la puerta a actividades relacionadas con la organización de datos estadísticos en forma de tablas y gráficas. La variabilidad de la dificultad en tareas de este tipo es bastante grande, y son así más adaptables por niveles.

En el primer ciclo proporcionaremos siempre información específica como punto de partida. Pueden ser pequeñas tareas como dar el número de rebotes de Gasol en todos sus partidos para que encuentren su media, o más elaboradas como mostrar datos tabulados del estilo de la tabla 1 para solicitar que representen gráficamente la información en un diagrama de barras y requerir preguntas del tipo ¿qué jugador tiene peor FG%? o ¿cuál de los jugadores piensas que ha estado tirando mejor?

En el segundo ciclo el tipo de actividades a proponer son parecidas a las del primer ciclo, pero de mayor complejidad. Aumentar el número de parámetros para calcular y analizar (cuartiles, desviación típica) o proporcionar una guía para que sea el alumnado quien realice la recolección y elabore el tabulado de los datos, serían tareas más apropiadas a este nivel.

En todo caso, hemos de ser cuidadosos con el apartado estadístico escogido, pues el número de jugadores en la liga es cercano a 500, cantidad que solo es factible manejar si recurrimos al uso, por ejemplo, de hojas de cálculo como Excel. En caso de pretender hacer los cálculos a mano o con calculadora, recomendamos limitar el estudio a los jugadores que hayan obtenido los mejores valores en dicho apartado estadístico.

Referencias bibliográficas

Berri, D. J., M. B. Schmidt y S. L. Brook (2006), *The wages of wins: Taking measure of the many myths in modern sport*, Stanford University Press, Palo Alto.

Hollinger, H. (2002), *Pro basketball prospectus*, Potomac Books.

James, B. y J. Henzler (2001), *Win shares*, Free Press, New York.

Kubatko, J., D. Oliver, K. Pelton, K. y D. Rosenbaum (2007), «A Starting Point for Analyzing Basketball Statistics», *Journal of Quantitative Analysis in Sports*, Vol. 3: Iss. 3, Article 1.

Lewis, M. M. (2003), *Moneyball: The art of winning an unfair game*, W.W. Norton & Company Inc., New York.

Murray, A. (2010), *The Wall Street Journal essential guide to management*, HarperBusiness, New York.

Oliver, D. (2004), *Basketball on paper. Rules and tools for performance analysis*, Brassey's INC., Washington DC.

Schell, E. y E. de Andrés (2008), *Basuketoboru*, ESIC Editorial, Pozuelo de Alarcón.

Severini, T. A. (2015), *Analytic methods in sports*, CRC Press, Boca Ratón.

Shea, S. (2014), *Basketball analytics: Spatial tracking*, Createspace, Scotts Valley.

Winston, W. L. (2009), *Mathletics*, Princeton University Press, New Jersey.

Paulo González Ogand
Johan Carballeira (Bueu)
<paulo.glez.ogando@gmail.com>

1 Una traducción al castellano puede ser «las estadísticas son como los bikinis, lo que muestran es sugerente, pero lo que esconden es vital».

2 <http://www.cbssports.com/collegebasketball/ncaa-tournament/history/yearbyyear/1939>.

3 <http://www.acb.com/redaccion.php?id=29637>.

4 Un ejemplo de mediados de los ochenta: <https://www.basketballreference.com/boxscores/198506090BOS.html>.

5 <http://stats.nba.com/help/glossary/>.

6 <http://www.espn.com/blog/playbook/tech/post/_/id/492/492>.

7 <http://www.espn.com/blog/truehoop/miamiheat/post/_/id/11768/introducing-miamis-pace-or-space-offense>.

8 <https://sportselite1.wordpress.com/2017/05/21/pace-and-space-the-new-era-of-nba/>.

9 <http://hangtime.blogs.nba.com/2013/02/15/the-new-nba-comstats-advanced-stats-all-start-with-pace-and-efficiency/>.

10 <https://www.nbastuffer.com/analytics101/possession/>.

11 A lo largo del texto, en las fórmulas usaremos los porcentajes en tanto por uno, así los parámetros que devuelven un porcentaje tendremos que multiplicarlos por 100 si queremos conocer el tanto por ciento.

12 <https://www.nbastuffer.com/analytics101/possession/>.

13 <https://ak-static.cms.nba.com/wp-content/uploads/sites/4/2017/06/2016-17-Kia-NBA-Most-Valuable-Player-of-the-Year-Award.pdf>.

14 <https://www.basketball-reference.com/about/per.html>.

15 <http://wagesofwins.com/2006/11/17/a-comment-on-the-player-efficiency-rating/>.

16 <https://www.basketball-reference.com/about/glossary.html>.

17 <http://wagesofwins.com/2006/11/17/a-comment-on-the-player-efficiency-rating/>.

18 <http://stats.nba.com/help/faq/>.

19 Foto de Keith Allison. <https://www.flickr.com/photos/keithallison/32077032673/>.

20 <http://stats.nba.com/players/advanced/#!?sort=USG_PCT&dir=-1&CF=MIN*GE*15>.

21 <http://www.nba.com/article/2017/04/14/playoffs-numbers-preview-houston-rockets-oklahoma-city-thunder>.

22 <http://www.82games.com/comm30.htm>.

23 <https://www.basketball-reference.com/about/ws.html>.

24 <https://www.basketball-reference.com/leagues/NBA_2017_per_game.html>.

25 Foto de Verse Photography. <https://www.flickr.com/photos/77366688@N03/10953607126>.

26 Por ejemplo: <https://www.foxsports.com/nba/story/memphis-grizzlies-nba-gms-marc-gasol-best-center-international-player-102015> o también <http://www.sportingnews.com/us/nba/news/nba-player-rankings-center-2017-karl-anthony-towns-demarcus-cousins-marc-gasol/xs0d1wup2y5e1mox4g8t9b4yv>. Cualquier búsqueda en Internet de «marc gasol best center in nba» devuelve multitud de artículos en esta línea.

27 <http://www.82games.com/1617/16MEM17.HTM>.

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 41-49

La *clase invertida* a través del uso de la plataforma Edpuzzle

Pablo Carrillo Sánchez

El objetivo del presente trabajo es dar a conocer una práctica educativa que promueve una metodología didáctica para la enseñanza de las matemáticas que fomenta la participación del alumnado en el proceso de aprendizaje, en contraposición a metodologías más expositivas. Se concluye que la utilización de la metodología invertida o *flipped classroom* junto con el uso educativo de vídeo-tutoriales da lugar a clases más dinámicas y facilita la adquisición de las competencias básicas.

Palabras clave: Innovación educativa, Clase invertida, Eficiencia-Clases, Vídeos, Motivación y Mejora de resultados.

The Inverse Class through the use of the educational platform Edpuzzle

The goal of this project is to spread an educational practice that promotes a didactic methodology for teaching mathematics that encourages students to be an active part in the process of learning, just opposing to methodologies which emphasize more on the teaching process. We conclude that by using Inverse Methodology or Flipped Classroom and educational videos, we foster more dynamic classes and it eases the acquisition of basic competencies.

Keywords: Educational innovation, Flipped classroom, Efficiency-Classes, Videos, Motivation and Improvements of results.

Este artículo, que se centra en el aprendizaje de las matemáticas, es a su vez parte de la difusión de un proyecto de innovación más amplio, aprobado por la Consejería de Educación, Juventud y Deportes de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia, que se está desarrollando de manera multidisciplinar en el IES Pedro Peñalver de El Algar (Cartagena) durante el curso académico 2017/18 llamado *La* clase invertida *para la mejora del rendimiento y la eficiencia de las clases a través de las herramientas digitales accesibles Edpuzzle y Google Classroom*.

Los fundamentos de dicho proyecto tienen su base en las investigaciones de Bishop y Verleger, (2013) y Ros y Rosa (2014), que indican, entre otras, las siguientes ventajas de la metodología invertida:

1. Produce importantes ahorros en tiempo lectivo.
2. El tiempo en el aula puede ser utilizado de forma más efectiva y creativa.
3. La clase en el aula se *humaniza*.
4. Ayuda en la consecución de mayores niveles de logro, interés y compromiso de los estudiantes.
5. El estudiante se convierte en el verdadero protagonista de su aprendizaje.
6. Fomenta el trabajo autónomo y contribuye a una adecuada gestión del tiempo.

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

Además, señalan, junto a Butt (2014), Gutiérrez, Castañeda y Serrano (2013), que profesores y alumnos coinciden en la preferencia del uso de vídeos educativos frente a otros materiales y valoran este instrumento positivamente.

Mediante el mismo se trata de poner el énfasis en el proceso de aprendizaje, optimizar los tiempos de la clase para lograr una instrucción más individualizada y expandir el currículo de acuerdo a las necesidades e intereses particulares de cada alumno. Para ello, se usa la metodología invertida o *flipped classroom* como eje vertebrador y las herramientas digitales de libre acceso Edpuzzle y Google Classroom que conectan alumnos y profesores fuera del aula (Cotino, 2011) y convierten el acto aparentemente pasivo de visualización de un vídeo en un proceso activo que mejora la atención, la motivación y el grado de implicación del estudiante (Tucker, 2012).

En adelante nos centraremos en la parte del proyecto que se desarrolla principalmente con el uso de la plataforma Edpuzzle por considerarse especialmente útil para la enseñanza de las matemáticas.

Necesidades detectadas y soluciones propuestas

Este trabajo parte de la observación de las dificultades mostradas por el alumnado de 1.º y 2.º ESO a la hora de asimilar los contenidos de la materia de matemáticas siguiendo el Sistema de Enseñanza de Lenguas Extranjeras. Sin embargo, la condición de seguir este programa no nos parece ser requisito necesario para la puesta en marcha o el buen funcionamiento de la metodología que se pretende desarrollar en este artículo, así como tampoco los niveles elegidos. Por lo que, en lo siguiente, y en la medida de lo posible, se evitarán comentarios que pueden ser específicos de estos grupos, ya que la pretensión del autor es mostrar una dinámica que puede ser extrapolable a grupos que cursen la materia de matemáticas en la enseñanza reglada en cualquiera de sus niveles.

Las soluciones propuestas, basadas en los estudios nombrados anteriormente son:

1. Impartir el currículo aplicando la metodología invertida en contraposición a las clases magistrales.
2. Impulsar el aprendizaje basado en la actividad de los alumnos y la colaboración dentro de las aulas, convirtiéndolas en espacios de debate y reflexión, donde el profesor deja de ser la única fuente de conocimiento para adquirir el rol fundamental de guiar a cada alumno, de moderar los debates y favorecer el pensamiento crítico.
3. Posibilitar, de forma real, la inclusión y la atención a la diversidad y a los diferentes ritmos de aprendizaje usando video-tutoriales como recurso educativo dinámico y atractivo fuera de las aulas (Touron, 2010).

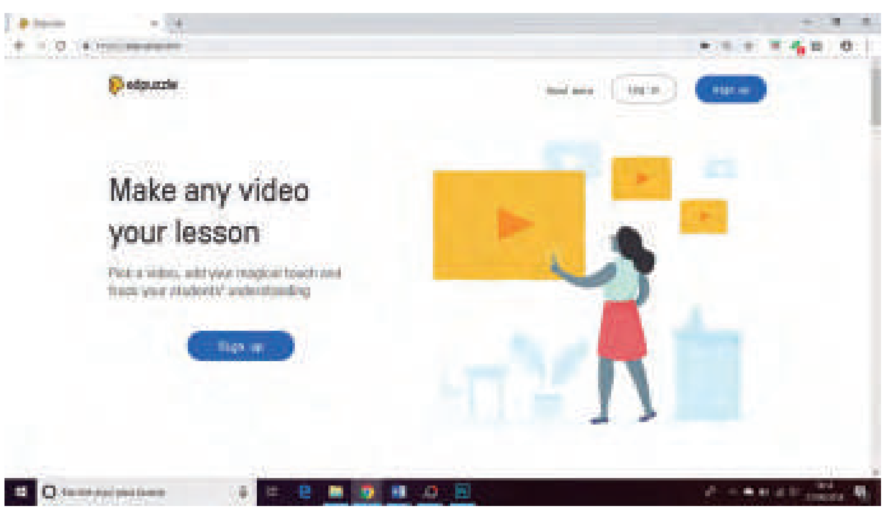


Figura 1. Ventana de entrada a la plataforma Edpuzzle

4. Fomentar el aprendizaje permanente del alumnado dotándolo de herramientas digitales que creen puentes entre el aprendizaje formal e informal y que le permitan extender el currículo cuando lo consideren conveniente.
5. Agilizar la retroalimentación que recibe el alumnado, fuera del aula, a través de la plataforma Edpuzzle.

Objetivos

El proyecto pretende la consecución de los siguientes objetivos que son coherentes con las soluciones propuestas:

1. Mejorar los resultados del alumnado y la adquisición de las competencias clave: matemática y básica en ciencia y tecnología, en comunicación lingüística, digital y, de forma indirecta, la competencia en aprender a aprender.
2. Incrementar la atención a la diversidad del alumnado favoreciendo la singularidad de cada uno y el acceso a herramientas en línea gratuitas que le permitan expandir el currículo de acuerdo con sus necesidades e intereses particulares. En consonancia con innovaciones conocidas en otros países europeos durante nuestra participación en el programa Erasmus +.
3. Enseñar al alumnado el uso adecuado de herramientas digitales educativas que le faciliten el aprendizaje permanente.
4. Impulsar la motivación y participación del alumnado en su proceso de aprendizaje mediante herramientas digitales actuales.
5. Posibilitar la comunicación alumno-profesor, fuera del aula, mediante medios digitales que permitan optimizar los tiempos de retroalimentación.
6. Aumentar la eficiencia de las clases de matemáticas.
7. Favorecer la reflexión del profesorado por la metodología invertida mediante la puesta en práctica de la misma.

Para alcanzar los objetivos mencionados hemos trabajado los contenidos que se recogen para la materia de matemáticas de 1.º y 2.º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria establecidos por la Consejería de Educación, Juventud y Deportes de la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia según el Decreto 220/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Metodología

La metodología llevada a cabo puede describirse de la siguiente manera:

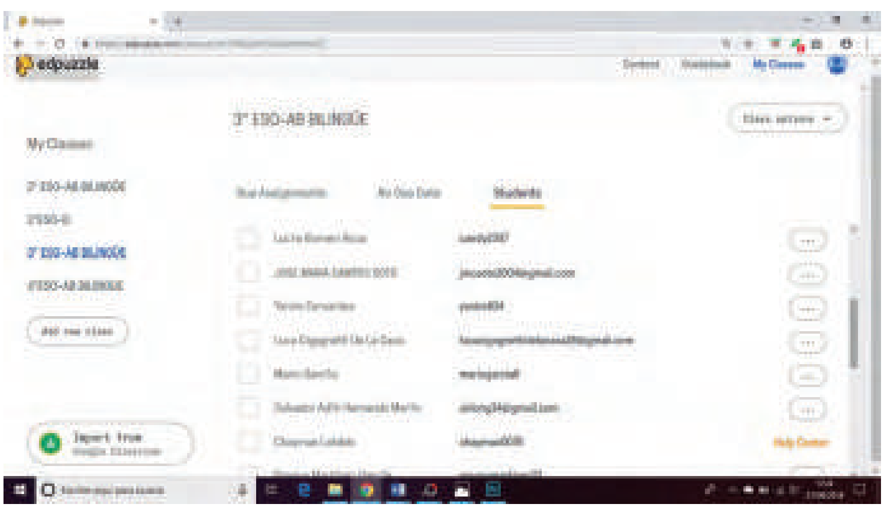


Figura 2. Alumnos inscritos en un grupo con su usuario

En primer lugar, los profesores han aprendido a manejar la plataforma Edpuzzle, para posteriormente enseñar a sus alumnos a darse de alta en el grupo de su profesor y trabajar con ella. De esta manera cada profesor ha configurado sus clases en la plataforma.

Seguidamente, cada profesor ha buscado y seleccionado vídeo-tutoriales entre los diferentes canales educativos relacionados con los contenidos programados en sus respectivas unidades didácticas, a los que les han insertado grabaciones de voz con aclaraciones y preguntas de diversa tipología, en momentos puntuales del vídeo, para comprobar el grado de comprensión de los contenidos visualizados hasta ese instante por el alumno. De esta manera, se ha pretendido convertir un proceso de aprendizaje aparentemente pasivo en un proceso activo que mejorará la atención, la motivación y el grado de implicación del estudiante con la materia (Tucker, 2012).

Una vez que el vídeo-tutorial está ya editado, cada profesor lo ha compartido con sus alumnos a través de la plataforma mencionada.

Posteriormente y, en sus casas, los alumnos han visualizado, contestado a las preguntas insertadas en los mismos y resumido o esquematizado en sus libretas su contenido antes de la fecha de caducidad puesta por el profesor en la plataforma, dicha fecha siempre ha sido anterior al uso en la clase presencial de los contenidos visualizados en los vídeos. Esta parte ha sido fundamental para que el alumnado disponga de un material escrito que le ha permitido repasar todo lo visto a lo largo del tema cuando lo ha necesitado.

En la siguiente clase, el profesor, que ya ha visualizado mediante la monitorización de la plataforma, el progreso y las dificultades de cada uno de sus alumnos en el vídeo propuesto, ha comenzado la clase resolviendo las dudas que los alumnos no han podido aclarar por sí mismos en sus casas, evitando así exposiciones prolongadas, personalizando el proceso de enseñanza y convirtiendo las aulas en espacios de debate y reflexión.

Una vez resueltas las dudas, el profesor ha propuesto la realización de experiencias en el

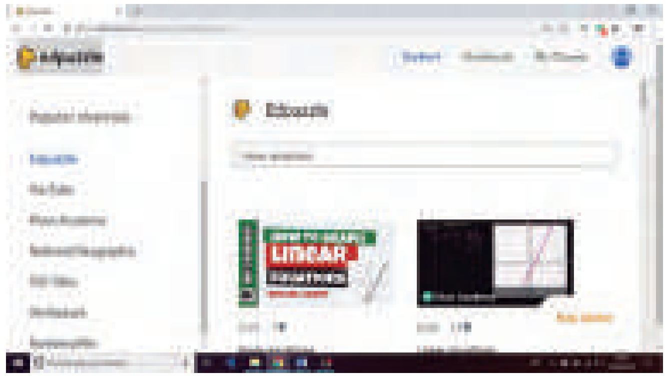


Figura 3. Búsqueda de contenidos en diferentes plataformas

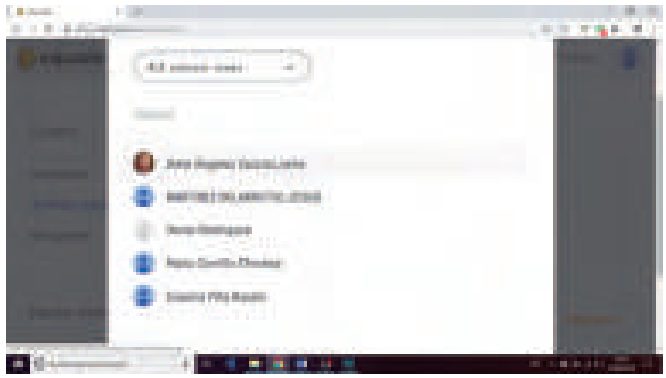


Figura 4. Profesores del mismo centro pueden compartir contenidos

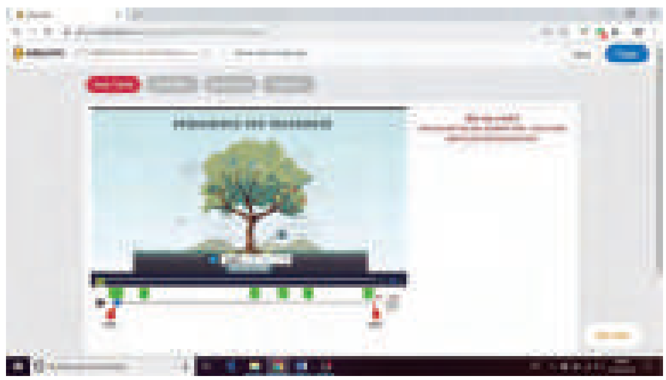


Figura 5. Selección de un fragmento del vídeo

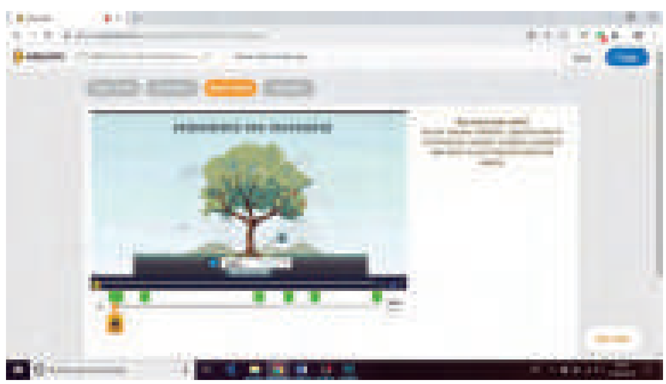


Figura 6. Inserción de audio notas

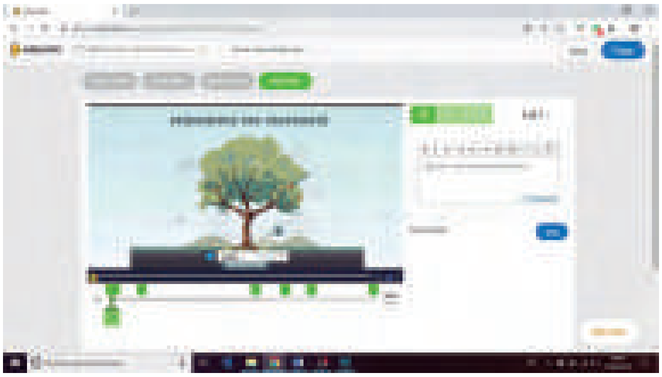


Figura 7. Inserción de preguntas

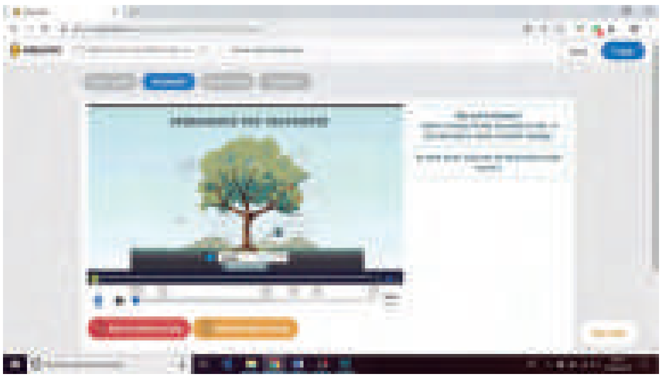


Figura 8. Grabación de voz durante todo el vídeo

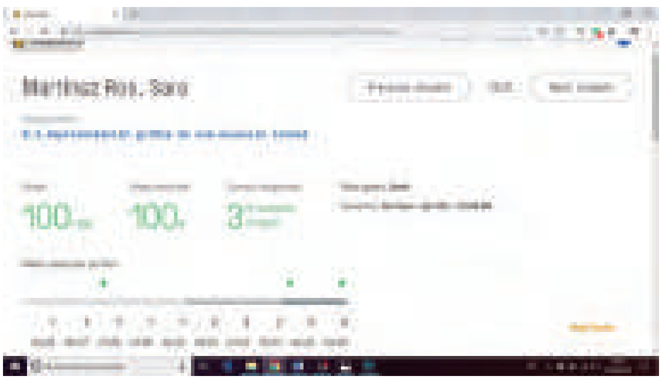


Figura 9. Monitorización del trabajo que el alumno ha realizado en el vídeo

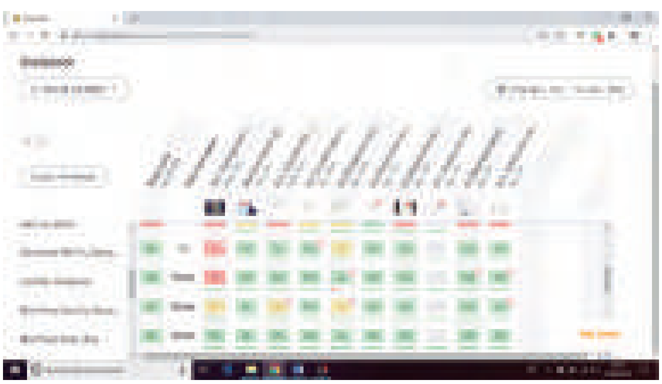


Figura 10. Visualización del trabajo de un trimestre de cada alumno

aula que favorezcan el trabajo cooperativo, ya que, al haber visualizado los contenidos en casa, el alumnado tiene una mayor capacidad de respuesta, lo que facilita la puesta en marcha de trabajo por proyectos, celebración de debates, trabajo en equipo y/o explicaciones entre iguales en pizarra, entre otras.

Implantación en el aula

La nueva metodología, con una duración que comprende el curso académico, conviene que sea implantada de forma progresiva con el fin de evitar resistencias de diversa índole, que posteriormente se expondrán. Por ello, durante este curso académico hemos decidido implantarla al menos en el 30% de las horas lectivas de la materia, con la idea de sentar las bases de futuros incrementos horarios, o no, según los resultados obtenidos posteriores a su evaluación.

La implantación se desarrolla en tres fases:

— *Fase I (iniciación al manejo de la plataforma)*: Se ha llevado a cabo durante un mes y ha consistido fundamentalmente en la formación del profesorado y del alumnado en el uso de la plataforma educativa Edpuzzle. En ella el profesorado ha aprendido, entre otras cosas, a editar vídeos, mientras el alumnado se ha dado de alta en la misma y ha comenzado a manipularla.

Los profesores mediante trabajo colaborativo y autoaprendizaje, han sido los encargados de formarse en el manejo de la plataforma. Aunque también existe la posibilidad de realizar el curso ofrecido por Edpuzzle. Posteriormente cada profesor ha enseñado a su alumnado cómo darse de alta en las mismas y su manejo como estudiante.

— *Fase II (desarrollo)*. Esta fase, que se viene desarrollando desde noviembre y finalizará a mitad de junio, consiste fundamentalmente en la aplicación de la metodología invertida mediante el uso de la plataforma Edpuzzle y la edición de vídeo-tutoriales.

— *Fase III (evaluación)*. En esta última fase, que se llevará a cabo a principio del mes de junio, se evaluará la nueva metodología aplicada. Para ello se confeccionarán cuestionarios dirigidos al profesorado y al alumnado participante, siguiendo los modelos presentados posteriormente.

Exportación a otros centros

En cuanto a las posibilidades de que otros centros lo pongan en marcha, y como se ha comentado en puntos anteriores, el proyecto está enteramente vertebrado mediante herramientas digitales en línea y gratuitas, y todos los vídeos seleccionados para editar son contenidos de libre disposición de webs o canales educativos, tipo YouTube, canal de Edpuzzle, Khan academy, Unicoos, Tutomate, etc., evitando así abusos sobre los derechos de autor o la ley de la propiedad intelectual, por lo que la exportabilidad a otros centros depende fundamentalmente de la voluntad del profesorado y del equipo directivo para superar las resistencias al cambio más que a las problemáticas que su puesta en funcionamiento pudiera causar.

Sin embargo, debido a su sensibilidad y, aun siendo minoritarios, conviene tener en cuenta algunos problemas que pueden surgir:

— Uno de ellos es encontrarnos con la desconexión a Internet de alguno o varios alumnos.

— El segundo problema es la resistencia de algunos estudiantes que prefieran el sistema de enseñanza tradicional.

— Por último la aplicación de la *clase invertida* conlleva una importante inversión de tiempo. El profesor no solo ha de buscar y editar los vídeo-tutoriales, sino que además ha de programar la asignatura en base a esta metodología de forma que su implantación sea adecuada.

No podemos obviar estos inconvenientes, pues aunque la desconexión a Internet suele darse en un número escaso de alumnos, podría favorecer las desigualdades de acceso al currículo. Por ello consideramos, que primeramente, el profesor debe hacer un rastreo para conocer el número de alumnos en esta situación y valorar la conveniencia o no, de su implantación. Si bien, el alumnado que carezca de conexión a Internet en casa puede igualmente ser partícipe accediendo a los vídeo-tutoriales en la biblioteca de su lugar de residencia o durante los recreos y con los ordenadores personales de la biblioteca del centro educativo.

Por otro lado, para minorar las resistencias a la nueva metodología y no saturar más de trabajo al profesorado, puede ser conveniente graduar su implantación como se ha comentado en puntos anteriores. Así como también, en lugar de crear material audiovisual propio, tratar de usar vídeo-tutoriales de libre disposición, ya editados por otros docentes, los cuales podrán ser personalizados y adaptados a sus clases mediante la herramienta Edpuzzle.

Proceso de evaluación

La evaluación tiene su fundamento en conocer el grado de cumplimiento de los objetivos previstos, por lo que los resultados que se deriven de esta permitirán conocer si se han alcanzado las metas propuestas.

A lo largo del curso llevamos a cabo una evaluación continua mediante reuniones periódicas que permiten reorientar, unificar criterios y consolidar nuestras actuaciones.

A principio de junio el alumnado y el profesorado completarán un cuestionario en línea creados con Google-Form o herramientas similares, que nos permitirán evaluar el proyecto en su totalidad.

Para la elaboración de los indicadores de evaluación relativos al alumnado tendremos en cuenta nuevamente a Ros y Rosa (2014) (tabla 1).

Los indicadores de evaluación a tener en cuenta por parte del profesorado se pueden ver en la tabla 2.

En relación a la metodología de la clase invertida (1: totalmente en desacuerdo; 5: totalmente de acuerdo)	
1. Es una forma de aprovechar mejor el tiempo en el aula	1-2-3-4-5
2. Creo que las clases son más prácticas y tienen más trabajo colaborativo	1-2-3-4-5
3. Me ha permitido tener una relación más cercana con el profesor	1-2-3-4-5
4. Me ha permitido tener una relación más cercana con mis compañeros	1-2-3-4-5
5. Ha aumentado mi interés por la asignatura	1-2-3-4-5
6. El «qué» y el «cómo» estudiar ha dependido menos del profesor y más de mí mismo	1-2-3-4-5
7. Ha contribuido a que gestione mejor mi tiempo de estudio	1-2-3-4-5
8. Prefiero que el profesor explique los contenidos en clase, aunque se dedique un menor tiempo a realizar actividades colaborativas	1-2-3-4-5
En relación a los vídeo-tutoriales… (1: totalmente en desacuerdo; 5: totalmente de acuerdo)	
9. He reproducido los vídeos varias veces hasta entender los conceptos	1-2-3-4-5
10. He visto cada vídeo de forma continua sin parar la reproducción en ningún momento	1-2-3-4-5
11. Hay conceptos que se entienden mejor mediante la explicación del profesor en el aula que en los vídeos	1-2-3-4-5
12. Los vídeos complementan adecuadamente la explicación del profesor en el aula	1-2-3-4-5
13. Los vídeos sustituyen adecuadamente la explicación del profesor en el aula	1-2-3-4-5
14. Con los vídeos me he puesto al día cuando he perdido el ritmo de la asignatura	1-2-3-4-5
15. Me resulta más familiar estudiar a través de Internet que haciendo uso de otros materiales	1-2-3-4-5
16. Los vídeos no se han ajustado a las actividades que se han realizado en el aula	1-2-3-4-5
17. Conectarme a Internet para reproducir los vídeos me ha supuesto algún inconveniente	1-2-3-4-5

Tabla 1

En relación al cumplimiento de los objetivos… (1: totalmente en desacuerdo; 5: totalmente de acuerdo)	
1. Ha permitido la mejora de los resultados y la adquisición de competencias clave del alumnado participante	1-2-3-4-5
2. Ha favorecido la singularidad de cada alumno y la atención a la diversidad	1-2-3-4-5
3. Ha potenciado la autonomía e iniciativa del alumnado	1-2-3-4-5
4. Ha motivado al alumnado haciéndolo protagonista de su propio aprendizaje	1-2-3-4-5
5. El alumnado ha aprendido a usar herramientas digitales educativas que le permitan acceder a aprendizajes formales e informales.	1-2-3-4-5
6. Ha permitido la reflexión del profesorado sobre metodologías que ponen el énfasis en el aprendizaje	1-2-3-4-5
7. Ha contribuido a que mis clases sean más eficientes	1-2-3-4-5
8. Prefiero explicar los contenidos en clase, aunque se dedique un menor tiempo a realizar actividades colaborativas	1-2-3-4-5
9. Ha favorecido la inclusión del alumnado y la atención a la diversidad	1-2-3-4-5
10. El próximo curso volveré a aplicar esta metodología	1-2-3-4-5
11. Merece la pena que otros profesores desarrollen esta forma de enseñar	1-2-3-4-5

Tabla 2

Materiales necesarios

A continuación, listamos los materiales necesarios para su desarrollo:

- — Proyector o pizarra digital para realizar la explicación de cómo darse de alta en la plataforma Edpuzzle y acceder a la clase del profesor.
- — Micrófonos-auriculares para incluir voz a las ediciones y/o creaciones de los video-tutoriales.
- — Tableta personal, solo si se desea crear video-tutoriales propios.
- — Un lápiz inteligente, solamente en el caso que se desee crear vídeo-tutoriales propios escritos desde una tableta personal.
- — Los alumnos deben tener en sus casas ordenador personal y conexión a Internet o móvil con conexión, siendo preferente el ordenador personal.

Consideraciones finales

Dado que la principal dificultad que hemos encontrado está en la frecuencia con la que el alumnado visualiza los vídeos, conviene apuntar algunas ideas que favorezcan las mismas:

- Incluir en el vídeo algún elemento que cause sorpresa en el alumno, puede ser un comentario de voz grabado por el profesor, la inclusión de un emoticono con los pulgares hacia arriba, una respuesta disparatada como elección múltiple, etc., de manera que lo convierta en un instrumento más personal, motivador y cercano al alumnado.
- Añadir preguntas a los vídeos, con corrección automática y retroalimentación, que permitan comprobar al alumno por sí mismo el grado de entendimiento de los contenidos de forma inmediata.
- Insertar preguntas al final del vídeo para obtener el *feedback* del alumno, tipo: ¿Has entendido los contenidos del vídeo?, ¿Qué te ha parecido el vídeo?, etc.
- Incluir una aclaración al principio, de voz o escrita, recordándole que debe tomar notas sobre las ideas principales del vídeo en su cuaderno de clase.
- Ser sistemático en valorar y preguntar a los alumnos en clase si han visualizado, o no, un determinado vídeo. Esto será fundamental para discernir si la plataforma está teniendo algún problema técnico puntual, además de para calificar el trabajo diario realizado en casa.
- Titular los vídeos con el mismo enunciado que los apartados que desarrollan el tema de estudio en clase.

Conclusiones

A modo de conclusión y con ciertas reservas, pues no se ha realizado ningún estudio sistemático hasta el momento, presentamos algunas apreciaciones recogidas tras la puesta en práctica del proyecto durante los cinco meses de funcionamiento.

Se observa que:

- El alumnado llega al aula con más conocimiento, siendo más participativo y más motivado por el aprendizaje.
- El alumnado muestra más interés al profundizar en contenidos teóricos.
- Se facilita la colaboración entre iguales.
- Los alumnos que no han visualizado el vídeo-tutorial están más atentos a las intervenciones de sus compañeros.
- El alumnado llega al aula con dudas preparadas e interés en resolverlas.
- El profesorado dispone de más tiempo en el aula para resolver las singularidades.
- Se comprenden con menos dificultad las explicaciones dadas en clase.
- El alumnado tiene más protagonismo en las clases.
- El alumnado afianza los contenidos en presencia del profesor.
- El alumnado que no asiste a clase por enfermedad u otros motivos tiene mayor facilidad para ponerse al día con la materia.
- Alumnos con más dificultades para entender la materia pueden seguir mejor el ritmo de la clase y encuentran menos problemas a la hora de realizar las actividades en casa.
- Favorece la implicación de los padres en el proceso de aprendizaje de sus hijos, ya que la explicación del vídeo los ayuda a recordar conceptos o procedimientos olvidados.
- Hay alumnos que extienden el currículo buscando más vídeos-tutoriales de matemáticas en otros canales educativos.

Referencias bibliográficas

Bishop, J. L., y M. A. Verleger (2013), «The flipped classroom: A survey of the research», *Conference Proceedings, Atlanta*, ASEE Annual Conference & Exposition.

Butt, A. (2014), «Student views on the use of a flipped. Classroom approach: evidence from Australia», *Business Education & Accreditation*, Australia University, 33-45.

Cotino, L. (2011), «Cómo mantener una muy útil y sencilla comunicación con el alumnado a partir de audios y vídeos», D*ocencia del derecho y tecnologías* *de la información y la comunicación*, Huygens, Barcelona.

Decreto 220/2015, de 2 de septiembre de 2015, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de la Región de Murcia.

Fundación Telefónica (2015), *Fundación Europea para la sociedad de la información 2016*, en línea.

Gutiérrez, I., L. Castañeda y J. L. Serrano (2013), «Más allá de la Flipped Classroom: "dar la vuelta a la clase" con materiales creados por los alumnos», *II Congreso Internacional Educación Mediática y Competencia Digital,* Universitat Oberta de Cataluña, Barcelona.

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación, modificada por la Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa (LOMCE).

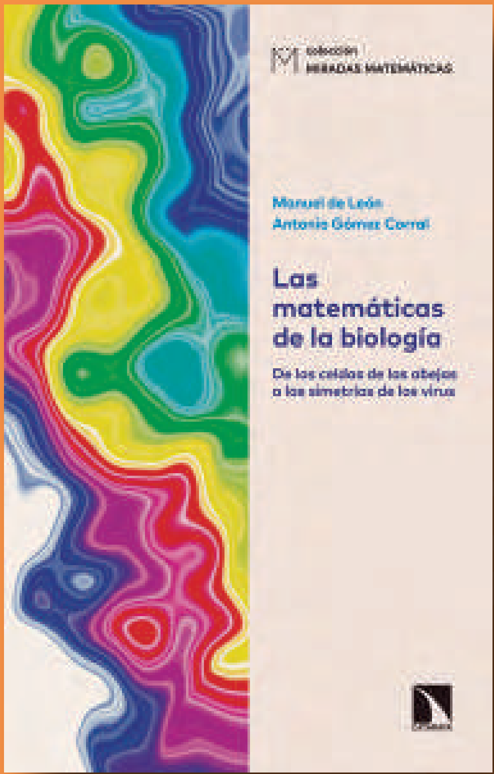
Ros, A., y A. Rosa (2014), «Uso del video docente para la clase invertida: Evaluación, ventajas e inconvenientes», *Vectores de la pedagogía docente actual,* Visión libros*,* Universidad Católica de San Antonio, Murcia.

