suma+ 84
Secciones
Marzo 2017
pp. 99-111

Geometría del triángulo

Teorema de Napoleón

Montserrat Diestro Tejeda
José Luis Muñoz Casado (coordinador)

Después de veintidós años disfrutando de la enseñanza de las matemáticas, he vuelto a descubrir que están vivas. Me he sentido como los matemáticos de la Historia, como las mujeres matemáticas, como los grandes genios investigando el problema y compartiendo con los compañeros más cercanos la información descubierta cada día.

Y casi sin darme cuenta me he encontrado escribiendo en esta revista, *Suma*, en la que tantas veces he leído la mente de compañeros conocidos.

Aquí está. Este artículo es fruto de sentimientos, recuerdos y alguna que otra anécdota compartida con José Luis Muñoz Casado, compañero de departamento.

Me he dado cuenta, una vez más, que mi vida sigue cambiando, creciendo, enriqueciéndose con lo más bonito que hay en este mundo, «compartir conocimiento con amigos» y como dice Antonio Pérez, «aprender algo nuevo, que de eso se trata».

Espero que te guste leerlo tanto como a mí me ha gustado escribirlo. Y sobre todo espero que lo puedas usar con tus alumnos en el aula. Que puedas transmitir las matemáticas ocultas en la geometría del triángulo. Me gustaría que este artículo te sirviera de motivación para contar

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2016 y aceptado en enero de 2017

los elementos del triángulo de forma diferente en la ESO.

Tres puntos, tres lados, tres ángulos, el más simple de los polígonos. Déjate seducir por él, hoy tiene algo diferente que contarte.

¡Ojalá la próxima vez que entres a una clase para dibujar un triángulo te acuerdes de lo que ahora vas a leer!

Napoleón y su gusto por las matemáticas

> L'avancement et la perfection des mathématiques sont intimement liés à la prospérité de l'Etat.
>
> [El progreso y la perfección de las matemáticas están íntimamente ligadas a la prosperidad del Estado.]
>
> Empereur Napoléon Bonaparte
> (Correspondance de Napoléon
> 1.er publiée par ordre de l'Empereur Napoléon III,
> n.º 19028, d'après l'original communiqué
> par le général marquis de Laplace)

¿Pudo el éxito militar de Napoleón Bonaparte estar basado en sus conocimientos de geometría? Estadista y gran estratega militar, tenía fundados conocimientos matemáticos, algo infrecuente entre grandes gobernantes y políticos.

Los historiadores han comprobado que el futuro emperador francés había obtenido excelentes calificaciones en matemáticas y en geografía. En la escuela, a los ocho años Napoleón se ganó una reputación de inteligente y decidido, con un buen recuerdo y un talento para las matemáticas que lo encaminaron hacia la especialización en la formación en artillería a través de la escuela militar real en París, donde comenzó en 1784. A pesar de la rutina exigente de la escuela, que incluía levantarse a las 5:30 h de la madrugada y cuatro horas de matemáticas al día, se lanzó en cuerpo y alma a su estudio y se graduó cursando dos años en uno.

Una primera aproximación de Napoleón con las matemáticas, ya relevante y contrastada, se encuentra en dicha escuela; durante su período de formación militar tuvo como profesor a Laplace, quien le aprobó como Miembro del Tribunal de la Artillería Real.

Al margen de la verdadera profundidad de los motivos de la campaña en Egipto, bien como objetivo para cortar el paso de los ingleses hacia la India, bien como un intento de recuperar el espíritu de expansión de Alejandro Magno, Napoleón se rodea de un grupo de 167 especialistas y científicos, entre los que se encuentran los matemáticos Gaspard Monge, Joseph Fourier o Étienne Louis Malus.

Como vemos, las matemáticas en la vida de Napoleón tuvieron una presencia notable, pero es con el teorema que lleva su nombre, donde se confirma ese interés y gusto por la geometría. En 1826 apareció publicado el Teorema de Napoleón, que se ha atribuido erróneamente a su persona. No hay pruebas tangibles de que sea el verdadero autor y, de hecho, apareció publicado años después de su muerte. El autor fue Lorenzo Mascheroni, quien sabiendo de la pasión del general francés por la geometría, le dedicó su libro *Geometría del Compasso,* 1797. La confusión hizo que de forma injusta se atribuyera a Napoleón el nombre del teorema y su demostración.

Damián y el triángulo de Napoleón

La primera vez que oí hablar de este triángulo fue en el curso de GeoGebra básico organizado por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo» (SMPM) en el que Damián Valdelvira se esforzaba por enseñarnos el programa de geometría dinámica.

