

# Matemática a enseñar o matemática para enseñar. El caso del cálculo de áreas de figuras planas

GABRIEL R. SOTO  
CINTIA M. NEGRETTE  
ANAHÍ L. DÍAZ

Las investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas problemática han comenzado a focalizarse en la construcción de un conocimiento matemático profesional necesario para buenas prácticas docentes. Presentamos un camino hacia el horizonte matemático del concepto de áreas de figuras planas. Esto nos permite tensionar la matemática escolar y la matemática de la formación, así como consolidar un esquema para el diseño de dispositivos de formación profesional de profesores de matemática, tanto en formación como en ejercicio.

*Palabras clave:* Conocimiento matemático para la enseñanza, Horizonte del conocimiento matemático, Desarrollo profesional de profesores de matemática.

## **Mathematics to teach or mathematics for teaching. The case of computing areas of plane figures**

Research on the teaching of mathematics has begun to focus on the construction of a professional mathematical knowledge necessary for good teaching practices. We present a path towards the mathematical horizon of the concept of area of plane figures. This allows us to contrast the school mathematics and the mathematics of teacher's development, as well as to consolidate a scheme for the design of professional development devices for both pre- and in-service mathematics teachers.

*Keywords:* Mathematics knowledge for teaching, Horizon content knowledge, Professional development of mathematics teachers.

¿Cuánta matemática tiene que saber quien enseña matemática? La vigencia de esta pregunta se evidencia en los trabajos de Klein (2016), Santaló (1993), Ma (2010), Ball, Hill y Bass (2005), Usiskin (2002), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), Godino (2009), Proulx (2009), Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013). Estos autores proponen tensionar la matemática escolar y la matemática de la formación, para lograr una comprensión más profunda acerca de la matemática escolar, como una herramienta efectiva de desarrollo profesional.

Inspirados en el concepto de *horizonte del conocimiento matemático* (HCK), introducido por Ball, Thames y Phelps (2008: 403) y que identifica el tipo de conocimiento matemático que un profesor debe saber para establecer relaciones entre todos los conceptos matemáticos incluidos en el mapa curricular de la escuela, comenzamos a buscar oportunidades para explicitar dichas tensiones: números racionales (Soto, 2016), secciones cónicas (Soto, 2012) y resolución de ecuaciones algebraicas (Soto, 2015), entre otras.

El presente trabajo contiene el análisis del horizonte matemático del concepto de área de figuras planas, que funcionó como base de un dispositivo de formación destinado a profesores de enseñanza primaria y secundaria en ejercicio.

Uno de los objetivos de este dispositivo es el de analizar cómo se deben modificar las formas de calcular áreas de figuras planas a medida que sus propiedades geométricas y topológicas cambian. Empezamos identificando al triángulo como figura básica para calcular áreas de *polígonos simples* para mostrar cómo la noción de triangulación de figuras planas se modifica cuando la propiedad de *simple* se abandona. Esto nos permite obtener la fórmula general de Green para el cálculo de áreas de figuras planas, que aparece recurrentemente en la formación de profesores de matemáticas.

## Áreas de figuras planas

El cálculo del área de rectángulos ha sido un problema enfrentado por la humanidad desde hace más de 3 000 años aproximadamente (Soto, 2015), y este concepto y su cálculo se introducen primeramente en la escuela. Justamente, el concepto de área de figuras planas y su cálculo está presente en los diseños curriculares a partir del cuarto y hasta el noveno año de escolaridad en Argentina, (ver Núcleos de Aprendizajes Prioritarios, 2018). Si nos concentramos en el cálculo de áreas de triángulos: la fórmula más popular en los progra-

mas de la escuela es  $(b \times h)/2$ , donde  $b$  es la medida de alguna de las bases del triángulo y  $h$  es la altura correspondiente. La validez de esta fórmula se basa en el hecho de que siempre un triángulo se puede pensar como la mitad de un rectángulo (¿por qué?). Y es a partir de la fórmula para calcular el área de un triángulo como se obtienen fórmulas para el cálculo de áreas de polígonos de  $n$  lados como se indica en la figura 1.