Touron, J. (2010), *El desarrollo del talento y la promoción de la excelencia: exigencias de un sistema educativo mejor,* Dadun, Navarra.

Tucker, B. (2012), *The Flipped Classroom*, Education-Next, Cambridge

UNESCO (2015), *Replantear la educación: ¿Hacia un bien común mundial?*

Pablo Carrillo Sánchez
IES Pedro Peñalver, El Algar (Cartagena)
<pablocarsan@hotmail.com>



Servicio de Publicaciones de la FESPM

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 51-60

¿Qué hacer en probabilidad cuando no se sabe qué hacer?

José de Francisco Estaire

En este artículo se presentan varias actividades relativas al cálculo de probabilidades. El alumno, para su resolución, contará con la hoja de cálculo Excel.

Al realizar el planteamiento, solución y análisis de situaciones nada sencillas, se consigue elevar la autoestima del alumno. Las actividades también permiten dar una respuesta a la pregunta que el alumno siempre nos plantea: ¿para qué sirven las matemáticas?

Palabras clave: Probabilidad, Excel, Autoestima.

How to cope with probability when we do not know what to do?

The article presents different activities related to calculation of probabilities. Students, in order to solve it, will be provided with an Excel sheet.

Their self-esteem is being increased when developing a strategy, solution and analysis of non-easy situations. Thus, the activities allow to answer students´ well-known question: What is Mathematics useful for?

Keywords: Probability, Excel, Self-esteem.

Hay situaciones complejas que, en principio, solo se pueden abordar cuando se tiene un amplio conocimiento del cálculo de probabilidades y de sus recursos. Este planteamiento priva a casi todos los mortales de la posibilidad de acercarse a la solución de algún problema complejo que despierte su interés.

Hoy contamos con recursos al alcance de un alumno de bachillerato, los cuales le facilitan el abordaje de dichos problemas. En concreto disponemos de la hoja de cálculo, la cual permite encarar situaciones de matemática discreta, teniendo (por su «sencillez» y popularidad) una gran ventaja sobre otros programas de cálculo numérico.

Por tanto, a la pregunta que encabeza este artículo, ¿qué hacer en probabilidad cuando no se sabe qué hacer?, la respuesta es realizar una simulación.

Presentaré diversas situaciones, propuestas a los alumnos de primero de bachillerato que cursaron la asignatura optativa Estadística. En ellas los alumnos tienen que hacer una lectura comprensiva del ejercicio propuesto, con el fin de realizar el planteamiento y el programa de trabajo, que conduzca a la resolución de cada actividad y que posteriormente puedan iniciar pequeñas investigaciones.

Artículo recibido en *Suma* en agosto de 2018 y aceptado en enero de 2019

Situación 1

En el Océano Pacífico hay tres islas E_1, E_2 y E_3, que no están muy distantes entre sí, pero a gran distancia de la tierra más cercana. En estas islas vive una colonia de aves, cuya población permanece estable en el tiempo, habiendo solo migraciones entre las islas. Inicialmente en E_1 hay 350 parejas, 500 en E_2 y 200 en E_3. Estudios sobre el comportamiento de estas aves han determinado que semestralmente:

a) el 50 % de las parejas de E_1 se queda en E_1, un 20 % se va a E_2 y el resto a E_3;
b) el 40 % de las parejas de E_2 se queda en E_2, un 20 % se va a E_1 y el resto a E_3;
c) el 80 % de las parejas de E_3 se queda en E_3 y el resto se va a E_1.

A largo plazo ¿cuál será la distribución de las aves en cada isla?

Debemos determinar las relaciones entre las aves y las islas, para ello comencemos con un método gráfico: *el diagrama de estados.*

Tenemos tres estados E_1, E_2 y E_3 en los que ponemos las conexiones entre ellos, junto con las probabilidades de transición (figura 1).

A partir del diagrama de flujo, escribimos *la tabla de las transiciones entre estados,* siendo $E_1(n)$ la población de la colonia de la isla E_1, en el instante n y $E_1(n+1)$ la población de la colonia E_1 en el instante siguiente $n+1$, en nuestro caso seis meses después (tabla 1).

Utilizando la tabla de transiciones escribimos *el sistema de ecuaciones recurrentes,* que nos proporcionan la evolución de la población con el paso del tiempo, según las condiciones iniciales:

$$\begin{cases} E_1(n+1)=0{,}5E_1(n)+0{,}2E_2(n)+0{,}2E_3(n) \\ E_2(n+1)=0{,}2E_1(n)+0{,}4E_2(n) \\ E_3(n+1)=0{,}3E_1(n)+0{,}4E_2(n)+0{,}8E_3(n) \end{cases}$$

con

$$\begin{cases} E_1(0)=350 \\ E_2(0)=500 \\ E_3(0)=200 \end{cases}$$

Lo hecho hasta aquí está al alcance de un alumno de la ESO, pero la resolución del sistema recurrente es otro cantar.

La estimación de la solución del sistema la realizaremos utilizando la hoja de cálculo Excel, para ello procederemos de la siguiente forma:

En el rango B29:E29 ponemos los encabezamientos de lista y en B30:E30 ponemos los valores iniciales (he dejado 28 líneas de espacio para incluir en ellas el enunciado, el diagrama de estados, la tabla de transiciones, las ecuaciones recurrentes...) (figura 2).

En el rango C31:E31 ponemos las ecuaciones recurrentes:

En C31 escribimos =0,5*C30+0,2*D30+0,2*E30.

En D31 escribimos =0,2*C30+0,4*D30.

En E31 escribimos =0,3*C30+0,4*D30+0,8*E30.

Seleccionamos el rango <C31:E31> y rellenamos arrastrando, parando cuando se estabiliza el número de aves en cada isla. Esto se logra al cabo de 23 iteraciones (figura 3).

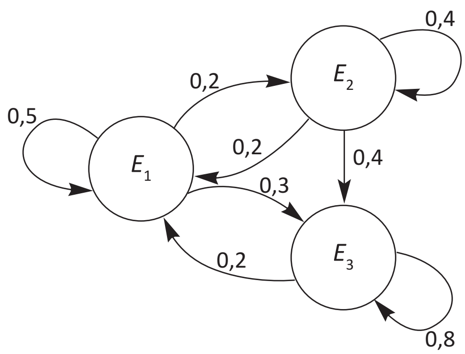


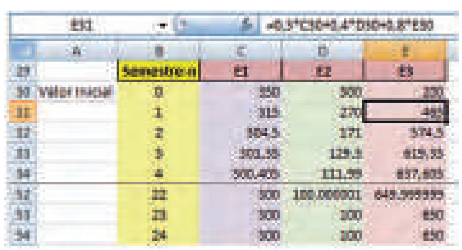
Figura 1

		Inicial (n)		
		E_1	E_2	E_3
Final (n+1)	E_1	0,5	0,2	0,2
	E_2	0,2	0,4	0
	E_3	0,3	0,4	0,8

Tabla 1

	A	B	C	D	E
29		Semestre-n	E1	E2	E3
30	Valor inicial	0	350	500	200

Figura 2



E31 =0,3*C30+0,4*D30+0,8*E30

	A	B	C	D	E
29		Semestre-n	E1	E2	E3
30	Valor inicial	0	350	500	200
31		1	315	270	465
32		2	304,5	171	574,5
33		3	301,35	129,3	619,35
34		4	300,405	111,99	637,605
52		22	300	100,000001	649,999999
53		23	300	100	650
54		24	300	100	650

Figura 3

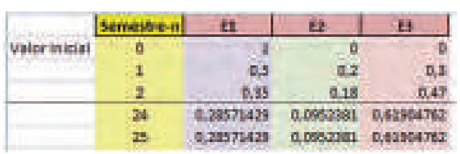
Vemos que la población de aves, en cada isla, se estabiliza en 300, 100 y 650 parejas. Si *jugamos* con la distribución inicial de las 1050 parejas de aves, observamos que la distribución final no depende de la inicial; por ejemplo si inicialmente tenemos: 0, 1 050 y 0 parejas, después de 23 iteraciones la distribución de las parejas en las islas se estabiliza en (300, 100, 650), de forma tal que si inicialmente tenemos (300, 100, 650) parejas, esta distribución se mantendrá fija cada semestre (figura 4).

Podemos decir que el vector (300, 100, 650) se transforma en el mismo, siendo por tanto un autovector.

¿Qué ocurrirá si tenemos una masa inicial distinta de 1 050 parejas? Normalicemos la solución estable dividiéndola entre el total $N=1\,050$, de esta forma obtenemos el porcentaje de aves que terminarán en cada isla: $1/1\,050\cdot(300, 100, 650)=$ (0,286, 0,095, 0,619), es decir, independientemente del valor inicial del número de parejas y de su distribución en las islas, obtenemos, que a la larga, el 28,6 % de la población estará en la isla E_1, el 9,5 % en la E_2 y el 61,9 % restante en E_3 (figura 5).

	A	B	C	D	E
29		Semestre-n	E1	E2	E3
30	Valor inicial	0	300	100	650
31		1	300	100	650
32		2	300	100	650
33		3	300	100	650

Figura 4



	Semestre-n	E1	E2	E3
Valor inicial	0	1	0	0
	1	0,5	0,2	0,3
	2	0,35	0,18	0,47
	24	0,28571429	0,0952381	0,61904762
	25	0,28571429	0,0952381	0,61904762

Figura 5

Notas para el profesor

El sistema de ecuaciones recurrentes puede escribirse de forma matricial:

$$\begin{pmatrix} E_1(n+1) \\ E_2(n+1) \\ E_3(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1(n) \\ E_2(n) \\ E_3(n) \end{pmatrix}$$

Abreviadamente: $E(n+1)=A\cdot E(n)$

Se verifica que: $E(n)=A^n\cdot E(0)$. El problema se reduce a calcular A^n, cálculo muy laborioso, a mano, que podría simplificarse si hubiera una matriz semejante a A pero más sencilla: concretamente una matriz diagonal D.

Sabemos que una matriz cuadrada A es diagonalizable o semejante a una matriz D si existe una matriz P (matriz de paso) que cumple: $A=P\cdot D\cdot P^{-1}$, en este caso $A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}$. Por tanto el problema se ha transformado en:

1. Calcular una matriz diagonal D, semejante a la matriz A (sabemos que no todas las matrices son diagonalizables).
2. Calcular la matriz de paso P y su inversa.

Esto dicho en pocas palabras se traduce en un trabajo arduo, que depende de la dimensión de A ya que el cálculo de P y de su inversa no es inmediato. Si A no es diagonalizable la cosa se pone más fea, ya que la matriz semejante a A será una matriz de Jordan.

Cálculo de la matriz *D*

Tenemos que resolver la ecuación característica $|A-\lambda\cdot I|=0$, en nuestro caso:

$$\begin{vmatrix} 0,5-\lambda & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4-\lambda & 0 \\ 0,3 & 0,4 & 0,8-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

obteniendo: $\lambda^3-1,7\lambda^2+0,82\lambda-0,12=0$, cuyas soluciones, son los autovalores $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0,4$, $\lambda_3=0,3$. Al ser las raíces de la ecuación simples, la matriz A es diagonalizable y semejante a la matriz diagonal D, que tiene en la diagonal principal los autovalores (en cualquier orden).

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0,3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la matriz de paso *P*

Las columnas de P están formadas por los autovectores asociados a cada autovalor, para ello debemos resolver tres sistemas de ecuaciones, uno para cada autovalor:

Para $\lambda=1$, resolvemos $(A-1\cdot I)\cdot V_1=0$, obteniendo:

$$V_1=\begin{pmatrix}6\\2\\13\end{pmatrix}$$

Para $\lambda=0{,}4$, resolvemos $(A-0{,}4\cdot I)\cdot V_2=0$, obteniendo:

$$V_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Para $\lambda=0{,}3$, resolvemos $(A-0{,}3\cdot I)\cdot V_3=0$, obteniendo:

$$V_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$$

La matriz de paso P será:

$$P=\begin{pmatrix}6&0&1\\2&1&-2\\13&-1&1\end{pmatrix}$$

y su inversa P^{-1} (cuyo cálculo lleva su tiempo) es:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/21&1/21&1/21\\4/3&1/3&-2/3\\5/7&-2/7&-2/7\end{pmatrix}$$

Con estos mimbres podemos calcular A^n:

$$A^n=P\cdot D^n\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix}6&0&1\\2&1&-2\\13&-1&1\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0{,}4^n&0\\0&0&0{,}3^n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/21&1/21&1/21\\4/3&1/3&-2/3\\5/7&-2/7&-2/7\end{pmatrix}$$

$$A^n=\begin{pmatrix}2/7+5/7\cdot(0,3)^n & 2/7-2/7\cdot(0,3)^n & 2/7-2/7\cdot(0,3)^n\\ 2/21+4/3\cdot(0,4)^n-10/7\cdot(0,3)^n & 2/21+1/3\cdot(0,4)^n+4/7\cdot(0,3)^n & 2/21-2/3\cdot(0,4)^n+4/7\cdot(0,3)^n\\ 13/21-4/3\cdot(0,4)^n+5/7\cdot(0,3)^n & 13/21-1/3\cdot(0,4)^n-2/7\cdot(0,3)^n & 13/21+2/3\cdot(0,4)^n-2/7\cdot(0,3)^n\end{pmatrix}$$

El resultado final es:

$$\begin{pmatrix}E_1(n)\\E_2(n)\\E_3(n)\end{pmatrix}=A^n\cdot\begin{pmatrix}350\\500\\200\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}300+50\cdot(0'3)^n\\100+500\cdot(0,4)^n-100\cdot(0,3)^n\\650-500\cdot(0,4)^n+50\cdot(0,3)^n\end{pmatrix}$$

Para el cálculo de la distribución de las aves a largo plazo, debemos calcular el límite cuando n tiende a infinito, obteniendo:

$$\begin{pmatrix}E_1(\infty)\\E_2(\infty)\\E_3(\infty)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}300\\100\\650\end{pmatrix}$$

Conclusión a la que se llega después de saber por dónde hay que moverse y de alguna hora de cálculo manual. A esta misma conclusión llegará un alumno (motivado y adiestrado) en pocos minutos.

Situación 2. El Juego de Penny-ante

Se lanza una moneda sucesivamente. Un jugador (Abel) selecciona una de las secuencias de tres resultados {ccc, cc+, c+c, +cc, c++, +c+, ++c, +++} y el otro jugador (Caín) selecciona otra secuencia diferente. Gana el primero que obtiene la secuencia que ha seleccionado. Si Abel apuesta por la secuencia (cc+) y Caín por (+c). ¿Qué probabilidad tiene cada uno de ganar? (Haihg, 2003: 79)

Llamemos 1 a cara y 0 a cruz. Abel apuesta por la secuencia (110) y Caín por (011).

A estas alturas, el alumno ya debe saber: trasladar la información del enunciado a un diagrama (figura 6), deducir la tabla de transiciones (tabla 2) y escribir las ecuaciones recurrentes del sistema.

Trasladamos las recurrencias a la hoja de cálculo y rellenamos arrastrando, obteniendo, después de 90 iteraciones, que el sistema se estabiliza. Abel gana con probabilidad de 1/4 y Caín gana con probabilidad de 3/4 (figura 7).

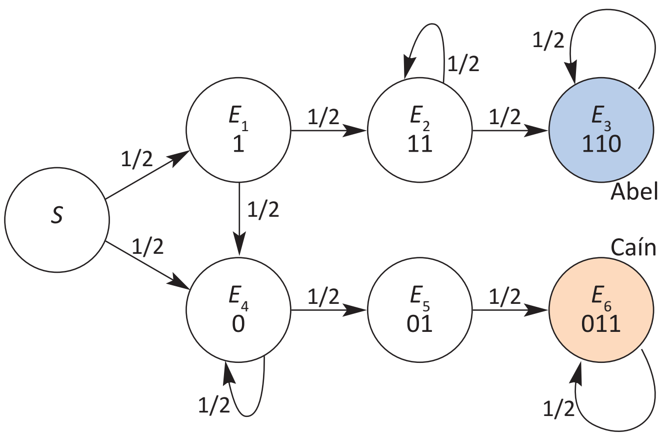


Figura 6

		Inicial (n)						
		S	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
Final (n+1)	S	0	0	0	0	0	0	0
	E_1	1/2	0	0	0	0	0	0
	E_2	0	1/2	1/2	0	0	0	0
	E_3	0	0	1/2	1	0	0	0
	E_4	1/2	1/2	0	0	1/2	1/2	0
	E_5	0	0	0	0	1/2	0	0
	E_6	0	0	0	0	0	1/2	1

Tabla 2

$$\left.\begin{aligned}
&S(n+1)=0\cdot S(n)\\
&E_1(n+1)=1/2S(n)\\
&E_2(n+1)=1/2E_1(n)+1/2E_2(n)\\
&E_3(n+1)=1/2E_2(n)+E_3(n)\\
&E_4(n+1)=1/2S(n)+1/2E_1(n)+1/2E_4(n)+\\
&\qquad\qquad +1/2E_5(n)\\
&E_5(n+1)=1/2E_4(n)\\
&E_6(n+1)=1/2E_5(n)+E_6(n)
\end{aligned}\right\}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
29		n	S	E1	E2	E4	E5	E3-ABEL	E6-CAÍN
30	valor inicial	0	1	0	0	0	0	0	0
31		1	0	0,5	0	0,5	0	0	0
32		2	0	0	0,25	0,5	0,25	0	0
33		3	0	0	0,125	0,375	0,25	0,125	0,125
34		4	0	0	0,0625	0,3125	0,1875	0,1875	0,25
120		90	0	0	8,0779E-28	1,7964E-09	2,3203E-09	0,25	0,74999999
121		91	0	0	4,039E-28	1,0464E-09	[illegible]	0,25	0,75
122		92	0	0	2,0195E-28	[illegible]	1,3227E-09	0,25	0,75

Figura 7

Notas para el profesor

En este caso, como en el anterior, tenemos una cadena de Markov cuya matriz de transición es una matriz estocástica (la suma de los elementos de cada columna es la unidad). La diferencia de este caso, con el anterior, es que aparte de los estados transitorios tenemos dos estados absorbentes: E_3 y E_6, de forma que cuando el sistema alcanza alguno de ellos ya no sale de él (el juego se ha terminado).

Reorganicemos la matriz de transición, de forma que los primeros estados que figuren sean los estados absorbentes (tabla 3).

		Inicial (n)						
		E_3	E_6	S	E_1	E_2	E_4	E_5
Final (n+1)	E_3	1	0	0	0	1/2	0	0
	E_6	0	1	0	0	0	0	1/2
	S	0	0	0	0	0	0	0
	E_1	0	0	1/2	0	0	0	0
	E_2	0	0	0	1/2	1/2	0	0
	E_4	0	0	1/2	1/2	0	1/2	1/2
	E_5	0	0	0	0	0	1/2	0

Tabla 3

La forma canónica de la matriz A es de la forma:

$$A=\left(\begin{array}{c|c} I & R \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$$

donde I, R, 0 y Q son matrices.

Su potencia n-ésima será:

$$A^n=\left(\begin{array}{c|c} I & * \\ \hline 0 & Q^n \end{array}\right)$$

siendo * una matriz.

Los elementos de la matriz Q^n son las probabilidades de estar en cada elemento transitorio después de n pasos; $(q_{ij}^{\,n})=$ probabilidad de estar en el estado E_j, después de n pasos, cuando partió de E_i.

La matriz fundamental es $N=(I-Q)^{-1}$. Sus elementos (n_{ij}) nos dan el número medio de veces que la cadena está en E_j cuando salió de E_i.

Si la cadena comienza en un estado transitorio E_i, la probabilidad de que acabe en un estado absorbente E_j es: $B=R\cdot N=R\cdot(I-Q)^{-1}$; b_{1i} es la probabilidad de terminar en el estado absorbente E_1 cuando se partió del estado transitorio E_i.

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N=\left(I-Q\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$B=R\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$b_{11}=1/4$ es la probabilidad de terminar en el estado E_3 cuando se partió del estado S, es decir es la *probabilidad de que gane Abel.*

$b_{21}=3/4$ es la probabilidad de terminar en el estado E_6 cuando se partió del estado S, es decir es la *probabilidad de que gane Caín.*

Si el sistema alcanza el estado E_4 es seguro que gana Caín, esta situación nos la predice la matriz B, pues $b_{24}=1$. De igual forma si alcanza E_2 es seguro que gane Abel, en la matriz B tenemos $b_{13}=1$.

Si tenemos $F=(1,1,1,1,1)$ (vector fila de dimensión el número de estados transitorios y componentes la unidad), se cumple que el producto matricial $F\cdot N$ coincide con el número medio de pasos que el sistema dará desde el estado E_i hasta la absorción. En nuestro caso desde el inicio en el estado S, hasta la finalización (absorción, por cualquier estado absorbente), el juego tendrá una duración media de 13/2 jugadas.

$$F\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{13}{2} & 5 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

Comentario

Este juego tiene una particularidad: es de los juegos en los que el «postre» (segundo jugador) tiene ventaja sobre el «mano» (siempre que conozca la estrategia ganadora). Inicialmente a los alumnos se les dio el esquema y el encargo de realizar 10 partidas. Juntando los resultados de todos los alumnos se realizó una previsión de la probabilidad que tenía Abel de ganar. Esto motivó que el profesor desafiara a la configuración elegida por cualquier alumno. Posteriormente se pasó a la generación de las ecuaciones recurrentes, a su iteración en la hoja de cálculo y a la estimación de la probabilidad que cada uno tenía de ganar, quedando como investigación el determinar una estrategia ganadora.

Estrategia ganadora

Si Abel elige *ABc,* Caín elegirá las dos primeras opciones de Abel como últimas suyas, por tanto elegirá *xAB* y tomará por primera cifra *x* aquella que haga que su opción no sea capicúa.

Como respuesta a la elección de Abel, la tabla 4 nos da la probabilidad de que gane Caín.

Cuando esta actividad se presente en clase, conviene no abusar del contrario y con objeto de au-

Secuencia de Abel	*Secuencia de Caín*	*Prob. de Caín*
111	011	7/8
110	011	3/4
101	110	2/3
011	001	2/3
100	110	2/3
010	001	2/3
001	100	3/4
000	100	7/8

Tabla 4

mentar su autoestima dejarle ganar alguna vez (al menos un 20%); para concederles ventaja, tomaremos nuestras dos primeras opciones iguales a las dos últimas del mano, de esta forma conseguimos que su probabilidad de éxito sea la de Caín.

Figura 9

> *Situación 3*
>
> Abel dice a Caín: «Vamos a lanzar una moneda de Laplace de caras 0 y 1 tantas veces como sea necesario, hasta obtener una de las palabras 1111 o 0011. Tú ganas si sale primero 1111. En caso contrario gano yo. El juego es equitativo, ya que ambas palabras tienen la misma probabilidad 1/16».
>
> ¿Cuál es la probabilidad de que gane Abel? (Engel, 1988: 25)

Realizamos el diagrama de estados y a partir de él las ecuaciones recurrentes del sistema. Ecuaciones que introducidas en la hoja de cálculo, después de unas 165 iteraciones obtenemos que Abel tiene una probabilidad de ganar de 1/4, mientras que la probabilidad de que gane Caín es de 3/4.

Notas para el profesor

El diagrama de estados es el de la figura 8 y las primeras simulaciones se pueden ver en la figura 9, obteniéndose $P(\text{ganar Abel}) = 1/4$; $P(\text{ganar Caín}) = 3/4$.

En esta actividad, como en la anterior, inicialmente se les entregó el diagrama del juego y se les encargó que realizaran 10 partidas, determinando las veces que ganaba Abel y el número de partidas realizadas hasta la finalización del juego. Juntando todos los resultados se obtuvo una estimación de la probabilidad que tenía Abel de ganar y del número medio de partidas hasta la finalización. Posteriormente se determinaron las ecuaciones recurrentes del sistema, su traslado a la hoja de cálculo y sus iteraciones, obteniendo una estimación de la probabilidad que cada jugador tiene de ganar.

Tiempo medio hasta la absorción

El valor de espera de un estado interior es igual a la unidad más la media ponderada de los valores de espera de sus estados vecinos.

Si mS es el tiempo de espera del estado S y $m1$ el del estado E_1... Podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} mS = 1 + 1/2m1 + 1/2m0 \\ m1 = 1 + 1/2m0 + 1/2m2 \\ m2 = 1 + 1/2m3 + 1/2m0 \\ m3 = 1 + 1/2m4 + 1/2m0 \\ m4 = 0 \\ m0 = 1 + 1/2m5 + 1/2m1 \\ m5 = 1 + 1/2m5 + 1/2m0 \\ m6 = 1 + 1/2m7 + 1/2m0 \\ m7 = 0 \end{cases}$$

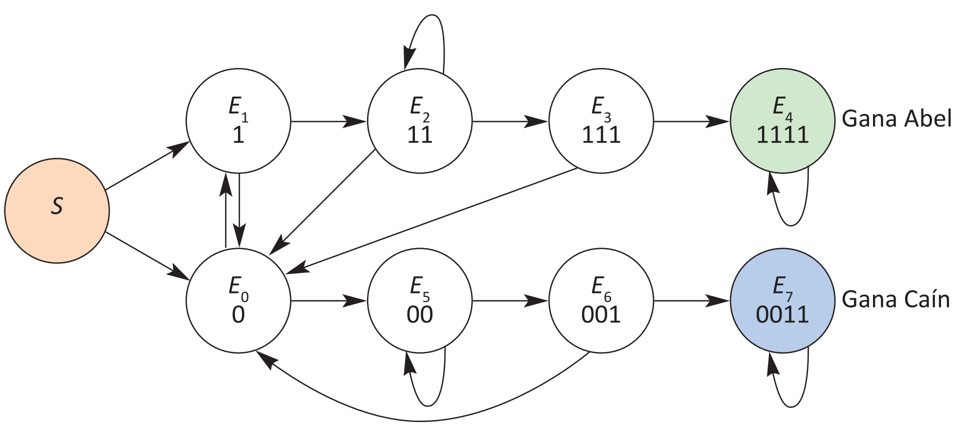


Figura 8

Al trasladarlas a la hoja y rellenarla barriendo, obtenemos (después de 165 iteraciones) que desde el estado de salida S el número medio de jugadas hasta la absorción es de 12. Desde E_0 el número medio de jugadas es de 10,8... (figura 10).

Si recurrimos al cálculo matricial, reordenamos los estados para obtener la matriz canónica y a partir de ella obtendremos las matrices Q y R. Operando obtenemos la matriz fundamental N. Los encabezamientos de las columnas transitorias son: S, E_0, E_1, E_2, E_3, E_5, E_6, y los de las absorbentes son E_4 y E_7 (tabla 5).

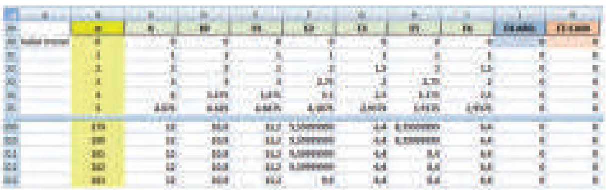


Figura 10

		Inicial (n)								
		E_4	E_7	S	E_0	E_1	E_2	E_3	E_5	E_6
Final (n+1)	E_4	1						1/2		
	E_7		1							1/2
	S									
	E_0			1/2		1/2	1/2	1/2		1/2
	E_1			1/2	1/2					
	E_2					1/2				
	E_3						1/2			
	E_5				1/2				1/2	
	E_6								1/2	

Tabla 5

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$N=(I-Q)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} & \frac{8}{5} \\ 2 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 3 & \frac{16}{5} & \frac{14}{5} & \frac{12}{5} & \frac{8}{5} & \frac{18}{5} & \frac{8}{5} \\ \frac{3}{2} & \frac{8}{5} & \frac{7}{5} & \frac{6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{9}{5} & \frac{9}{5} \end{pmatrix}$$

$$R=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Las probabilidades de terminar en cada estado absorbente, desde un estado transitorio, vienen dadas por los elementos de la matriz B:

$$B=R\cdot N=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{7}{10} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{9}{10} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}$$

$P(\text{ganar Abel})=P(\text{Terminar en } E_4)=b_{11}=1/4$
$\text{P(ganar Cain)}=\text{P(Terminar en } E_7)=b_{21}=3/4$
Si:

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

el tiempo medio de absorción, desde cualquier estado transitorio es $F\cdot N$.

$$F\cdot N=\begin{pmatrix} 12 & \frac{54}{5} & \frac{56}{5} & \frac{48}{5} & \frac{32}{5} & \frac{42}{5} & \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Desde el estado inicial S el tiempo medio hasta la absorción es de 12 unidades de tiempo (tiradas).

Situación 4

¿Cuántas personas deben estar reunidas para que la probabilidad, de que al menos dos cumplan años el mismo día, sea mayor de 1/2? (Spiegel, 1976: 31)

Notas para el profesor

Sabemos que la forma de atacar este problema clásico no es la directa, sino que es determinando que ninguna de las n personas ($n<365$) cumpla años el mismo día. El suceso contrario a tener n cumpleaños distintos es que al menos dos cumplan años el mismo día, por tanto:

$$P(\text{al menos 2 coincidencias}) = \\ = 1 - P(\text{ninguna coincidencia})$$

La primera persona puede cumplir años cualquier día: 365/365.

La segunda, si no coincide con la primera, tiene probabilidad $364/365=(365-1)/365$.

La tercera tiene una probabilidad de no coincidir con las anteriores de $363/365=(365-2)/365$.

La persona n-ésima tiene una probabilidad de no coincidir con las anteriores de:

$$(365-(n-1))/365.$$

Si definimos el suceso NC=«dos personas no cumplen años el mismo día», entonces:

$$P(NC)=(365/365)\cdot(364/365)\cdot(363/65)\cdot\ldots \\ \cdot\ldots(365-(n-1))/365 \text{ (ya que los sucesos son independientes).}$$

El suceso C=«al menos dos personas cumplen años el mismo día» es el suceso contrario de NC y la probabilidad de que ocurra C es:

$$P(C)=1-\mathrm{P}(NC)=1-(365/365)\cdot(364/365)\cdot \\ \cdot(363/365)\cdot\ldots\cdot(365-(n-1))/365$$

Si el número total de personas (incluyéndonos) es n, la ecuación recurrente que nos da la probabilidad de «no coincidencia en el cumpleaños de n personas» es:

$$P(n)=P(n-1)\left(\frac{365-(n-1)}{365}\right), \text{ con } P(1)=1$$

Para la realización de la hoja de cálculo podemos actuar de la siguiente forma:

En las columnas B, C y D pondremos: «n=número de personas», «NC=probabilidad de no coincidir» y «C=probabilidad de al menos una coincidencia».

Los valores iniciales los ponemos en la fila 10, escribiendo: <B10=1>, <C10=1>, <D10=0>. Las fórmulas las ponemos en la fila 11, escribimos: <B11=2>, <C11=C10*(365-B10)/365>, <D11=1-C11>. Seleccionamos el rango <B11:D11> y rellenamos arrastrando y obtenemos la lista de valores de la figura 11.

Observamos que cuando el número de personas es 23, la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día es de 0,50729723. Tabulamos y representamos gráficamente los resultados obtenidos, observando que la gráfica del número de coincidencias tiene un cierto parecido a la curva logística (figura 12).

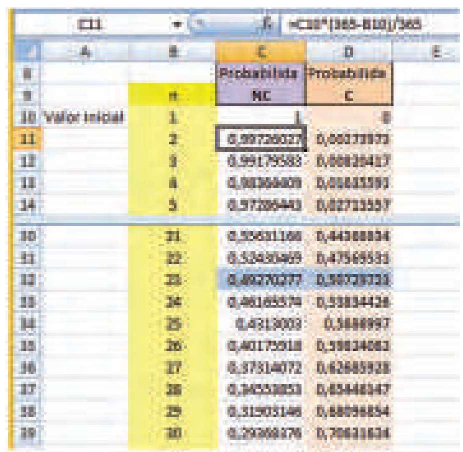


Figura 11

Nº de personas	Probabilidad de al menos dos coincidencias
20	0,41143838
23	0,50729723
30	0,70631624
40	0,89123181
50	0,97037358
60	0,99412266
70	0,99915958

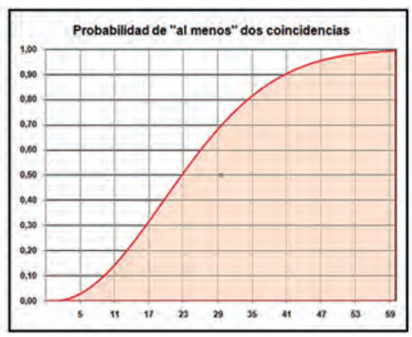


Figura 12

Comentario

Esta es la actividad que realizo el primer día de curso. Como el número de alumnos de la asignatura no es muy numeroso (diez o quince) les encargo que en un papel pongan el día de su cumpleaños y el de dos personas más (padres, hermanos…) siempre que sean distintas las fechas del cumpleaños. Yo previamente apuesto a que al menos dos fechas coinciden. Posteriormente realizamos el escrutinio para determinar si hay alguna coincidencia. Generalmente he ganado casi todas las veces. Después de dejarles intrigados les indico que posteriormente, cuando avance el curso resolveremos, teóricamente, esta situación.

Conclusión

El tratamiento de sistemas discretos con la hoja de cálculo proporciona al alumno una herramienta que le facilita el poder abordar, de una forma sencilla, situaciones complejas, sin requerir amplios conocimientos de matemáticas superiores, permitiendo la realización de investigaciones matemáticas, sobre todo en el campo de la dinámica de poblaciones. Por otro lado el alumno puede empezar a obtener una respuesta a la pregunta que siempre nos formulan: «¿Para qué sirven las matemáticas?».

Referencias bibliográficas

Barbolla, J., y otros (1998), *Algebra Lineal y Teoría de Matrices,* Prentice Hall, Madrid.

Engel, A. (1988), *Probabilidad y Estadística,* Tomos I y II, Mestral Universidad, Valencia.

Fernández, C. y otros (2003), *Ecuaciones diferenciales y en diferencias,* Thomson, Madrid.

Gardner, M. (1983), *Circo Matemático,* Alianza Editorial, Madrid.

Haihg, J. (2003), *Matemáticas y juegos de azar*, Tusquets editores, Barcelona.

Kemeny, J., y otros (1980), *Introducción a las Matemáticas Finitas,* CECSA, México.

Pérez, C. (2002), *Estadística aplicada a través de Excel*, Prentice Hall, Madrid.

Spiegel, M. (1976), *Probabilidad y Estadística,* McGraw Hill, México.

José de Francisco Estaire
IES Andrés Laguna, Segovia
<j_d_francisco@yahoo.es>

suma+ 91
Artículos
Julio 2019
pp. 61-69

Consideraciones acerca de las asíntotas

Félix Martínez de la Rosa

En este artículo se analizan esquemas conceptuales en relación con las asíntotas, detectados en estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad. Se dan propuestas para mejorar su enseñanza, y recursos para explorar ideas similares.

Palabras clave: Esquema conceptual, Asíntota, Libro de texto, Recursos, Asíntota no lineal.

Considerations on asymptotes

In this paper we analyze concept images about asymptotes, detected in first year students of Calculus at the University. We give proposals to improve their teaching, and resources to explore similar ideas.

Keywords: Concept image, Asymptote, Textbook, Resources, Nonlinear asymptote.

La motivación para escribir este artículo surge a raíz de un diálogo mantenido con los estudiantes de primer curso de Cálculo en la universidad. Tiene lugar al hablar de las asíntotas, dentro del contexto de la representación gráfica de funciones, y se repite cada año:

> *Estudiante.* Si existe asíntota horizontal entonces no hay oblicua.
> *Respuesta*. Observa esta gráfica

Figura 1

> *Estudiante.* ¿No es cierto lo que nos han contado en bachillerato?
> *Respuesta.* Lo es para funciones racionales.

En los cursos de Matemáticas de la enseñanza secundaria y bachillerato, los profesores emplean recursos, imágenes o procesos, que puedan ser fáciles de comprender, motivadores y sugerentes. El objetivo es que los estudiantes entiendan en poco tiempo los conceptos nuevos y sean capaces de resolver los problemas que se les requieran. Las

Artículo recibido en *Suma* en mayo de 2018 y aceptado en diciembre de 2018

ideas, imágenes o procesos, que un estudiante recibe en su aprendizaje en relación con un concepto, van formando en ellos una estructura cognitiva asociada al mismo, que se denomina esquema conceptual o *concept image* (Tall y Vinner, 1981).

No es raro que algunos de estos esquemas conceptuales, que los estudiantes interiorizan, lo formen ideas demasiado simplificadas, ingenuas o deficientes. Esto tiene efectos negativos en cursos superiores, porque obstaculiza la adquisición de nuevos conocimientos relacionados con el concepto en cuestión. Por ejemplo, la noción de recta tangente a una curva se ve condicionada por el esquema que consiste en la imagen de la tangente a una circunferencia (Martínez, 2012). O las tablas de valores: su uso inadecuado interfiere negativamente en la representación gráfica de funciones (Martínez y Martínez, 2014). Uno de esos deficientes esquemas conceptuales se evidencia en el diálogo inicial y es el origen de este artículo.

Ya que los libros de texto son una pieza importante del sistema educativo, en la primera sección se analiza y comenta lo que se ofrece en algunos de ellos, y se sugieren ideas que pueden aportar claridad a sus contenidos. En la segunda, se presta atención a tres esquemas conceptuales muy frecuentes que aparecen en los estudiantes de cálculo que ingresan en la universidad. En la tercera y cuarta, se exploran las asíntotas no lineales y las funciones horizontalmente asintóticas.

Tratamiento de la asíntota en libros de bachillerato

En los textos de bachillerato se presta atención al comportamiento de las funciones cuando la variable x tiende a infinito, y cuando la función tiende a infinito al aproximarse x a un número. En el primer caso, si la gráfica de la función se aproxima a una recta, esta se denomina asíntota horizontal u oblicua. El segundo caso corresponde a la asíntota vertical.

En Escoredo y otros (2009: 287) o en Colera y Oliveira (2009: 314), la asíntota oblicua a una función $y=f(x)$ se define como la recta $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x};\ n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$$

En González y otros (2009: 218) o en Biosca y otros (2003: 111), se aclara que como la diferencia entre las ordenadas de la asíntota $y=mx+n$ y de f debe tender a cero entonces

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right]=n$$

lo que equivale a

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-m\right]=n$$

Y que para que este sea un número real ha de cumplirse que

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=m$$

En Colera y Oliveira (2009: 314) se especifica que en una función racional, si el grado del numerador es uno más que el del denominador, entonces la asíntota oblicua es el cociente de la división entre ambos polinomios.