Se habla con más frecuencia del teorema de Pitágoras, de la recta de Euler pero poca gente había oído hablar de este triángulo.

Esto fue lo que sucedió…

> —Hoy vamos a trabajar con el triángulo de Napoleón.
>
> —¿El triángulo de qué…?
>
> —El triángulo de NA-PO-LE-ÓN.

Y todos nos pusimos a dibujar en los ordenadores del IES Salvador Dalí de Madrid un *triángulo cualquiera* como en la figura 1.

Por primera vez usamos la herramienta *polígono regular de 3 lados,* para pasar a dibujar la figura 2, y visualizar lo que dice el teorema:

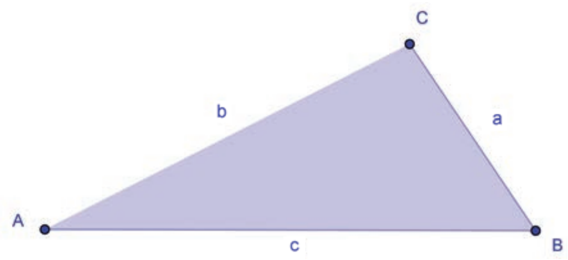


Figura 1

Si en un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros exteriores sobre sus lados, los baricentros de dichos triángulos equiláteros determinan un triángulo equilátero (DEF) conocido como triángulo de Napoleón exterior.

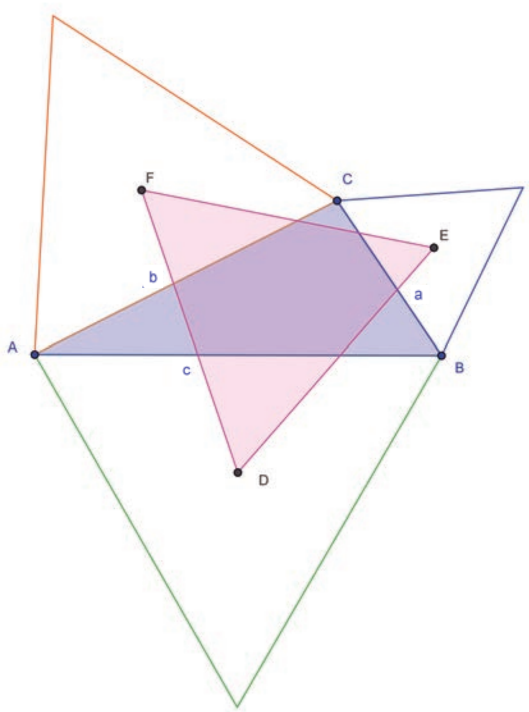


Figura 2

> *Guía de construcción*
>
> — Primero dibujamos un triángulo escaleno con la herramienta polígono .
>
> — Utilizamos la herramienta polígono regular para construir los *triángulos equiláteros* sobre los lados del triángulo *ABC*.
> Cuando GeoGebra nos pide el número de lados escribimos «3».
> Es importante marcar los puntos *B* y *A*, dependiendo del orden en que los marquemos el triángulo equilátero quedará en el exterior o en el interior del triángulo *ABC*.
>
> — Realizamos esta construcción sobre los tres lados, es decir, dibujamos tres triángulos equiláteros exteriores, uno por cada lado *AB, BC* y *CA*.

Para construir el triángulo de Napoleón necesitamos los centros de los tres triángulos exteriores.

> *Actividad*
>
> — Dibuja las *medianas* de los triángulos equiláteros, segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.
>
> — El punto donde se cortan las medianas es el *baricentro* o centro de gravedad. Es suficiente intersecar dos medianas para calcularlo, no es necesario dibujar las tres.
>
> — Se puede comprobar que en un triángulo equilátero coinciden en el mismo punto el baricentro, el ortocentro (punto donde se cortan las alturas) y el circuncentro (punto donde se cortan las mediatrices).

Ya tenemos los vértices del triángulo de Napoleón que son los centros de los triángulos exteriores.

Observa la figura 3, en cada triángulo equilátero sobre los lados *AB, BC* y *CA*, hemos marcado el ortocentro, el baricentro, el circuncentro, respectivamente. Uniendo los tres centros de los triángulos se forma el triángulo *DEF* que es el *triángulo exterior de Napoleón*.