Es importante puntualizar que existen otras fórmulas para calcular el área de un triángulo, algunas de las cuales se presentan en el siguiente :

**Teorema (Fórmulas para el cálculo del área de un triángulo).** Dado un triángulo  $ABC$ , donde las longitudes de sus lados son respectivamente  $c$ ,  $a$  y  $b$ , sus ángulos son  $A$ ,  $B$  y  $C$  y el radio de la circunferencia que contiene a sus vértices es  $R$ , su área se puede obtener mediante las siguientes fórmulas:

- i.  $A = \sqrt{s \times (s-a) \times (s-b) \times (s-c)}$   
donde  $s = \frac{a+b+c}{2}$
- ii.  $A = \frac{a \times b \times \text{sen } C}{2}$
- iii.  $A = \frac{a^2 \times \text{sen } B \times \text{sen } C}{2 \times \text{sen } (B+C)}$
- iv.  $A = \frac{a \times b \times c}{4R}$

La primera fórmula es la fórmula de Herón. Una demostración muy interesante se puede encontrar en Nelsen (2001). La prueba de la validez de este teorema queda a cargo del lector.

Uno de los ingredientes para obtener las fórmulas de áreas de la figura 1 es la posibilidad de *triangular* figuras planas. Para fijar ideas necesitamos la siguiente definición:

Sea  $P$  un polígono simple de  $n$  lados. Una *triangulación* para  $P$  es una descomposición de  $P$  en triángulos que satisfacen las siguientes condiciones:

1. cada triángulo está totalmente contenido en  $P$ ;
2. los vértices de cada triángulo son vértices de  $P$ ;
3. los triángulos dos a dos tienen a lo sumo un lado en común.

Se sigue entonces que la descomposición del pentágono regular de la figura 1 no satisface una de las condiciones de la definición (¿por qué?). Sin embargo las descomposiciones del pentágono de la figura 2 si satisfacen las condiciones de la definición.

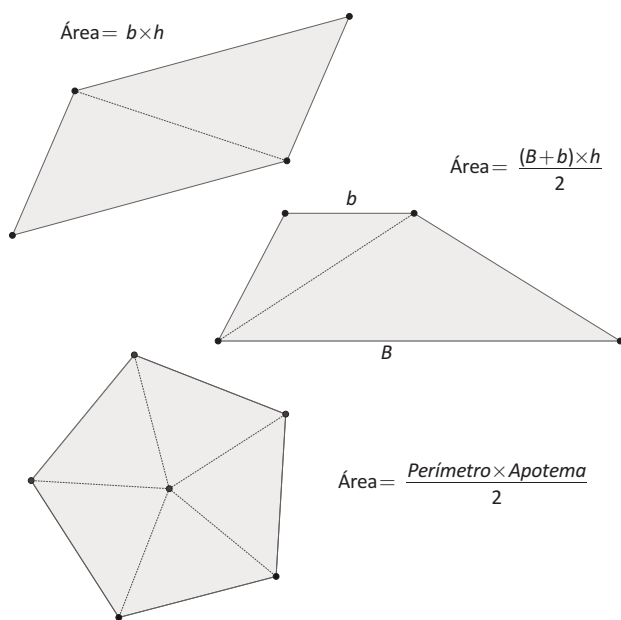


Figura 1. Polígonos para los que usualmente se obtienen en la escuela fórmulas para el cálculo del área

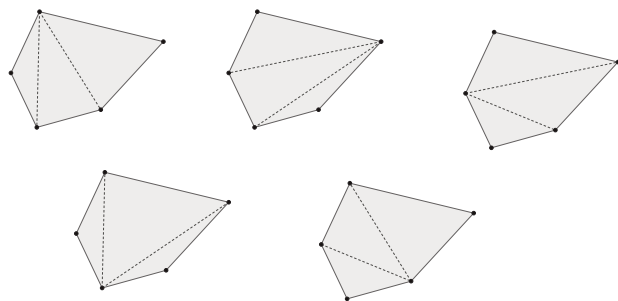


Figura 2. Triangulaciones diferentes de un pentágono

Este tipo de triangulaciones depende de la existencia de diagonales en polígonos simples entendidas como segmentos cuyos extremos son vértices de  $P$  y están contenidas en  $P$ . El hecho de que siempre es posible triangular una figura plana simple de acuerdo a la anterior definición se resume en el siguiente teorema:

**Teorema (de triangulación).** Todo polígono  $P$  simple de  $n$  vértices puede ser particionado en triángulos añadiendo cero o más diagonales.

La demostración de este resultado se puede ver en O'Rourke (1993). Se basa en que todo polígono de  $n$  vértices tiene un vértice convexo (o un ángulo interior menor a  $180^\circ$ ) y una diagonal, como las definidas en la figura 3.