En Escoredo y otros (2009: 285-287) se hacen, entre otras, las siguientes aclaraciones:

— La gráfica de una función no puede cruzar la asíntota vertical, ya que si lo es, la función es discontinua en este valor.

— Una función, a lo sumo, puede tener dos asíntotas oblicuas, una cuando $x\to\infty$ y otra cuando $x\to-\infty$. Una recta puede ser asíntota oblicua cuando $x\to\infty$, y sin embargo no serlo cuando $x\to-\infty$, o viceversa. La gráfica de una función puede cortar a la asíntota oblicua.

En González y otros (2009: 318), se da un método para obtener los posibles puntos de corte con las asíntotas horizontales y oblicuas:

— Para localizar los puntos de corte hay que resolver el sistema formado por la ecuación de la función y la de la asíntota.

Observaciones

En referencia a los contenidos anteriores, hay algunos aspectos que pueden ser matizados y aclarados, y otros que pueden ser introducidos de una manera más intuitiva.

1. Una función $f(x)=c$ puede existir en c aunque $x=c$ sea asíntota vertical, y por tanto cruzarse con ella. Basta tomar $f(x)=1/x$ si $x\neq 0$, $f(0)=1$.
2. Los valores de m y n o bien se dan por definición, o bien se deducen de un proceso analítico. Conviene aclarar que puede existir m y no así n, como le sucede a la función $f(x)=\operatorname{sen}x+x$. Por otro lado, la fórmula para calcular el valor de m puede obtenerse mediante un argumento visual basado en la figura 2.

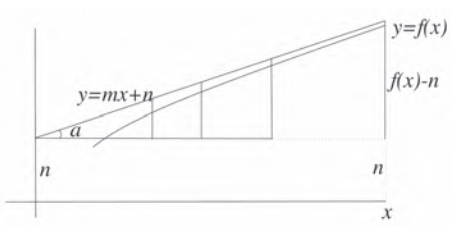


Figura 2

La pendiente de la recta $y=mx+n$ es $m=\tan a$. Por ser asíntota, la distancia vertical entre $f(x)$ y $mx+n$ tiende a cero en el infinito, por tanto

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-n}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

3. Si el dominio de una función $f(x)$ contiene a un intervalo del tipo (a,∞), entonces solo puede tener una asíntota (horizontal u oblicua) cuando $x\to\infty$, (lo mismo ocurre para $-\infty$). Esto es así porque si $r(x)$ y $s(x)$ son dos rectas distintas entonces

$$\lim_{x\to\infty}\left(r(x)-s(x)\right)\neq 0$$

Si además fuesen asíntotas de la función f se cumpliría:

$$\lim_{x\to\infty}\left(r(x)-s(x)\right)=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-s(x)\right)-$$
$$-\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-r(x)\right)=0$$

4. Sea la función racional $f(x)=N(x)/D(x)$. Si el grado de $N(x)$ coincide con el de $D(x)$, el cociente proporciona la asíntota horizontal. Si $\operatorname{grado}(N(x))=\operatorname{grado}(D(x))+1$, el cociente da la asíntota oblicua. Pero además, de la división se pueden obtener los puntos de corte entre la asíntota y la función, y conocer la posición relativa entre ambas.

Sea $f(x)=N(x)/D(x)=Q(x)+(R(x)/D(x))$, siendo $\operatorname{grado}(Q(x))\leq 1$ y $\operatorname{grado}(R(x))<\operatorname{grado}(D(x))$. Se verifica:

a) Los puntos de corte con la asíntota $y=Q(x)$ se obtienen de la ecuación $R(x)=0$.

b) $f(x)>Q(x)$ siempre que $(R(x)/D(x))>0$; $f(x)<Q(x)$ siempre que $(R(x)/D(x))<0$

Ejemplo 1

Dada la función

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+2x-3}{x^2+1}$$

hallar los puntos de corte y la posición relativa con su asíntota oblicua.

Por ser

$$f(x)=x+2+\frac{x-5}{x^2+1}$$

la asíntota oblicua $y=x+2$ corta a la función en el punto $x=5$. Además, $f(x)$ queda por encima de la asíntota en el intervalo $(5,\infty)$ y por debajo en $(-\infty,5)$ (figura 3).

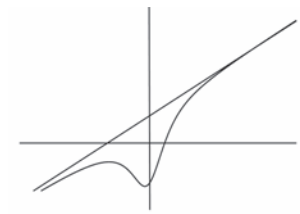


Figura 3

Una sencilla actividad, recíproca del ejemplo 1, consiste en encontrar la ecuación de una función con algunas características prefijadas en relación con las asíntotas.

Ejemplo 2

Hallar la ecuación de una función tal que $x=1$ sea asíntota vertical, y además $y=x-1$ sea asíntota oblicua, la corte en $x=3$, y se mantenga por encima de ella si $x>3$.

Una solución es

$$f(x)=1-x+\frac{x-3}{(x-1)^2}$$

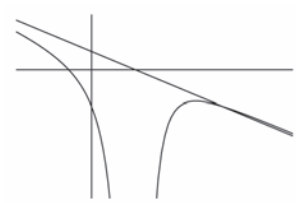


Figura 4

Los estudiantes que se incorporan a la universidad tienen asimilados tres esquemas conceptuales en relación con las asíntotas. El primero es un truco para ahorrar cálculos:

1. Si hay asíntota horizontal, no hay oblicua.

Los otros dos son de tipo visual:

2 La asíntota y la gráfica de la función tienen un aspecto casi idéntico en el infinito.

3 Las rectas tangentes a la curva, a medida que se avanza hacia el infinito, tienden a la asíntota.

Estos esquemas son válidos para funciones racionales, pero no para cualquier tipo de función.

En los textos de bachillerato no suelen encontrarse ejemplos de funciones que tengan asíntota horizontal y oblicua al mismo tiempo. Las funciones racionales no las tienen. Y si se muestra una función a trozos con ambas asíntotas, los estudiantes argumentan que tales funciones no están definidas de una única manera. Esto les reafirma en su idea inicial, ahora algo matizada, de que una función con una sola fórmula no tiene los dos tipos de asíntotas.

Construir funciones, que no sean a trozos, con los dos tipos de asíntotas no es complicado. Basta partir de una función racional que tenga asíntota vertical y oblicua. La función inversa, si la tiene, es la buscada. Por ejemplo $f(x)=(x^2-4/x)$, para $x>0$, cumple esas premisas. Girando noventa grados la gráfica de f y recolocando correctamente la parte positiva y negativa de los ejes, se visualiza la gráfica de f^{-1} (figura 5). Su ecuación

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sqrt{x^2+16}$$

se obtiene intercambiando x por y, y despejando y.

Las funciones con los tres tipos de asíntotas son más rebuscadas. Las dos que se muestran a continuación se pueden encontrar en (Bumcroft y otros, 1984). No son funciones a trozos pero se comportan como si lo fueran, porque ambas incorporan un valor absoluto. Lo que se busca es tener dos partes diferenciadas para conseguir el objetivo.

Ejemplo 3

Comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{x}+\left(x^2+x\left|x\right|\right)\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

tiene los tres tipos de asíntotas.

Desarrollando el valor absoluto se obtiene:

$$f(x)=1/x,\ \text{para } x<0$$
$$f(x)=1/x+2x^2\mathrm{sen}(1/x),\ \text{para } x>0$$

Es claro que $x=0$ es asíntota vertical y que $y=0$ es asíntota horizontal por la izquierda. Para obtener la asíntota oblicua, se calcula

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+2\frac{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)=2$$

Por último:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+2\left(x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-x\right)\right)=$$
$$=\lim_{x\to\infty}2\left(x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-x\right)$$

Haciendo el cambio $t=1/x$, este límite se convierte en

$$2\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{sen}t-t}{t^2}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene el valor cero. Por lo que $y=2x$ es la asíntota oblicua (figura 6, izquierda).

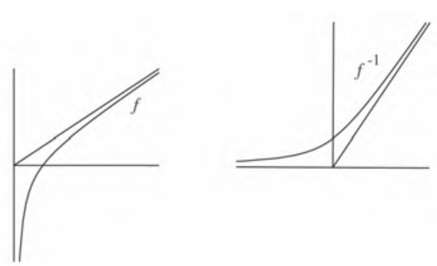


Figura 5

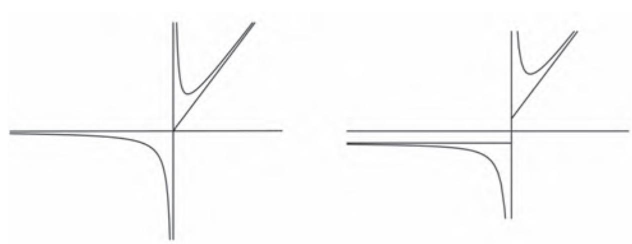


Figura 6

Ejemplo 4

Comprobar que la función

$$f(x)=\frac{1}{\arctan x}+x+\sqrt{x^2}$$

tiene los tres tipos de asíntotas.

Ya que $\sqrt{x^2}=|x|$, la función es:

$$f(x)=\frac{1}{\arctan x},\ \text{para } x<0$$

$$f(x)=\frac{1}{\arctan x}+2x,\ \text{para } x>0$$

Teniendo en cuenta que la recta $y=\pi/2$ es asíntota horizontal por la derecha de la función arco tangente, y que la recta $y=-\pi/2$ lo es por la izquierda, se obtienen las tres asíntotas buscadas: $x=0$, $y=-2/\pi$, $y=2x+2/\pi$ (figura 6, derecha).

El concepto de asíntota se basa en la aproximación entre una recta y la gráfica de una función lo que a su vez conduce a la idea del parecido entre ambas. Pero esto hay que matizarlo. Por ejemplo, las funciones $f(x)=1/x$ y $g(x)=1/x^2$ para $x>0$, tienen al eje y como asíntota vertical. Esto quiere decir que las dos funciones llegan a parecerse mucho a él. Es razonable pensar que f y g también llegan a ser muy parecidas entre sí. Entonces ¿la diferencia entre ambas será cero cuando x tienda a cero? La respuesta a esta pregunta es negativa. A medida que nos acercamos a cero la diferencia entre las dos funciones es mayor: $f(1/100)=100$ y $g(1/100)=10^4$, $f(1/1000)=1000$ y $g(1/1000)=10^6$, etc. (figura 7).

Figura 7

Tomemos ahora la función $f(x)=(1/x)\cdot \operatorname{sen} x^2$, para $x>0$. Se cumple que

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

Por tanto la recta $y=0$ es asíntota horizontal. En la figura 8 está su gráfica. ¿Podemos considerar que la curva y el eje x se parecen mucho?

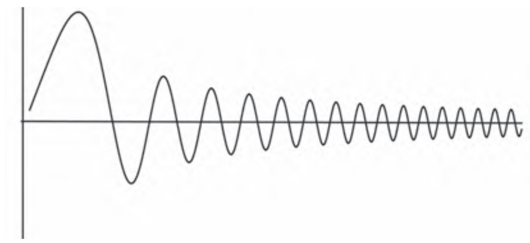


Figura 8

Hay un ejemplo que ilustra muy bien que esto del parecido entre gráficas es algo discutible. Los estudiantes no tienen dificultad en entender que dos funciones f y g se denominen asintóticas si cumplen que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$$

Este no es el caso de $f(x)=x^3+x$, y $g(x)=x^3$ porque:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=\infty$$

Pero la gráfica de ambas refleja un parecido tan grande que hace pensar en que hay algo más. Para analizarlo se calcula la distancia horizontal entre esas funciones. Para ello se toman puntos de cada gráfica que estén a la misma altura, y se mide la diferencia entre sus abscisas cuando x tiende a infinito. Al punto $A(x, x^3+x)$ de la gráfica de la función $f(x)$ le corresponde, horizontalmente, el punto

$$B\left(\sqrt[3]{x^3+x},\, x^3+x\right)$$

de la gráfica de $g(x)$ (figura 9).

Figura 9

La distancia horizontal entre las dos funciones cuando x tiende a infinito es:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(\frac{\sqrt[3]{x^3+x}}{x}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{1+x^{-2}}-1}{1/x}$$

Aplicando la regla de L'Hôpital se obtiene sin dificultad que el valor del límite es cero.

Este análisis da pie a considerar funciones que pueden ser asintóticas en un sentido distinto del habitual. En la última sección se desarrolla esta idea.

Cuando los profesores queremos ilustrar un concepto matemático, acudimos a imágenes que facilitan su visualización. Por ejemplo, la figura 10 es útil para motivar el concepto de asíntota.

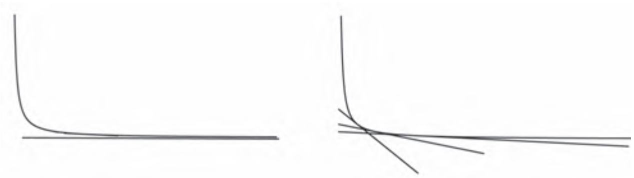


Figura 10

Esta figura sugiere que las rectas tangentes a la curva, a medida que se avanza hacia el infinito, van tendiendo a una recta que no es otra que la asíntota. Siguiendo con esta idea, la pendiente de la asíntota podría calcularse como el límite de las pendientes de las tangentes, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)$$

Todas estas intuiciones se cumplen en las funciones racionales.

Sea $f(x)=N(x)/D(x)=Q(x)+(R(x)/D(x))$, donde $\text{grado}(R(x))<\text{grado}(D(x))$. Se verifica:

a) Si $\text{grado}(N(x))=\text{grado}(D(x))$, $y=Q(x)$ es asíntota horizontal y:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

b) Si $\text{grado}(N(x))=\text{grado}(D(x))+1$, $y=Q(x)$ es asíntota oblicula y:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\text{coeficiente de } x \text{ de } Q(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$$

Sin embargo, las ideas intuitivas fallan cuando las funciones no son racionales. En Gonshor (1968) o Giblin (1972) se analizan funciones que no cumplen esas intuiciones. En los ejemplos 5, 6 y 7 se ve que la existencia de:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)$$

es independiente de la existencia de asíntota horizontal u oblicua.

En el ejemplo 8, su existencia no implica que las tangentes a la curva alcancen una posición límite.

Ejemplo 5

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \text{sen}x^2$, para $x>0$. Se cumple que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

Por tanto la recta $y=0$ es asíntota horizontal, sin embargo no existe $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ (figura 8).

Ejemplo 6

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \text{sen}x^2+x$, para $x>0$. Se cumple que la recta $y=x$ es asíntota oblicua ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x}=1 \text{ y } \lim_{x\to\infty}\left(g(x)-x\right)=0$$

pero no existe $\lim\limits_{x\to\infty} g'(x)$ (figura 11).

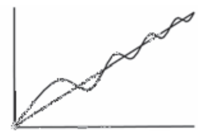


Figura 11

Ejemplo 7

La función $f(x)=\text{sen}(\ln x)$, $x>0$, cuya gráfica es una versión muy estirada del seno, no tiene asíntota horizontal porque no existe $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, aunque $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

Ejemplo 8

Sea $f(x)=(1/x)\cdot \text{sen}x$, para $x>0$. La recta $y=0$ es asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

Además:

$$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$$

Para analizar si las rectas tangentes a la curva alcanzan una posición límite, tomemos la ecuación de la tangente en un punto $x=a$:

$$y-\frac{1}{a}\text{sen}a=\left(\frac{-1}{a^2}\text{sen}a+\frac{1}{a}\cos a\right)(x-a)$$

La intersección con el eje y se produce en el punto $(0,(2/a)\text{sen}a-\cos a)$. Si a es un múltiplo impar de π, se obtiene el $(0,1)$, mientras que si a es un múltiplo par de π se obtiene el $(0,-1)$. Esto hace que las rectas tangentes presenten una oscilación que impide que alcancen una posición límite (figura 12).

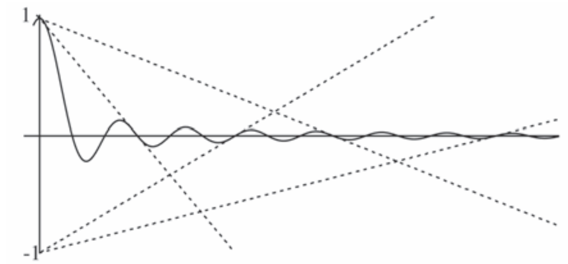


Figura 12

Asíntotas no lineales

No solo las rectas tienen la capacidad de acercarse indefinidamente a una curva. Si una función racional $f(x) = (N(x)/D(x))$ cumple que grado$(N(x)) >$ grado$(D(x)) + 1$, entonces el cociente $Q(x)$ tiene grado mayor que uno y verifica que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right) - Q\left(x\right)\right) = 0$$

A $Q(x)$ se le denomina *polinomio asintótico* a $f(x)$.

Ejemplo 9

Sea

$$f\left(x\right) = \frac{x^3 - x + 2}{x + 1} = x^2 - x + \frac{2}{x+1}$$

entonces $Q(x) = x^2 - x$ es una parábola asintótica a $f(x)$ (figura 13).

Figura 13

Si el dominio de una función $f(x)$ contiene un intervalo del tipo (a, ∞), entonces solo puede tener un polinomio asintótico cuando $x \to \infty$, (lo mismo ocurre para $-\infty$). La demostración es similar a lo hecho en la observación 3, sustituyendo las rectas $r(x)$ y $s(x)$ por los polinomios correspondientes (en Dobbs (2010) se ofrece un estudio exhaustivo sobre estos polinomios).

El concepto de curva asintótica también va más allá de los polinomios. En general, si

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right) - h\left(x\right)\right) = 0$$

se dice que $h(x)$ es una *función asintótica* a $f(x)$.

Es sencillo construir muchas funciones asintóticas a una función racional. Sea $f(x) = (N(x)/D(x)) = Q(x) + (R(x)/D(x))$, donde grado$(R(x)) >$ grado$(D(x))$. Tomemos un polinomio $g(x)$ de grado mayor o igual que uno y un número real c. El motivo de esta elección es que $c/g(x)$ tienda a cero cuando x tienda a infinito. En estas circunstancias, $h(x) = Q(x) + c/g(x)$ es asintótica a $f(x)$. Para comprobarlo se observa que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right) - h\left(x\right)\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(f\left(x\right) - Q\left(x\right)\right) + \lim_{x\to\infty}\left(Q\left(x\right) - h\left(x\right)\right) = 0$$

En la figura 14 se visualiza la función:

$$f\left(x\right) = \frac{x^3 - x + 2}{x + 1} = x^2 - x + \frac{2}{x+1}$$

junto con:

$$h(x) = x^2 - x + c\,/\,x \text{ (izquierda)}$$
$$h(x) = x^2 - x + c\,/\,x^2 \text{ (derecha)}$$

para $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Figura 14

La construcción anterior también se puede hacer para funciones no racionales. Por ejemplo, es conocido que las rectas $y = \pm 3x/2$ son asíntotas de la hipérbola $(x^2/4) - (y^2/9) = 1$. En la figura 15 se representan las funciones

$$y = \pm\frac{3}{2}\sqrt{x^2 - 4}$$

junto con $h(x) = (3/2)x + (c/x^2)$ (izquierda) y $h(x) = (-3/2)x + (c/x^2)$ (derecha), para $c = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$:

Figura 15

Funciones horizontalmente asintóticas

La exploración que se hizo en la segunda sección con las funciones $f(x)=x^3+x$ y $g(x)=x^3$ da pie a distinguir entre dos conceptos. Si la distancia vertical entre dos funciones tiende a cero si x tiende a infinito, se dice que son *verticalmente asintóticas*. Si la distancia horizontal entre dos funciones tiende a cero si x tiende a infinito, se dice que son *horizontalmente asintóticas*.

Una ligera variación en la función cambia el resultado. Por ejemplo, $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=x^3$ no son verticalmente asintóticas pero tampoco son horizontalmente asintóticas. Esto se comprueba tomando los puntos de ambas funciones que se corresponden horizontalmente, (x, x^3+x^2) de $f(x)$ y

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}, x^3+x^2\right)$$

de $g(x)$.

De la misma forma que antes, se verifica que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\frac{1}{3}\neq 0$$

En Kalman (2009: 207) se ofrece un interesante estudio visual y geométrico, con el objetivo de conseguir alguna condición que permita saber, en algunos casos, si dos funciones son horizontalmente asintóticas. Es lógico pensar que para lograr lo que se busca, las funciones deben tener características similares cuando x tiende a infinito. Por eso se trabaja con dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, convexas y crecientes y tales que $f(x)>g(x)$ en algún intervalo (x_0,∞). Dentro de este se considera el subintervalo (x_1,x_2), y se construye la figura 16.

En esta figura, R es la recta tangente a $f(x)$ en $F_2(x_2,f(x_2))$, y S es la recta tangente a $g(x)$ en $G_1(x_1,g(x_1))$. Se visualiza que la distancia horizontal h verifica:

Figura 16

$$\operatorname{dist}(P,G_2)<h<\operatorname{dist}(F_1,Q)$$

La pendiente de R es $f'(x_2)$ y

$$\tan a=\frac{f(x_2)-g(x_2)}{\operatorname{dist}(P,G_2)}$$

Por tanto:

$$\operatorname{dist}(P,G_2)=\frac{f(x_2)-g(x_2)}{f'(x_2)}$$

Asimismo, la pendiente de S es $g'(x_1)$ y

$$\tan b=\frac{f(x_1)-g(x_1)}{\operatorname{dist}(F_1,Q)}$$

Por tanto:

$$\operatorname{dist}(F_1,Q)=\frac{f(x_1)-g(x_1)}{g'(x_1)}$$

Con lo que:

$$\frac{f(x_2)-g(x_2)}{f'(x_2)}<h<\frac{f(x_1)-g(x_1)}{g'(x_1)}$$

Es decir, la distancia horizontal entre las curvas se puede acotar utilizando las rectas tangentes, y de esta acotación se deduce el siguiente resultado:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son convexas y crecientes y tales que $f(x)>g(x)$ en algún intervalo (x_0,∞), entonces:

(1) $f(x)$ y $g(x)$ son horizontalmente asintóticas si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{g'(x)}=0$$

(2) $f(x)$ y $g(x)$ no son horizontalmente asintóticas si

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f'(x)}\neq 0$$

Ejemplo 10

Por la condición (2), las funciones $f(x)=x^3+x^2$ y $g(x)=x^3$ no son horizontalmente asintóticas. Pero resulta sorprendente comprobar que sí lo son $f(x)=x^3+x^{1,999}$ y $g(x)=x^3$, puesto que cumplen la condición (1).

Del enunciado anterior se deduce un resultado general para funciones polinómicas:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$
$$g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

Observemos que si a_n y b_m son positivos, ambas funciones son convexas y crecientes para x suficientemente grande. Por otro lado:

Si $n > m$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - g(x)) = n$ y grado$(f'(x)) = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

Si $n = m$, hay que comparar los coeficientes de ambos polinomios:

— Si $a_n > b_n$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - - g(x)) = n$ y grado$(f'(x)) = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

— Si $a_n = b_n$, y $a_{n-1} > b_{n-1}$, entonces $f(x) > g(x)$ para x suficientemente grande. Además, grado$(f(x) - g(x)) = n-1$ y grado$(f'(x)) = = n-1$. Por (2), f y g no son horizontalmente asintóticas.

Como resumen de este análisis se tiene el siguiente resultado (Kalman (2009: 209)) que permite saber, de un solo vistazo, si dos funciones polinómicas son horizontalmente asintóticas:

Dos polinomios

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

tales que a_n y b_m tienen el mismo signo, son horizontalmente asintóticos si y solo tienen el mismo grado n, y cumplen $a_n = b_n$ y $a_{n-1} = b_{n-1}$.

El resultado también es válido si $a_n < 0$ y $b_m < 0$ (basta reemplazar f por $-f$, y g por $-g$).

Resumen final

Al explicar los conceptos matemáticos a lo largo de la enseñanza media y el bachillerato, los profesores deben enfrentarse a dos problemas. Uno es la falta de tiempo. El otro es la falta de madurez de los estudiantes. Para tratar de solventarlos, se emplean recursos como gráficas o imágenes que sean fáciles de comprender, que sean motivadoras, no consuman demasiado tiempo e ilustren el concepto con claridad. También se dan fórmulas mecánicas con las que obtener ciertos valores, o trucos para ahorrar cálculos. Todos estos recursos hacen que los estudiantes construyan esquemas conceptuales, a veces ingenuos e incorrectos, que pueden interferir de forma negativa en la adquisición de nuevos conocimientos. Cuesta desprenderse de una idea arraigada desde hace años aunque sea errónea, por eso los profesores debemos procurar que las imágenes o recursos que ofrecemos a los estudiantes les permitan formar esquemas conceptuales sólidos donde asentar los conocimientos que adquirirán posteriormente.

Referencias bibliográficas

Biosca, Espinet, Fandos, Jimeno y Villagrá (2003), *Matemáticas II aplicadas a las ciencias sociales. Bachillerato*, Guadiel-edebé, Sevilla.

Bumcroft, R., R. Parris y G. Britton (1984), «Queries», *The College Mathematics Journal*, 15(2), 146-147.

Colera, J., y M. J. Oliveira (2009), *Bachillerato 2. Matemáticas II*, Anaya, Madrid.

Dobbs, D. (2010), «Polynomial Asymptotes», *International J. of Math. Education in Science and Technology*, 41(7), 943-950.

Escoredo, A., M. D. Gómez, J. Lorenzo, P. Machín, C. Pérez, J. del Río y D. Sánchez (2009), *Matemáticas II. Bachillerato 2*, Santillana, Barcelona.

Giblin, P. J. (1972), «What is an asymptote?», *The Mathematical Gazette*, 56(398), 274-284.

Gonshor, H. (1968), «Remarks on asymptotes», *Mathematics Magazine*, 41(4), 197-198.

González, C., J. Llorente y M. J. Ruiz (2009), *Matemáticas, 2.º Bachillerato*, Editex, Madrid.

Kalman, D. (2009), *Uncommon Mathematical Excursions. Polynomia and Related Realm,* The Mathematical Association of America.

Martínez, F. (2012), «Detección y corrección de errores de concepto» , *Suma*, n.º 69, 73-81.

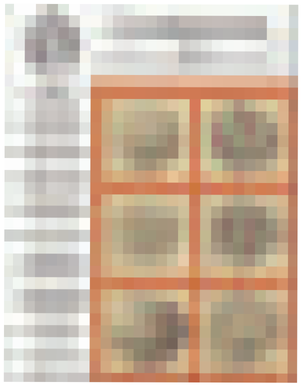
Martínez, F., y J. J. Martínez (2014), «El uso de tablas de valores para la representación gráfica de funciones», *Épsilon*, 31(1), 9-20.

Tall, D., y S. Vinner (1981), «Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity», *Educational Studies in Mathematics Education*, 12(7), 151-169.

Félix Martínez de la Rosa
Universidad de Cádiz
<felix.martinez@uca.es>

Publicaciones recibidas (1)

La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
RSME
Vol. 22, n.º 2, 2019
Madrid
ISSN: 1138-8927



Noubiaix
Revista de la FEEMCAT i de la SCM
N.º 43, desembre 2018
Barcelona
ISSN: 2014-2021

xxii Cangur de la SCM
Enunciats i solucions
Cangur 2018
SCM, IEC, Departament d'Ensenyament, CiMs-Cellex
2019
Barcelona
DL: B 8594-2019

Números
Revista de Didáctica de las Matemáticas
Sociedad Canaria «Isaac Newton» de Profesores de Matemáticas
N.º 100, mayo 2019
La Laguna
ISSN: 1887-1984

Investigación y ciencia
Prensa cientifica, S.A.
n.º 514, julio 2019
Barcelona
ISSN: 02210136X

UNO
Revista de Didáctica de las Matemáticas
Ed. Graó
N.º 84, abril-mayo-junio 2019
Barcelona
ISNN : 1133-9853

secciones

suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 73-80

Realidad aumentada con GeoGebra

José Luis Muñoz Casado

Recientemente GeoGebra ha *publicado* una nueva aplicación para dispositivos móviles IOS, GeoGebra AR. La aplicación se puede descargar en la App Store.

Además, en la aplicación Calculadora Gráfica 3D, tanto en su versión para Android como para IOS han incluido el botón de realidad aumentada. En este artículo exploraremos las posibilidades de ambas aplicaciones.

¿Qué es la realidad aumentada?

La realidad aumentada (RA) es el conjunto de tecnologías que permite al usuario mezclar imágenes reales con imágenes virtuales mediante dispositivos electrónicos. El nombre viene precisamente de las aportaciones que se pueden realizar al observar una imagen real a través de un dispositivo electrónico.

Algunas características de la realidad aumentada son:

- Combina elementos reales y virtuales.
- Es interactiva en tiempo real, es decir, los elementos virtuales interaccionan con el movimiento del usuario.
- Está realizada en 3D.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2018 y aceptado en enero de 2019

Para poder visualizar la realidad aumentada es necesario disponer de algún elemento tecnológico que mezcle la realidad con los elementos virtuales. Existen diferentes tipos de visualización:

— *Nivel 0*. Es el nivel más bajo y ofrece la interacción mínima con el mundo físico. Las aplicaciones enlazan el mundo físico con el virtual mediante el uso de códigos de barras y códigos en 2D (por ejemplo, los códigos QR).
— *Nivel 1*. Las aplicaciones utilizan marcadores, patrones en 2D que desencadenan la aparición de objetos tridimensionales sobre ellos.
— *Nivel 2*. Las aplicaciones utilizan imágenes, objetos o coordenadas GPS para superponer la información virtual.
— *Nivel 3*. Es el nivel más alto y estaría comprendido por dispositivos como gafas o lentillas que proyectan información sobre lo que se está viendo en tiempo real.

GeoGebra realiza una realidad aumentada de nivel 3 a través del móvil mezclando imagen real con imagen virtual sin necesidad de ningún marcador.

GeoGebra AR

Para poder disfrutar de la nueva *app* es necesario realizar algunas comprobaciones técnicas ya que no todos los dispositivos cumplen los requisitos necesarios para su funcionamiento.

Tanto para Android como para IOS es necesario disponer de las librerías (conjunto de herramientas de software pequeño y autónomo que ofrece una funcionalidad muy específica al usuario) de Realidad Aumentada de cada plataforma, en Android el software necesario es ARCore y en IOS es ARKit. Para poder usar la *app* AR y la calculadora gráfica 3D con AR es necesario que nuestro dispositivo soporte esas librerías.

Se pueden consultar los dispositivos compatibles para Android en Google Play y en App Store para los dispositivos IOS.

Figura 1. ARCore. Android

Figura 2. ARKit. IOS

Ambas aplicaciones funcionan de forma similar, por tanto, realizaremos los ejemplos con una de ellas.

Primeros pasos

Al pulsar sobre la *app* AR nos aparecerá una ventana para detectar una superficie y dos líneas de entrada.

Una vez detectada la superficie es posible «colocar objetos» sobre ella. Para ello tenemos dos opciones: colocar los objetos predefinidos o escribir funciones $z=f(x,y)$.

GeoGebra ofrece los siguientes objetos predefinidos:

— Sólidos platónicos
— Triángulo de Penrose
— Pirámide de Sierspinski
— Balón de fútbol
— Función 3D
— Botella de Klein
— Superficie reglada
— Escalera helicoidal.

En todos estos objetos es posible mover el móvil como si los objetos estuvieran realmente en la superficie, permitiendo explorar su interior, su exterior, propiedades, etc.

También es posible añadir dos funciones del tipo $z=f(x,y)$ en las dos líneas de entrada que se encuentran en la parte inferior de la pantalla.

Con esta opción podemos *jugar* a encontrar la ecuación de multitud de objetos cotidianos.

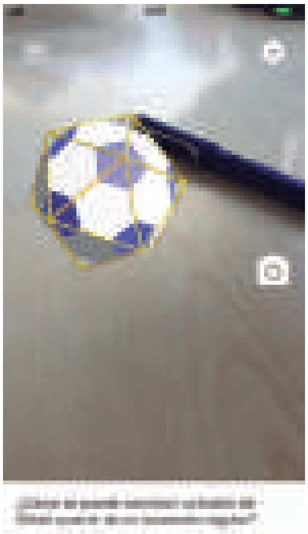


Figura 3. Balón de fútbol

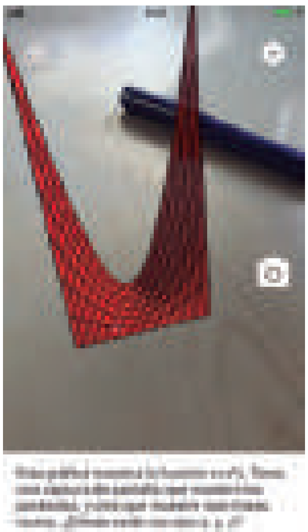


Figura 4. Función 3D

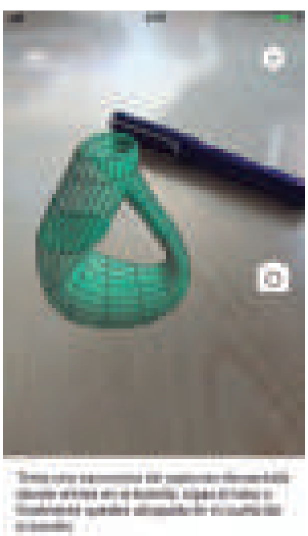


Figura 5. Botella de Klein

Pero creemos que la verdadera potencialidad de la realidad aumentada de GeoGebra está en la integración de la realidad aumentada en la app Calculadora Gráfica 3D.

Al iniciar la Calculadora Gráfica 3D, nos aparece el interfaz 3D de GeoGebra (figura 6). Si nuestro dispositivo lo soporta, en la esquina inferior derecha aparecerá el botón que nos permitirá realizar realidad aumentada.

Al pulsar en ese botón, nos aparecerá la imagen que se obtiene a través de la cámara del móvil y un aviso que nos dice:

Muévete lentamente para detectar superficies.

Una vez detectada la superficie, GeoGebra colocará *virtualmente* los objetos que hayamos construido en la vista 3D.

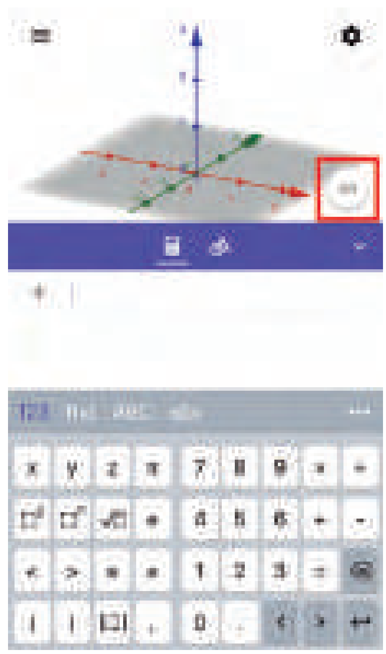


Figura 6. Interfaz GeoGebra 3D

Algunas propuestas

Objetos cotidianos

Una buena opción para comenzar con la realidad aumentada es intentar representar un objeto cotidiano y ver sus posibilidades.

El desarrollo del cubo es conocido por todos, pero podemos explorar las diferentes configuraciones que genera el cubo y verlas en directo.

Pero quizás donde puede mostrar toda su potencia es en la visualización de esos cuerpos geométricos no tan estándar (figuras de la 7 a la 12).

Figura 7. Cubo

Figura 8. Modelo sobre el cubo

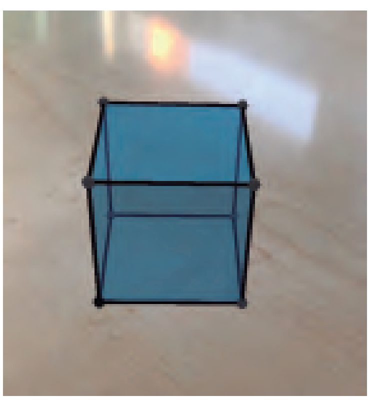


Figura 9. Modelo sobre el cubo

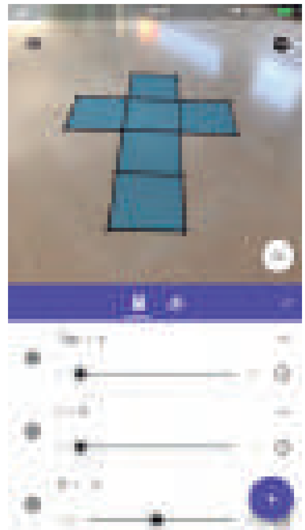


Figura 10. Desarrollo modelo 1

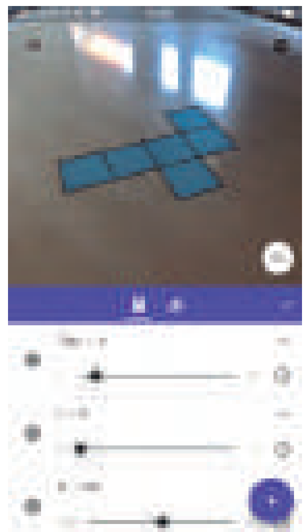


Figura 11. Desarrollo modelo 2

Figura 12. Desarrollo modelo 3

Para ello podemos recurrir a las construcciones existentes en <geogebra.org>. Una estupenda colección de poliedros la podemos encontrar en el perfil de José Manuel Arranz <https://www.geogebra.org/u/arranz>.

Usar la realidad aumentada con construcciones ya elaboradas es realmente sencillo, al iniciar la aplicación, en la parte superior izquierda nos aparece el icono ≡, pulsando accedemos al menú de la *app*. En la opción Buscar podemos introducir el nombre de la construcción que queremos abrir. Hay que recordar que solo podremos abrir construcciones diseñadas en 3D.

Otra opción es conocer la url de la construcción e introducir el código que aparece al final (figura 13).

Figura 13. *Url* de una construcción de José Manuel Arranz

Actividad 1

Muévete (figura 14) y responde a las siguientes preguntas:

— ¿Cuántos cuadrados azules hay? ¿Y rojos?
— ¿Cuántos triángulos?
— ¿Cuántas caras confluyen en un vértice?
— Comprueba la fórmula de Euler para este poliedro

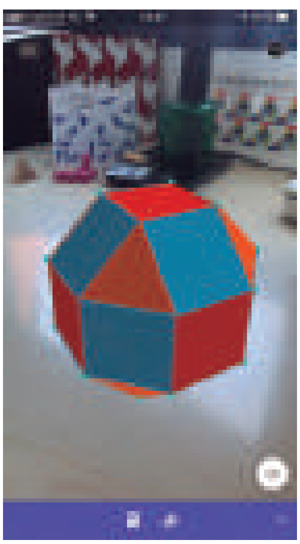


Figura 14

La visualización con realidad aumentada es perfecta para observar propiedades matemáticas de cuerpos geométricos y explorar como si estuviera físicamente delante de nosotros.