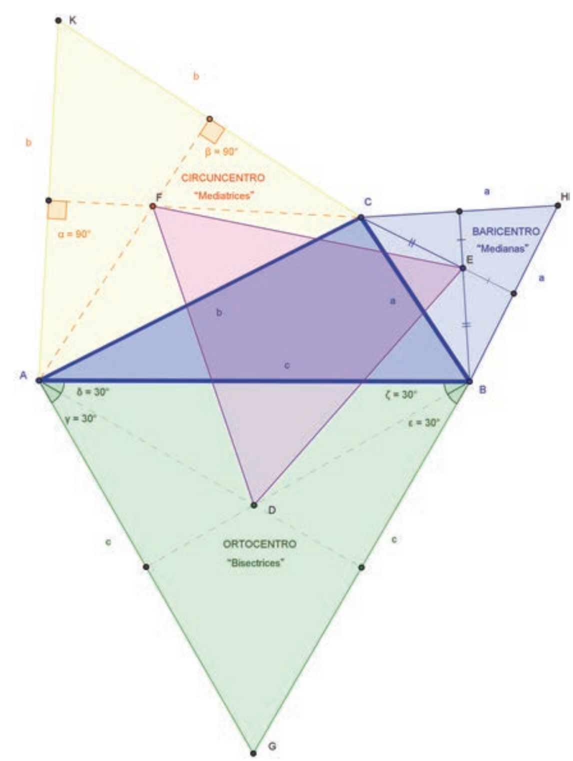


Figura 3

Con GeoGebra comprobamos a simple vista que el triángulo de Napoleón es equilátero. Y podemos ver que los lados *DE, EF* y *FD* miden lo mismo visualizando sus valores en la vista algebraica.

No obstante si cambiamos la posición de los puntos *A, B* o *C* del triángulo original (figuras 4 y 5) comprobamos que el triángulo *DEF* sigue siendo equilátero, tal y como afirma el teorema de Napoleón.

La primera versión escrita de este teorema se encuentra en *The Ladies' Diary, El Diario de las Damas*, planteada en 1825 por un matemático inglés, Dr. W. Rutherford, en el número 122, dentro de la sección de «Nuevas Cuestiones Matemáticas» —cuestión VII— página 47 (figuras 6 y 7) donde se proponía esta cuestión para que el lector diera una demostración.

Este «diario» o «almanaque de la mujer» apareció en Londres en 1704, con una periodicidad más o menos regular hasta 1841 (figuras 8, 9, 10 y 11). En él se presentaban adivinanzas, llamados *enigmas*, jeroglíficos, consultas científicas, información sobre la salida y la puesta de sol, las fases de la luna, días de fiesta, eclipses, rompecabezas, cuestiones matemáticas en verso.

En algunos volúmenes se incluían preguntas y respuestas propuestas por los lectores. Una de ellas fue la demostración al teorema de Napoleón que aparece publicada en 1826 en *El Diario de las Damas* cuestión VII, página 38. Ver figura 12.

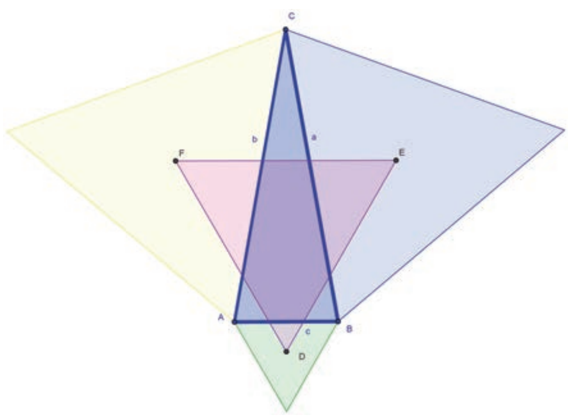


Figura 4

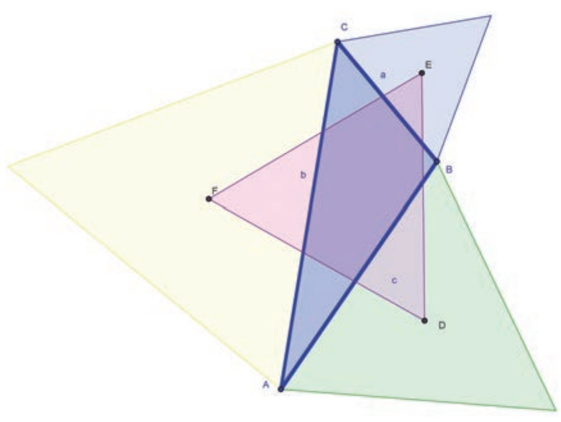


Figura 5


THE LADIES' DIARY:
OR,
COMPLETE ALMANACK.
FOR THE YEAR OF OUR LORD
1825.
Being the first after Bissextile, or Leap Year.
Containing New Improvements in Arts and Sciences, and many entertaining Particulars:
DESIGNED FOR THE USE AND DIVERSION OF THE
FAIR SEX.
The Hundred-&-twenty-second Almanack published of this Kind.