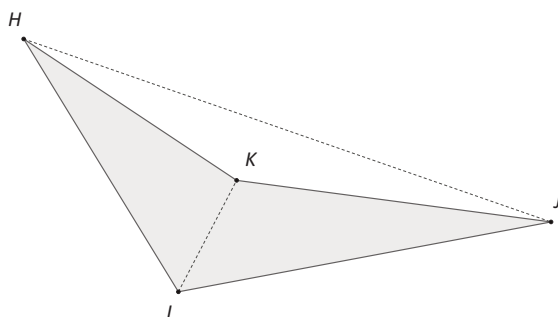


Figura 3. El cuadrilátero  $HIJK$  tiene dos diagonales, una totalmente contenida en el interior y la otra no.

Cada triangulación de un polígono de  $n$  vértices utiliza  $n - 3$  diagonales y produce  $n - 2$  triángulos (¿por qué?) (O'Rourke, 1993). Leonard Euler, en 1758 aproximadamente, demostró que cualquier polígono convexo de  $n$  lados admite

$$t_n = \frac{(2n - 4)!}{(n - 1)!(n - 2)!} \text{ triangulaciones diferentes.}$$

Este número, se denomina *el  $n$ -ésimo número de Catalan* (Gardner, 2014). Un detalle interesante es que en 1730 el matemático chino Antu Ming estudió estos números, independientemente del trabajo de Euler (Larcombe, 2011). Por ejemplo, el número de triangulaciones diferentes de un pentágono es  $t_5 = 5$ , como se muestra en la figura 2.

Como vivimos en el mundo de las coordenadas, gracias a René Descartes (¡por supuesto!), y tres puntos no alineados determinan un único triángulo (¿por qué?), resulta interesante preguntarse si es posible utilizar las coordenadas de los vértices del triángulo para obtener su área.

**Teorema (Fórmula para el área de un triángulo).** El área de un triángulo de vértices  $A, B$  y  $C$ , denotado por  $(A, B, C)$ , cuyas coordenadas son respectivamente  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$ , será:

$$(A, B, C) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad [1]$$

Para demostrarlo basta considerar los lados del triángulo como vectores y usar el producto vectorial. Ver Poole (2007: 26), Grossman (2007: 257) y Klein (2016: 5), entre otros.

La fórmula [1] involucra el determinante de una matriz  $3 \times 3$ , lo que sugiere que el orden en el que enumeramos los vértices del triángulo va a fijar su signo: si los vértices del triángulo se recorren en sentido antihorario, va a tener signo positivo (¿por qué?). En general, para un polígono simple de  $n$  lados se tiene el siguiente resultado, conocido como la *fórmula de la lazada* (Braden, 1986):

**Teorema:** Si los vértices de un polígono simple de  $n$  lados de coordenadas  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , se ordenan de acuerdo al recorrido antihorario de su perímetro, entonces su área es:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_{i+1} & y_{i+1} \end{vmatrix} \quad [2]$$

donde  $x_{n+1} = x_1$  e  $y_{n+1} = y_1$

La demostración se basa en la posibilidad de triangular cualquier polígono simple, haciendo inducción sobre el número de vértices.

Hasta ahora todos los resultados asociados al cálculo de áreas encerradas por polígonos requieren que los mismos sean simples, es decir, polígonos cuyos lados no se intersecten entre sí en puntos que no sean sus vértices. Cabe pre-

guntarse entonces si es posible generalizar la fórmula [2] para calcular el área de un polígono *no simple*, como el que se muestra en la figura 4.

El resultado establecido en el teorema de triangulación para un polígono depende de la existencia de diagonales, entendidas estas como se mencionó anteriormente. Ahora bien, en el caso de polígonos no simples, la existencia de diagonales enteramente contenidas en el interior deja de ser cierta como se puede observar en la figura 4.

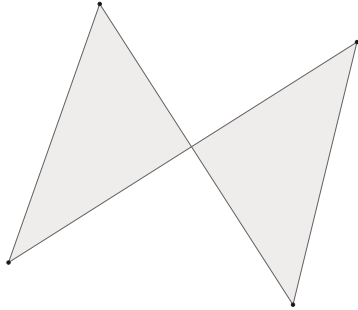


Figura 4. Polígono no simple sin diagonales contenidas en su interior.