Podemos proponer a los alumnos explorar la dualidad entre cubo y octaedro a través de su visualización con realidad aumentada.

La siguiente actividad es muy asequible para realizar directamente en la *app*.

Actividad 2

— A=(–1,–1,0)
— B=(1,–1,0)

Con botón punto medio obtenemos el punto medio de tres caras marcando dos vértices opuestos de una cara.

— K=PuntoMedio(H,A)
— L=PuntoMedio(E,G)
— M=PuntoMedio(E,G)

Escribimos:

— Octaedro(K,M,L)

A continuación, podemos activar la realidad aumentada y ver nuestro cubo y su dual encima de la mesa (figura 15).

¿Cómo será el poliedro que se obtiene al unir los puntos medios de las aristas del cubo?

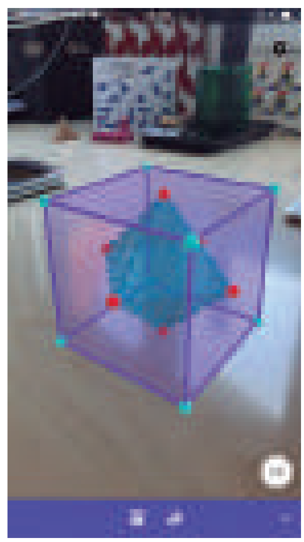


Figura 15

Mobiliario urbano

El mobiliario urbano es una gran fuente de inspiración para usar la realidad aumentada de GeoGebra. Observemos el macetero de la figura 16.

Una vista entrenada, y este podría ser un objetivo, rápidamente verá un paraboloide sobre tres esferas. Con la aplicación en mano, nos lanzamos a intentar comprobar nuestra hipótesis (figura 17).

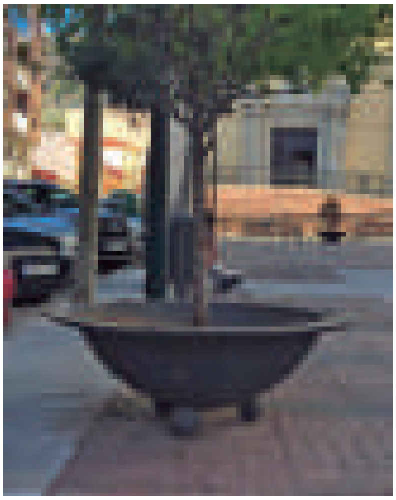


Figura 16

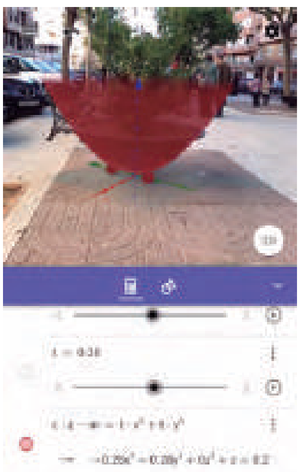


Figura 17

Una buena idea es escribir los *parámetros* que influyen en el paraboloide usando deslizadores. Así escribimos:

$$z-m=tx^2+ty^2$$

GeoGebra creará dos deslizadores m y t que nos permitirán ajustar nuestro paraboloide al paraboloide real del macetero. Ajustando los valores obtenemos la ecuación del paraboloide:

$$-0{,}28\,x^2-0{,}28\,y^2+z=0{,}2$$

Una vez ajustado el paraboloide intentamos encontrar las tres pequeñas esferas. Un primer intento nos lleva a introducirlas a mano escribiendo:

$$(x-k)^2+y^2+(z-n)^2=r^2$$

Otra vez más usamos los deslizadores para ajustar nuestra esfera con la esfera real.

Nos acercamos con el móvil y ajustamos hasta que nuestra esfera sea tangente al paraboloide y al plano XY. A continuación, efectuamos un giro alrededor del eje Z de $2\pi/3$, y otro giro más para obtener la tercera esfera.

Sin embargo, no es fácil ajustar la tangencia con realidad aumentada, intentemos modelizar por completo el problema. Para ello nos pasaremos a la versión de escritorio o la versión web de GeoGebra.

Fijando una altura $z=k$ y representado el plano $y=0$, obtenemos las figuras 18 y 19.

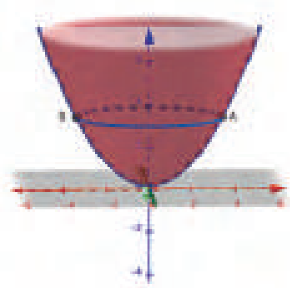


Figura 18

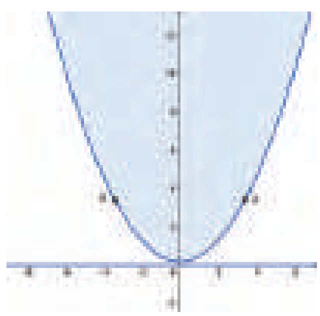


Figura 19

Con el punto A podemos obtener la ecuación de la esfera. Para ello trabajaremos en el plano XZ como si fuera el plano XY:

$$\begin{cases} -0{,}28\,x^2 - 0{,}28\,y^2 + z = 0{,}2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Obtenemos la parábola $z = -0{,}28\,x^2 + 0{,}2$.

Dibujamos la recta tangente y la recta normal a la parábola por el punto A. Podemos usar la vista CAS para realizar todas las operaciones (figura 20).

Una vez que hemos comprendido el problema en el plano podemos llevarlo al espacio.

Supongamos la esfera S centrada en el punto $C(x, y, z)$ que es tangente al paraboloide en el punto A y al plano $z = 0$.

Se tiene que verificar que $\mathrm{d}(C,A) = \mathrm{d}(C,\pi)$. Por tanto, escribiendo en la barra de entrada:

$$(x(A) - x)^2 + (y(A) - y)^2 + (z(A) - z)^2 = z^2$$

Obtenemos el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de A y del plano π (figura 21).

Figura 20

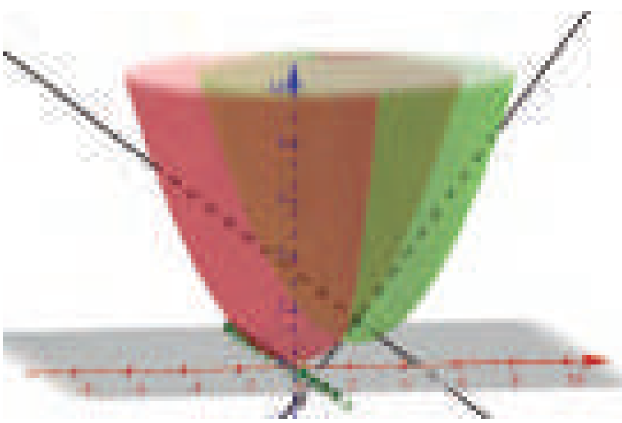


Figura 21. Puntos equidistantes a A y el plano $z = 0$

Ya solo resta calcular la intersección de la recta normal al paraboloide en el punto A con el lugar geométrico obtenido anteriormente para obtener el centro de la esfera buscada.

Por último, nos queda rotar nuestra esfera alrededor del eje Z un ángulo de $2\pi/3$ (figura 22).

Una opción que incorpora GeoGebra 3D es la representación 2D de un plano. Activando la representación 2D del plano $z = k$, comprobaremos por qué las matemáticas son tan bellas.

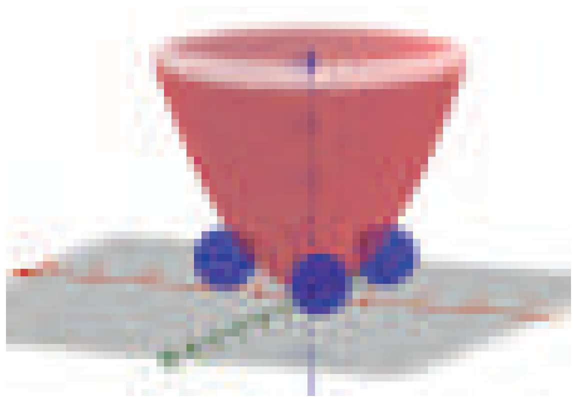


Figura 22. Modelo 3D del macetero

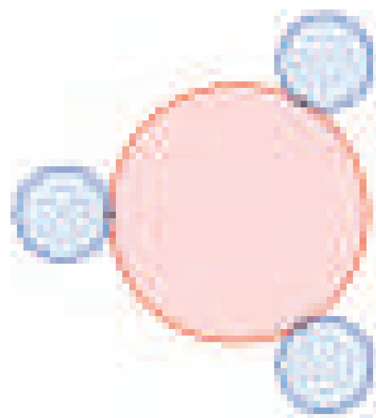


Figura 23. Representación 2D del plano $z = k$

Conclusiones

Con esta pequeña introducción hemos pretendido explorar algunas de las posibilidades de la realidad aumentada de GeoGebra.

Creemos que la modelización de objetos cotidianos es una actividad muy rica por la gran cantidad de conocimiento que hay que desarrollar para lograr dicha modelización, y la realidad aumentada supone un gran elemento motivador para iniciarse en ella.

Algunos de los ejemplos mostrados, como la actividad 1 y la actividad 2, son realizables con materiales manipulables, sin duda muy valiosos, pero creemos que el uso de la realidad aumentada permitirá dar otro enfoque a problemas más complejos.

No podemos dejar de mencionar el problema de los dispositivos, actualmente no todos los dispositivos soportan esta tecnología. Sin embargo, estamos convencidos de que este problema dejará de serlo en breve, pues la realidad aumentada en todas sus variantes ha venido para quedarse.

Referencias bibliográficas

Apple (s. f.), *Compatibilidad dispositivos IOS*, obtenido de: <https://developer.apple.com/library/archive/documentation/DeviceInformation/Reference/iOSDeviceCompatibility/DeviceCompatibilityMatrix/DeviceCompatibilityMatrix.html>.

Arranz, J. M. (s. f.), *José Manuel Arranz*, obtenido de: <https://www.geogebra.org/u/arranz>.

Google (s.f.), *Dispositivos compatibles Android*, obtenido de: <https://developers.google.com/ar/discover/supported-devices>.

Muñoz, J. L. (2019), «Las matemáticas en sus personajes. Una aplicación de la realidad aumentada», *Uno*, n.º 83, 22-29.

José Luis Muñoz Casado
IES Salvador Dalí, Madrid
<creogebra@revistasuma.es>

suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 81-86

Soñando con números, María Andresa Casamayor (1720-1780)

Julio Bernués Pardo
Pedro J. Miana Sanz

La zaragozana María Andresa Casamayor es conocida por ser la primera mujer escritora de un texto científico en España. En este artículo respondemos a varios de los enigmas más importantes de su desconocida biografía, como la fecha de su nacimiento, el origen de su familia, la localización de la casa en la que habitó así como las de sus familiares, su profesión como maestra de primeras letras e incluso…, su verdadero nombre.

Hace casi 300 años nacía en la Zaragoza del Siglo de las Luces María Andresa Casamayor de La Coma. Con poco más de 17 años, publicó su *Tyrocinio arithmetico, Instrucción de las quatro reglas llanas*. Este modesto e interesante libro convierte a su autora en la primera matemática española de la cual se conserva obra escrita. Casamayor, bastante olvidada, encarna por su vocación y dedicación el ejemplo de mujer científica que desarrolla su trabajo en circunstancias tremendamente desfavorables.

Comercio y educación en la Zaragoza del siglo XVIII

La colonia francesa de Zaragoza dominaba el comercio en Aragón entre los reinos de España

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en mayo de 2019

y el resto de Europa formando a principios del siglo XVIII un numeroso grupo de población con fuertes interrelaciones comerciales y familiares (Salas, 2003). En este ambiente se sitúan los progenitores de nuestra protagonista, Juan Joseph Casamayor, un comerciante textil francés que casará en 1705[1] con Juana Rosa de La Coma, hija de comerciantes de ascendencia también francesa pero ya afincados en Zaragoza. El matrimonio tendrá 9 hijos e hijas[2] y entre ellos, *María* Juana Rosa *Andresa* nacerá un 30 de noviembre, día de San Andrés, de 1720 siendo bautizada al día siguiente en la iglesia del Pilar (figura 1).

Es muy probable que, como hacían muchas otras familias acomodadas de Zaragoza como la suya, María Andresa recibiera sus *primeras letras* de forma colectiva con sus hermanos y hermanas en la casa en la que la familia vivía alquilada sita en la calle del Pilar[3]. En este ambiente, la pequeña María Andresa muy pronto destacó.

Leer, escribir, contar, operar con las cuatro reglas…, eran habilidades de obligado conocimiento para el comercio, la principal actividad que se realizaba en el entorno de María Andresa, entre los diversos territorios aragoneses, castellanos y franceses con un amplio número de unidades de moneda, longitud, superficie o peso.

Los ilustrados del siglo XVIII consideraron el mejorar la educación como uno de los objetivos fundamentales de sus políticas para el progreso del país. Y es que en los años de infancia de María Andresa, el porcentaje de analfabetos era enorme, especialmente entre las mujeres (Alfaro, 2017). Aunque la implicación pública fue en aumento sobre todo a partir del último tercio del siglo, la enseñanza en el siglo XVIII era principalmente impartida en centros religiosos.

Figura 1. Apunte del bautismo de María Andresa Casamayor de La Coma

De especial importancia para nuestra historia es el papel de padres escolapios que llegan a Zaragoza el 27 de octubre de 1731. Los escolapios impartían una enseñanza de calidad, gratuita y universal (eso sí, solo para hombres) tanto en letras como en ciencias. Uno de estos primeros escolapios fue Juan Francisco de Jesús, catedrático de Matemáticas y uno de los censores del libro del *Tyrocinio*. El colegio fundacional de Zaragoza, conocido hoy como «el colegio de Conde Aranda», se abrió el 19 de febrero de 1740 con el nombre de Colegio de Santo Tomás de Aquino de las Escuelas Pías de Zaragoza en homenaje al patrocinio del arzobispo Tomás Crespo Agüero. Este prelado, preocupado también por la educación femenina, encargó esta a las «Señoras de la Real Casa de la Enseñanza».

Zaragoza contaba además con 10 maestros de primeras letras (para niños) que estaban distribuidos por la ciudad e impartían clases en locales o en sus propios domicilios. La organización de ese tipo de enseñanza para niñas será algo posterior (Domínguez, 1999). Por otro lado, la ciudad disponía de una escuela pública de primeras letras, las *aulas públicas*, situada en el edificio jesuita del Colegio del Padre Eterno.

Los políticos ilustrados realizaron numerosos esfuerzos para organizar la enseñanza pública y de hecho, a pesar de su precario funcionamiento, un alto porcentaje de los pueblos aragoneses contarán al acabar el siglo con la conocida figura del «maestro de escuela», que será (muy mal) pagado bien por ayuntamientos o… por las propias familias de los alumnos (Alfaro, 2017; Domínguez, 1999).

El *Tyrocinio Arithmetico*

El libro del *Tyrocinio* (figura 2) ha sido hasta hoy la principal fuente de información sobre su joven autora. Publicado en marzo de 1738, es un libro de tamaño de cuarto, de 16 cm × 22 cm aproximadamente, de 78 páginas con algún error de paginación. Una copia digitalizada puede encontrarse en la web de la Biblioteca Nacional.

El cultismo latino *Tyrocinio* (que significa, aprendizaje o formación) era un vocablo utilizado

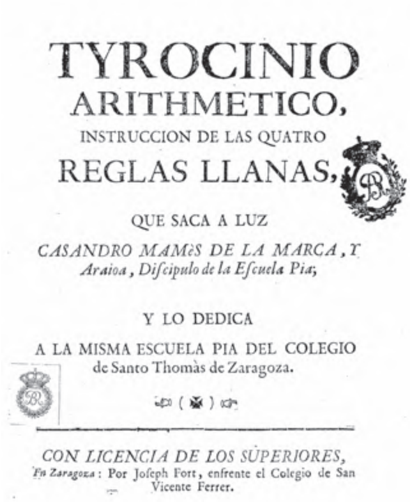

TYROCINIO
ARITHMETICO,
INSTRUCCION DE LAS QUATRO
REGLAS LLANAS,
QUE SACA A LUZ
CASANDRO MAMÈS DE LA MARCA, Y
Araioa, Discipulo de la Escuela Pia;
Y LO DEDICA
A LA MISMA ESCUELA PIA DEL COLEGIO
de Santo Thomàs de Zaragoza.
CON LICENCIA DE LOS SUPERIORES,
En Zaragoza: Por Joseph Fort, enfrente el Colegio de San Vicente Ferrer.

Figura 2. Portada del *Tyrocinio Arithmetico*

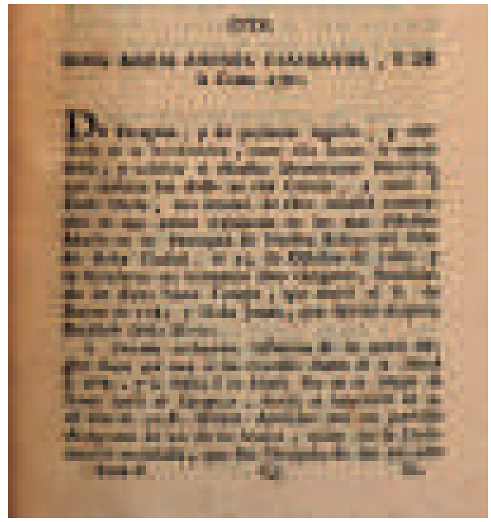


Figura 3. Apunte biográfico de «María Andrea» en la enciclopedia de Latassa

en el siglo XVIII para titular obras de ciencias o de letras.

Desde el punto de vista matemático, el libro está escrito en un lenguaje ágil y eminentemente práctico, con una gran cantidad de ejemplos y casos reales que permiten al lector aprender de forma directa el manejo de las cuatro reglas del *álgebra menor*: suma, resta, multiplicación y división. Además, muestra un conocimiento preciso de las unidades que se manejaban a diario en el comercio de principios del siglo XVIII. Si a ello unimos que en la introducción se resalta el carácter pedagógico de la obra, en el perfil de María Andresa Casamayor podríamos destacar una gran habilidad aritmética y una profunda preocupación por la educación. En este sentido, la obra de María Andresa se adelanta en varias décadas a lo que será el modo de hacer de las mujeres ilustradas.

En el plano personal, la autora firma con un pseudónimo masculino, *Casandro Mamés de La Marca y Araioa*. Esta firma es un perfecto anagrama, mismas letras en diferente orden, de su nombre *María Andresa Casamayor de La Coma*. Curiosamente esta noticia, sacada de la cita de Félix Latassa en su monumental obra *Biblioteca nueva de los escritores aragoneses,* contiene un error ya que Latassa llama a nuestra protagonista «María Andrea» en lugar de María Andresa, un equívoco que ha llegado hasta nuestros días (figura 3).

Casandro se reconoce como «discípulo de la Escuela Pía» y dedica el libro a la misma «Escuela Pía del Colegio de Santo Thomás de Zaragoza». Esta dedicatoria parece significar un apoyo a los recién llegados escolapios.

Firma la dedicatoria en Almodóvar del Pinar. Este pueblo de la serranía de Cuenca, cercano a Teruel, contaba con un Colegio Escolapio desde 1724. Fue conocido como el «pueblo de las carretas» al ser un importante nudo de comunicaciones en la época. Se desconoce el interés de la autora al nombrar esta localidad.

Siguiendo las normas de la época, el Juez de Impresiones y Oidor de la Real Audiencia, Don Alonso Pérez de Mena, solicita al escolapio y catedrático de Matemáticas Juan Francisco de Jesús y al fraile Pedro Martínez, Regente de Estudios del Colegio de San Vicente Ferrer de la Orden de Predicadores, las censuras correspondientes (hoy también las llamaríamos reseñas) como trámite para aprobar la publicación del *Tyrocinio*. Pedro Martínez nos cuenta cómo otros libros similares a este suelen ser más extensos, lo que encarece su coste, y nos desvela los motivos del autor (autora) para publicar tan breve obra:

> [...] su fin, en esta Obrilla solo es facilitar esta instruccion a muchos, que no pueden lograrla de otro modo.

Y después del *Tyrocinio*…

La segunda obra de Maria Andresa Casamayor fue el manuscrito, hoy perdido, *El Para si solo de Casandro Mamés de la Marca y Arioa. Noticias especulativas, y prácticas de los Numeros, uso de las Tablas de las Raizes, y Reglas Generales para responder à algunas Demandas, que con dichas Tablas se resuelven sin la Algebra*. De 109 hojas de tamaño folio es de un nivel matemático superior al *Tyrocinio*. Tal y como comenta Latassa (1802):

> Son muchas las Cuentas, Calculos, Sumas, y Reglas que se dán en dicho Escrito, trabajo que apreciò el referido Padre Maestro Martinez.

Uno de los principales apoyos con el que contó la joven María Andresa Casamayor fue el del dominico y censor de su libro, Pedro Martínez. Latassa (1802) escribe los apuntes biográficos de ambos señalando sus colaboraciones mutuas.

Desconocemos si, debido al alto nivel matemático alcanzado por María Andresa, esta llegó a entrar en contacto con alguno de los matemáticos afincados en Zaragoza o con alguno de los notables libros de matemáticas que vieron la luz en las imprentas zaragozanas de la época: En 1723 se publica *Euclides Geometria Especulativa y Practica de los Planos, y Solidos* del militar Antonio José Deu y Abella. Un año más tarde se reedita en *Arithmetica practica muy útil y necessaria para todo genero de Tratantes y Mercaderes* del valenciano Geronimo Cortés. Francisco Xavier García, residente en Zaragoza, publica su *Arithmetica especulativa y practica y arte mayor o algebra mayor o algebra* en 1733. Merece la pena mencionar que anteriormente en Barcelona en 1698, el ingeniero militar aragonés Francisco Larrando de Mauleón publicaba sus *Elementos de Euclides*.

María Andresa, maestra de niñas

Inmediatamente después de escribir el *Tyrocinio*, trágicos acontecimientos van a determinar el futuro de María Andresa: Juan Jose Casamayor, su padre, fallece el 14 de marzo de 1738 y Fray Pedro Martínez, su amigo y colaborador, el 14 de noviembre de 1739. Por otro lado su familia cercana, los La Coma y en concreto el heredero de la familia Joseph de La Coma, iniciará en 1740 un proceso de endeudamiento que terminará en 1748 con la pérdida de todas sus casas[4]. También el arzobispo Tomás Crespo fallecerá el 3 de marzo de 1742 y a mediados del siglo XVIII, el matemático Juan Francisco de Jesús se trasladará al Colegio de los Escolapios de Valencia. De repente, todos los apoyos que había tenido la joven María Andresa Casamayor han desaparecido en pocos años.

A diferencia de lo que era habitual para una mujer de la sociedad zaragozana, María Andresa ni se casará ni entrará en la Iglesia, así que el resto de su vida deberá trabajar para ganarse la vida[5]. Fue maestra de niñas y durante buena parte de su vida, maestra de primeras letras en las aulas públicas de la ciudad. La publicación del *Tyrocinio arithmético* pudo servirle de carta de presentación para su labor profesional. Como parte de su retribución, le será facilitada una casa donde vivir.

Por el censo de población de 1766 que se conserva en el Archivo Histórico Municipal de Zaragoza sabemos que María Andresa Casamayor vivía (sola) en una casa de la calle Palomar (figura 4) que hace esquina con la actualmente llamada calle de la Viola que va a la plaza de San Agustín, en la parroquia de Santa María Magdalena. La casa, que todavía existe en la actualidad, era propiedad de Joseph Lasala, escribano real. La anotación del censo indica «Andresa Casamayor, no paga» (figura 5).

En el Archivo Municipal del Ayuntamiento de Zaragoza se conserva el documento *Apuntación de las licencias que se han dado a las Maestras de Niñas para que puedan enseñar,* que nos dice el lugar donde daba sus clases. En la primera línea del listado de maestras de niñas aparece «Seminario Viejo. Maria Casamaior» (Domínguez, 1999).

La historia de este lugar comienza en 1767 cuando se produce la expulsión de los jesuitas y con ella la búsqueda de nuevos usos para sus instalaciones. Entre éllos el mencionado Colegio del Padre Eterno[6]. Este edificio había alojado,

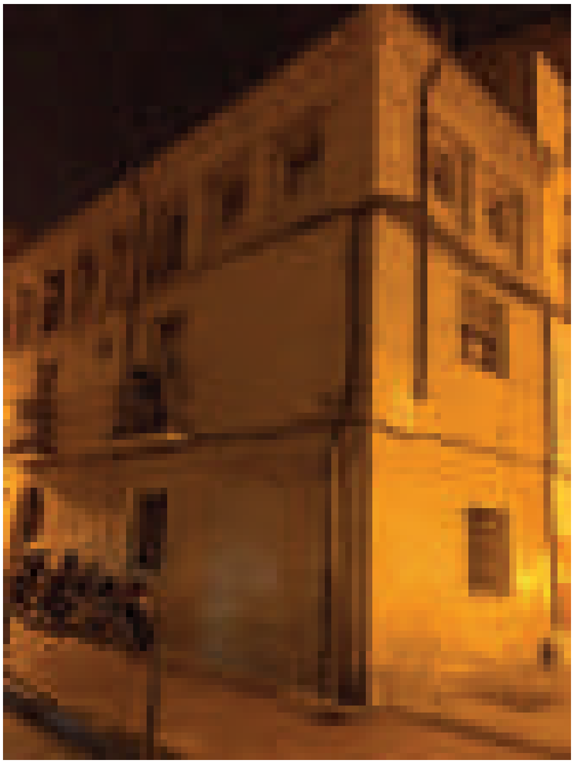


Figura 4. La casa de María Andresa en la actualidad

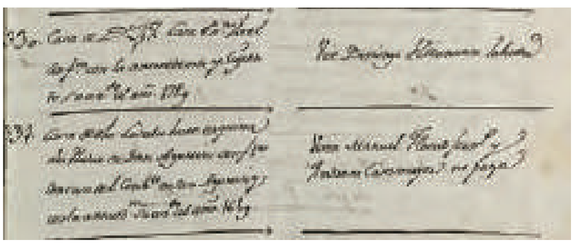


Figura 5. Apunte en el censo de población de 1766

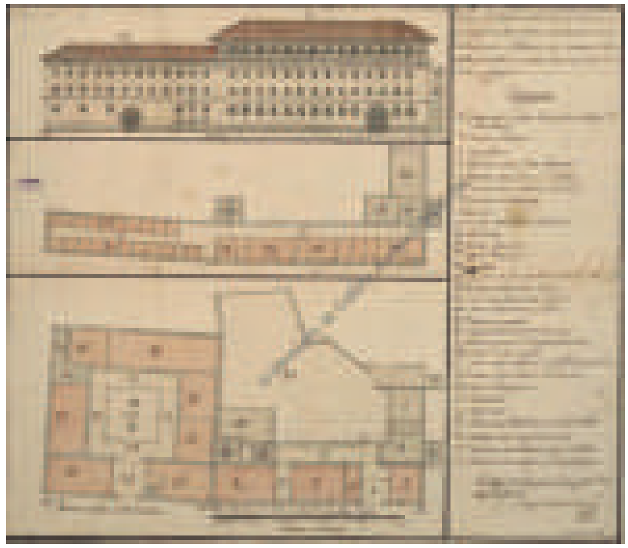


Figura 6. Plano de las aulas públicas donde trabajó María Andresa

Figura 7. Grabado del edificio del Seminario Viejo después del accidente

en su planta baja y desde al menos 1743, las aulas públicas en las que se impartían primeras letras. Con la citada expulsión, la primera planta del edificio es convertida en seminario, conocido durante unos años como «Seminario Viejo», en contraposición con el nuevo Seminario de San Carlos Borromeo. Del edificio del «Seminario Viejo», es decir de las aulas donde impartía clases María Andresa, han llegado hasta nosotros sus planos de 1778 (figura 6) y un grabado que nos recuerda su uso como polvorín en los sitios de 1808, saltando por los aires en un accidente fortuito (figura 7).

El 23 de octubre de 1780 fallece María Casamayor. Después de recibir los sacramentos de Penitencia, Viático y Extremaunción, su cuerpo fue enterrado en el cementerio de la iglesia del Pilar[7].

Referencias bibliográficas

Alfaro, F. J. (2017), «Sopas y letras. La enseñanza de las primeras letras en Aragón a fines de la Edad Moderna», en G. Colás (ed.), *Sobre cultura en Aragón* *en la Edad Moderna,* Mira Editores, Zaragoza, 11-43.

Domínguez, M. R. (1999), *La enseñanza de las primeras letras en Aragón (1677-1812),* Mira Editores, Zaragoza.

Salas, J. A. (2003), «Buscando vivir en la ciudad: trayectorias de inmigrantes franceses en los siglos xvii y xviii», *Revista de demografía histórica,* n.º 21, 141-165.

Latassa, F. (1802), *Biblioteca nueva de los escritores aragoneses*, TomoV, Pamplona.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido motivada por el rodaje del documental *La mujer que soñaba con números* (2019) de la productora zaragozana Sintregua Comunicación y dirigido por Mireia R. Abrisqueta donde se muestra con detalle tanto a la matemática zaragozana como la época ilustrada donde desarrolló su labor docente y pedagógica.

Julio Bernués Pardo
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Universidad de Zaragoza
<bernues@unizar.es>

Pedro J. Miana Sanz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Universidad de Zaragoza
<pjmiana@unizar.es>

1 Juan Joseph procede de Oloron (Francia) y es hijo de Juan Casamayor y de María Abales, aunque llegará solo a Zaragoza. (El apellido materno «mancebo» que aparece en algunas publicaciones recientes es por tanto erróneo). Las capitulaciones matrimoniales estipulan que él aportará al matrimonio 2 000 libras jaquesas, una respetable cantidad y la pareja deberá vivir durante más de un año en casa de los padres de élla. Juana Rosa de La Coma es hija de Juan de La Coma y de María Alexandre, vecinos de Zaragoza. Juana Rosa tiene dos hermanos menores, Joseph, el que será heredero y Thomas, que será sacerdote del lugar de Monegrillo. *Archivo de protocolos de Zaragoza, n.º* 151. Notario Blas de Villanueva*. p.620ss: Capitulación Matrimonial de Juan Joseph Casamayor y Juana Rosa La Coma 1-3-1705.*

2 Libros Sacramentales del *Archivo Capitular del Pilar, Libros 4 1689-1717 y Libro 5 1718-1735.* De los 9 hijos, 2 habrán fallecido en el momento de realizar el censo de población de 1733. María Juana Rosa Andresa es bautizada el 1-12-1720 actuando como padrino su hermano Juan Casamayor y como madrina de honor su hermana Valera Martina Casamayor. Tres años más tarde el 18-4-1723 María Andresa recibirá la confirmación.

3 La familia vivirá hasta la muerte del padre en una casa alquilada de la calle del Pilar. Al principio contarán con la ayuda del abuelo materno de María Andresa, Juan de La Coma. *Archivo de protocolos de Zaragoza, n.° 5557.* Notario Roque Antonio Nuñez*: Arrendamiento 10-2-1708.*

4 Joseph de La Coma pedirá en 1740 un préstamo (un censal) de 400 libras jaquesas al Capítulo de la Iglesia de Santa Cruz, incluyendo como aval las dos casas que poseía la familia La Coma, una en la calle Albardería (parroquia de San Pablo) y la de su residencia en la calle Subida al horno de la Yedra (parroquia del Pilar). Al no tratarse de una gran cantidad de dinero, nos hace pensar en algún suceso familiar grave que provocará que en 1746 se inicie el proceso judicial que terminará en 1748 con el traspaso de ambas viviendas al Capítulo. *Archivo Municipal de Zaragoza. Catastro 1737. Caja Letra J. Joseph LaComa.*

5 La familia Casamayor La Coma no tendrá propiedades (casas, campos...) y vivirán del producto de los negocios de Juan Joseph. Al morir este desaparece la única fuente de sustento familiar. Así, veremos al hermano de María Andresa, Juan Gregorio como eclesiástico o a su hermana Juana casada con un mercader francés. Juana Rosa, la madre, fallecerá más tarde en 1764. Muerte del padre en *Archivo Capitular del Pilar, Libro 6 1736-1756 p.389v.* Muerte de la madre en *Archivo del Pilar, Libro 7 1756-1772 p.357r.*

6 Estaba situado en la actual calle Coso entre las calles San Jorge y San Lorenzo.

7 La nota de defunción (*Archivo Capitular del Pilar, Libro 8. 1773-1791),* conocida desde Latassa, termina con una dirección, *calle de La Coma*. Esta nota no hace referencia a donde vivía, sino a la dirección a la que había que dirigirse para cobrar los gastos del sepelio, quizá siguiendo indicaciones de su hermano y Beneficiado del Pilar, Juan Gregorio Casamayor, que residía en la bocacalle de la calle La Coma llamada del *Horno de la Caraza.* La calle La Coma (que iba desde la plaza del Pilar a la calle Santiago, conocida en la actualidad y desde 1867 como la calle Damián Forment) se denominaba en vida de María Andresa, calle de Subida al Horno de la Yedra. Desconocemos el motivo del cambio de nombre, aunque hay que pensar que se debió a la actividad de los comerciantes Juan de La Coma (abuelo materno de María Andresa, fallecido en 1718) o más seguramente de Joseph de La Coma (tío de Andresa y heredero de la familia) que vivieron en esa misma calle hasta la ruina de la familia en 1748.

suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 87-95

Sobre juegos y materiales didácticos

MMACA

La redacción de este artículo nos encuentra aún reflexionando sobre lo que la MATRIX Conference nos ha dejado: entusiasmo, dudas, errores, aciertos y, especialmente, experiencias y contactos. Aprovechando la invitación de los compañeros portugueses y la amistad de Fernando Blasco, hemos estado por primera vez en el VI Colloquium de Recreational Mathematics, la versión europea del Gathering for Gardner (figura 1).

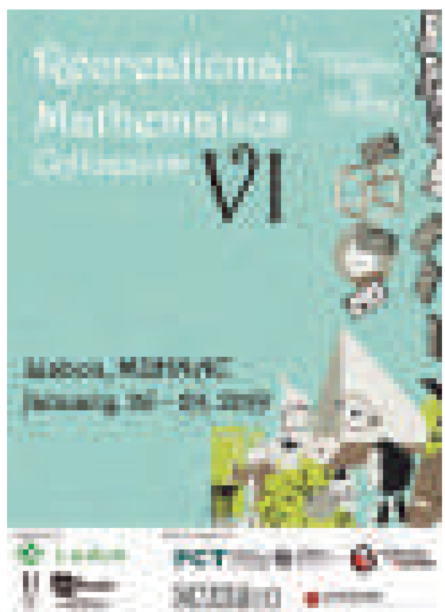


Figura 1. Póster Colloquium Lisboa

Del MMACA al aula

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2018 y aceptado en mayo de 2019

Si desde el MATRIX estábamos dándole vueltas a la relación entre educación y divulgación, se nos abría ahora otro espacio de análisis sobre juegos y actividades educativas lúdicas.

No dudamos que es necesario hacer dialogar entre ellos estos ámbitos en que hace tiempo que nos encontramos navegando, pero cada vez tenemos más claro que se necesita respetar las diferencias existentes y las peculiaridades de cada experiencia. Podemos tender miles de puentes y cruzarlos cada vez que nos plazca o no convenga, sabiendo en todo caso dónde nos colocamos y asumiendo compromisos y complicidades. Aun cuando todo cachorro ha aprendido a hacer de perro jugando, el objetivo del juego es divertirse y el de las actividades educativas, por lúdicas que sean, es aprender.

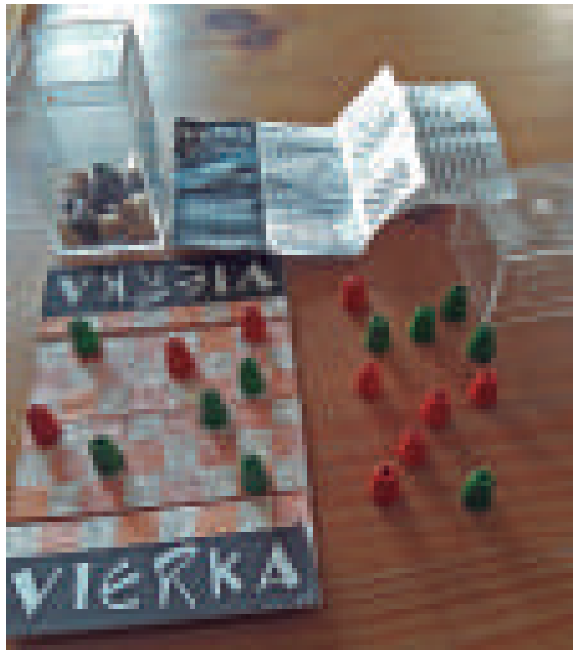


Figura 2. Tablero y piezas originales del Vieka

Vierka, geoplano y juego del Hip

El Vierka original es un juego de tablero de origen alemán (autor: Karel Wenzel) en el que de 2 a 4 concursantes han de colocar sus fichas para conseguir cubrir los vértices de un cuadrado (de lado mínimo 2 unidades). Gana el primero que lo consigue.

Nos parecía una oportunidad para dar al geoplano, material de reconocido valor didáctico, tanto para el alumnado de primaria como de secundaria, un uso con carácter más lúdico y competitivo.

Empezamos usándolo en los cursos de formación del profesorado y después en las ferias, para acabar siendo parte del material de la maleta de geometría, ya que es fácil de reproducir (una hoja cuadriculada substituye al geoplano), rápido de entender y de ejecutar y motiva, mientras se afina la estrategia, a profundizar en los contenidos matemáticos.

Colocar las fichas sobre los cruces de líneas verticales y horizontales, en vez de en el medio de los cuadrados, como en el juego original, nos parecía una representación del problema más potente, con mejor impacto comunicativo (figuras 2 y 3).