Ye happy Fair, whom sacred transports fire,
Accept, propitious, what yourselves inspire;
For you the Muse her kindest influence lends,
And Science wide its ample bound extends:
Alike your grace and wit resistless charm,
With love and virtue every bosom warm.

LONDON:
PRINTED FOR THE COMPANY OF STATIONERS,
BY J. AND C. ADLARD, BARTHOLOMEW CLOSE;
And sold by G. Greenhill, Treasurer, at their Hall, Ludgate-street.
[*Price, stitched, Two Shillings and Three Pence.*]

Figura 6


N° 122. New Mathematical Questions. 47

III. Quest. (1436); *by Mr. Isaac Newton, Wisbech.*
Let there be two similar, and similarly posited, concentric ellipses; then, if any tangent be drawn to the interior ellipse, the area of the segment intercepted between that tangent and the exterior ellipse will be a constant quantity. Required a demonstration.

IV. Quest. (1437); *by Mr. W. Burdon, York.*
The sides of a triangular field are 13, 14, and 15 chains. It is divided into two equal parts by a drain, which runs parallel to the longest side; and the land betwixt the longest fence and the drain is worth 60*l.* per acre, while that on the other side of the drain is worth only 6*0l.* per acre. It is required to cut off, by a fence parallel to the shortest side, as much land (lying between that fence and the dividing line) as shall be worth 90*l.*

V. Quest. (1438); *by the same Gentleman.*
The transverse and conjugate axes of an elliptical field are 6 and 5 chains. The occupier intends to tether his horse to a certain point of the fence with a rope 30 yards long. To what point must the tether be fixed, that the horse may graze over the greatest quantity, and what is that quantity?

VI. Quest. (1439); *by Mr. J. Collins, Hatton Garden.*
Find that arc of a circle which bisects the quadrilateral comprehended between the sine, versed sine, and tangent of the said arc, and the external part of its secant.

VII. Quest. (1439); *by Mr. W. Rutherford, Woodburn.*
Describe equilateral triangles (the vertices being either all outward or all inward,) upon the three sides of any triangle ABC: then the lines which join the centres of gravity of those three equilateral triangles will constitute an equilateral triangle. Required a demonstration.

VIII. Quest. (1440); *by Investigator.*
Let Bb be the transverse axis, *t s* the conjugate, and F, *f*, the foci, of an ellipse cut from a right cone VRS; *ab* and BA being circular sections (parallel to the base) at the vertices of the transverse. Then it is required to demonstrate that $ts = \sqrt{(ab \cdot BA)}$, and $Ff = aB = bA$, the portions of the slant side of the cone intercepted between the parallel circles *ab*, BA.

IX. Quest. (1441); *by Mr. Tho. Chapman, New Elvet, Durham.*
AOB is a quadrant of a circle whose centre is O. Draw any radius OC, and from C towards O set off CP equal to the versed sine of the arc AC, and exhibit the quadrature of the locus of P.

X. Quest. (1442); *by Investigator.*
Find the sum of the series—
1 − 1 + 1 − 1 + 1 − &c. in infin.
1 + 0 − 1 + 1 + 0 − 1 + &c. in infin.
1 + 0 + 0 − 1 + 1 + 0 + 0 − 1 + &c. in infin.
by a general method.

XI. Quest. (1443); *by Petrarch.*
If any number, *n*, of thin lenses, whose focal lengths are $f_1, f_2, f_3, \dots f_n$, be placed together so that their axes coincide; then, if

Figura 7


The Ladies Diary:
OR, THE
Womens ALMANACK,
For the Year of our Lord, 1706.
Being the Second Year after the Leap-Year.
Containing many Delightful and Entertaining Particulars, peculiarly adapted for the Use and Diversion of
The FAIR-SEX.
Being the Third Almanack ever Publish'd of that kind.