Supongamos que etiquetamos con 1, 2, 3...  $n - 1$ ,  $n$  los vértices del polígono que queremos triangular, de modo que sean recorridos en sentido antihorario. Si denotamos  $(1, 2, \dots, n)$  el área del polígono  $1, 2, 3, \dots, n-1, n$  y si  $O$  es cualquier punto del plano, entonces el área del polígono estará dada por el siguiente resultado:

**Teorema (Fórmula para el área de un polígono).** Si la frontera del polígono se recorre en sentido antihorario  $1, 2, \dots, n-1, n$ , su área es:

$$(1, 2, \dots, n) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + \dots + (0, n-1, n) + (0, n, 1) \quad [3]$$

donde cada terna representa el área del triángulo cuyos vértices son las coordenadas de dicha terna. Cada área se calcula utilizando la fórmula [1]. Más aún,  $(1, 2, \dots, n)$  no depende de la elección del punto  $O$ .

Para demostrarlo se hace inducción sobre el número de vértices (Klein, 2016: 12).

Si queremos calcular el área del polígono  $H I J K$  de la figura 3 usando la fórmula [3], tenemos que enumerar sus vértices. Por ejemplo,  $H = 1, I = 2, J = 3$  y  $K = 4$  entonces la fórmula [3] se lee:

$$(1, 2, 3, 4) = (0, 1, 2) + (0, 2, 3) + (0, 3, 4) + (0, 4, 1)$$

donde el punto  $O$  coincide con  $H$ . Entonces  $(0, 1, 2) = 0$  (¿por qué?),  $(0, 2, 3)$  corresponde al

área del triángulo  $H I J$ ,  $(0, 3, 4)$  corresponde al área del triángulo  $H J K$  que es negativa al ser recorrido en sentido horario y  $(0, 4, 1) = 0$  (¿por qué?).

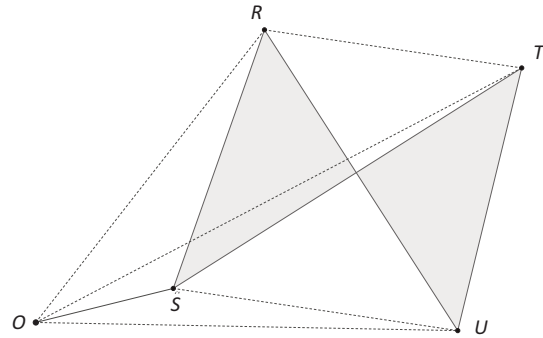


Figura 5. Triangulación del cuadrilátero  $RSTU$  utilizando un punto auxiliar  $O$ .

#### Ejercicio 1

Para el polígono que aparece en la figura 4, utilizar la triangulación sugerida en la figura 5 para determinar las coordenadas de sus vértices de modo tal que el área encerrada resulte cero, positiva o negativa.

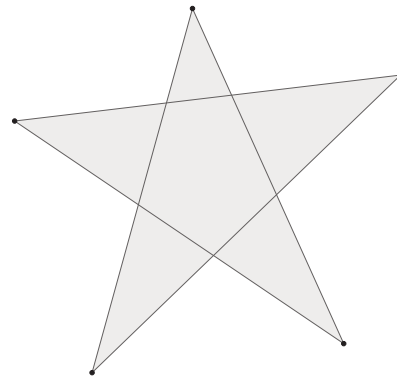


Figura 6. Estrella pitagórica

#### Ejercicio 2

Calcular el área encerrada por la estrella pitagórica que aparece en la figura 6 utilizando la fórmula [3].

La idea de triangulación que utiliza la fórmula [3] sirve también para aproximar áreas de figuras curvilíneas. Veamos el caso del área encerrada por una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ . Para ello dividamos la región encerrada por la circunferencia en triángulos  $ORT$  como indica la figura 7. Si el punto  $O$  es el origen, utilizando la representación de puntos del plano mediante coordenadas polares y la fórmula [4], se tiene que:

$$(O, R, T) = \frac{r^2 \times \text{sen } \varepsilon}{2} \quad (\text{¿por qué?})$$

Notar que el área  $(O, R, T)$  es positiva, (¿por qué?). Si definimos  $\varepsilon = 2\pi/n$ , donde  $n$  es el número de triángulos de la triangulación, el área del círculo se aproxima por:

$$\frac{n \times r^2 \times \text{sen} \frac{2\pi}{n}}{2}$$

Si aumentamos el número de triángulos, o equivalentemente  $n \rightarrow \infty$ , el área del círculo resulta  $A = \pi \times r^2$ .