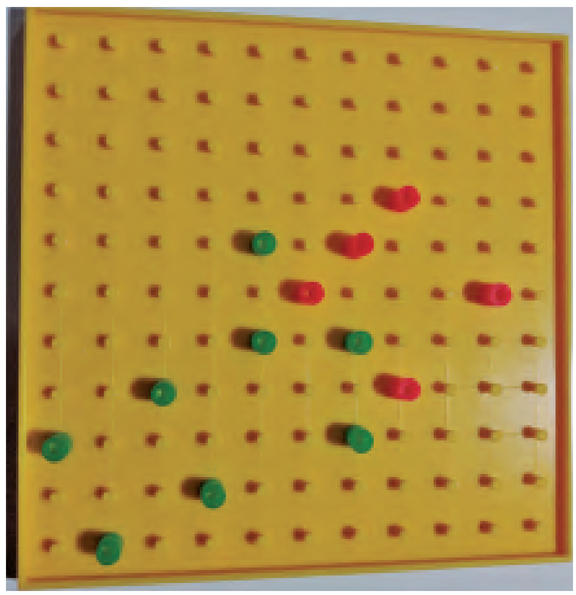


Figura 3. Situaciones del Vierka: hay posiciones ganadoras tanto del concursante rojo como del verde

En cualquiera de las dos versiones, en las primeras fases del juego, los concursantes prueban a hacer cuadrados más o menos grandes, pero siempre paralelos a los ejes del tablero, mientras intentan impedir que el adversario haga lo propio.

Para los usuarios más jóvenes, el juego se limita a eso, pero, para los que tienen mayor conocimiento, la estrategia evoluciona hacia otras distribuciones, en las que el cuadrado no se apoya en la base, sino que gira formando ángulos que al principio son de 45º (configuración roja) y después asumen más inclinaciones (configuración verde, en la parte inferior derecha de la imagen).

En el primer caso estamos intentando romper con una iconografía habitual del cuadrado y el rombo, invitando a definirlos correctamente, en base a sus ángulos (y, a lo mejor, a sus diagonales) y no a su apariencia.

En el segundo caso, especialmente si el cuadrado es grande y el ángulo respecto a los ejes es pequeño, no resulta inmediato comprobar que la figura formada sea realmente un cuadrado. Es necesario expresar en un modo preciso el valor de los ángulos y que los lados sean perpendiculares.

Entra en juego la pendiente de la recta, o sea la relación entre el incremento de la ordenada y el incremento de la abscisa de la recta. Constatar que las rectas paralelas tienen la misma pendiente y las perpendiculares una pendiente inversa y opuesta llega más tarde, pero siempre en forma de descubrimiento y, por lo tanto, con mayor probabilidad de ser entendido y consolidado.

No hay duda de que, para que sea así, los sucesivos descubrimientos van definidos, comunicados y discutidos con el resto del grupo o de la clase, de manera que, una vez más, es necesaria una sinergia con la acción didáctica «formal» y el papel del docente, de estímulo, mediación, sistematización…, sigue siendo insustituible.

Preparando materiales para el Colloquium, descubrimos una propuesta de Martin Gardner, aparentemente muy parecida y llamada *The game of Hip*[1].

Nos encontramos otra vez con un tablero (normalmente de 6×6) y dos jugadores, con 18 fichas cada uno, que deben poner en el centro de las celdas con el objetivo de *obligar al adversario a ocupar los vértices de un cuadrado cualquiera*.

Se le ha dado la vuelta al objetivo y, evidentemente, a la estrategia.

Como en casi todo lo que proponía Martin Gardner desde sus páginas en el *Scientific American*, lo más interesante son las aportaciones de los lectores[2].

Dado su uso lúdico, las reflexiones no se centran sobre los contenidos matemáticos que antes tratamos, aun cuando esos evidentemente siguen existiendo, sino sobre la cantidad de variantes posibles del juego y la mejor estrategia para ganar o por lo menos empatar, modificando en parte las reglas (por ejemplo, el tamaño del tablero).

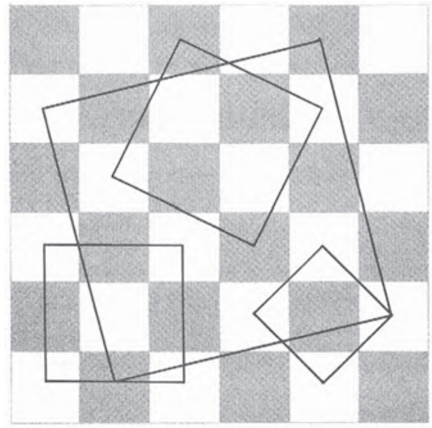


Figura 4. Martin Gardner: *The game of Hip*

Puede que en el juego no haya menos matemáticas que en el uso didáctico de este material, pero sí diferentes, de manera que su uso en el aula no quita las ganas de ir trabajando más a fondo otros aspectos de la propuesta.

Una característica común es en todo caso que la modalidad competitiva puede resultar motivadora y facilitar la toma de contacto con el material, pero las reflexiones más interesantes se hacen de forma colaborativa, buscando los límites de toda propuesta, cambiando las reglas y/o las condiciones y los objetivos de la actividad…

En el caso del Hip, el hecho de que sea posible construir, en el tablero 6×6, hasta 105 cuadrados, estimula la colaboración para encontrar las distribuciones mejores para conseguir ganar o empatar[3].

Cajas

Una de las sesiones del Colloquium de Lisboa invitaba a los participantes a compartir un problema que les había apasionado. Nosotros presentamos un famoso problema de optimización, que consiste en encontrar la caja de volumen máximo que se puede construir doblando los bordes de una hoja cuadrada de papel.

En función de la edad de nuestro alumnado, podemos usar diferentes estrategias:

1. Podemos construir cajas diferentes con cartulina o plástico algo rígido, llenarlas de arroz y, a través de un cilindro graduado o una balanza, determinar el volumen de la caja (figura 5).

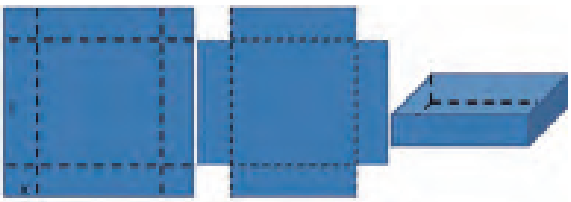
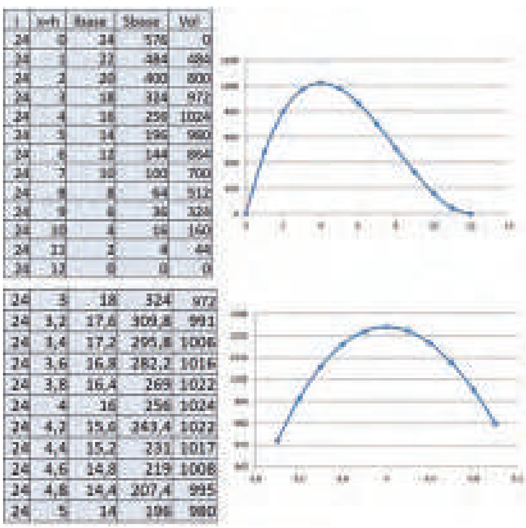


Figura 5. Proceso de construcción de la caja

2. Simular el problema con una hoja de cálculo e investigar los volúmenes, focalizando cada vez más el intervalo de valores de x más interesantes (figura 6).



L	x=h	Base	Sbase	Vol
24	0	24	576	0
24	1	22	484	484
24	2	20	400	800
24	3	18	324	972
24	4	16	256	1024
24	5	14	196	980
24	6	12	144	864
24	7	10	100	700
24	8	8	64	512
24	9	6	36	324
24	10	4	16	160
24	11	2	4	44
24	12	0	0	0

24	3	18	324	972
24	3,2	17,6	309,8	991
24	3,4	17,2	295,8	1006
24	3,6	16,8	282,2	1016
24	3,8	16,4	269	1022
24	4	16	256	1024
24	4,2	15,6	243,4	1022
24	4,4	15,2	231	1017
24	4,6	14,8	219	1008
24	4,8	14,4	207,4	995
24	5	14	196	980

Figura 6. Tablas y gráficos de la simulación con hoja de cálculo

3. Usando el álgebra, con L = lado de la hoja:

$$h = x;\ Sb = (L-2x)^2$$
$$V = (L-2x)^2 \cdot x = 4x^3 - 4Lx^2 + L^2x$$

Derivando y resolviendo la ecuación:

$$V' = 12x^2 - 8Lx + L^2 = 0,$$

así que V'=0 para:

$$x = L/2 \text{ (no hay base) y } x = L/6.$$

El resultado es igual en los tres casos, obviamente, pero resulta «rara» esta ratio (1/6) entre x y L, complicada de imaginar las razones «prácticas» que soporten esta verdad matemáticamente inapelable, o sea, que es el doble de conveniente «invertir» en la base que no en la altura de la caja, como resulta también en el famoso dialogo de los cilindros de Galileo[4].

Desde el punto de vista geométrico, nuestra caja resulta ser la cuarta parte de un cubo. Difícil no entusiasmarse (figura 7).

Figura 7. Composición de cajas de volumen máximo: el cubo

Unos días después, nos llegó esta demostración de Zé Paulo Viana[5], un nuevo gran amigo del MMACA, válida para todos los polígonos regulares (figuras 8 y 9).

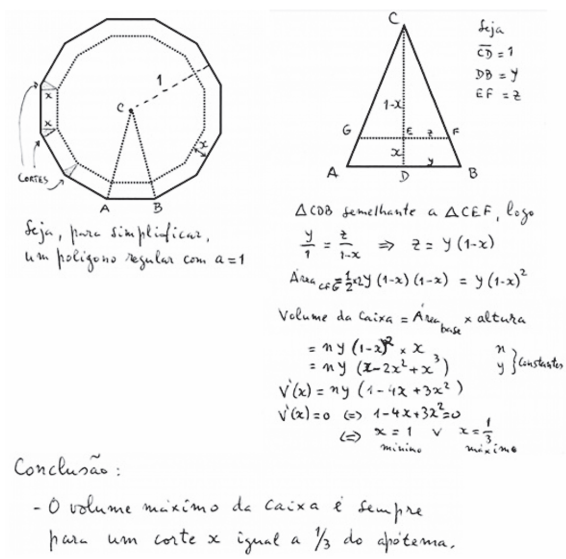


Figura 8. La demostración de Zé Paulo Viana para cajas poligonales

Figura 9. Extensión al círculo

O sea, en todos los polígonos regulares, la caja de volumen máximo corresponde a un borde que es 1/3 de la apotema del polígono.

Sin ser una «revelación», es un paso que nos deja un poco menos inquietos y con un nuevo, extraordinario amigo. ¡Obrigados, Zé Paulo!

El mail de Zé Paulo nos estimuló a investigar más opciones para trabajar este tema y una posibilidad que se nos abría era la de diseñar una simulación con GeoGebra, sobre la base de dos variables: el número de lados del polígono (es decir: la forma de la hoja de papel) y, obviamente, el lado del corte de la esquina (es decir, la altura del poliedro), y la apotema como constante (= 1) (figura 10).

Dado que la simulación se ha hecho manteniendo constante el valor de la apotema en todos los polígonos, parece normal que el volumen de los sólidos resultantes sea diferente.

Si volviéramos a colocarnos en la situación inicial, o sea, doblando y cortando hojas de papel de diferente forma, ¿cómo variaría el volumen de los sólidos obtenidos si estas hojas tuvieran igual superficie?

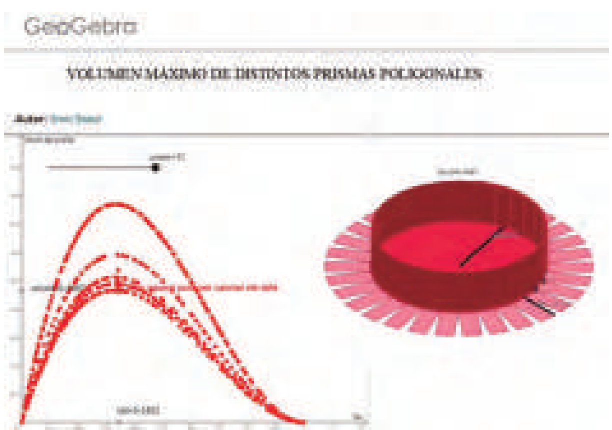


Figura 10. Simulación del problema de las cajas con GeoGebra

Como siempre: un buen problema genera más preguntas que respuestas y nuevas investigaciones.

Monedas

Otra cosa que pasó en Lisboa fue una serie desordenada de encuentros informales, al margen de las actividades oficiales. Que sea en un pasillo o en la mesa del desayuno, el tiempo se hace elástico y se llena de ideas desordenadas y útiles, ligeras, pero nunca fútiles, un torbellino de desafíos que esta vez giró alrededor de juegos con monedas.

El clásico

Es un reto que se encuentra en muchas publicaciones de acertijos matemáticos y que Edward De Bono utiliza como ejemplo de *Lateral Thinking*[6] (figura 11).

Reglas: Desplazando el menor número de monedas (3), invertir el triángulo.

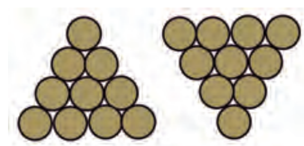


Figura 11. Situación inicial y situación final

Las monedas de M. Gardner 1[7]

Reglas: La moneda que se desliza no debe disturbar las otras monedas y debe ser colocada siempre de manera que toque otras dos monedas.

Desplazando el menor número de monedas (4), pasar del triángulo al hexágono.

Figura 12. Situación inicial y situación final

Variante Colin Wright

Reglas: La moneda que se desliza no debe disturbar las otras monedas y debe ser colocada siempre de manera que toque otras dos monedas.

Desplazando el menor número de monedas (4), pasar de la estructura de rombo a la lineal, que puede ser horizontal, vertical u oblicua.

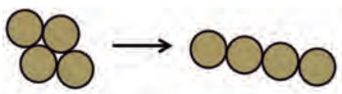


Figura 13. Situación inicial y situación final

Las monedas de H. Dudeney

Reglas: Se pueden deslizar 2 monedas adyacentes, iguales o diferentes, sin invertir su orden (figura 15).

El desafío es hacerlo con el menor número de movimientos (5).

Figura 14. Situación inicial y situación final

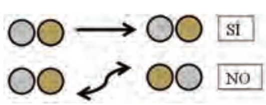


Figura 15. Deslizar 2 monedas sin invertir su orden

Las monedas de M. Gardner 2[8]

Reglas: Se pueden deslizar 2 monedas adyacentes, iguales o diferentes, sin invertir su orden.

El desafío es hacerlo con el menor número de movimientos (3).

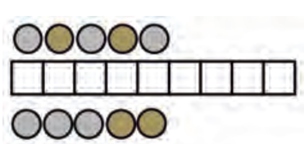


Figura 16. Situación inicial y situación final

Las monedas de M. Gardner 3

La misma situación que el juego anterior, con una variante fundamental en las reglas: *solo* se pueden deslizar 2 monedas adyacentes *diferentes*, sin invertir su orden.

El desafío sigue siendo hacerlo con el menor número de movimientos.

El cambio, aparentemente pequeño, de las reglas provoca un cambio importante de estrategia y la introducción de las monedas en el tablero juega un papel importante en el momento de consolidar la secuencia de movimientos (4).

Juegos de tablero

Puestos a mover monedas, vamos a proponer un par de símil-sudokus[9] que tienen un potencial didáctico interesante porque su construcción es suficientemente sencilla para poder realizar una actividad para un taller.

Sudoku de Monedas 1 (tipos de monedas)

Las monedas de los bordes indican cómo es la moneda más cercana que se debe colocar en el tablero. En cada fila y cada columna se puede colocar *solo una moneda de cada tipo.*

Por ejemplo, parece bastante evidente que en la esquina superior derecha irá una moneda de 1€ y en la esquina inferior derecha una de 50 céntimos.

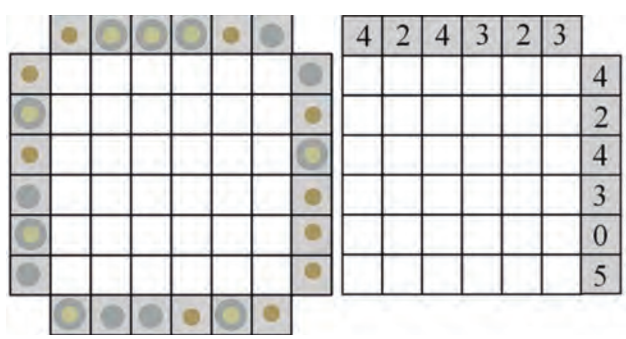


Figura 17. Juegos de tableros con monedas

Sudoku de monedas 2 (números de monedas en cada fila y columna)

En este caso se juega con un solo tipo de moneda y la variante es dónde se deben colocar.

Los números de los bordes indican cuántas monedas hay en la correspondiente fila o columna (figura 17).

El valor 0 en la penúltima fila es de gran ayuda.

Dejadnos reafirmar una vez más nuestra idea de que, en los talleres que proponemos desde el MMACA, la actividad principal es la *construcción* y no la resolución de los retos, aun cuando estos se puedan después ofrecer a los compañeros.

Se prestan también para proyectar la actividad educativa fuera del aula, en ferias escolares o de barrio, acentuando así el carácter competencial.

Además, estos materiales se pueden adaptar fácilmente a diferentes niveles de conocimiento y habilidades (reduciendo las dimensiones del tablero o poniendo alguna pista que oriente la solución).

Al mismo tiempo, se prestan a estimular la formulación de hipótesis. Por ejemplo:

Estos juegos, ¿tienen solución única?

¿Cuál es la característica fundamental que me puede orientar para responder a esa pregunta?

Si miramos los dos tableros, tienen las mismas dimensiones (36 celdas) y en los dos casos, la mitad será rellenada. A pesar de esto, nos atreveríamos a afirmar que en muchos de los retos que tienen el formato del segundo juego tendrán más de una solución válida. Por el contrario, creemos que muchos de los retos (¡quizás todos!) que tienen el formato del primer juego tendrán solución única.

La diferencia se debe a la cantidad (¿calidad?) de la información que estamos dando. En el primer reto estamos informando sobre la cantidad de monedas presentes (3 en cada fila y columna) y la calidad (una por tipo). Esto reduce notablemente las posibles alternativas.

Tienes Talento

Cambiando completamente de tema, nos gustaría compartir un proyecto en el que estuvimos trabajando hace un par de años y que es interesante especialmente por un aspecto que estuvo presente desde el inicio del proceso de elaboración: su proyección, desde el centro en que se elabora hacia la comunidad en la que viven los chicos y chicas involucrados.

La «Proyección» es uno de los indicadores SCAP (Significatividad, Comunicación, Acción, Proyección) que propone el Departament d'Educació de la Generalitat para evaluar el grado de competencialidad de la acción educativa.

El documento oficial especifica, respecto a este criterio:

CRITERIOS	INDICADORES
P Proyección ¿Le encuentro un sentido? ¿Me ayuda a entender y a relacionarme con mi entorno?	P1. El diseño de las actividades conecta al alumno/a con su entorno y busca la aplicación y difusión de producto final
	P2. La realización de las actividades requiere establecer relaciones con el mundo profesional y personal: trabajo, familia, amigos, artistas… P3. La secuencia de actividades proyecta el trabajo de cada alumno/a fuera del aula y se articula como un servicio a la comunidad (otras aulas, etapas educativas, centro, entorno, mundo…)
	P4. La secuencia comprende la difusión y comunicación a la comunidad: centro y entorno
	P5. Se evalúa la aplicación y calidad del producto

Figura 18. Los indicadores relativos al criterio «Proyección» del documento oficial del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya

Si las paredes de las aulas se han hecho más permeables, especialmente en los cursos de educación infantil y primaria, permitiendo fructuosos intercambios entre el alumnado de edades diferentes y acciones de *self-tutoring* y acogida, mucho más difícil es que las escuelas se abran al territorio y a prácticas educativas no-formales o informales.

Vamos por orden.

El proyecto «Tienes Talento» (Tens Talent) nace de los servicios educativos de la Fundació La Caixa y está dirigido a chicos/as de 6-12 años que viven en situaciones de riesgo de exclusión social. Las diferentes unidades se desarrollan en formato de laboratorio en 54 centros distribuidos por toda España, fuera del horario escolar y, más intensamente, en periodos no lectivos.

Los primeros talleres que se ofrecieron se orientaban en enseñar a resolver conflictos y se desarrollaban a través de acciones teatrales y psicodramas. Sucesivamente, se fueron introduciendo otros ámbitos (por ejemplo: robótica[18]), hasta llegar a las matemáticas y al MMACA.

En la primera fase de elaboración de los contenidos tuvimos la colaboración de David Barba y Laura Morera nos ayudó en la formación de los educadores, pero, cada vez que íbamos colocando una pieza del puzle para adaptarnos a la demanda (diferentes edades, unidades didácticas autónomas, duración de cada sesión 1 hora, diseño unitario, actividades no curriculares, dinámicas relacionales, formación de los educadores, etc.), nos íbamos alejando del proyecto original.

La cosa seguía representando un reto importante para nosotros y, por lo que parece, conseguimos conjuntar un producto atractivo (figura 19):

- — Tema: el viaje de Marco Polo, de Venecia al Catai y vuelta a casa.
- — 12 etapas y 3 oasis.
- — Cada etapas ofrece 2 o 3 actividades con un contenido que intenta inspirarse —muy libremente— en la cultura matemática del sitio.
- — Los oasis permiten recuperar, revisar, discutir, profundizar… las actividades de las etapas anteriores.

Cada etapa termina presentando un juego que se puede realizar fuera del centro (escuela, centros sociales, familias…) copiando la plantilla y usando los materiales de un kit (dados, fichas, tangram, naipes) que cada usuario ha recibido al empezar el taller.

Este último producto es justamente lo que nos interesa discutir y no tanto por sus contenidos: juego de la H, triángulos y cuadrados mágicos, cartas para adivinar un número, diferentes versiones del Nim, tangram, cuadrado greco-latino, Vierka, plantillas para la construcción de poliedros, Tximitxurri, dados de colores.

Es fácil ver que son actividades muy familiares para todo docente que haya trabajado con materiales.

El aspecto que nos parece innovador e interesante es su uso fuera del contexto que lo ha generado y su gestión por parte de los asistentes, transformados en divulgadores.

Creo que nosotros mismos no fuimos conscientes del valor de este aspecto del taller hasta que empezaron las reuniones de la Comunidad de Prácticas Escuela-Patrimonio, promovida por la Agencia del Patrimoni de la Generalitat a partir de unas jornadas sobre este tema. Algunas reflexiones teóricas y el análisis de buenas prácticas de cooperación entre centros escolares y museos impulsaron la creación de la CoP, formada por personal de los Servicios Educativos de Museos y Centros de Interpretación del Patrimonio y docentes de centros de primaria y secundaria.

Nos dimos un año (que finalmente fueron dieciocho meses) para elaborar una guía[11] que permitiera medir el grado de competencialidad educativa de las actividades que nuestras instituciones proponen a los estudiantes que nos visitan.

Nos dio tiempo para pilotar la guía en alguna de nuestras instituciones y, de acuerdo con los comentarios recogidos, mejorar su claridad, eficacia, funcionalidad…

Para terminar, nos gustaría compartir dos reflexiones sobre los resultados del pilotaje de la guía:

- — De los indicadores de la guía, los que menor puntuación consiguieron (señal de su escasa actuación) eran los que están en el ámbito del criterio «Proyección», a pesar de que se han puesto en marcha unas iniciativas[12] que

Figura 19. Ejemplo de los materiales del proyecto

recogen y fomentan la colaboración entre centros escolares y otras entidades (universidades, museos, fundaciones…) que comparten usuarios y territorio.

— Es interesante evidenciar que, aun cuando se detectaban defectos, por ejemplo en la definición de los indicadores, al mismo tiempo se manifestaba la riqueza del debate que habían provocado entre los operadores de los Servicios educativos de los Centros Patrimoniales, testimoniando así la necesidad de este tipo de producto.

De alguna manera, concuerda con nuestros criterios de evaluación de la oferta educativa del MMACA: lo más importante es la conversación que nace espontáneamente entre los usuarios. Para que se produzca esta conversación, es necesario un intenso trabajo para incrementar la vocación comunicativa de los módulos y las actividades que se proponen en la exposición, así como su capacidad de generar una investigación personal o colectiva una vez terminada la visita, para suscitar interés y vocaciones.

MMACA
Museu de Matemàtiques de Catalunya, Cornellá de Llobregat (Barcelona)
<contacte@mmaca.cat>

1 Gardner, M. (1994), *My Best Mathematical and Logical Puzzle,* Dover, 20-22

2 Gardner, M. (1972), *Nuevos Pasatiempos Matemáticos,* Alianza, 171-172

3 Gardner, M. (1972), *Nuevos Pasatiempos Matemáticos,* Alianza, 180-182

4 Siempre nos encanta ver cómo, en las actividades colaborativas, empatar sea un éxito.

5 Ver <https://emmametodo.com/percorso-sui-solidi-galileo-due-contenitori-cilindrici/>.

6 <https://clube.spm.pt/news/1498>.

7 <https://es.wikipedia.org/wiki/Pensamiento_lateral>.

8 Gardner, M. (1994), *Collating the Coins, My best mathematical and logic puzzle,* Dover, 11-.

9 Gardner, M. (1994), *Collating the Coins, My best mathematical and logic puzzle*, Dover, 28-.

10 Como otras propuestas parecidas, su origen son las páginas de juegos de la edición veraniega de algún periódico.

11 ¡Nadie se escapa a la fascinación de la *fashion*!

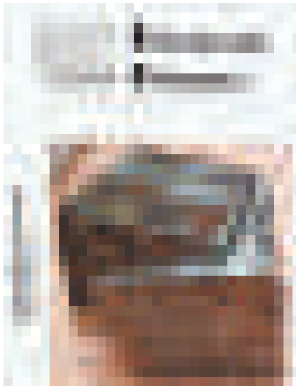
12 <http://cultura.gencat.cat/web/.content/dgpc/museus/08.recursos/publicacions/quaderns/04_Guia-evaluar-diseno-actividades-educativas-patrimoniales.pdf>, versión castellana.

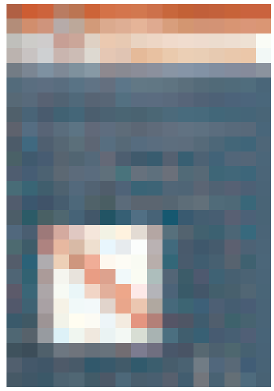
13 <https://www.fbofill.cat/magnet-aliances-lexit-educatiu>.

14 <https://www.fundaciocatalunya-lapedrera.com/es/home>.

Publicaciones recibidas (2)

Problemes Olímpics
SEMCV «Al-Khwarizmi»
N.º 98, febrer 2019
València
ISSN: 1578-1771



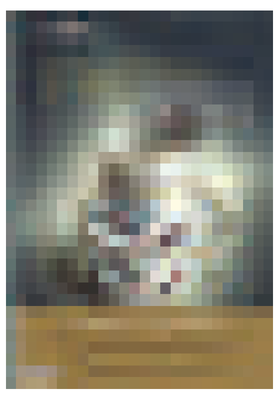


SCM/Notícies
Societat Catalana de Matemàtiques
N.º 44, desembre 2018
Barcelona
ISSN: 1696-8247

Creative Mathematics and Informatics
SINUS Association
Vol. 27, N.º 1, 2018
Baia Mare, Romania
ISSN: 1584-286X

Boletín
Sociedad «Puig Adam» de profesores de Matemáticas
N.º 107, abril 2019
Madrid
ISSN: 1135-0261

Santader, mirar y ver... matemáticas, arquitectura e historia
Abad, E., Barandica, B., Fuente, M. J., Gómez, M. I., Martínez, E., Nuñez, A (2018)
2ª ed., revisada y aumentada
Ediciones Universidad Canatabria
Barcelona
ISBN: 978-84-8102-853-9
366 páginas



Los crímenes de Alicia
Guillermo Martínez
(2019)
Editorial Planeta
Barcelona
ISBN: 978-84-233-5510-5
333 páginas

suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 97-104

Con un centímetro cuadrado

Miquel Albertí Palmer

Crónica de una clase no anunciada

El área de un rectángulo se obtiene multiplicando la base por la altura. La de un triángulo se obtiene del mismo modo, pero dividiendo el resultado por dos. Todo el mundo lo sabe. Se sabe qué calcular, pero en la inmensa mayoría de los casos no se sabe por qué. Otras fórmulas como las del perímetro y el área del círculo, si se recuerdan, suelen confundirse una con otra porque se confunden los significados de los términos perímetro y área. Significados que en su momento se creyeron en lugar de experimentarse, de vivirse suficientemente.

El recuerdo de algo creído sin análisis, sin reflexión, es el recuerdo de una obediencia, no el recuerdo de una vivencia. Y sin vivencia no se produce auténtico aprendizaje. Los recuerdos de creencias están asociados a la transmisión de conocimientos vividos por otros y no por uno mismo. Se trata de un falso aprendizaje, pues uno aprende verdaderamente lo que vive, no el dictado de lo vivido por otros. Ya se ha expuesto en esta sección lo difícil que resulta introducir razonamientos en hechos asimilados mediante creencias.

Volviendo a la cuestión de inicio, otras incomprensiones del área tienen que ver con interpretaciones visuales de relaciones espaciales no razonadas, como las ilustradas en la figura 1.

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en abril de 2019

La primera resolución representa un cuadrado plausible de 6×6 celdas (cada una sería de 1 cm^2). En cambio, el cuadrado de la segunda resolución es de 5×5 celdas. En la primera se da por hecho que el rectángulo sombreado ocupa la tercera parte del cuadrado, como si fuese equivalente al rectángulo de 6×2 celdas. En la segunda se interpreta como la mitad. Pero en lugar de tomarlo de 5×2 celdas, se hace una interpretación libre y ajena al dibujo trazado, un error que conduce al mismo resultado que el obtenido en la otra resolución: 12 cm^2.

Se diría que en la primera resolución se ha considerado que las dos diagonales del rectángulo sombreado son de 2 cm de longitud, el mismo problema de interpretación visual tratado en el número anterior de esta sección. Así, el ancho de tres rectángulos es de 2×3 cm = 6 cm, el lado del cuadrado. En cambio, no se ha hecho lo mismo con el lado mayor del rectángulo sombreado, de cuatro tramos diagonales, sino que se le ha atribuido una longitud de 6 celdas para componer con dos gemelos el cuadrado de lado 6 cm.

Ambas soluciones ponen de manifiesto escasez de vivencias del mismo estilo: falta de interpretación visual objetiva (dibujo), de análisis visual para establecer relaciones espaciales, de cuantificación y comparación de magnitudes y de práctica con situaciones fácilmente representables. De ahí que me detuviese en estos aspectos llegado el momento de abordar cuestiones de cuantificación y medida espacial.

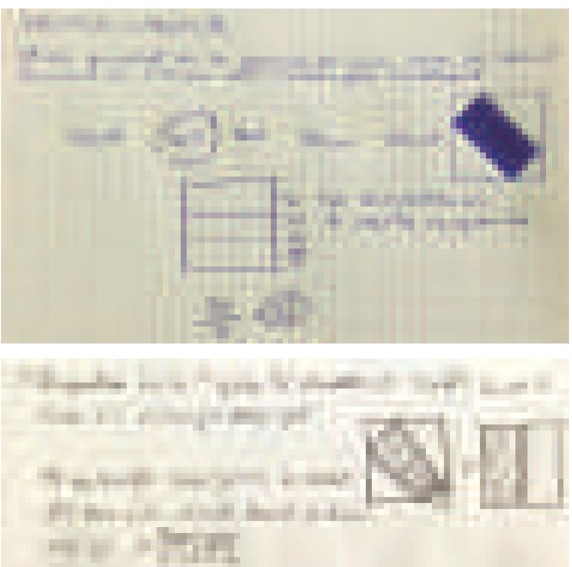


Figura 1. Dos soluciones a un problema de la *Prova Cangur* (2017): «El cuadrado de la figura tiene un área de 36 cm^2. ¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?»

Un problema de área deriva en uno aritmético

La escasez de vivencia matemática del área también emerge en actividades como la siguiente, planteada a raíz de la pregunta «¿Dónde vivo y cómo lo expreso?» del proyecto L'INSiTU que se viene desarrollando desde hace algunos años en el INS Vallès de Sabadell. Las dificultades de aprendizaje afloraron en la actividad dedicada a representar la planta del aula de clase a escala haciendo corresponder cada celda de su cuaderno cuadriculado con una baldosa cuadrada del aula.

Una vez realizada dicha correspondencia el objetivo era averiguar, además del área del aula, la escala a la que se había hecho dicha representación. Como consecuencia de ello se pondría de manifiesto que la relación de escala hacía referencia a la longitud (E1:60) y no al área (E1:3600).

En el momento de realizar esta actividad llevaban ya ocho meses trabajando en hojas cuadriculadas sin que a nadie se le hubiese ocurrido medir la celda de su cuadrícula. Hacerlo resultaba esencial para establecer la relación entre la baldosa real (un cuadrado de 30 cm de lado) y la baldosa ficticia (celda cuadrada de 5 mm de lado).

Puesto que las paredes del aula no se levantaban del suelo justo en el borde de las baldosas, tampoco las representaciones en sus cuadernos coincidían con líneas de la cuadrícula. De ahí que fuese necesario determinar el área de partes de las celdas. Fue al calcular la unidad de área de su cuadrícula, el área de una celda, cuando surgió un problema. Tal y como se ha mencionado, la gran mayoría fueron capaces de calcular dicha área aplicando la fórmula aprendida (base por altura) y obteniendo 0,25 cm^2. Pero resultó evidente que no comprendían el significado de este resultado:

—Ell@s: ¡Pero 0,25 es más pequeño que 0,5!

—Profesor: ¿0,25 qué?

—Ell@s: Centímetros cuadrados.

—Profesor: Entonces no puedes comparar. Una cosa son cm y otra cm^2. Una cosa es longitud; y la otra, es área.

—Ell@s: Pero cuando multiplico 0,5 por 0,5 me da 0,25. ¡Y 0,25 es más pequeño que 0,5!

—Profesor: ¿Comprendéis qué significan esos 0,25 cm^2?

Nadie decía nada. Estaba claro que no se entendía el significado del cálculo realizado y que la sorpresa era que al multiplicar dos números el resultado fuese menor que cada uno de los factores. El problema del área había derivado en un problema aritmético. Con el fin de incitar su comprensión, les propuse dibujar 1 cm^2 en sus cuadernos cuadriculados.

Aparecieron más dificultades. Muchos necesitaron ayuda para ver incluso la solución más sencilla: trazar un cuadrado de lado 1 cm, es decir, una figura compuesta de $2 \times 2 = 4$ celdas. Cuando al fin se dieron cuenta de ello, se crearon multitud de sinapsis:

—Ell@s: Ah! Claro. Un centímetro cuadrado son cuatro cuadraditos y los 0,25 cm^2 son la cuarta parte del centímetro cuadrado, ya que 0,25=1/4: un cuarto de cuadradito.

Esa alumna acababa de darse cuenta de la relación ilustrada en la figura 2.

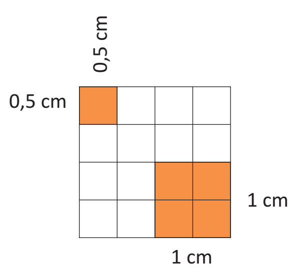


Figura 2. Una celda de la cuadrícula y su relación con un centímetro cuadrado

Y no solo eso. También se hacía claro por qué al multiplicar 0,5 por 0,5 el resultado era un número inferior:

—Ell@s: Sí, claro. Un cuarto es la mitad de un medio.

—Ell@s: Multiplicar por 0,5 es lo mismo que dividir por 2.

—Ell@s: Por eso 0,25, el cuarto, es más pequeño que 0,5, la mitad.

Llegados a este punto se había hecho evidente que para dibujar un centímetro cuadrado bastaba combinar cuatro celdas de la cuadrícula, cada una de ellas de un cuarto de centímetro cuadrado. También parecía bastante claro que el modo en que se combinasen esas cuatro celdas no importaba, pues la figura resultante continuaría teniendo 1 cm^2 de área. Un problema de área había derivado en uno aritmético. La comprensión se halló en ambos ámbitos, entre la relación espacial de área y la relación aritmética de equivalencia entre una fracción y su expresión decimal.

Algunos se arriesgaron a dibujar figuras de un centímetro cuadrado entre las que aparecieron casillas partidas por la mitad mediante el trazo de sus diagonales (el diálogo y las reflexiones asociadas habían inspirado la creatividad). Para que todos trabajasen sobre la cuestión y aprendiesen que cambiando la forma puede conservarse el área de una figura les encargué un pequeño trabajo titulado «1 cm^2: diferentes maneras de verlo» (figura 3). Consistiría en que cada uno aportase diferentes figuras de área un centímetro cuadrado con las que conformaríamos un póster con las 23 escogidas por ellos y que considerasen más representativas.

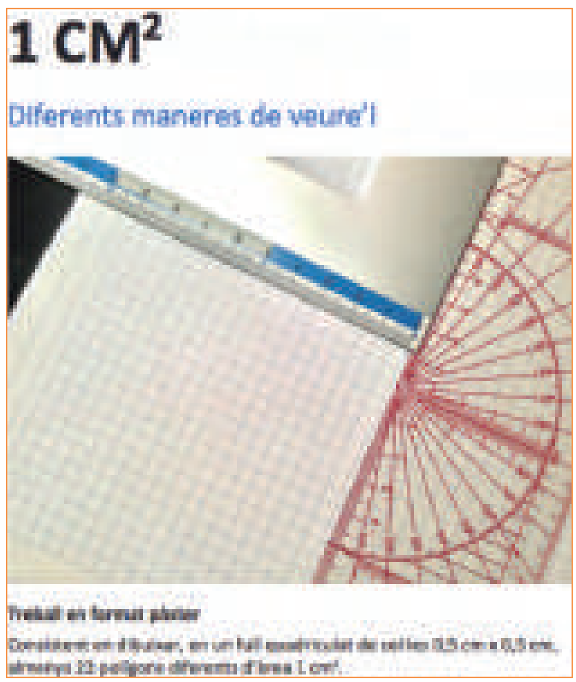


Figura 3. Portada del trabajo sobre diferentes modos de ver un centímetro cuadrado

23 centímetros cuadrados

Algunas personas que solían obtener buenas calificaciones fueron menos creativos. No es raro que cuando se libera a una persona de la obediencia y la reproducción de patrones muestre dificultades para ampliar su horizonte y se sienta un tanto bloqueada ante el vasto campo de libertad que se le ofrece. Pese a ello, la riqueza de sus producciones superó mis expectativas. Tanto, que no pude evitar dedicar más tiempo al análisis de la diversidad de figuras de 1 cm^2. La figura 4 recoge los 23 centímetros cuadrados seleccionados.

Figura 4. Veintitrés centímetros cuadrados

Un par de alumnos se dieron cuenta de que las cinco figuras del Tetris, compuestas todas por cuatro cuadraditos, tendrían un centímetro cuadrado de área y las dibujaron (figura 5).