Figura 8. Año 1706

Figura 9. Año 1794

Figura 10. Año 1840

Figura 11. Año 1841

38 The Ladies' Diary. 1826.

VI. Question, *ans. by Messrs. J. Collins (the proposer), Samuel Earnshaw, Abr. Jaques, Perci King, S. Knieton, and W. Oakes.*

Let AC $= \theta$ be the arc required; then the area DAC $= \triangle$ BOA — sector COA $= \frac{1}{2}$AB . AO — $\frac{1}{2}$AC . AO $= \frac{1}{2}$ tan. $\theta - \frac{1}{2}\theta$, taking AO, the rad. $=$ 1. Again, area segment ACD $=$ sector AOC — $\triangle$ DOC $= \frac{1}{2}$ AC . AO — $\frac{1}{2}$ CD . DO $= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}$ sin. θ. cos. $\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}$ sin. 2θ. But, by the question, these areas are to be equal: therefore $\frac{1}{2}$ tan. $\theta - \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}$ sin. 2θ; or, by reduction, $\theta = \frac{1}{2}$ tan. $\theta + \frac{1}{4}$ sin. $2\theta = 56^{\circ}\ 34'\ 20\frac{1}{4}''$, as is easily found by tables of sines, tangents, and arcs, by the method of trial and error.

VII. Question, *ans. by Mr. Tho. Burn, of Woodburn, and Mr. John Walker, West Boldon.*

Let ABC be a triangle; AGB, BHC, CKA, equilateral triangles, described on the sides; and D, E, F, their centre of gravity; join FD, DE, EF, FA, AD, DB, BE, AH, and BK; since $\angle$ACK $= \angle$BCH, to each add $\angle$ACB, and we have $\angle$BCK $= \angle$ACH; but the sides AC, CH, are equal to the sides KC, CB, $\therefore$ the triangles BKC and AHC are equal in all respects, and AH $=$ BK: produce BD, BE, to L and M. Then, since D, E, are the centres of gravity of the equilateral triangles ABG, CBH, it is well known that $\angle$ABL $=$ CBM $= \frac{1}{2}$ ABC $= \frac{1}{2}$CBH $= 30^{\circ}$ and BD $= \frac{2}{3}$ BL and BE $= \frac{2}{3}$ BM; $\therefore$ the triangles BCM, ABL, are similar, and AB : BC $=$ BH :: BL : BM :: BD : BE. But, since $\angle$CBE $+$ ABD $= \angle$CBH, add $\angle$ABC to each, and we have $\angle$DBE $= \angle$ABH, $\therefore$ the triangles DBE, ABH, are similar. In like manner, the triangles AKB, ADF, are similar; hence AB : AH :: BD : DE, and AB : BK $=$ AH :: AD $=$ BD : DF; consequently DE $=$ DF. In like manner it may be shewn that DF $=$ FE; therefore the triangle DEF is equilateral. Q.E.D.

A similar demonstration will apply when the vertices G, H, K, are turned inward.

Otherwise, by Mr. Mason, Scoulton; and, upon the same principles, by *Messrs. J. Baines, Tho. Hindmarsh, and W. S. B. Woolhouse.*

Let ABC be the given triangle; D, F, E, the centres of gravity of the equilateral triangles described on AB, AC, BC, respectively. Join AD, AF, DF, DE, EF. Then the angle DAB $= 30^{\circ}$, as is also the angle FAC. Let, as is usual, AB $= c$, AC $= b$, BC $= a$; then AD $= \frac{1}{2}c$ sec. $30^{\circ} = \frac{c}{\surd 3}$, also AF $= \frac{b}{\surd 3}$, and angle DAF $=$ A $+ 60^{\circ}$. But DF$^2 =$ AD$^2 +$ AF$^2 - 2$AD . AF cos. DAF $= \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3}bc$ cos. $(60^{\circ} + A) = \frac{1}{3}(c^2 + b^2 - cb$ cos. A $+ cb$ sin. A $\surd 3) = \frac{1}{3}[c^2 + b^2 - \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + 2\surd 3$ $\surd \overline{s . (s-a)(s-b)(s-c)}\,] = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{2}{3}\surd 3$ $\surd \overline{s . (s-a)(s-b)(s-c)}$; where $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Here, since $a, b, c,$ are involved exactly in the same manner in

Figura 12

Insertando como imagen en GeoGebra la imagen que aparece en la demostración del Teorema de hace 200 años, (figura 12) observamos que la construcción coincide perfectamente (figura 13). No podía ser de otra forma tratándose de una ciencia exacta.

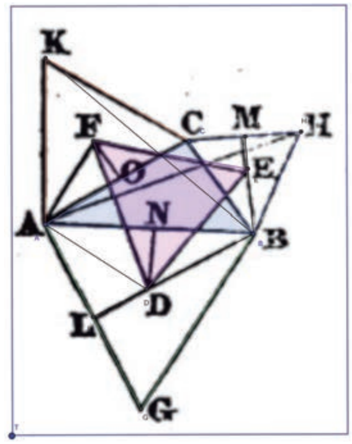


Figura 13. Construcción de GeoGebra superpuesta a la imagen de 1826

Dos demostraciones fueron publicadas (figura 12) en *El Diario de las Damas*.