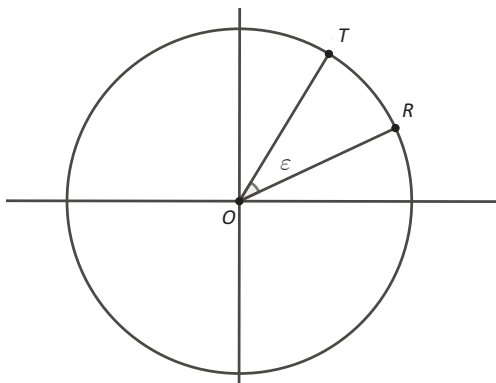


Figura 7. Triangulación de una circunferencia

Si pensamos ahora en una figura curvilínea cualquiera, podemos aproximar su área como hicimos con la circunferencia y estableciendo el sentido de recorrido antihorario, obtenemos el siguiente corolario del conocido teorema de Green (Marsden y Tromba, 2004: 505):

**Teorema (Área encerrada por curvas planas).** Si la frontera de una curva cerrada simple se recorre en sentido antihorario, el área encerrada por ella es:

$$\frac{1}{2} \oint (x dy - y dx) \quad [4]$$

Para demostrarlo seguimos las ideas de Klein (2016: 14). Sin pérdida de generalidad tomamos el punto  $O$  como el origen de coordenadas del plano cartesiano. Definiendo el triángulo  $OPP_1$  cuyos vértices tienen coordenadas  $(0, 0)$ ,  $(x, y)$  y  $(x + dx, y + dy)$ , como se muestra en la figura 8, entonces tenemos:

$$(O, P, P_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x + dx & y + dy & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (x dy - y dx)$$

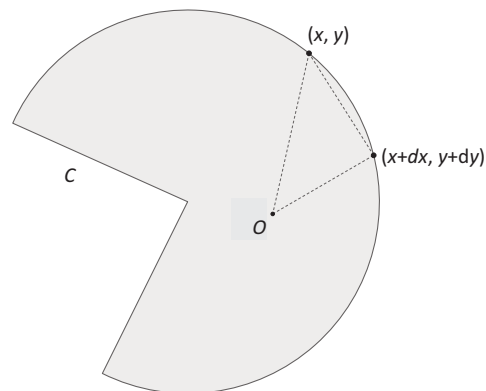


Figura 8. Triangulación del área encerrada por la curva C

Para aproximar el área encerrada por la curva  $C$ , sumamos las áreas de todos los triángulos como el anterior mediante los que particionamos el área. Si hacemos que  $dx \rightarrow 0$  y  $dy \rightarrow 0$  simultáneamente obtenemos la clásica fórmula de Green [4].

## Reflexiones finales

Este trabajo pretende presentar una forma de tensionar la relación entre la matemática escolar y la matemática profesional en el contexto de dispositivos de formación docente. Hacer explícito el horizonte de un concepto de la matemática escolar ofrece una herramienta de desarrollo profesional tanto para futuros profesores como para profesores en ejercicio, así como también permite establecer relaciones con generalizaciones de conceptos enseñados —la fórmula de Herón es un caso particular de la fórmula de Bramagupta (Coxeter y Greitzer, 2013: 73-76)—, o con matemática especializada (Rosenberg, Spillane y Wulf, 2008).

Los caminos hacia el horizonte no son únicos, por tanto el presente trabajo lejos está de ser exhaustivo. A modo de cierre queremos dejar las preguntas para la reflexión que emergieron en la implementación de este dispositivo sobre las prácticas docentes:

- ¿Es necesario enseñar un catálogo de fórmulas para hallar el área de figuras planas?
- ¿Qué saberes movilizan los estudiantes alrededor del concepto de área?
- ¿Cómo esta realización del horizonte matemático del concepto de área puede incidir en la forma de pensar y planificar la ense-

ñanza del concepto de área y su cálculo en la escuela?

- ¿Cómo incide el uso de las tecnologías (software de geometría dinámica) en la pertinencia de este horizonte matemático al momento de pensar la enseñanza del concepto de cálculo de área de figuras planas?

Este trabajo fue financiado por la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (FI 028). Agradecemos a María de Gracia Mendonça, Mónica González, Eliana Gómez, Llanet Da Luz Pereira y Nelson Villagra sus importantes observaciones durante el desarrollo de este trabajo.

## Referencias bibliográficas

BALL, D., H. HILL y H. BASS (2005), «Knowing Mathematics for Teaching: Who Knows Mathematics Well Enough To Teach Third Grade, and How Can We Decide?», *American Educator* n.º 29, 14-17, 20-22, 43-46.