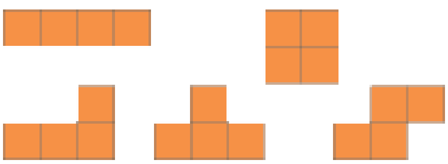


Figura 5. Los cinco tetraminós del Tetris

Un nuevo diálogo en la clase fue incitado por la pregunta:

> —Profesor: ¿Pueden hacerse más figuras como las del Tetris enganchando cuatro celdas?

La imposibilidad se hizo evidente tras una sucesión de pruebas en las que se acordó que el cambio de posición entre una figura y una copia suya no las hacía diferentes, sino que lo que determinaba su naturaleza era el número de casillas adosadas (cuatro, en este caso) y el modo en que se componían.

En pleno proceso observé a alguien dibujando una figura significativamente distinta de las compuestas hasta ese momento (figura 6). Le pregunté si podría reproducirla en la pizarra para que el resto de la clase pudiese verla. Y lo hizo.

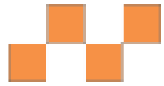


Figura 6. Un centímetro cuadrado distinto

A la vista de todo el mundo, se incitó un nuevo diálogo:

> —Ell@s: ¡Esta no vale!
> —Profesor: ¿Por qué no?
> —Ell@s: No está enganchada.
> —Ell@s: Los cuadrados no se tocan.
> —Profesor: ¿No? Recordad lo que dijimos sobre las encrucijadas urbanas. ¿Cómo se formaban?

En este punto, y desde la perspectiva del proyecto L'INSiTU, el profesor no debería haber intervenido y limitar su labor a tan solo guiar el diálogo. Pero a menudo la emoción del descubrimiento y el ansia de comunicarlo provoca incontinencia verbal. No podemos permanecer callados. Lo mismo le ocurre al alumnado cuando ven una idea muy clara y no pueden evitar levantar la mano y agitarla sin cesar solicitando intervenir.

> —Ell@s: Era donde se cruzaban dos calles.
> —Profesor: Eso es. Ahora imaginad dos rectas (las tracé en la pizarra). ¿Qué tienen en común esas dos rectas?
> —Ell@s: El ángulo.
> —Profesor: Sí. El ángulo que forman. Pero, ¿tienen algo más en común?
> —Ell@s: Sí. Ahí donde se cruzan.
> —Profesor: ¿Por qué?
> —Ell@s: Porque está en las dos rectas.
> —Ell@s: Ah, sí. Se tocan en la punta.
> —Profesor: ¿Qué se tocan en la punta?
> —Ell@s: Los cuadraditos.
> —Profesor: ¿Qué cuadraditos?
> —Ell@s: Los dibujados. Los cuatro se tocan por las puntas.
> —Profesor: ¿Y qué es la punta?
> —Ell@s: En la punta se cortan los lados.
> —Ell@s: La punta también es una encrucijada, la de los lados.
> —Ell@s: Es el punto de intersección.
> —Profesor: Entonces, ¿la figura está enganchada o no lo está?
> —Ell@s: Sí, lo está, pero de modo distinto.

—Ell@s: Está enganchada por un punto; las otras, por una línea.

—Profesor: Exacto. La conexión no es igual, pero continua habiéndola.

En este fragmento reflexivo y dialogado el profesor intervino menos, pero debería haberse contenido más aún, hasta cuando no quedase más remedio o el bloqueo de ideas impidiese el avance argumentativo. A continuación, planteé una reflexión sobre las figuras del Tetris:

—Profesor: ¿Qué figura del Tetris diríais que es la que está más enganchada?

—Ell@s: El cuadrado.

—Profesor: ¿Por qué la consideráis más enganchada que las demás?

No sabían qué decir. Les dije que quizá percibamos el cuadrado del Tetris como más enganchado que las demás figuras porque está más apelotonado. Pero eso no les ayudó. Les propuse contar el número de lados compartidos en cada una de las cinco figuras. Todas tienen 3, excepto el cuadrado, que tiene 4. Y repetí la pregunta:

—Profesor: Entonces, ¿cuál diríais que es la figura más enganchada y por qué?

—Ell@s: ¡El cuadrado! Tiene 4 lados comunes.

Habíamos encontrado un criterio numérico y objetivo de cuantificar la conexión. Se había establecido un grado de conectividad entre las figuras del Tetris. Lejos de ser definitivo, lo relevante del proceso es que dicho grado de conectividad de una figura se supedita a una cuestión geométrica, cuantificada y objetiva, dejando de ser una opinión al obedecer un criterio razonado. Entonces les propuse diseñar otras figuras unidas por los vértices. Su creatividad no se redujo a ello, también compusieron centímetros cuadrados agujereados como algunos que pueden verse en la figura 10.

Ser o parecer: he ahí el dilema

Alguien planteó una nueva cuestión. Aunque se había dicho que la posición no cambiaba la naturaleza de las figuras del Tetris, una persona consideraba como figuras distintas un cuadrado posicionado sobre uno de sus lados y el mismo cuadrado posicionado sobre uno de sus vértices. Su argumento era que si veía las figuras distintas, estas debían serlo. Según esa persona, la figura 7 mostraría un cuadrado y otra figura que no lo es.

Figura 7. Dos figuras… ¿iguales?

La discusión, extensa e intensa, resultaba relevante porque subyace en la consideración mayoritaria de que los rombos siempre descansan sobre uno de sus vértices, por lo que la interpretación de su naturaleza suele derivarse a partir de la forma y posición en lugar de la medida de sus lados y ángulos. Prueba de ello es que nadie declarará como rombo el cuadrilátero de la izquierda de la figura 7. La intransigencia de dicha perspectiva generó tensiones que se zanjaron cuando otro alumno replicó al que la mantenía:

—Ell@s: Si me miras sigo siendo yo mismo aunque me veas de frente, de espaldas o de lado, ¿a que sí?

Esa contribución resultó crucial para comprender un aspecto que trasciende el de la medida como es la diferencia entre ser y la percepción del ser. Entonces volvimos a los cuadrados de la figura 7:

—Ell@s: Son la misma figura, pero hay que girar 45° para que se vean iguales.

—Profesor: Girar sí, pero ¿dónde y hacia dónde?

—Ell@s: En el centro del cuadrado.

—Profesor: ¿Y dónde está el centro del cuadrado?

—Ell@s: En las diagonales. Dibujas las diagonales y lo tienes.

—Ell@s: Uno está de punta y el otro plano. Girando uno tienes el otro.

—Profesor: ¿Qué quieres decir con plano?

—Ell@s: Plano, sobre el suelo.

—Ell@s: En la pizarra no hay suelo.

—Ell@s: Sí, la base de la pizarra. El otro está de punta encima de ella.

—Profesor: ¿Qué relación tiene el lado del cuadrado con la base de la pizarra?

—Ell@s: Paralelos, tiene el lado paralelo. Y el de punta… no.

—Profesor: El que está de punta, ¿no tiene nada en común con la pizarra?

—Ell@s: No, ningún lado. Todos forman ángulos.

—Profesor: ¿Qué ángulos?

—Ell@s: Esos de 45°.

—Profesor: Y si trazamos las diagonales, ¿qué pasa con el que está de punta?

—Ell@s: Hay una vertical y otra horizontal.

—Profesor: ¿Y geométricamente?

—Ell@s: Una es paralela al suelo.

—Ell@s: A la base de la pizarra.

—Ell@s: ¡Claro! Un cuadrado tiene los lados paralelos a la pizarra. El otro, tiene las diagonales paralelas a la pizarra.

—Profesor: Ahí lo tenéis. Necesitamos un referente. En este caso, la base y los lados de la pizarra.

La figura 8 ilustra y resume este diálogo en el que se destaca la relación entre las diferentes posiciones de dos figuras iguales:

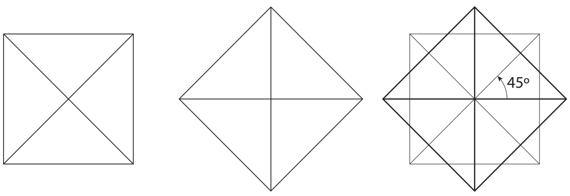


Figura 8. Dos cuadrados iguales aparentemente distintos

Simetría y belleza

La discusión sobre la percepción me llevó a preguntar qué figura consideraban más hermosa, la superior o la inferior de la figura 9, que alguien había dibujado (también con área de un centímetro cuadrado). Su respuesta respondió a mis expectativas: todos estuvieron de acuerdo que el centímetro cuadrado simétrico era más bello que el asimétrico, si bien solamente una persona adujo el término simetría como justificación.

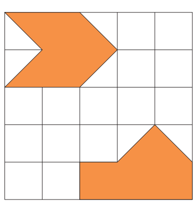


Figura 9. El cm² simétrico fue considerado más hermoso que el asimétrico

El análisis desarrollado sirvió para clasificar las figuras compuestas de cuatro celdas (1 cm²). Se agruparon centímetros cuadrados (figura 10) según criterios diversos.

Esa labor estaba asociada a una cuestión crucial del aprendizaje matemático como es la descomposición de una figura en otras más simples o su complementación con otras sencillas para completar un todo mayor de área más fácil de obtener, lo que nos devuelve al inicio de este artículo. Sin duda, demuestra mayor competencia matemática quien es capaz de relacionar el área de una figura compleja con la suma de las áreas de sus partes más sencillas o como parte de un todo mayor que ella. Así se justificaron las áreas de los dos triángulos en la línea inferior de la figura 10:

—Ell@s: El área es de 1 cm² porque la figura es la mitad de 8 cuadraditos.

—Ell@s: El área es de 1 cm² porque la figura es la mitad de un 4×2.

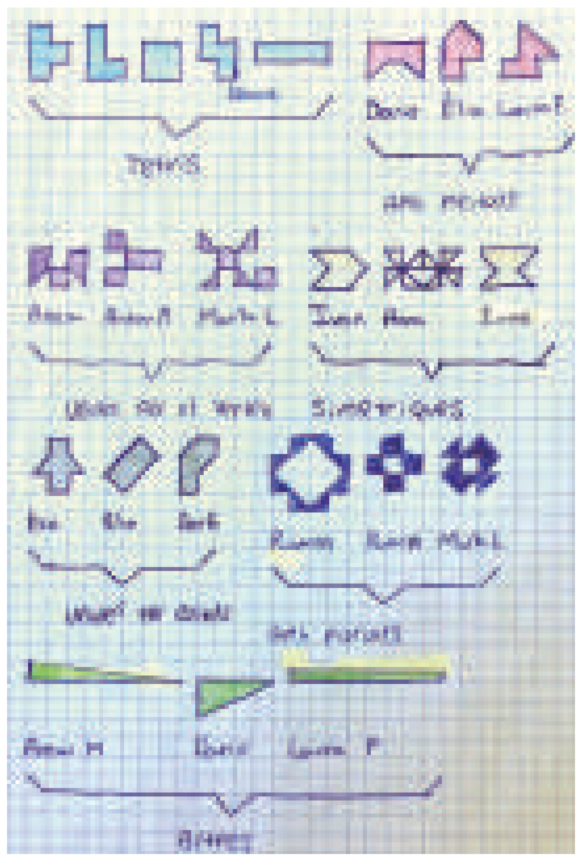


Figura 10. Clasificación de otros 23 centímetros cuadrados según diversos criterios

Conclusiones

Derribando paradigmas

El proceso seguido a través de varios diálogos y de la experimentación en el aula sobre las diferentes formas de representación de un centímetro cuadrado se resume en la tabla 1.

Como suele ocurrir en matemáticas, todo empieza dando por sentado un paradigma tácito que nadie ha explicitado ni discutido. Cuando alguien más creativo realiza una aportación que trasciende dicho paradigma el resto se da cuenta de que se habían asumido unos límites que no habían sido impuestos. Así se pasó de dibujar celdas enteras a fraccionadas, de conectarlas por los lados a conectarlas por los vértices y a trazar centímetros cuadrados con agujeros.

Dichas consideraciones van mucho más allá de la pretensión inicial consistente en representar un centímetro cuadrado para que el alumnado se diese cuenta de que con diferentes formas puede conservarse el área. Esa fue la principal conclusión matemática. Pero como se ha apreciado, esta no se deriva de modo aislado de toda una serie de consideraciones más propias del ámbito social y vinculadas a un aspecto primordial de la geometría como es la percepción. Debería ser natural que al tratar problemas de geometría se pusiese en cuestión la diferencia entre ser y parecer, entre lo que es una cosa y el modo en que la vemos. El pensamiento matemático contribuye, si no a dilucidar definitivamente esa dicotomía, por lo menos a proporcionar referentes objetivos (cuantificados) para aclararla en casos elementales como son los relativos a figuras geométricas.

Geometría de la percepción visual

¿Por qué percibimos de forma diferente el punto de la esquina de un cuadrado de un punto intermedio en cualquiera de uno de sus lados? La esquina, el vértice, es, de hecho, la intersección de dos líneas o, visto de otro modo, donde se produce un cambio de dirección en la línea que conforma el perfil del cuadrado: un ángulo. En un punto intermedio del lado no existe cambio de dirección ni intersección alguna que permita distinguirlo de sus vecinos. El punto intermedio de un segmento no provoca un estímulo visual como el de un punto extremo o vértice.

Que la esquina nos parezca más o menos puntiaguda depende precisamente de la medida del ángulo (figura 11). Cuanto más agudo, más puntiaguda vemos la esquina, llegando a convertirse en el extremo de un segmento cuando su ángulo es nulo (0°). Cuanto más obtuso, menos

Tipología de la figura	Consideración social
Compuesta por celdas enteras	Paradigma asumido tácitamente
Compuesta por secciones de celdas	Ampliación del paradigma
Conexa por los lados	Paradigma asumido tácitamente
Conexa por los vértices	Invalidada al principio (no afín al paradigma)
Agujereada	Invalidada al principio (no afín al paradigma)
Simétrica	Hermosa
Asimétrica	No hermosa

Tabla 1. Consideración social de diversos centímetros cuadrados

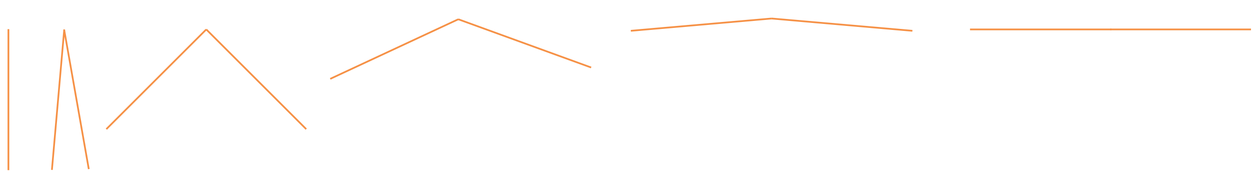


Figura 11. El vértice de un ángulo se distingue claramente de sus vecinos cuando es agudo, mucho menos cuando es obtuso y acaba por confundirse con ellos cuando se hace llano

puntiaguda la esquina. Incluso llega a desaparecer cuando el ángulo se hace llano (180°) y la esquina se ha abierto en un segmento.

La objetividad y cuantificación matemáticas sirvieron para atribuir causas a la percepción visual. Es decir, para establecer justificaciones geométricas objetivas de los motivos que nos llevan a relacionar los elementos figurativos que observamos visualmente.

Habilidades de pensamiento

Aprender a pensar con objetividad es basar los razonamientos en las llamadas habilidades de pensamiento. Estas se clasifican en cuatro grandes grupos (GrupIREF, 2012):

— Habilidades de investigación: formular hipótesis, averiguar, observar, buscar alternativas, anticipar consecuencias, seleccionar posibilidades, imaginar.
— Habilidades de conceptualización y análisis: formular conceptos precisos, poner ejemplos y contraejemplos, hallar semejanzas y diferencias, comparar y contrastar, definir, agrupar y clasificar, ordenar.
— Habilidades de razonamiento: buscar y ofrecer razones, hacer inferencias, razonar condicionalmente, establecer relaciones de causa y efecto, establecer relaciones entre las partes y la totalidad, entre los fines y los medios.
— Habilidades de comunicación, traducción y formulación: narrar y describir, interpretar, improvisar, traducir de un lenguaje a otro, resumir.

Tras lo expuesto se habrá hecho claro que muchas de esas habilidades de pensamiento se llevaron a cabo en esa clase no anunciada de matemáticas y que un enfoque constructivista del aprendizaje ayuda al alumnado a aprender a pensar. Es más, resulta fácil asociar todas esas habilidades con clases de matemáticas que fomenten la construcción de aprendizaje matemático y el desarrollo de sus competencias. Por tanto, somos educadores de una materia que de modo natural está inmersa en aquellos proyectos cuya base sea el pensamiento razonado como es el del proyecto de Filosofia 3/18 que el GrupIREF está impulsando en muchos centros de primaria y algunos de secundaria en Cataluña.

El cambio de representación es una estrategia doble de aprendizaje matemático (CBAM 7). Por una parte, media en la comprensión. Por otra, incita la creatividad. De ambas surge el aprendizaje. La dificultad de comprensión de que el producto de un número por un decimal entre cero y uno dé como resultado un número inferior a este se disipan al interpretar ese decimal menor que la unidad como fracción, lo que exige un cambio de representación. Así uno da significado a un resultado de entrada incognoscible, es decir, aprende. El cambio de representación espacial de un mismo centímetro cuadrado, provoca la creación de múltiples conexiones e incita la observación y análisis de propiedades insólitas como fueron las figuras del Tetris, el establecimiento de nuevas relaciones espaciales, las figuras agujereadas y los diferentes grados de conectividad.

Toda esa riqueza de aprendizaje constructivista se debió, sobre todo, al modo en que fue gestionada en el aula. Ahí fue crucial la incitación al diálogo filosófico. Parafraseando a Lipman (2016) podemos resumir esa clase no anunciada expresando que el aprendizaje se produjo en un entorno en el que no se enseña al alumnado qué decir, sino que se propicia un entorno de situaciones en las que el alumnado siente la importancia de intervenir y decir lo que quiere decir.

Referencias bibliográficas

Lipman, M. (2016), *El lugar del pensamiento en la educación*, Octaedro editorial.

GrupIREF (2012), *Filosofía 3/18*, versión catalana de *Philosophy for Children*.

Miquel Albertí Palmer
INS Vallès (Sabadell)
<alberti.miquel@gmail.com>

suma+
Secciones
Julio 2019
91
pp. 105-113

Proporcionalidad y reparto electoral

Adela María Villegas Escobar
Rafael Ramírez Uclés

Presentamos el diseño e implementación de una sesión de enriquecimiento curricular sobre proporcionalidad para un grupo de estudiantes con talento matemático. Se basa en los procedimientos seguidos para repartir los escaños de unas elecciones en un sistema de representación proporcional, más conocidos como métodos de reparto proporcional.

Diseño de la sesión

Entre las distintas funciones que debe desempeñar un docente, se encuentran proporcionar una educación individualizada y adaptada a las necesidades de cada uno de los alumnos y fomentar el desarrollo intelectual de los estudiantes. Por este motivo, el profesor ha de intervenir, utilizando estrategias y metodologías para estimular a aquellos alumnos con talento matemático, para que puedan desarrollar sus altas capacidades.

La sesión de enriquecimiento que se propone se diseñó e implementó con estudiantes veteranos del programa ESTALMAT (Bachillerato), pero puede adaptarse para la ESO. Gira en torno al contenido de proporcionalidad. Concretamente, se centrará en el reparto de escaños, un tema que va cobrando más importancia para ellos,

El rincón de ESTALMAT

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en mayo de 2019

dada su edad, y es de actualidad por las elecciones generales, municipales y europeas.

Se llevarán las proporciones al terreno de las matemáticas electorales y al reparto de escaños dentro de un sistema de representación proporcional. Por lo tanto, no se va a avanzar en el temario de cursos superiores, sino que se van a tratar temas nuevos. En este artículo describimos solo algunos de los aspectos del análisis didáctico más detallado en el trabajo de Villegas (2017).

Los contenidos de proporcionalidad se pueden agrupar en tres focos, dentro de los cuales se pueden desglosar las ideas prioritarias e incluir las ideas nuevas necesarias para el enriquecimiento según se puede leer en la tabla 1.

En cuanto al análisis fenomenológico se muestran las conexiones entre los conceptos y estructuras del tema con la naturaleza, sociedad, ciencia y cultura. Ejemplos de fenómenos en los que interviene la proporcionalidad, pueden ser: elaborar una receta de cocina, cálculo del precio de una excursión, ofertas comerciales…

Como lo que se desea es conducir estas situaciones y contextos al tema que abordará el enriquecimiento, se resalta el campo social sobre el resto y se introducen algunas situaciones relacionadas con las matemáticas electorales:

— Porcentaje de la población total de un país en una determinada región.
— Porcentaje de votos que ha conseguido un partido tras unas elecciones.
— Reparto de escaños a un determinado partido político en proporción (directa) a los votos obtenidos.

Para proponer las actividades que el alumnado realizará, es importante tanto el diseño como los criterios de selección de las tareas para optimizar al aprendizaje del alumnado.

El objetivo principal de la sesión es estudiar las proporciones desde una perspectiva diferente, enmarcada dentro de un contexto relativamente nuevo para los estudiantes, fomentando el pensamiento crítico, el trabajo en grupo y la creatividad, sobre otros aspectos.

A continuación, se exponen una serie de tareas para desarrollar al máximo las competencias y habilidades de los alumnos con talento matemático. Sin embargo, previo a la realización de las tareas se ha de proporcionar al alumno algún tipo de información sobre el tema a tratar para poder realizarlas adecuadamente, pues son necesarios diversos conceptos sobre los sistemas electorales en general, y sobre los sistemas de representación proporcional, en particular.

Antes de comenzar con las matemáticas electorales, se les planteará a los alumnos una tarea introductoria relacionada con la proporcionalidad, que posteriormente se podría trasladar al tema de reparto proporcional.

La proporcionalidad es un tema que está presente en el día a día de las personas, aunque no seamos conscientes de ello.

Puesto que se desea fomentar la participación activa, se iniciará la sesión con una lluvia de ideas sobre las diferentes maneras de hacer repartos. Primero sobre repartos de beneficios en función de acciones y luego sobre repartos de concejales en función de los votos obtenidos.

Proporción	*Relación de proporcionalidad directa*	*Porcentaje*
Noción de razón y proporción Noción de constante de proporcionalidad Propiedad fundamental de proporcionalidad	Noción de magnitudes con relación de proporcionalidad directa Algoritmo del método: regla de tres directa Formas de expresión de la relación de proporcionalidad directa	Noción de porcentaje Cálculo de porcentajes mediante regla de tres Porcentajes en la vida cotidiana
Sistemas electorales Métodos de reparto proporcional. Métodos de divisores Casos particulares: D'Hondt, Adams, Sainte-Laguë		

Tabla 1. Contenidos (López, 2014)

Tarea 1
Una empresa quiere repartir los beneficios que ha obtenido a lo largo del año entre sus 8 accionistas, según el número de acciones que cada uno posea. ¿Cómo se podrían repartir los beneficios

Tras esta lluvia de ideas inicial, se traslada la situación a un contexto electoral para que vean que se trata de la misma situación y se les plantea la siguiente tarea con datos concretos.

Tarea 2
En un pueblo de Granada que tiene 100 habitantes, se han convocado elecciones municipales con el fin de repartir 14 concejales. El Partido A consigue 42 votos, el Partido B, 31 votos, el Partido C, 18, y el Partido D, 9. ¿Cómo harías el reparto de los concejales?

Esta tarea guarda cierta similitud con la anterior. Deben repartir una serie de concejales, que en la tarea anterior serían los beneficios de la empresa, entre una serie de partidos políticos, anteriormente, los accionistas. El número de acciones se corresponde ahora con los votantes, y los votos que consigue cada partido serían las acciones que posee cada accionista. Sin embargo, hay una pequeña diferencia. En esta ocasión, el reparto ha de ser entero, es decir, no se pueden asignar dos concejales y medio a un partido, pero sí se puede dar céntimos a los accionistas, si fuera necesario. Esto es posible, ya que la unidad de medida usual del dinero es el euro, pero si la unidad más utilizada fuese el céntimo, se produciría una situación equivalente a la de la tarea previa, pues no se podría repartir un céntimo y medio a los accionistas. Es importante recalcar que continúa siendo un reparto entero.

Al igual que antes, se realiza una breve discusión sobre cómo sería la forma ideal de repartir los concejales, así como analizar las ventajas e inconvenientes de las distintas propuestas de los alumnos, de forma grupal. El objetivo de esta tarea no es obtener una solución al problema, sino tratar de reunir las posibles formas de hacer el reparto.

Tras realizar estas dos tareas introductorias, comienza el cuerpo de la sesión. Para introducir a los alumnos en las matemáticas electorales, es necesario que tengan ciertos conocimientos acerca de sistemas electorales, como los más comunes y, dentro de los sistemas electorales de representación proporcional, algunos de los métodos de reparto proporcional más conocidos.

Así, se les proporciona unas fichas (tabla 2 y tabla 3) con la información necesaria, mientras que el docente va exponiendo el contenido de la misma. Esta ficha se puede confeccionar a partir del trabajo de Moreno y Villegas (2017) en el que aparecen los contenidos más extendidos, ejemplos diferentes y propuesta de actividades.

Tras esta ligera introducción al mundo de las matemáticas electorales, el docente explica a los alumnos en la pizarra como son algunos de los métodos más usados en los sistemas de reparto proporcional, a saber, el método D'Hondt, Sainte-Laguë y Adams.

De forma conjunta, y puesto que estos tres métodos forman parte de los métodos divisores,

¿Qué es un sistema electoral?
Es una estructura compuesta por las normativas y los procesos que, fijados por la ley, permiten que los ciudadanos intervengan en las decisiones políticas a través del voto. En el diseño de un sistema electoral para un parlamento, hay que establecer cinco partes, de las cuales, en al menos dos de ellas, las matemáticas son esenciales. Estas cinco partes de las que se habla son: — El tamaño del parlamento — Las circunscripciones y el método que se utiliza para calcular su tamaño — Las barreras electorales — La fórmula electoral que se utiliza para repartir los escaños — El método de votación y el escrutinio La más importante desde el punto de vista matemático es la fórmula electoral. Hay diversos métodos de reparto siendo los más conocidos y usados el de Hamilton, D'Hondt, Sainte-Laguë y Adams.

Tabla 2. ¿Qué es un sistema electoral?

se muestra en la pizarra, el procedimiento que se sigue al hacer un reparto determinado. Una vez explicados algunos conceptos básicos, se vuelve a la tarea 2 y se resuelve utilizando el método D'Hondt.

de las características que definen a esta clase de alumnos. Con ella, se pretende que los alumnos puedan dar el máximo de sus capacidades, mostrar sus habilidades de razonamiento, desarrollar estrategias…

Tipos de sistemas electorales
Entre los más destacados se encuentran la mayoría simple y el reparto proporcional. El sistema de mayoría simple se aplica normalmente en pequeñas circunscripciones en las que se elige al candidato más votado en cada una de ellas. Gran Bretaña es el caso típico de un sistema de mayoría simple. El sistema de representación proporcional ha sido el principal adversario de los sistemas de mayoría simple. Este sistema intenta resolver los problemas con la sobrerrepresentación y la subrepresentación que provoca la mayoría simple, asignando a cada partido un número de escaños próximo a la proporción de votos recibidos. — Método D'Hondt El redondeo por defecto equivale a que el punto de redondeo en el intervalo limitado por dos enteros consecutivos sea el entero más grande, y por tanto, las fracciones del interior del intervalo se redondean al entero por defecto que es la parte entera de la fracción. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {1, 2, 3, 4,…}. — Método Sainte-Laguë Si se fija como punto de redondeo el centro del intervalo, las fracciones con parte decimal inferior a 0,5 redondearán a la baja, mientras que las fracciones con parte superior al 0,5 redondearán al entero superior. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {0,5, 1,5, 2,5, 3, 5,…}. — Método Adams Si se establece como punto de redondeo el extremo inferior del intervalo, las fracciones del interior del intervalo se redondean al entero superior. En este caso, el método se identifica por la sucesión: d = {0, 1, 2, 3, 4,…}.

Tabla 3. Tipos de sistemas electorales

Tarea 3
Utilizando los métodos de reparto vistos, D'Hondt, Adams y Sainte-Laguë haz el reparto de concejales de la tarea anterior y compara el resultado con el que obtuviste en dicha tarea.

Hallados los tres resultados y tras observar que cada método proporciona un reparto diferente, es interesante que los alumnos expresen su opinión acerca de qué método de reparto es mejor y por qué, argumentando en qué criterios se basan para afirmarlo.

Tarea 4
Una vez obtenidos los repartos que proporcionan el método D'Hondt, Adams y Sainte-Laguë, ¿cuál de estos métodos consideras mejor? ¿Por qué? Haz una breve exposición sobre los criterios en los que te has basado para afirmarlo.

Para finalizar esta parte, se propone una tarea con el objetivo de poner de manifiesto la mayoría

Tarea 5
Propón un nuevo método de reparto proporcional y describe sus características.

Por último, se facilita al alumno una serie de contenidos relacionados con el tema, sobre los que puede desarrollar técnicas de búsqueda de información y valorar el uso de las matemáticas en la vida cotidiana. Esta lista pretende incentivar su curiosidad por las matemáticas electorales y fomentar la autonomía de aprendizaje (tabla 4).

Implementación de la sesión de enriquecimiento

La sesión de enriquecimiento anteriormente diseñada, fue puesta en práctica para los alumnos veteranos de ESTALMAT en Andalucía Oriental

Para saber más
Si eres curios@ y quieres saber más cosas sobre matemáticas electorales, puedes informarte sobre otros temas como: — Método de Hamilton. — Otros métodos de restos mayores: método de Droop y el método Imperialli. — Los métodos de Huntington. — Índices de poder. — Teorema de imposibilidad de Balinski y Young. — Métodos de elección social. — Índices de desproporcionalidad.

Tabla 4. Para saber más

que suelen estar cursando el primer curso o el segundo de Bachillerato.

Nada más comenzar la sesión surge una pregunta en las diapositivas cuyo fin es introducir a los alumnos en el tema que se va a trabajar a lo largo de la sesión. Se les cuestiona cómo repartir una cantidad de dinero entre los accionistas de una empresa, de acuerdo a las acciones que cada uno tenga.

Los alumnos comienzan a responder aportando diferentes ideas y llegan a la conclusión de que la mejor opción es repartir el dinero de forma proporcional, utilizando porcentajes y proporciones, puesto que es lo más «justo» para todos los accionistas. Tras esta breve lluvia de ideas, se les propone dar todos los beneficios al accionista mayoritario, pero rechazan esta alternativa de inmediato.

Seguidamente se lleva esta tarea al terreno electoral, mostrando las similitudes entre ambas preguntas. Se propone en esta ocasión la misma pegunta, pero en lugar de repartir beneficios, se van a repartir concejales. En esta ocasión, la tarea se reparte en una ficha, donde deben explicar de forma individual cómo realizarían el reparto en esta nueva situación, utilizando todos los conocimientos que tengan, realizando operaciones, o simplemente, de forma escrita, para después comentar sus decisiones de forma grupal.

Esta vez el reparto es más variado. Hay alumnos que consideran que el partido que ha conseguido el mayor número de votos es el que debe llevarse todos los escaños. Otros en cambio, realizan un reparto próximo (puesto que redondean, de una forma u otra) al que es proporcional al número de votos. Con esta tarea comienzan a salir términos como proporción, circunscripción, método de reparto, sentido de justicia… Además, hay un pequeño grupo de alumnos, preocupados por la estabilidad política que proponen otra forma de repartir los concejales. Algunos alumnos son más drásticos, y deciden no repartir todos los concejales.

Después de esta pequeña puesta en común, comienza el núcleo principal de la sesión. Se les proporciona unas fichas con algunas definiciones y conceptos básicos en este campo de las matemáticas. En ellas aparece la definición y partes que componen un sistema electoral, los dos tipos de sistemas electorales predominantes y algunos métodos de reparto proporcional como son: el método D'Hondt, el método Adams y el método Sainte-Laguë.

Aunque en la ficha aparece como son los tres métodos, se muestra en la pizarra cómo es el algoritmo hasta llegar a la solución, utilizando uno de ellos, por ejemplo, D'Hondt.

Tras observar cómo es el algoritmo, los estudiantes realizan varias preguntas sobre el método, por ejemplo, si es necesario ordenar los partidos según el número de votos que haya conseguido, lo cual no es necesario, pero facilita el último paso del algoritmo (señalar los cocientes mayores), o qué habría sucedido si en lugar de ser 14 concejales se hubiesen tenido que repartir 15, pues habría un dilema respecto a qué partido debería quedarse con ese último escaño (hay empate).

Aclaradas estas dudas, los alumnos comienzan a realizar la tarea 3. Durante la realización de la misma, surge una pregunta general, al repartir los escaños utilizando el método Adams. Con este método, los divisores son: $\{0, 1, 2, 3, 4,\ldots\}$. Al efectuar la primera columna de cocientes, el alumno debería dividir los votos de cada partido entre el primer divisor, es decir, entre 0. Este hecho choca bastante, puesto que «no se puede dividir por 0». En este caso, bastaría con dividir los votos entre un número lo suficientemente pequeño, por ejemplo: 10^{-20}. Una vez hecha esta aclaración, llegan rápidamente a la conclusión de que el método Adams siempre asigna como mínimo un escaño a cada partido.

Después de verificar que los tres métodos hacen un reparto distinto, se les plantea otra cuestión: ¿qué método es mejor? Llegados a este punto, cada uno tiene sus propias ideas y van más allá de lo tratado en la sesión, puesto que dada su curiosidad por el mundo que les rodea se han informado sobre temas políticos.

Algunos defienden que el método D'Hondt es el mejor ya que es «más proporcional y más justo», otros optan por Sainte-Laguë ya que la solución coincide con la que ellos habían hecho en un principio, y la mayoría está de acuerdo en que no es apropiado que el método Adams reparta un escaño a todos los partidos «gratis» aunque «tiene en cuenta a los partidos pequeños».

Transcurridos algunos minutos debatiendo qué método es mejor, y sin llegar a ninguna conclusión razonable, se les propone una última tarea, inventar un nuevo método en pequeños grupos de trabajo, que tenga todas las cualidades que ellos mismos han ido mencionando para que posteriormente, un representante del grupo, lo exponga al resto de compañeros.

En esta última parte de la sesión, los alumnos ponen de manifiesto y es visible su interés, y al mismo tiempo preocupación, por el tema del reparto de escaños. Puesto que el tiempo del que se dispone antes de que acabe la sesión es limitado, solo algunos alumnos llegan a exponer su propuesta. Algunas de ellas son bastante interesantes, y con un poco más de tiempo, podrían haber propuesto un buen método de reparto. Otros alumnos proponen métodos más sencillos, que ya han sido propuestos por matemáticos reconocidos, aunque ellos no tenían conocimiento de ello. Otro de los alumnos, proponía un método más radical, y aunque en un principio los compañeros no lo veían como un método adecuado, después de exponer sus razonamientos, algunos de los estudiantes cambiaron de opinión a su favor.

Uno de los grupos de trabajo no tuvo tiempo de exponer su propuesta. Sin embargo, al finalizar la sesión decidieron quedarse unos minutos más para explicarnos sus ideas, lo cual demuestra que la sesión fue motivadora para ellos y que poseen un entusiasmo inusual por las matemáticas.

Antes de dar por finalizada la sesión, aparece una diapositiva en pantalla con algunos temas de interés dentro de este campo de las matemáticas para que aquellos que sean curiosos puedan satisfacer esta curiosidad, en casa.

Algunas respuestas de los estudiantes

Tarea 2

Como ya se ha comentado, lo que se valoraba en esta tarea no era el resultado del reparto, sino que los alumnos tuviesen en cuenta que están repartiendo una cantidad que no es divisible. También es necesario tener en cuenta que aún no se había instruido al alumnado sobre ninguno de los contenidos que se trataron a lo largo de la sesión al realizar esta tarea.

Al observar las tareas de los integrantes del grupo, se puede afirmar que todos han tenido en cuenta este hecho, puesto que todos han dado un reparto entero de concejales. Sin embargo, no todos han considerado necesario explicar el porqué, sino que simplemente han redondeado la cifra que obtenían al realizar la regla de tres, al entero más próximo o a otro entero, atendiendo a sus propios criterios. En solo dos de las tareas de los estudiantes aparece de forma explícita que los resultados han de ser números enteros (figuras 1 y 3).

A pesar de hacer el reparto con proporciones, uno de ellos justifica que el reparto no le parece «justo», puesto que «un partido con el doble de votos que otro, no puede conseguir el triple de escaños».