La primera es la respuesta dada por Mr. Tho, Burn de Woodburn y Mr. John Walker, West Boldon a la cuestión planteada un año antes por Rutherford. Está basada en triángulos semejantes.

Traducimos la demostración íntegramente. Únicamente la anotación entre corchetes no apareció en la publicación original de la figura 12 ni los colores de las figuras 14 y 15.

Guía de la primera demostración

— Sean *ABC* un triángulo
— *AGB, BHC, CKA* triángulos equiláteros descritos sobre los lados del triángulo
— *D, E, F* son sus centros de gravedad
— Unimos los segmentos *FD, DE, EF, FA, AD, DB, BE, AH* y *BK*
— El ángulo *ACK* = ángulo *BCH*
— Añadiendo el ángulo *ACB* a los dos anteriores tenemos que el ángulo *BCK* = ángulo *ACH*
— Pero los lados *AC* y *CH* son iguales a los lados *KC* y *CB* respectivamente
— Deducimos que los triángulos *BKC* y *AHC* son iguales
— *AH* = *BK* con lo que se deduce la proporcionalidad de *BD, BE,* respecto a *L* y *M*
— Entonces desde *D, E,* que son centros de gravedad de los triángulos equiláteros *ABG* y *CBH*, es bien conocido el siguiente hecho:

Ángulo *ABL* = Ángulo *CBM* =
= 1/2 · Ángulo *ABC* = 1/2 · Ángulo *CBH* = 30°

— Y sabemos que [BL y BM son las medianas]

$$BD = 2/3 \cdot BL \text{ y } BE = 2/3 \cdot BM$$

— Lo que hace que los triángulos *BCM*, *ABL* sean semejantes.

— Además se puede visualizar que:

$$\text{Ángulo } CBE + \text{Ángulo } ABD = \text{Ángulo } CBH$$

— Tenemos que Ángulo *DBE* = Ángulo *ABH.*

— Entonces los triángulos *DBE* y *ABH son semejantes* (figuras 14 y 15)

— De la misma manera *AKB* y *ADF* son semejantes de donde se deduce que $DE = DF$

— Análogamente $DF = FE$ por tanto el triángulo *DEF* es equilátero. Como queríamos demostrar.

Y añade al final: «la demostración se aplicará cuando los vértices *G, H, K* son girados hacia el centro».

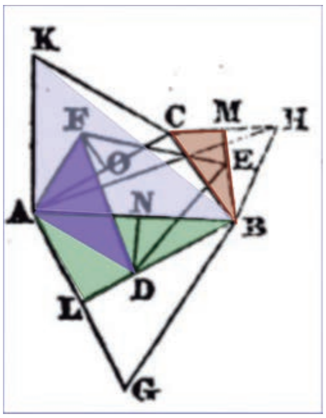


Figura 14

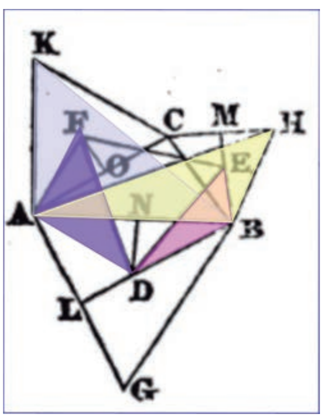


Figura 15

La segunda demostración publicada, es la respuesta de Mr Mason, Scoulton, Messrs, J. Baines, Hindmarsch y W. S. B. Woolhouse (figura 12).

Volvemos a mostrar entre corchetes las explicaciones necesarias para comprender fácilmente la demostración, remarcando que no aparecieron en la publicación original de 1826.

Guía de la segunda demostración

En el triángulo *ABC* los puntos *D, F* y *E* son los centros de gravedad de los triángulos equiláteros descritos sobre los lados AB, AC y BC respectivamente.

— Unimos los puntos *AD, AF, DF, DE, EF*.

— El ángulo *DAB* es de 30° y también el ángulo *FAC.*

— Nombrando los lados de la siguiente forma $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$;

— Obtenemos

$$AD = AD = \frac{1}{2} c \cdot \sec 30^\circ = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

[sec 30° denota secante de 30° porque

$$\cos(DAL) = \cos 30^\circ = \frac{c/2}{AD} \to AD = \frac{c/2}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} c \cdot \sec 30^\circ]$$

Además $AF = b/\sqrt{3}$, y el ángulo $DAF = A + 60°$.