BALL, D., M. THAMES y G. PHELPS (2008), «Content knowledge for teaching: What makes it special?», *Journal of Teacher Education* n.º 59, 389-406.

BRADEN, B. (1986) «The Surveyor's Area Formula», *The College Mathematics Journal* n.º 17, 326-337.

CARRILLO, J., N. CLIMENT, L. C. CONTRERAS y M. C. MUÑOZ-CATALÁN (2013), «Determining specialized knowledge for mathematics teaching», *CEMRE 8. Working group* 17, 2985-2994.

COXETER, H. S. M., y S. L. GREITZER (2013), *Retorno a la Geometría*, Red Olímpica, Buenos Aires.

GARDNER, M. (2014), *The magic and mysteries of numbers*, Scientific American, New York.

GODINO, J. (2009), «Categorías de análisis de los conocimientos del Profesor en Matemática», *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática* n.º 20, 13-31.

GROSSMAN, S. (2007), *Álgebra Lineal (6.ª Edición)*, Mac Graw Hill Interamericana, México.

KICHENASSAMY, S. (2009), «Brahmagupta's derivation of the area of a cyclic quadrilateral», *Historia Mathematica* n.º 37, 28-61.

KLEIN, F. (2016), *Elementary mathematics from a higher standpoint. Volumen II. Geometry*, Springer-Verlag, Berlin.

LARCOSBE, P. J. (2000), «The 18th Century Chinese Discovery of the Catalan Numbers», *Mathematical Spectrum*, n.º 32, 5-7.

MA, L. (2010), *Knowing and Teaching Elementary Mathematics Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*, Routledge, Nueva York.

MARSDEN, J., y A. TROMBA (2004), *Cálculo vectorial. (5.ª edición)*, Pearson Addison Wesley, Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN (2018), *Colección Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP)*, Argentina. Documentos obtenidos el 18 de marzo de 2019 en: <<https://www.educ.ar/recursos/132584/coleccion-nucleos-de-aprendizaje-prioritarios-nap>>.

NELSEN, R. (2001), «Heron's Formula via proofs without words», *The College Mathematical Journal* n.º 32, 290-292.

O'ROURKE, J. (1993), *Computational Geometry in C*, Cambridge Press University, London.

POOLE, D. (2007), *Álgebra lineal. Una introducción moderna*, Cengage Learning, México.

PROULX, J. y N. BEDNARZ (2009), «Quelle formation mathématique pour les futurs enseignants du secondaire ? Un éclairage fondé sur une analyse des recherches», *Proceedings of Espace Mathématique Francophone (EMF-2009)*. Dakar, Senegal, 129-142.

ROSENBERG, S., M. SPILLANE y D. WULF (2008), «Heron triangles and Moduli Spaces», *Mathematics Teacher* n.º 101, 656-663.

SANTALÓ, L. (1993), *La geometría en la formación de profesores*, Red Olímpica, Buenos Aires.

SCHOENFELD, A., y J. KILPATRICK (2008), «Toward a theory of proficiency in teaching mathematics», en T. Wood (Ed. serie) y D. Tirosh (Ed. vol) *International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*, Sense Publishers, Rotterdam, 341-376.

SOTO, G. (2012), «Secciones Cónicas: ¿y esto, para qué me sirve?», *Serie "B" Trabajos de Matemática. Notas de Cursos XXXV. Reunión de Educación Matemática. Unión Matemática Argentina*, Vol. 61, Editorial Sima, 69-92.

— (2012), *(Des)-haciendo matemática (2.ª Edición)*, Editorial Universitaria Patagónica, Buenos Aires.

— (2016), «Matemática a enseñar o para enseñar. El caso de las fracciones», en P. Scott y Á. Ruíz (Eds), (2015). *Educación Matemática en las Américas, Volumen 3: Formación Continua*, Comité Interamericano de Educación Matemática, República Dominicana, 341-350.

USISKIN, Z. (2002), «Teachers' Mathematics: A Collection of Content Deserving To Be A Field», obtenido el 18 de abril del 2018 en: <[http://www.cbmsweb.org/archive/NationalSummit/WG\\_Speakers/usiskin.pdf](http://www.cbmsweb.org/archive/NationalSummit/WG_Speakers/usiskin.pdf)>.

GABRIEL R. SOTO  
CINTIA M. NEGRETTE  
ANAÍ L. DÍAZ

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco  
<[gsoto@unpata.edu.ar](mailto:gsoto@unpata.edu.ar)>