El estudiante 3 especifica la necesidad de que el reparto sea entero, y también muestra cierta

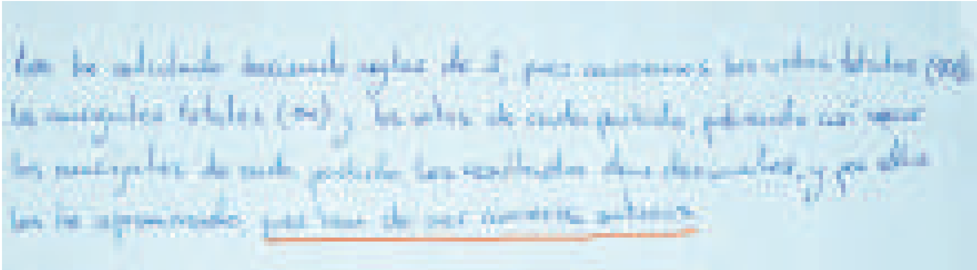


Figura 1. Respuesta de estudiante 1

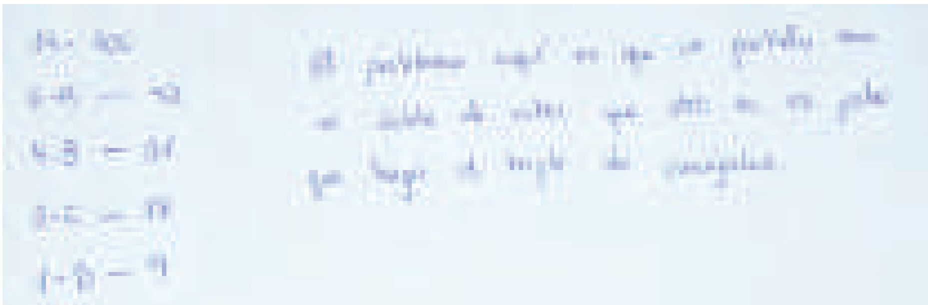


Figura 2. Respuesta de estudiante 2

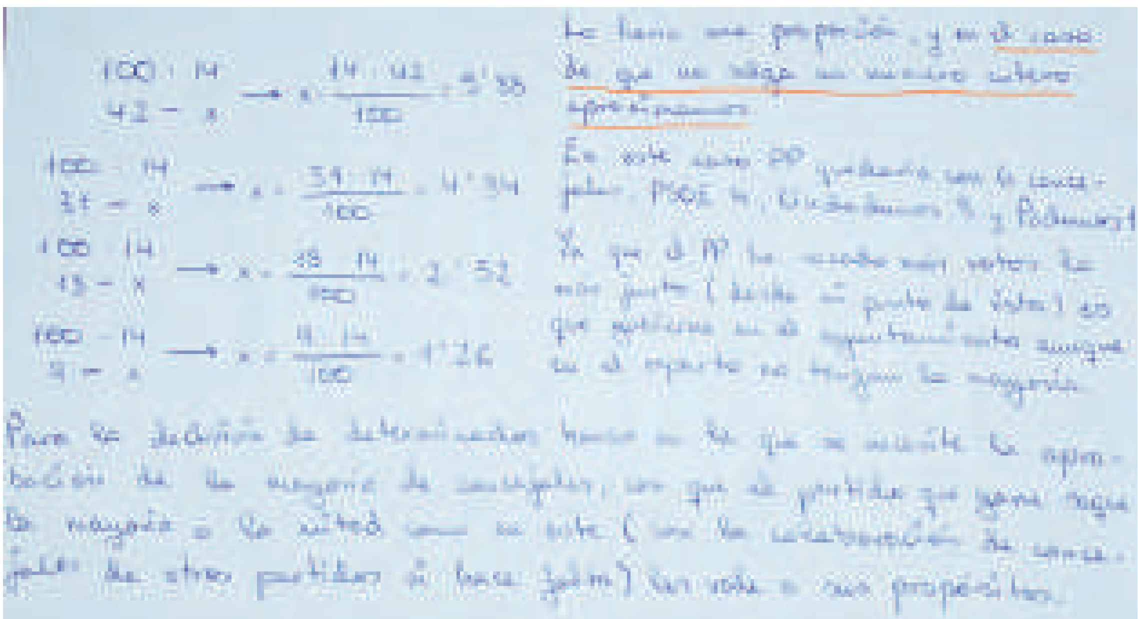


Figura 3. Respuesta de estudiante 3

preocupación en cuanto a «determinados temas, en los que se necesite mayoría absoluta». Del mismo modo, el estudiante 1 también realiza el reparto usando reglas de tres, y precisa que es necesario aproximar a números enteros.

Un alumno (figura 4) utiliza el método D'Hondt para hacer el reparto, a pesar de no haber sido explicado aún. Esto revela la curiosidad de este tipo de alumnos y autonomía para la búsqueda de información. Además, utiliza términos como «circunscripción» y da a entender que hay diferencias entre repartir escaños «en una sola circunscripción y en varias».

Otros alumnos, aparte de realizar el reparto, han propuesto coaliciones entre los partidos para solventar la toma de aquellas decisiones políticas en las que sea necesaria la mayoría.

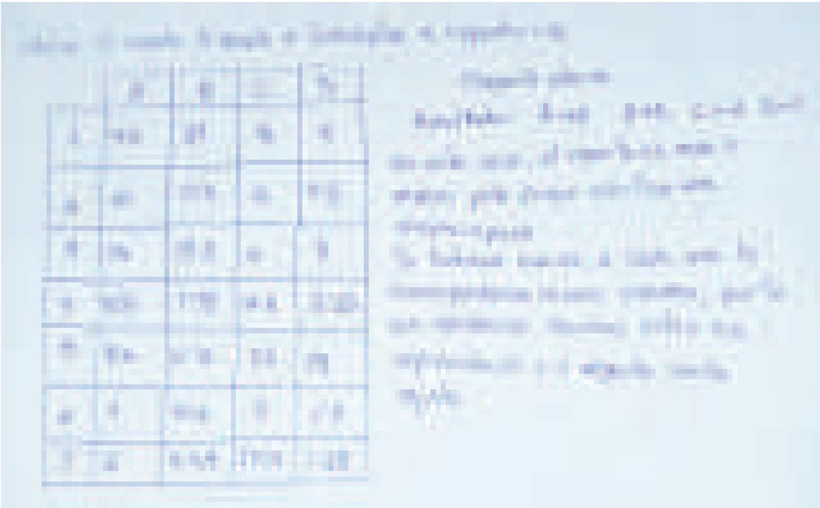


Figura 4. Respuesta de estudiante 4

Tarea 5

Para esta tarea, solo se hará referencia a las notas del alumno en la ficha, sobre su propuesta de método de reparto.

El siguiente grupo de estudiantes propone repartir la mitad de los votos al partido con mayor número de votos y repartir la otra mitad, de forma proporcional. Además, señala que el número de escaños a repartir ha de ser un número par y añade un ejemplo.

Son varios los alumnos que han propuesto este método, sin ser conscientes de que este método ya tiene nombre y apellidos. Es conocido como método de restos mayores. En concreto, este fue propuesto por Alexander Hamilton en el siglo XVIII.

Es el método que propondría cualquiera persona que se adentre un poco en el tema de las matemáticas electorales, por su simpleza y facilidad de cálculo.

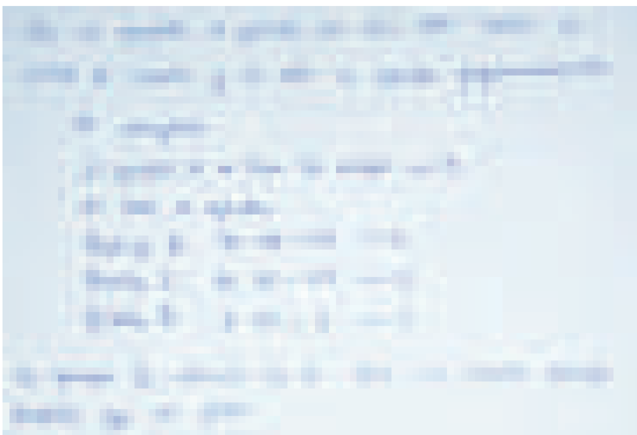


Figura 5. Propuesta de grupo 1

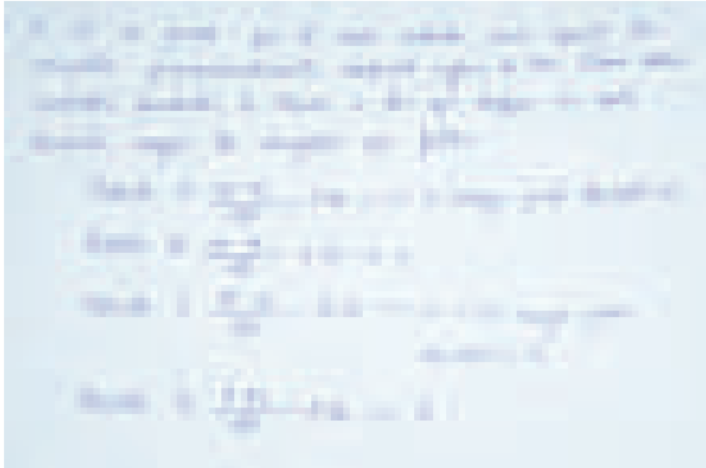


Figura 6. Propuesta del grupo 2

Referencias bibliográficas

López, A. (2014), «Proporcionalidad», Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, Granada.

Moreno, A., y A. M. Villegas (2017), *Matemáticas electorales. Claves para interpretar sondeos y elecciones*, Colección Miradas matemáticas, Los Libros de la Catarata, Madrid.

Villegas, A. (2017), *Enriquecimiento curricular para alumnos con talento matemático del proyecto Estalmat*, Trabajo Fin de Máster. Universidad de Granada, Granada.

Adela Villegas Barranco
IES Fuente Nueva, El Ejido (Almería)
<ade4_18@hotmail.es>

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada
<rramirez@ugr.es>

SUMA+
Recomendaciones a los autores

TÍTULO Deberá ser breve y evitar descripciones excesivas del contenido del artículo.

RESUMEN Presentará en no más de cinco líneas el contenido del artículo.

NIVELES No más de tres. Título aparte, tan solo apartado y subapartado.

INICIO No es conveniente iniciar el texto con un título de apartado. Conviene hacerlo con una introducción que no es necesario titular como «introducción», pues se sobreentiende.

TEXTO Procurar que la redacción sea directa y concisa. Evitar el uso innecesario y/o excesivo de oraciones subordinadas y paréntesis que puedan entorpecer tanto la lectura fluida como la comprensión del texto, sobre todo en una misma frase. Evitar redundancias, dequeísmos, el uso excesivo de las preposiciones «de» y «en» y la reiteración del pronombre relativo «que». Mientras sea posible, observar el mismo tiempo verbal a lo largo de todo el texto.

ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS Uso apropiado de los signos de puntuación. En frases largas conviene que el lector respire.

SENSIBILIDADES Evitar comentarios políticamente incorrectos acerca de la facilidad o dificultad de comprensión de ideas, conceptos y argumentos. Usar expresiones neutras de tipo genérico para referirse a grupos de ambos sexos como, por ejemplo, alumnado, estudiantes, escolares, profesorado, docentes, …

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Observar las pautas referidas en las *Normas de publicación* teniendo especial cuidado en que se trate exclusivamente de referencias citadas en el texto y de incluir en cada una de ellas el año, la editorial y la localidad de publicación.

ILUSTRACIONES Todas las imágenes, figuras, dibujos, fotografías y tablas deben ir acompañadas de un pie explicativo y estar referenciadas en el texto. Además, deberán tener la resolución señalada en las normas de publicación.

LECTURA Una lectura final y de un tirón del texto completo es de gran ayuda para mejorar su expresión y su puntuación.

suma+ 91
Secciones
Julio 2019
pp. 115-125

Matemáticas, calculadoras y emociones

Lluís Bonet Juan
María Teresa Navarro Moncho

Podemos tener alumnos que posean dificultades particulares, pero ninguno permanece frío frente a la belleza de algunas cuestiones, aun elementales, de matemáticas.

Emma Castelnuovo (1963)

Que nuestro alumnado pueda hacer frente a los nuevos desafíos de la sociedad de la información pasa por la adquisición de conocimientos científicos y técnicos, pero también, y se está haciendo recientemente mucho hincapié en ello, por la adquisición de todo aquello relacionado con las habilidades sociales y emocionales.

Es probable que muchas personas consideren que esto es una ardua tarea para el profesorado de matemáticas. Es bien conocido que parte de la sociedad descalifica al profesorado de matemáticas, detesta el aprendizaje de las matemáticas e incluso presume de su anumerismo, como nunca haría con otras carencias.

Ayudar a romper con este tipo de estereotipos pasa por ofrecer al alumnado propuestas de aprendizaje en las que se sienta motivado para que aprenda más y mejor. El uso didáctico de una herramienta como la calculadora, accesible a todos, puede ayudar a mejorar simultáneamente la competencia científica y la tecnológica, además de potenciarla.

Los medios tecnológicos disponibles en la actualidad posibilitan un cambio metodológico de la enseñanza de las matemáticas que también afecta a los contenidos. El uso de la tecnología en el aula exige la reflexión por parte de los docentes sobre qué enseñar, cómo hacerlo y con

Sí a las calculadoras

Artículo solicitado por *Suma* en marzo de 2019 y aceptado en mayo de 2019

qué medios. Se deberían hacer propuestas en un entorno de resolución de problemas en las que el alumnado, a través de la experimentación, investigación, modelización y validación de resultados, elabore los conceptos matemáticos.

Con la resolución de situaciones cotidianas, en las que se hace indispensable no solamente el uso de la calculadora sino el aprendizaje de esta y de su potencial, sin dejar de lado que nuestro alumnado siente generalmente verdadera pasión, se puede hacer una enseñanza de las matemáticas más creativa, dinámica y cercana, cerrando de esta manera un círculo donde sorprender y emocionar con nuestra materia.

El trabajo en un entorno de resolución de problemas y la accesibilidad a la calculadora como herramienta didáctica se debería iniciar desde los primeros cursos de la educación primaria. En nuestro proyecto de transición del colegio El Palmeral al instituto IES Mare Nostrum de Alicante realizamos experiencias en este sentido que resultaron muy positivas y enriquecedoras. Algunos alumnos y alumnas de secundaria, familiarizados en el trabajo en grupo y en el uso de la calculadora actuaron como monitores y coordinadores del alumnado de 6.º de primaria organizado en pequeños equipos que tenían que resolver y exponer los resultados obtenidos en situaciones como: ¡Qué lío con las pizzas!, accesible desde el canal de YouTube INTEGRANT MATEMÀTIQUES o con el enlace <https://youtu.be/0bUlgRB1hT4> o *¿Podrías ducharte con un cubo de agua?* <https://youtu.be/r8he3lAf_eQ>.

Figura 1. Presentación de los monitores y del problema

Figura 2. Alumnos de 6.º de Primaria con una monitora de 4.º ESO

Figura 3. Exposición por equipos de los resultados obtenidos

Las matemáticas y el fútbol

En ocasiones, con noticias o sucesos que pueden parecer irrelevantes, se pueden establecer conexiones que permitan dar un enfoque matemático con el que sorprender a nuestro alumnado. Es sabido que el fútbol mueve pasiones y conocida la habilidad de un jugador como Messi en el lanzamiento de faltas directas. Por ello decidimos estudiar lanzamientos de faltas con trayectorias rectilíneas y parabólicas y analizar si se puede ayudar a los jugadores de fútbol a marcar más goles de estas características.

1) Como se observa en la imagen (figura 5) del enunciado del problema, se tiene una situación que puede resolverse aplicando el teorema de Tales.

$$\frac{2,44}{1,80}=\frac{x+9,15}{9,15}\rightarrow 1,80\cdot(x+9,15)=2,44\cdot 9,15$$

$$1{,}80x + 16{,}47 = 22{,}33 \rightarrow 1{,}80x = 5{,}86$$

$$x = \frac{5{,}86}{1{,}80} = 3{,}26$$

Que utilizando la calculadora se convierte en las entradas siguientes:

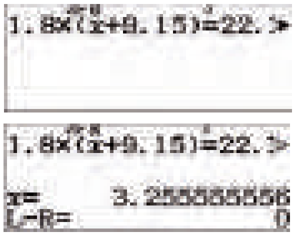


Figura 4

2) La expresión general de la función que describe el lanzamiento es: $f(x) = ax + b$

Se fija el balón en el origen de coordenadas $O = (0, 0)$ para ejecutar el lanzamiento

El balón debe pasar por encima de la barrera, lo cual determina el punto $A = (9{,}15; 1{,}80)$.

Con esta información se determina la función, que expresa la altura del balón en función de la distancia desde la posición inicial del lanzamiento:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = a \cdot 0 + b \\ 1{,}80 = a \cdot 9{,}15 + b \end{array}\right\} \rightarrow \quad \begin{array}{l} b = 0 \\ a = \dfrac{1{,}80}{9{,}15} \approx 0{,}1967 \end{array}$$

$$\rightarrow f(x) = 0{,}1967x$$

Un lanzamiento directo a gol

Queremos realizar un lanzamiento directo a gol, mediante un chut rectilíneo. Las condiciones que debes conocer son las siguientes:

— La barrera, situada a 9,15 m del balón, estimaremos que tiene una altura máxima de 1,80 m.
— La portería de fútbol tiene una altura de 2,44 m.
— Las dimensiones del área grande son 40,32 m × 16,50 m.

1. ¿Desde qué distancia se podrá marcar gol con este tipo de lanzamiento?
2. ¿Cuál será la trayectoria rectilínea del lanzamiento con el que se marca gol?
3. Realiza variaciones en la pendiente de la trayectoria rectilínea del lanzamiento y justifica por qué no se marcará gol.

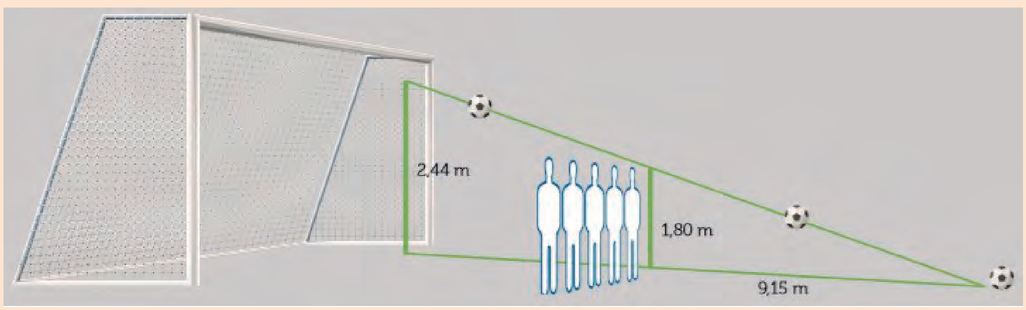


Figura 5. El chut rectilíneo

Para garantizar que el chut rectilíneo a la portería se convierta en gol se tiene que lanzar desde una distancia menor o igual que 12,41 m:

$$3{,}26 + 9{,}15 = 12{,}41\text{m}$$

El alumnado podrá identificar que se trata siempre de lanzamientos desde dentro del área, ya que 12,41 < 16,50 (altura del rectángulo que determina el área grande) y que por lo tanto serán lanzamientos libres indirectos, (según las normas del fútbol una falta dentro del área de otras características sería directamente un penalti).

Figura 6

En el menú Tabla (MENU 9)se introduce la función y se observan los diferentes valores:

Figura 7

El balón se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas (0, 0):

Figura 8

Se escribe sobre la tabla el valor 9,15 y se obtiene la altura del balón en esa posición. Se observa que pasa justo por encima de la barrera:

Figura 9

En la tabla se aprecia que más allá de los 12 m la altura del balón supera los 2,44 m, que es la altura de la portería:

Figura 10

3) El valor de la pendiente determina la inclinación de la recta.

Si se da un valor más pequeño a la pendiente, por ejemplo: $f(x) = 0{,}15\,x$ se observa que el balón chocará con la barrera al estar su altura por debajo de 1,80 m.

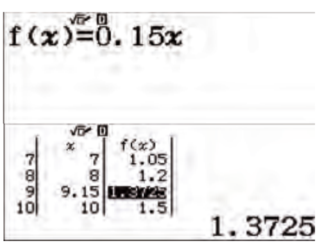


Figura 11

Por el contrario, si se le da un valor más grande a la pendiente, por ejemplo: $f(x)=0{,}30\,x$, se observa que el balón pasará por encima de la barrera, pero también se saldrá por encima del travesaño de la portería:

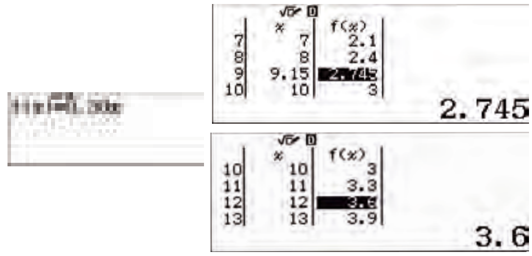


Figura 12

Se comparte cada una de las funciones con la aplicación CASIO EDU+ para visualizarlas todas a la vez, compararlas y debatir en grupo.

Para ello se ajustan las tablas con valores menores que 12,5 m, ya que los lanzamientos desde mayor distancia ya se ha estudiado que no acaban dentro de la portería:

Figura 13

Esta experiencia se llevó a cabo en un taller semanal de 14:00 h a 15:00 h que se realizaba de manera voluntaria con el alumnado de 2.º ESO y en la que fue muy interesante el nivel de participación del alumnado. Se puede ver el trabajo completo, junto con el estudio de los lanzamientos parabólicos desde 30 metros accediendo con el enlace <https://youtu.be/vR5X9npX9vw> que lleva directamente a nuestro canal INTEGRANT MATEMATIQUES. También se pueden encontrar esta y otras propuestas de aula sobre funciones y probabilidad en el nuevo volumen del libro *Actividades para el aula II con calculadora científica* editado por la FESPM en colaboración con CASIO España.

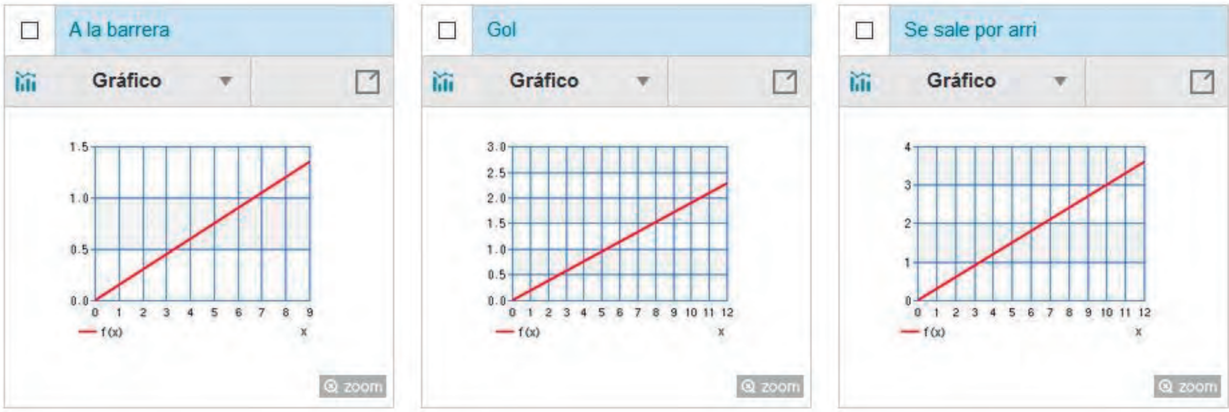


Figura 14

La actividad supuso la felicitación al alumnado por parte del FCB Escola Barcelona por la iniciativa y por buscar recursos para hacer llegar las matemáticas a todo el alumnado a través de propuestas contextualizadas.

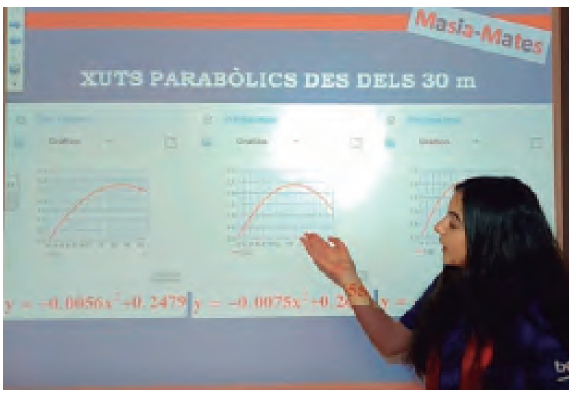


Figura 15

Las prohibiciones no contribuyen al progreso

Dar la posibilidad a nuestro alumnado de descubrir contextos que den sentido a los contenidos que están trabajando y que enriquezcan las matemáticas que están aprendiendo no resulta una tarea sencilla y nos encontramos a diario en nuestras aulas con preguntas como ¿y todo esto para qué me va a servir?, ¿esto se utiliza para algo? Pero también es cierto que cada vez disponemos de más herramientas, experiencias o materiales, como los citados anteriormente, que pueden facilitar nuestro trabajo en el aula.

Esta situación empeora en los estudios de bachillerato donde existe una total desconexión entre los institutos y la universidad y donde no se plantea un debate serio sobre el modelo de enseñanza, si los contenidos son adecuados, si es suficiente el número de horas, cómo se trabaja actualmente en los países vecinos, etc.

El modelo que se impone desde la universidad está anclado en el pasado, encorsetado y desde luego las prohibiciones en las pruebas de acceso a utilizar determinadas calculadoras científicas, gráficas o CAS no contribuyen a la mejora de la formación matemática. No se les puede atribuir a estas u otras herramientas la responsabilidad de la baja formación matemática con la que se asegura llega el alumnado a la universidad. Curiosa atribución, cuando solamente un bajísimo porcentaje de alumnado de bachillerato utiliza calculadoras gráficas o CAS u otras herramientas, ya que la prohibición de su uso en las pruebas de acceso de determinadas Comunidades Autónomas frena, en general, al profesorado a enseñar haciendo uso de estas herramientas para generar y profundizar en el conocimiento matemático.

En estos momentos en los que tanto se habla de nativos digitales son muchas las voces que afirman que nuestro alumnado está perfectamente cualificado para los cambios tecnológicos y que el profesorado tal vez, no tanto. No compartimos este tipo de afirmaciones que cambiaríamos por que el alumnado está, eso sí, más receptivo y dispuesto, les apasiona, ante una actitud más conservadora, en general, por parte del profesorado. Pero si la tecnología les apasiona y puede contribuir a mejorar nuestra práctica docente y además los currículos establecen su uso y aprendizaje, ¿cuál es el problema? Hagámoslo.

El alumnado es cierto que aprende a utilizar la calculadora de una manera rápida, pero carece, por lo general, del grado de madurez y de reflexión matemática que se requiere para que la herramienta desempeñe su objetivo. Es ahí donde se encuentra nuestro rol para que la calculadora se convierta en un potente recurso que genere y enriquezca el conocimiento matemático.

Pondré un ejemplo de una experiencia en mi aula de bachillerato con la realización de un simple ejercicio de cálculo de un límite:

Calcula el límite justificando todos los pasos:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-7x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-7x-4}=\frac{4^2-4-12}{4^3-2\cdot 4^2-7\cdot 4-4}=$$

$$=\frac{0}{0}\ \text{indeterminación}$$

El alumnado busca las raíces de los polinomios resolviendo las correspondientes ecuaciones polinómicas. Para el numerador se tiene:

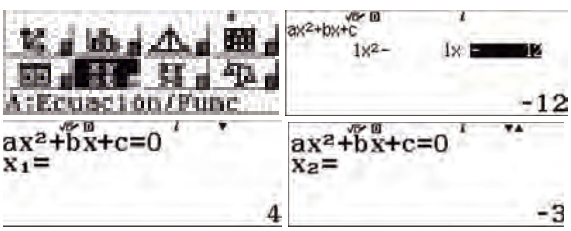


Figura 16

Para el denominador:

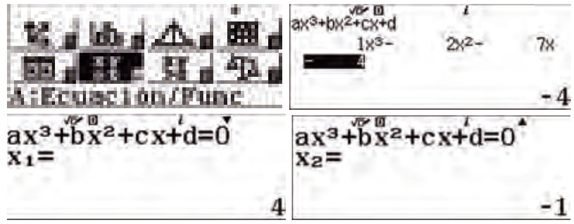


Figura 17

A partir de aquí algunos alumnos responden como sigue:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-7x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)}{(x+1)}=\frac{4+3}{4+1}$$

Es entonces cuando aparece el debate en el aula y se empiezan a elaborar los conceptos con intervenciones diversas:

—Pero... ¿No falta una raíz en el denominador?

—No, porque es compleja y no se pone.

—No puede ser compleja... solo falta una.

Hasta que alguno o alguna interviene y dice:

—Una de las raíces es doble.

a lo cual otro responde:

—Y..., ¿cuál de las dos es la doble?

Analizando el producto entre los términos independientes de los factores se debe obtener el término independiente del polinomio por lo que la factorización debería quedar:

$$(x-4)(x+1)(x-¿\square?)\rightarrow(x-4)(x+1)^2=$$

$$=x^3-2x^2-7x-4$$

Por tanto, se tiene:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^3-2x^2-7x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+3)}{(x-4)(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+3)}{(x+1)^2}=\frac{4+3}{(4+1)^2}=\frac{7}{25}$$

Sugiero entonces al alumnado revisar las tablas de valores de las correspondientes funciones polinómicas del numerador y denominador para investigar qué está ocurriendo para valores cercanos a las raíces a su izquierda y a su derecha.

Esto aporta reflexiones muy interesantes sobre el teorema de Ruffini, el teorema del resto, la elección de los rangos de las tablas de valores o el teorema de Bolzano.

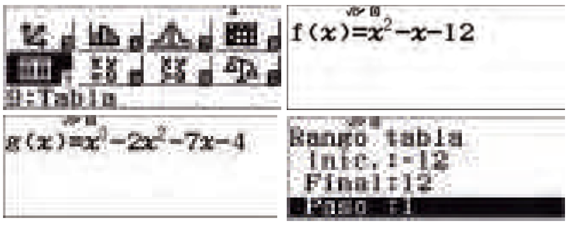


Figura 18

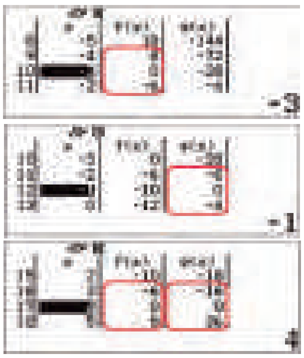


Figura 19

La actividad se extiende analizando gráficamente diferentes funciones polinómicas de grado tres, consiguiendo de nuevo desarrollar en el alumnado habilidades que implican mejores resultados a nivel cognitivo.

De esta manera, proporcionando al alumnado la formación necesaria para la gestión de la calculadora, con unos objetivos bien definidos, se consigue avanzar hacia un modelo en el que se puede trabajar con datos reales, investigar, crear simulaciones, etc., en contraposición a las opiniones que se escuchan por parte de los detractores de su uso en el aula.

Pagar en un aparcamiento

Supongo que encontrarse con una imagen como la que sigue no es una cosa habitual y posiblemente la gran mayoría desconozca cuál puede ser su significado, a pesar de que, les puedo asegurar que esas cifras o unas parecidas las han tenido muy cerca en muchas ocasiones, solo que no les han prestado la suficiente atención.

Figura 20

Si las presento en su contexto completo lo tendrán más claro, pero supongo que se plantearán y exclamarán: ¡qué tarifas tan extrañas!, y lo son, fíjense la próxima vez que vayan a un aparcamiento.

Figura 21

Pero más extraño es aún que las máquinas de cobro incorporen un mensaje donde se indica que no se aceptan monedas ni de 1 céntimo de euro ni de 2 céntimos de euro y, por lo tanto, tampoco devuelven este tipo de cambio.

Figura 22

Con las tarifas anteriores parece complicado saber cómo nos están cobrando por el aparcamiento. Cuando preguntamos al alumnado, unos contestan que la máquina hará una aproximación por exceso, pero esto iría en contra de los intereses de los usuarios y la empresa podría tener problemas legales. Otros dicen entonces que la máquina hace una aproximación por defecto, aunque esto no garantiza que la tarifa no requiera de estos céntimos.

Decidí estudiar cómo trabaja internamente la máquina y contrastar los resultados con diferentes recibos de los aparcamientos a los que acudían las familias de mis alumnos. Centramos el estudio en el aparcamiento del Mercado de Alicante diseñando la actividad:

1) Se determina la función que devuelve el precio a pagar $f(t)$ en función del tiempo t (en minutos) que se está aparcado:

$$f(t) = 0{,}021175t, \quad t \geq 0$$

Se trabaja el concepto de dominio de esta función, en un contexto que condiciona la variable independiente t (tiempo) y que se ciñe a un día.

Posteriormente se realizan, observando el recibo, los cálculos necesarios para obtener la tarifa (figura 25).

Se observa en el recibo de pago que el usuario había abonado 2,80 €.

2) Se analiza si esta función se comporta de la misma forma a lo largo de las 24 horas ante el

La tarifa del parquin

David acude como cada sábado, al mercado central de Alicante. Hoy no ha encontrado aparcamiento en las calles que circundan el mercado por lo que ha decidido aparcar en el parquin La Lonja.

No ha dejado de sorprenderle la tarifa que tiene este parquin, por la cantidad de decimales en el precio por minuto, ni tampoco le ha dejado indiferente, el hecho de que haya una tarifa máxima por día.

Pero le ha dejado completamente aturdido que la máquina indique que no acepta las monedas de 1 céntimo de euro ni de 2 céntimos de euro y que, por tanto, tampoco devuelve estas monedas.

1)Determina la función que expresa la cantidad a pagar según el tiempo que se está aparcado a lo largo de un día.
2)¿Qué te sugiere ese dato que indica que el máximo que pagamos por día son 20,33 €?
3) ¿Cómo realiza la máquina los cálculos internamente para informarnos cuánto debemos pagar sin tener ningún conflicto como clientes?
4)¿Cuánto se paga por 60 minutos de parquin?
5)¿Es correcto lo que nos han cobrado según el recibo de la imagen?

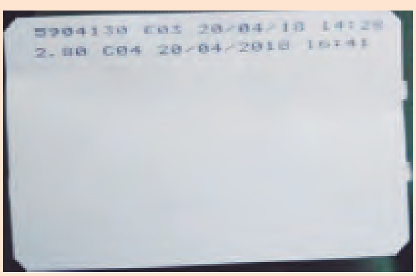


Figura 23

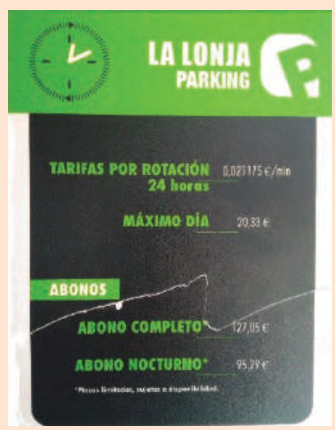


Figura 24

Figura 25

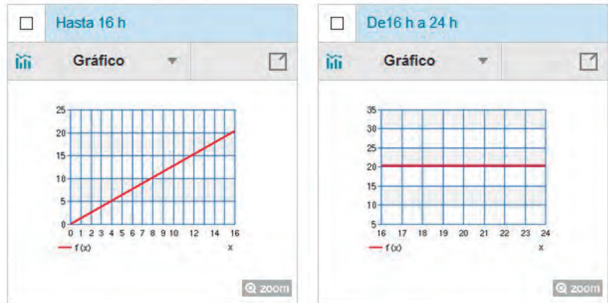


Figura 26

dato que proporciona el cartel de *MÁXIMO DÍA: 20,33 €* (figura 24).

Para ello se resuelve la ecuación:

$$f(t) = 20,33$$

$$0,021175 \cdot t = 20,33 \rightarrow t = \frac{20,33}{0,021175} =$$

$$= 960,09 \, \text{min} = 16 \, \text{horas}$$

A partir de 16 horas de aparcamiento se abona la tarifa de un día, 20,33 €. La función que define la tarifa durante 24 horas es una función a trozos:

$$f(t) = \begin{cases} 0,021175t, & 0 \le t < 960 \\ 20,33, & 960 \le t \le 1440 \end{cases}$$

siendo t el tiempo expresado en minutos.

Expresando el tiempo en horas, se tendría:

$$f(t) = \begin{cases} 1,2705t, & 0 \le t < 16 \\ 20,33, & 16 \le t \le 24 \end{cases}$$

Se representan los dos trozos de la función creando una clase con la aplicación CASIO EDU⁺ (figura 26).

3) Se estudian ahora qué operaciones realiza la máquina para indicarnos el precio que se debe pagar, si no admite ni devuelve monedas de 1 céntimo de euro ni de 2.

La tarifa siempre viene dada en céntimos múltiplos de cinco ya que es la moneda de valor mínimo aceptada por la máquina. Se obtienen estos resultados haciendo uso de la división entera entre 5, por ejemplo, siguiendo una secuencia como la siguiente:

— Se multiplica el resultado por 100.
— Se realiza la división entera entre 5.
— Se multiplica ahora por 5 y se divide entre 100 (multiplicar por 0,05).

Se comprueba con el dato anterior del aparcamiento de 133 min:

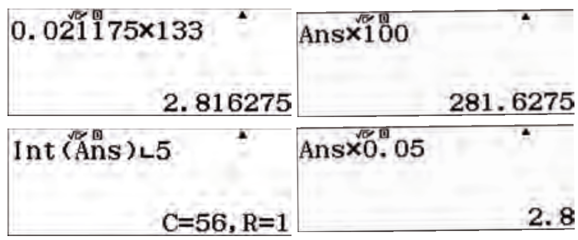


Figura 27

4) La calculadora dispone de una hoja de cálculo con la que se pueden generalizar estos cálculos para diversos tiempos, bien sea en minutos o en horas.

Para ello se va al **Menú 8: Hoja de cálculo** y en la columna A se introducen diferentes valores para el tiempo (minutos en este caso)

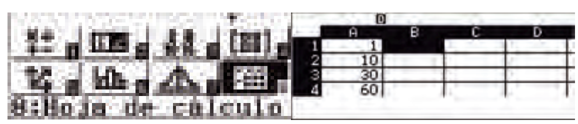


Figura 28

Se define la columna B para que devuelva la tarifa que calcula la función $f(t)=0,021175\,t$ desde la tecla **OPTN** seleccionando la opción 1: **Rellenar fórmula**.

Figura 29

Se define la columna C para que nos devuelva el importe ajustado que calcula la máquina y que se puede simplificar con la fórmula siguiente:

Int (B1:0,05) x 0,05.

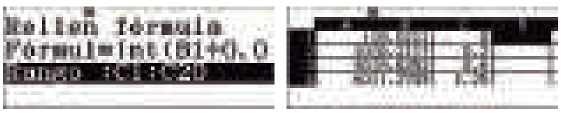


Figura 30

En la tabla se obtiene la tarifa para diferentes tiempos, donde se observa que por una hora de aparcamiento se deberá pagar 1,25 €.

Monedas equilibradas y monedas trucadas

La posibilidad que tiene el alumnado de disponer de una calculadora en el aula facilita su uso como herramienta con la que poder llevar a cabo simulaciones cuando se realizan actividades de probabilidad.

En el aula de 4.º ESO cada alumno simula 20 lanzamientos aleatorios de una moneda equilibrada para analizar cómo podría ser el proceso de simulación de otros veinte lanzamientos, pero esta vez con una moneda trucada.

Agrupar los resultados obtenidos por el alumnado posibilita el análisis en grupo de la ley de los grandes números que establece, básicamente, que la frecuencia relativa de los resultados de un determinado experimento aleatorio, tienden a estabilizarse en un número, que es justamente la probabilidad, cuando dicho experimento aleatorio se realiza muchas veces.

Para esta actividad el alumnado hace uso de la hoja de cálculo: Menú 8: Hoja de cálculo.

— En la columna *A* se introduce el número de lanzamiento de la moneda. Se procede de la forma siguiente:
En la celda *A1* se introduce un 1 de primer lanzamiento.
En la celda *A2* teclear (OPTN 1) y la fórmula =A1+1 para no tener que realizar la introducción de datos celda a celda, y se ajusta el rango.