Pero

$$DF^2 = AD^2 + AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF \cdot \cos(DAF) =$$
$$\frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3} \cdot c \cdot b \cdot \cos(60^\circ + A)$$

[Aplicando la fórmula del coseno de una suma obtenemos

$$\cos(60^\circ + A) = \cos 60^\circ \cdot \cos A - \operatorname{sen} 60^\circ \cdot \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \cdot \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} A$$

Sustituyendo en DF^2 tenemos que

$$DF^2 = \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3} \cdot c \cdot b \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos A - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} A\right)$$

Aplicando la propiedad distributiva

$$DF^2 = \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{3}b^2 - \frac{2}{3} \cdot c \cdot b \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos A - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \operatorname{sen} A$$

Simplificando y sacando 1/3 como factor común se deduce que]

— $DF^2 = \frac{1}{3}\left[c^2 + b^2 - c \cdot b \cdot \cos A + c \cdot b \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} A\right]$

[El Teorema del coseno dice que $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

Despejando $\cos A$ tenemos que

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Sustituyendo en la expresión

$$DF^2 = \frac{1}{3}\left[c^2 + b^2 - c \cdot b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot c \cdot b} + c \cdot b \cdot \sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} A\right]$$

En el triángulo *ABC*

$$\operatorname{sen} A = \frac{h_c}{b},\ h_c = b \cdot \operatorname{sen} A \text{ y Área}(ABC) = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Despejando $c \cdot h_c = 2 \cdot \text{Área}(ABC)$ y sustituyendo en la expresión de *DF*

$$DF^2 = \frac{1}{3}\left[c^2 + b^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + c \cdot \sqrt{3} \cdot h_c\right] =$$
$$= \frac{1}{3}\left[c^2 + b^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{Área}(ABC)\right]$$

Por la fórmula de Herón:

$$\text{Área}(ABC) = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

tenemos que]

$$DF^2 = \frac{1}{3} \cdot \left[c^2 + b^2 - \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - a^2\right) + \right.$$
$$\left. + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}\right]$$

— Haciendo operaciones obtenemos que:

$$DF^2 = \frac{1}{6} \cdot \left(c^2 + b^2 + c^2 + a^2\right) + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

De la misma manera en DE *y en* EF *obtenemos las mismas expresiones que con* DF.

Consecuentemente el triángulo DEF *es equilátero.*

Al finalizar estas dos demostraciones el editor anota:

Muy a pesar mío he omitido algunas demostraciones muy elegantes, especialmente la solución y corolarios del Sr. Isaac Brown.

Por esta razón vamos a incluir una tercera demostración que utiliza elementos geométricos muy sencillos de comprender y es esencialmente distinta a las anteriores.

Guía de la tercera demostración

Demostración basada en la mediatriz de los segmentos que unen *A, B* y *C* con el punto de corte de las rectas *AH, BK* y *CG*.

— Sea I el punto donde se cortan *AH* y *BK*.
— Sea *DF* la mediatriz de *AI, FE* la mediatriz de *CI* y *ED* la mediatriz de *BI*.
— Nos fijamos que en el triángulo *AFC*, el ángulo *FAC* es 30° ya que el ángulo *KAC* es de 60°, puesto que el triángulo *ACK* es equilátero.
— De la misma manera el ángulo *FCA* es de 30° ya que el ángulo *KCA* es de 60°.
— El triángulo *AFC* es isósceles y tiene dos ángulos de 30°, entonces el ángulo *AFC* es de 120°.
— Como *FD* es la mediatriz de *AI* los ángulos *AFD* y *DFI* son iguales, igualmente los ángulos *IFE* y *EFC*.
— De ello se deduce que 2·ángulo *DFI* + 2·ángulo *IFE* = 120°.
— Entonces ángulo *DFE* = ángulo *DFI* + ángulo *IFE* = 60°.
— Análogamente el ángulo *FDE* mide 60° y el ángulo *DEF* mide 60°.
— Hemos demostrado que el triángulo *DEF* es equilátero.

CreoGebra en movimiento

En el foro del primer curso on-line de GeoGebra básico realizado por el Instituto GeoGebra Maslama Al-Mayriti para la formación del profesorado, a José Luis Muñoz Casado se le ocurre preguntar:

—¿Sucederá lo mismo con los triángulos interiores?

—En la construcción original, se me ocurre dibujar los segmentos *AH, BK* y *CG*, aparece un punto misterioso, ¡qué mosqueo!

—También se me ocurre dibujar las circunferencias circunscritas a los tres triángulos equiláteros, de nuevo ese punto.