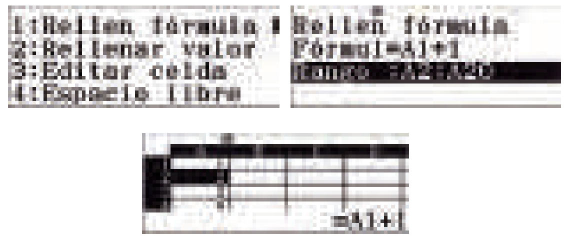


Figura 31

— En la columna *B* se simula el lanzamiento con la instrucción RanInt#(0,1) que devuelve de manera aleatoria 0 (cara) o 1 (cruz). Se procede de manera similar para escribir la instrucción directamente en las veinte celdas:

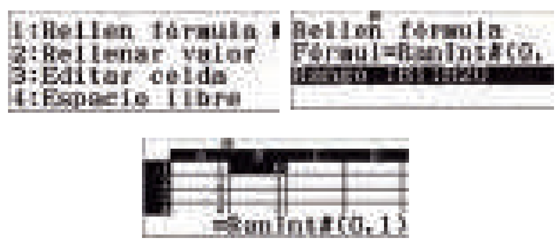


Figura 32

— En la columna *C* se cuentan el número de 1(cruces) que se han obtenido tras los veinte lanzamientos con la instrucción: =Sum(B1:B20) en la celda *C1* (figura 33).

Cada alumno puede incluso realizar nuevos lanzamientos haciendo uso de la opción 4:Recalcular, disponible en las opciones (figura 34).

Para simular lanzamientos de una moneda trucada, se procedió de la forma siguiente:

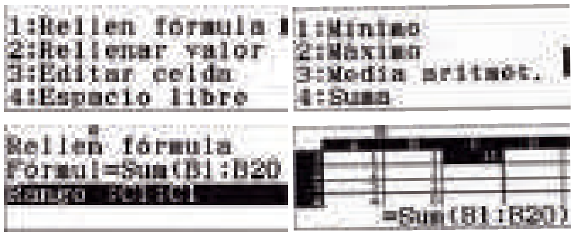


Figura 33

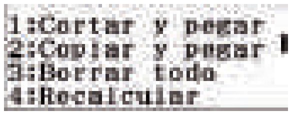


Figura 34

Ran# devuelve un número aleatorio entre 0 y 1.

— Si $0 < \text{Ran\#} < 0{,}6 \rightarrow 0 < \text{Ran\#} + 0{,}4 < 1 \rightarrow$ $\text{Int}(\text{Ran\#} + 0{,}4) = 0 \rightarrow$ Cara.

— Si $0{,}6 < \text{Ran\#} < 1 \rightarrow 0 < \text{Ran\#} + 0{,}4 < 2 \rightarrow$ $\text{Int}(\text{Ran\#} + 0{,}4) = 1 \rightarrow$ Cruz.

De esta manera estamos trucando la moneda, se asigna al suceso *salir cara* un valor del 60 % y al suceso *salir cruz* un valor del 40 %.

En la columna *B* se simula el lanzamiento de la moneda trucada utilizando la instrucción: Int(Ran#+0,4) y en la celda *C1* se cuentan el número de 1 (cruces) que han salido tras los veinte lanzamientos con la instrucción: =Sum(B1:B20):

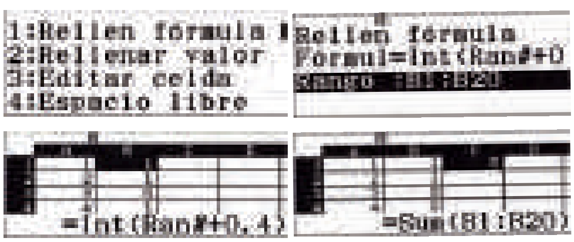


Figura 35

De nuevo cada alumno puede repetir sus *20* lanzamientos con la opción *4*: Recalcular como se ha visto anteriormente.

En el libro *Actividades para el aula II con calculadora científica* se puede consultar una ampliación de esta propuesta, así como otras actividades de probabilidad.

Conclusiones

Como docentes tenemos un compromiso con nuestro alumnado y a la vez con la sociedad por lo que nuestro modelo de enseñanza de las matemáticas debería ir encaminado hacia un aprovechamiento de las posibilidades que nos brindan las calculadoras con las que, a través de la resolución de situaciones de la vida cotidiana, capacitar al alumnado para comprenderlas y aprender a abordarlas.

Las calculadoras facilitan los cálculos y posibilitan más tiempo para la reflexión, validación de resultados, rectificación, representación, etc., potenciando de esta manera la observación, la valoración, la crítica o el juicio. Además, pueden proporcionar a la vez un entorno de trabajo en equipo donde realizar investigaciones o simulaciones con las que comprender el funcionamiento de las más diversas situaciones, profundizando en el aprendizaje matemático y tecnológico.

Así pues, no pongamos límites ni barreras en la enseñanza, en el aprendizaje y en el uso y gestión de las calculadoras para poder ofrecer mejores propuestas al alumnado en pro de un aprendizaje de las matemáticas más significativo, más dinámico, más creativo y acorde con los tiempos que corren.

Referencias bibliográficas

AA.VV. (2017), *Actividades para el aula con calculadora científica*, Casio-FESPM, Barcelona.

AA.VV. (2019), *Actividades para el aula II con calculadora científica*, Casio-FESPM, Barcelona.

Lluís Bonet Juan
IES Mare Nostrum, Alicante; UNED
<lluis@iesmarenostrum.com>

María Teresa Navarro Moncho
CEFIRE-Específico Ámbito Científico, Tecnológico y Matemático, Valencia
<Teresa.Navarro-Moncho@uv.es>

ACTIVIDADES PARA EL AULA II

- CON CALCULADORA CIENTÍFICA -

CASIO
División Educativa

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

FESPM & Cía

fpm

Secretaría de Relaciones Internacionales

Claudia Lázaro del Pozo

Tal y como se recoge en el proyecto presentado en la convocatoria de 2017, el objetivo principal de esta Secretaría de Relaciones Internacionales es promover actuaciones de carácter internacional, así como el intercambio de experiencias e informaciones con otros organismos internacionales que permitan mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Para cumplir este objetivo, uno de los esfuerzos principales en la labor realizada se centra en la participación dentro del programa Erasmus+, solicitando proyectos en los que tenga cabida la FESPM. Una de las propuestas presentadas a este programa fue aprobada en la convocatoria de 2017. Se trata del proyecto «MObile MAth TRails in Europe» (MoMaTrE), que se encuadra en la acción clave KA2 Asociaciones estratégicas. Esta iniciativa conjuga rutas matemáticas con la utilización de tecnologías, como teléfonos móviles, con un doble fin. Por un lado, pretende proporcionar recursos a los profesores para que elaboren paseos matemáticos que puedan ser trabajados con sus alumnos. Por otro lado, el proyecto también persigue proporcionar materiales didácticos, sobre paseos matemáticos, que puedan ser de utilidad, tanto en la formación inicial como continua del profesorado de matemáticas.

El proyecto comenzó a funcionar en el curso 2017-18 y se extenderá hasta el 2019-20. Está coordinado por la Universidad Goethe de Frankfurt y como socios, además de la FESPM, participan universidades de Lyon y de Eslovaquia, un centro de Educación Superior de Oporto, un centro de investigación de Lisboa y una empresa de Berlín especializada en el desarrollo de aplicaciones para móviles. En la web <http://momatre.eu> se recoge información más detallada sobre el proyecto y sobre las instituciones que componen el consorcio.

Figura 1. MathCityMap

MathCityMap (MCM) es la herramienta principal del proyecto MoMaTrE, a través de la cual se crean y se realizan tareas y rutas matemáticas. Uno de los compromisos de la Federación es el de la difusión de MCM en sus dos vertientes, un portal web <http://mathcitymap.eu/es/> y una aplicación para teléfonos móviles, de manera que se creen rutas matemáticas por la geografía española utilizando estos recursos. Para promover esa difusión la FESPM organizó unas jornadas el 26 de enero en Alcalá de Henares (figura 2) <http://fespm.es/Jornada-sobre-rutas-matematicas>, en las que participaron representantes de las diferentes sociedades, algunos de ellos vinculados al seminario de *Paseos matemáticos* que la FESPM ha organizado en cursos anteriores. Desde las jornadas en Alcalá hasta julio , el número de rutas publicadas en MCM en España ha crecido de 8 a 68 y la tendencia es a seguir aumentando. La comunidad MathCityMap crece constantemente y cada persona interesada puede unirse a ella. Actualmente el sistema existe en once idiomas diferentes, se han llevado ya a cabo cursos de formación para profesores en diferentes países y siguen previstas actividades formativas para curso 2019-20. En julio de 2019 el portal contiene más de 3 000 usuarios registrados y cerca de 1 400 rutas, compuestas por unas 9 000 tareas matemáticas, que han sido creadas en más de 20 países diferentes. Las personas interesadas pueden unirse a esta comunidad de las rutas matemáticas de diferentes maneras. La base para el uso del sistema es la inscripción en el portal web <www.mathcitymap.eu> y la descarga de la aplicación MathCityMap en el teléfono móvil. El sistema es completamente gratuito y sin publicidad.

Figura 2. Jornada de divulgación en Alcalá, enero 2019

Desde el inicio del proyecto MoMaTrE se han celebrado cinco encuentros internacionales. Dos de ellos han consistido en reuniones con representantes de todas las instituciones del consorcio. El primero tuvo lugar en octubre de 2017, en Lyon (figura 3) y sirvió, fundamentalmente, para revisar la propuesta presentada y definir el trabajo a realizar durante el primer año. A raíz de este encuentro desde la secretaría general de la FESPM se abrió una convocatoria para que representantes del seminario de *Paseos Matemáticos* y de la ejecutiva de la FESPM colaborasen con esta secretaría en el desarrollo de este proyecto europeo. Un año después, en octubre de 2018, tuvo lugar la segunda reunión de representantes de todos los socios, en Santander (figura 4), para analizar el trabajo realizado durante el primer año y definir cómo repartir el trabajo y las tareas entre los socios durante el segundo año. Anteriormente, solicitamos desde la FESPM una sesión presencial con los coordinadores de Frankfurt porque teníamos bastantes dudas acerca del uso de MathCityMap y, sin aclararlas, veíamos dificultades en avanzar con su difusión. Así, en junio de 2018 mantuvimos unas jornadas de trabajo en Alcalá de Henares (figura 5).

Figura 3. Primer encuentro MoMaTrE en Lyon, octubre 2017

Del 18 al 30 de marzo de 2019 se celebró un curso intensivo sobre MoMaTrE en la Universidad Goethe de Frankfurt, destinado a alumnos de esta universidad y de las otras universidades que participan en el proyecto, todos ellos potenciales futuros profesores de matemáticas, quienes no solo han sido formados en el manejo de MCM para aprender a diseñar nuevas rutas, sino también en su marco teórico y pedagógico subyacente. El siguiente encuentro internacional tuvo lugar del 13 al 15 de junio de 2019, en Nitra (Eslovaquia)(figura 6) y se centró en analizar qué resultados del proyecto todavía no se habían conseguido y cómo planificar las tareas necesarias para dar respuesta a los logros planteados inicialmente. En este sentido, uno de los resultados de MoMaTrE en los que la Federación española tiene más responsabilidad es la creación de una «community website» para que se aproveche al máximo el trabajo realizado en las tareas y rutas matemáticas de los usuarios de MCM. Además, la Federación también tiene una alta implicación en la elaboración de tareas genéricas, es decir, tareas relacionadas con conceptos matemáticos que se pueden asociar a objetos físicos fácilmente localizables en cualquier paseo, para facilitar, así, la creación de rutas matemáticas.

Si bien el proyecto MoMaTrE ha abarcado una gran parte del trabajo desarrollado desde esta secretaría, hay que mencionar también otras iniciativas, a veces menos tangibles, que también han requerido dedicación y esfuerzo.

Acaba de ser aprobado un nuevo proyecto Erasmus+. Se titula MaSCE, acrónimo de «Math Trails in School, Curriculum and Educational Environments of Europe», también coordinado por la Universidad Goethe de Frankfurt, que pretende incidir en trabajar curricularmente los paseos matemáticos. El proyecto comienza en septiembre de 2019 y tendrá una duración de tres cursos escolares, hasta agosto de 2022.

Figura 4. En Santander, octubre 2018

En breve se publicará la resolución de otro proyecto Erasmus+, coordinado por la Universidad de Algarve, que tiene como objetivo principal crear una red europea de docentes que utilicen las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas, en concreto, usando una plataforma específica, MILAGE LEARN+, fruto también de otra propuesta europea. Coordinado asimismo por esta universidad portuguesa se presentó a finales de 2018 otro proyecto, dentro del programa

Horizonte 2020, a través de la iniciativa COST, siglas de Cooperación Europea en Ciencia y Tecnología. La propuesta presentada, que no fue aprobada, pretendía crear y difundir un repositorio de enfoques pedagógicos adecuados, así como de buenas prácticas para integrar el uso de las tecnologías de la información en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Figura 5. Reunión en Alcalá de Henares, junio 2018

Uno de los retos de esta secretaría de relaciones internacionales es que se apruebe algún proyecto en el que la FESPM sea la institución coordinadora. Se han hecho ya algunos intentos, sin resultados efectivos hasta el momento, a través de una propuesta llamada «Inclusive MAthematical LIteracy: collaborative teacher development through a MOOC» (IMALI), con la colaboración de universidades y sociedades de profesores de Italia, Francia y Portugal. Aunque no está actualizada, se creó hace dos años la web <http://mathliteracy.eu>, en la que se recogían las intenciones del proyecto IMALI, que ponía su foco en la formación de profesores para fomentar y desarrollar la competencia matemática de los alumnos. A pesar de no haber conseguido financiación, se mantiene contacto con representantes de la mayoría de las instituciones y la intención es planificar una buena estrategia que culmine con éxito en la convocatoria de 2020. No cabe duda que sería de gran interés conseguir ayuda económica para una iniciativa que permita estrechar relaciones con otras sociedades de profesores europeas, ya que compartimos objetivos y problemáticas comunes que pueden verse enriquecidos con las perspectivas de cada país y con un trabajo en equipo.

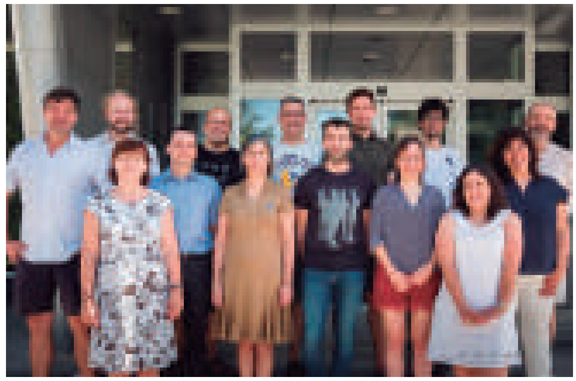


Figura 6. En Nitra, junio 2019

Otra idea, aparcada de momento por falta de tiempo para dedicarle la atención necesaria, es la de hacer partícipe a la Federación en un proyecto de la iniciativa Unión para el Mediterraneo (UpM) <https://ufmsecretariat.org/>. En realidad no se trata de una idea propia, sino que a finales del curso pasado, a raíz de una entrevista en la Cadena Ser en la que se habló sobre el proyecto MoMaTrE, responsables de UpM se pusieron en contacto, a través de correo electrónico, manifestando interés en extender rutas matemáticas, a través de un proyecto específico, en países de las riberas norte, sur y este del Mediterráneo, con la implicación de instituciones de educación superior de dichos países y la participación de jóvenes universitarios, con el fin de promover la educación, la movilidad de estudiantes, el turismo y el intercambio intercultural, siendo estas prioridades clave para el reforzamiento de la cooperación y la integración en la región, misión principal de la Unión por el Mediterráneo. La convocatoria para este tipo de proyectos, que no reciben financiación económica explícita, pero sí financian actividades, permanece siempre abierta.

En cuanto a la vertiente internacional iberoamericana, es fundamental la labor que desempeña el secretario general de la FESPM, quien es, también, secretario general de la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) <http://www.fisem.org/> y el trabajo de esta secretaría han sido meramente de apoyo, cuando este ha sido requerido. La actividad principal, en este aspecto, se está llevando a cabo mediante la participación en los comités científicos de los Congresos Iberoamericanos de Educación Matemática (CIBEM), tanto del VIII CIBEM, que tuvo lugar en julio de 2017 en Madrid, como del IX CIBEM que tendrá lugar en el año 2021 en Sao Paulo, Brasil.

Como también se recogía en el proyecto presentado por esta secretaría, la organización de actividades de carácter internacional relacionadas con la educación matemática depende, en gran medida, de la obtención de fondos que permitan cofinanciar dichas actividades. En consecuencia, a lo largo de la trayectoria como secretaria de relaciones internacionales, además de las instituciones ya mencionadas en apartados anteriores de esta crónica, la FESPM ha ido estableciendo contactos fructíferos, de ámbito internacional, con las siguientes organizaciones:

- La International Commission on Mathematical Instruction (ICMI), a través de la subcomisión española correspondiente. Es decir, a través del Comité Español de Matemáticas (CEMAT).
- La Organización de Estados Iberoamericanos (OEI), organismo internacional intergubernamental especializado en educación, ciencia y cultura, dando continuidad a las relaciones ya existentes.
- Casio Calculadoras. A través de la División Educativa de Casio España esta secretaría ha participado en dos encuentros internacionales sobre calculadoras; el primero en Hamburgo, en julio de 2016 y el segundo en Milán, en octubre de 2018. Estos eventos han resultado especialmente provechosos para establecer contactos con profesores que fomentan el uso de la calculadora en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en otros países, así como para obtener información de pruebas externas de matemáticas realizadas con calculadoras gráficas en Europa. Otro encuentro internacional financiado por Casio tendrá lugar en Tokio, a finales de agosto de 2019.
- La Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, que ha participado en el proyecto TALIS vídeo, de la OCDE, en el que ha colaborado la FESPM.
- Distintos organismos públicos con proyectos de carácter internacional relacionados con la enseñanza de las matemáticas, tales como la Universidad Internacional de Andalucía (UNIA) y la Universidad de Cantabria (UC), a través de proyectos gestionados por el profesor Tomás Recio, etc.).

Asimismo, esta secretaría está abierta a que se promuevan relaciones desde la FESPM con cualquier institución que contribuya a la consecución del objetivo principal recogido al inicio de esta crónica.

Para finalizar, merecen destacarse los siguientes aspectos, que sin ser exclusivos de esta secretaría sí que son tremendamente relevantes en el desempeño de sus funciones:

- Una estrecha coordinación, fundamentalmente, con la secretaría general y con la presidencia de la Federación, colaborando con ellos en las tareas que sean convenientes, para contribuir al logro de los fines de la FESPM.
- El trabajo en equipo con todos los miembros de la Comisión Ejecutiva, contando con su colaboración en las actividades que se organicen desde la secretaría.
- La colaboración con toda la Junta de Gobierno, estableciéndose una cooperación bilateral con las Sociedades Federadas en las actividades que lo requieran.

Claudia Lázaro del Pozo
IES Santa Clara, Santander
Universidad de Cantabria
<lazaroclaudia@gmail.com>

Seminario sobre la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU) en las asignaturas de matemáticas

Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas

El Seminario sobre la Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU) en las asignaturas de matemáticas, organizado por la Comisión de Educación del Comité Español de Matemáticas (CEMat) y subvencionado por el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM), se ha celebrado en Castro Urdiales (Cantabria), durante los días 8 al 10 de marzo de 2019.

Al seminario han asistido representantes de las sociedades que componen el CEMat, representantes del Ministerio de Educación y Formación Profesional, y profesores de matemáticas, todos ellos con experiencia en las pruebas de acceso a la universidad, al objeto de analizar el estado actual de las mismas en un momento en que desde distintos ámbitos académicos y administrativos se cuestiona su papel y su formato, y se lanzan propuestas de reforma.

En los años en que las pruebas de acceso llevan funcionando se han sucedido cambios importantes en la sociedad española y en el sistema educativo que aconsejan, como en cualquier otro ámbito de la vida, preguntarse si el modelo actual está cumpliendo con las expectativas para las que fue diseñado, o si, por el contrario, ha llegado el momento de modificarlo, y, si es así, en qué dirección habría que hacerlo. El esfuerzo es necesario como referencia obligada para guiar el futuro de las pruebas, porque provee de fundamentos y señala el camino para mejorarlas.

Conclusiones del seminario

Con el fin de aportar información basada en la experiencia y el conocimiento sobre las pruebas de acceso los asistentes al seminario han debatido, analizado y valorado sus fortalezas, disfunciones, resistencias y debilidades, compartiendo ideas y sugerencias de mejora. De todo ello se da cuenta en este documento de conclusiones.

Se considera que la prueba es necesaria, pero se cuestiona el modelo por diversas razones, entre ellas, el círculo vicioso, la confusión de objetivos, la descoordinación entre autonomías y las incertidumbres, subjetividades, inercias y resistencias al cambio.

En cuanto al círculo vicioso, las pruebas condicionan el modelo de enseñanza en el 2.º curso de Bachillerato y, a su vez, el modelo de enseñanza condiciona el tipo de pruebas que se hacen. Esto produce un efecto no deseable,

Se considera que la prueba es necesaria, pero se cuestiona el modelo por diversas razones

que se traduce en inercias y resistencias al cambio hacia un modelo más competencial que procedimental.

En relación con esto entendemos que cualquier cambio en las pruebas se traducirá en cambios en el modelo de enseñanza, y viceversa, por lo que se considera necesario actuar en los dos sentidos.

Para romper el círculo vicioso es necesario avanzar hacia unas pruebas que sirvan realmente para alcanzar los objetivos de pensamiento crítico, razonamiento y madurez que se requiere para el acceso a los distintos grados universitarios.

Se está de acuerdo en cambiar a un nuevo modelo de prueba que evalúe más por competencias, y la clave para ello es la resolución de problemas, evitando ejercicios tipo, de modo que el trabajo de los profesores en segundo de Bachillerato no se centre preparar y adiestrar para un examen.

Respecto a la confusión en los objetivos de las pruebas se considera que esta es debida a la necesidad de validar conocimientos y de ordenar a los estudiantes para la admisión en los centros universitarios. Para enfrentar esta indefinición, la reforma de las pruebas debe dejar claro por qué y para qué se hace, con el fin de evitar incertidumbres y subjetividades.

Cualquier propuesta de reforma tiene que venir acompañada de una temporalización que evite cambios bruscos, y deje tiempo para prepararla sin precipitaciones, a ser posible, tras el necesario y conveniente pilotaje experimental.

Los encargados de diseñar las pruebas de las distintas autonomías deberían trabajar coordinadamente. Si no es posible una prueba única, al menos debe ser lo más homogénea posible, evitando,en un contexto de distrito único como es el actual, diferencias discriminatorias en niveles de exigencias y demandas.

Se valora positivamente la elaboración de las matrices de especificaciones, pero estas deben ser acordes con una propuesta de pruebas más orientadas a las competencias, y no limitarse a concretar los estándares del modelo actual.

Un nuevo modelo de prueba que evalúe más por competencias, y la clave para ello es la resolución de problemas

Si se quieren hacer unas pruebas que no sean rutinarias, el tiempo dedicado al examen de matemáticas debe ser superior al que se dedica actualmente, porque se debe dar tiempo para razonar y justificar. El formato del examen y el tipo de preguntas no tienen por qué estar encorsetados en un folio. A tal fin, es recomendable tener en cuenta lo que hacen bien en otros países que nos muestran que es posible proceder de otra manera.

Algunas de las disfunciones y debilidades de la prueba son consecuencia de las resistencias al cambio que se justifican por condicionantes ajenos. No deseamos que estas disfunciones y debilidades se trasladen a cualquier nueva propuesta de prueba.

También se debatió la posibilidad de efectuar pruebas específicas complementarias para aquellos grados en los que se considere necesario, con especial atención a los grados de maestro.

Sobre las EBAU y el uso de las calculadoras se reivindicó su uso al hilo de los tiempos, solicitando que se admita el uso de cualquier tipo y modelo, para que los estudiantes se centren en el razonamiento y justificación de los procesos. A tal fin, las pruebas deben dejar claro que es esto lo que hay que valorar en las respuestas de los estudiantes y no el simple hecho de dar la solución correcta.

Si la normativa vigente contempla el uso de las tecnologías, cuesta entender la resistencia de algunas autonomías, a aceptar la calculadora en las pruebas.

Finalmente, se reiteró una vez más la importancia de que el diseño de las pruebas y sus matrices de especificaciones favorezcan el cambio en el modelo de enseñanza, de tal manera que se prime la formación matemática, significativa y competencial de los estudiantes, frente a la formación instrumental, reglas sin razones y procedimientos sin razonamientos.

La firme voluntad política será esencial para afrontar las dificultades de diverso tipo que puedan aparecer. En definitiva, este es el reto y nuestro compromiso, y nos ponemos a disposición de las diferentes instituciones educativas para colaborar a tal fin.

Comité Español de Matemáticas y Comisión de Educación

El Comité Español de Matemáticas tiene como objetivos: coordinar adecuadamente las actividades matemáticas españolas de ámbito internacional relacionadas con la Unión Matemática Internacional (IMU), reforzar la presencia española en las comisiones y áreas de actuación de la misma, canalizar las iniciativas de la IMU dentro del Estado español y asesorar a los Ministerios de Educación y de Ciencia e informarlos de las recomendaciones de la IMU relacionadas con la educación y la investigación en matemáticas.

Cada una de las cuatro comisiones dependientes del Comité tiene su correlativa en la IMU. Mediante estas comisiones se pretende conseguir una mejor organización de las actividades de cada ámbito, así como un enlace adecuado con la IMU.

El Comité Español de Matemáticas fue creado el 13 de enero de 2004, como reestructuración y ampliación del Comité Español para la Unión Matemática Internacional, que se reconstituyó el 17 de abril de 1998 por iniciativa conjunta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), la Societat Catalana de Matemàtiques (SCM), la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) y la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa (SEIO). En el Comité Español de Matemáticas participan, además de las sociedades mencionadas, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM), la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) y la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas (SEHCYT).

Los primeros estatutos del CEMAT fueron aprobados el 26 de enero de 2004. Fueron sustituidos el 15 de enero de 2007 por el Reglamento de Funcionamiento actual, que se acoge a lo establecido en las Normas de Funcionamiento Interno de la Comisión Española ICSU y de los Comités Científicos Españoles.

Desde el 1 de enero de 2015 el CEMAT es también la Organización Adherida (A.O.) de España a la IMU, con la que se vincula el propio Comité. Desde la refundación de la IMU en 1951 hasta el 31 de diciembre de 2014, la A.O. de España a IMU había sido permanentemente una dependencia ministerial o interministerial. El CEMAT coordina la actividad y representación de España en las organizaciones matemáticas internacionales. En 2010 el CEMAT ha promovido e impulsado la incorporación de España al Centro Internacional de Matemáticas Puras y Aplicadas (CIMPA-ICPAM) como estado miembro.

La Comisión de Educación asume la interlocución del Comité Español de Matemáticas con la International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) y ostenta la representación española en la misma. Tiene como objetivos servir de foro para todos los asuntos relacionados con la educación matemática en España en todos los niveles educativos, así como proporcionar la interfaz adecuada con la comunidad educativa internacional representada por la ICMI.

El presidente de la Comisión de Educación es de oficio el delegado de España en la ICMI. Los representantes españoles en grupos de trabajo o similares son propuestos a la ICMI por la Comisión de Educación, tras el visto bueno del Consejo General.

La Comisión de Educación consta actualmente de once miembros: dos representantes de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, uno de la Real Sociedad Matemática Española, uno de la Societat Catalana de Matemàtiques, uno de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, uno de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, uno de la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, uno de la Conferencia de Decanos de Matemáticas y uno del Ministerio de Educación y Ciencia. Además, el presidente y el secretario del Comité Español de Matemáticas son miembros natos de la Comisión de Educación.

Comisión de Educación
del Comité Español de Matemáticas
<http://matematicas.uclm.es/cemat/es/>

III Jornada de Educación Matemática en Aragón

Ricardo Alonso Liarte

La Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas organiza con carácter bienal una Jornada de Educación Matemática en Aragón (JEMA). La tarde del viernes 22 y la mañana del sábado 23 de febrero de 2019 fueron las fechas elegidas para poner en marcha su tercera edición, que por segunda vez tuvo lugar en la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza.

El interés suscitado por la convocatoria para participar en estas jornadas superó las previsiones de la organización. Ya se constató un importante incremento de solicitudes de la primera a la segunda edición, que se ratificó en esta ocasión ya que, mucho antes de cerrar el plazo de inscripción, el número de solicitudes superaba el aforo del salón de actos en el que se impartieron las conferencias plenarias.

Ello obligó a abrir una lista de espera que sirvió para cubrir aquellas bajas de admitidos que se fueron produciendo en los días previos a las jornadas y que permitió la asistencia a más personas interesadas.

De los inscritos, el 10% fueron estudiantes, el 25% docentes de las etapas educativas de infantil y primaria, el profesorado de secundaria cubrió el 60% de las plazas y el resto profesorado universitario.

Durante la celebración de las jornadas hubo también espacio para descansar, tomar un café, intercambiar impresiones con compañeros y visitar aquellos trabajos, exposiciones y materiales que se dispusieron a tal fin. Así se pudieron ver tres exposiciones: *La mirada calculada*, de Carlos Pina. Junto a ella, *Zoel García de Galdeano: un legado de progreso matemático*, elaborada por Manuel Alfaro, Julio Bernués y Pedro J. Miana (miembros del Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones) dedicada a la vida y obra de este matemático tan ligado a la Universidad de Zaragoza. Y la tercera, *Geometría mudéjar en Aragón: patrimonio de la humanidad*, de Florencio Villarroya. Además se pudieron contemplar trabajos elaborados por alumnado de varios centros aragoneses, así como conocer y adquirir materiales y recursos educativos en las mesas dispuestas para ello a la entrada del salón de actos.

A partir de las 4 de la tarde del viernes se habilitó el registro y entrega de documentación de los participantes a la entrada del edificio.

Figura 1. En el registro

Como actividad previa a la inauguración de las jornadas, en el salón de actos se presentaron tres publicaciones de la FESPM: *Homenaje a Ángel Ramírez*, reedición de *100 escenas de cine* y la colección *Miradas Matemáticas*. A continuación, compañeros de Carlos Pina, llevaron a cabo una presentación de la exposición *La mirada calculada*, que se podía visitar en la zona expositiva de la facultad. Para terminar, una breve presentación musical cerró esta actividad.

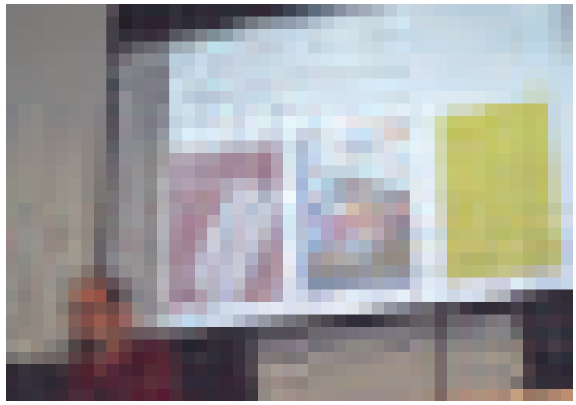


Figura 2. Daniel Sierra en la presentación de libros

Enrique Artal, director del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, Luis Rández, presidente del Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones (IUMA), Julio Latorre, decano de la Facultad de Educación de la Universidad de Zaragoza y Daniel Sierra, presidente de la Sociedad Aragonesa «Pedro Sánchez Ciruelo» de Profesores de Matemáticas, dieron la bienvenida a los participantes e inauguraron de manera oficial la III Jornada de Educación Matemática en Aragón.

La primera ponencia plenaria, *M^2 = matemáticas por matemáticas*, corrió a cargo de Marta Macho. Comenzó mostrando cómo desde edades muy tempranas se establecen sesgos y estereotipos de género en todos los ámbitos, también en las ciencias, para, a continuación, realizar un recorrido por las inspiradoras historias de varias mujeres matemáticas a lo largo de la historia, sus vidas y aportaciones a la ciencia.

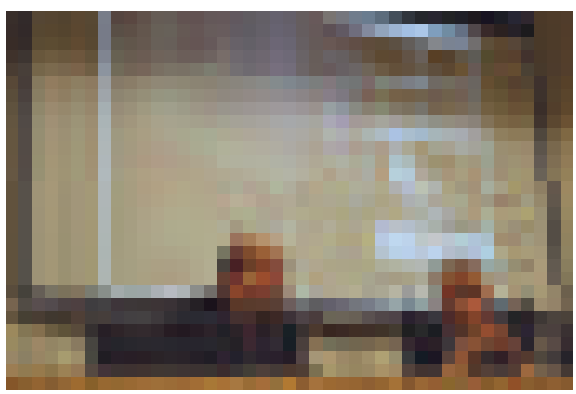


Figura 3. Enrique Artal presenta a Marta Macho en *M^2 = matemáticas por matemáticas*

Tras un breve descanso, los asistentes se distribuyeron en las siete aulas habilitadas para asistir a las 21 comunicaciones que se presentaron de manera simultánea en tres franjas horarias consecutivas de media hora de duración. En conjunto se abarcaron todos los bloques de contenido del currículo de secundaria pero también hubo aportaciones desde primaria y estudios llevados a cabo desde la perspectiva universitaria.

Varias de las comunicaciones mostraron experiencias con distintas metodologías: aprendizaje basado en problemas para relacionar temas como geometría, publicidad y moda, abordar la comunicación desde la estadística o calcular la superficie terrestre que se ve desde el espacio; grupos interactivos para trabajar problemas aditivos con números racionales; el método *lesson study* aplicado a una unidad didáctica sobre las fracciones; trabajo cooperativo entre el profesorado de un departamento… Varias comunicaciones mostraron actividades llevadas a cabo usando software específico de matemáticas (GeoGebra, Desmos, Descartes…) y experiencias de aula basadas en la tecnología, tanto de soporte físico (el trabajo con tabletas), como digital (el uso de libros electrónicos). También hubo espacio para mostrar experiencias de divulgación, a través de la magia, de llevar las matemáticas a la calle o realizar rutas histórico-matemáticas por la ciudad.

Con el apartado de comunicaciones terminó la sesión del viernes. El sábado comenzó con una conferencia plenaria a cargo de José Ángel Murcia, *Me gustan los problemas*. En su intervención planteó la necesidad de abordar el aprendizaje de las matemáticas como una construcción que surge a partir de una situación en la que el alumno se plantea un reto que desea resolver. Ejemplificó sus propuestas con varias muestras de «buenos problemas».

Figura 4. Miguel Ángel Múrcia en *Me gustan los problemas*

El descanso que siguió a esta ponencia se aprovechó para visitar las mesas situadas al lado del salón de actos, visitar las exposiciones y participar en la construcción de una *Cúpula de Leonardo* con el material aportado por el programa Conexión Matemática, fruto de la colaboración de la SAPM con el Departamento de Educación del Gobierno de Aragón.

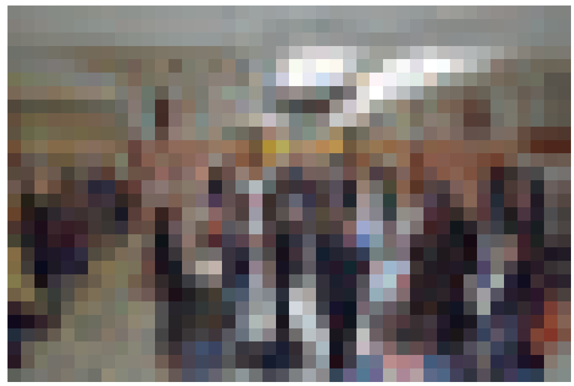


Figura 5. En el descanso, al fondo un grupo empieza una *Cúpula de Leonardo*

Figura 6. *Cúpula de Leonardo* en pie

La siguiente franja horaria, de hora y media de duración, estuvo ocupada por los talleres ofrecidos por la organización. Cada asistente disfrutó del que tenía asignado según su preferencia en el momento de la inscripción (en general, el primero elegido, aunque a veces, dada la demanda que tuvieron algunos, tuvo que ser el segundo o tercero). De los ocho talleres ofertados, tres de ellos tenían un perfil preferentemente orientado a primaria y primeros cursos de secundaria, dos dedicados al uso de tecnología en el aula y el resto más dirigidos a secundaria.

Tras otro breve descanso que brindó la oportunidad de levantar un nuevo modelo de cúpula, se acometió la parte final de la jornada. Dos miembros del colectivo «Risarchers», grupo de monologuistas investigadores de la Universidad de Zaragoza, realizaron una pequeña actuación tras la que Eduardo Sáenz de Cabezón pronunció la conferencia de clausura *El número que los ordenadores nunca podrán calcular*, un relato ameno e instructivo sobre notaciones y números grandes a lo largo de la historia salpicado con momentos relevantes de las matemáticas y la computación.

La jornada fue valorada positivamente por los asistentes y, en los comentarios realizados en los cuestionarios de evaluación de la actividad,

Figura 7. Eduardo Sáenz de Cabezón en *El número que los ordenadores nunca podrán calcular*

se incide en la necesidad y utilidad de estos encuentros, pues además de dar a conocer experiencias y recursos puestos en práctica en las aulas, favorecen el intercambio de ideas, la comunicación y la generación de nuevas propuestas y proyectos.

El programa detallado de la jornada, los resúmenes de ponencias, comunicaciones y talleres, así como todo aquel material complementario que los autores han aportado se puede consultar en la página web de la III JEMA:

<https://sites.google.com/site/ijemaragon/>.

Figura 8. Los asistentes en las plenarias

Ricardo Alonso Liarte
IES Salvador Victoria, Monreal del Campo (Teruel)
<raliarte@gmail.com>

suma+

revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas

91

julio 2019

Revista Suma

Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Tirada: 6000 ejemplares
Depósito legal: Gr 752-1988
ISSN: 1130-488X
Twitter: @suma_fespm

Consejo Asesor

Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en
Badalona (Barcelona) — España

Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:

   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona
2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato .TXT, .ODT, .RTF, .DOC, .DOCX, adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   a) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:

   b) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).

   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 8 × 8 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los caracteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.

    Ejemplos:

    GÓMEZ, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    GÓMEZ, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    GÓMEZ, E., y J. PÉREZ (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    GÓMEZ, E., J. PÉREZ y D. HERNÁNDEZ (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:

    GÓMEZ, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    GÓMEZ, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Encarni Amaro Parrado (Tesorería de la FESPM)
C/ La Palma nº1, 1ºB,
23740, Andújar-Jaén.

por correo-e a: admin@fespm.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ___________

☐ N.os sueltos ___________________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (IBAN ES79 2100 2153 3802 0010 9089)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

IBAN: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):