—Y me pregunto ¿quién es ese punto y qué propiedad tiene? ¿Sucede siempre?

Y jugando con la construcción anterior podemos conseguir visualizar el triángulo interior de Napoleón.

Si en un triángulo *ABC* se construyen triángulos equiláteros *interiores* sobre sus lados, los baricentros de dichos triángulos equiláteros determinan un triángulo equilátero (*DEF*) conocido como triángulo de Napoleón *interior*.

Actividad

— Para dibujar el triángulo interior de Napoleón basta intercambiar la posición de dos vértices del triángulo *ABC*.
— Utiliza la herramienta elige y mueve un punto.
— Desplaza el vértice *A* a la posición de *B* y el punto *B* a la posición donde se encontraba *A*. De esta forma los triángulos exteriores se convierten en triángulos interiores (figura 16) Y el triángulo DEF es ahora el triángulo interior de Napoleón.

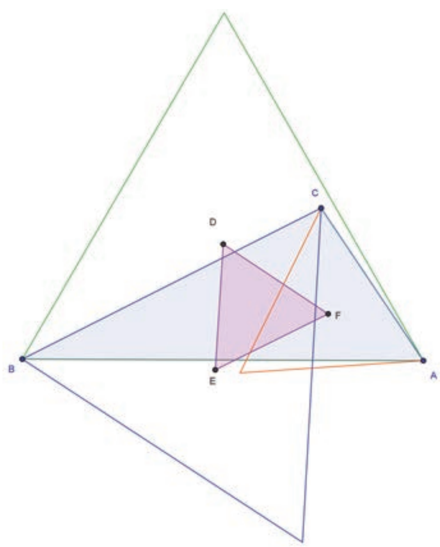


Figura 16. Triángulo interior de Napoleón

Los dos triángulos de Napoleón

Dibujando el triángulo exterior de Napoleón $D'E'F'$ y el triángulo interior de Napoleón DEF sobre un triángulo ABC obtenemos la figura 17.

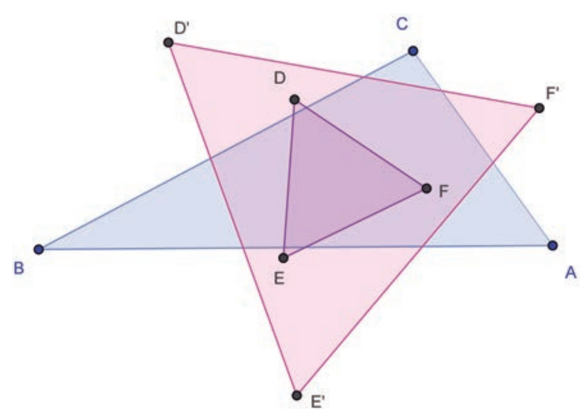


Figura 17. Triángulos interior y exterior de Napoleón

En el libro *Retorno a la Geometría* de Coxeter-Greitzer nos encontramos con el siguiente teorema:

> La *diferencia de las áreas* de los triángulos exterior e interior de Napoleón de cualquier triángulo ABC, es precisamente el *área de ABC*.

Actividades

— Comprueba el teorema en todos los triángulos *ABC* que puedas imaginar.

— Mueve los vértices del triángulo ABC para buscar los diseños de las figuras 18, 19 y 20.

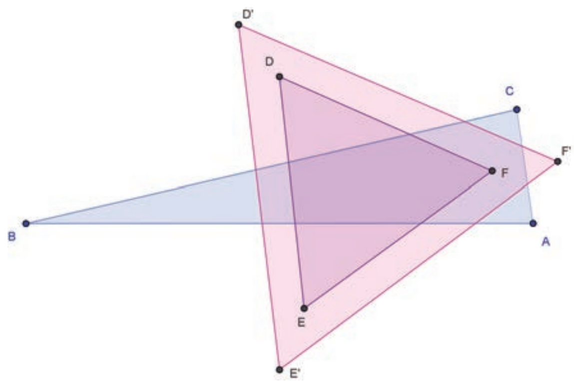


Figura 18

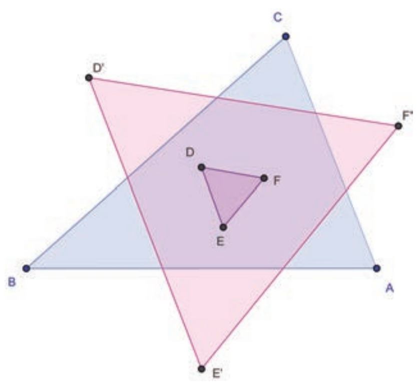


Figura 19

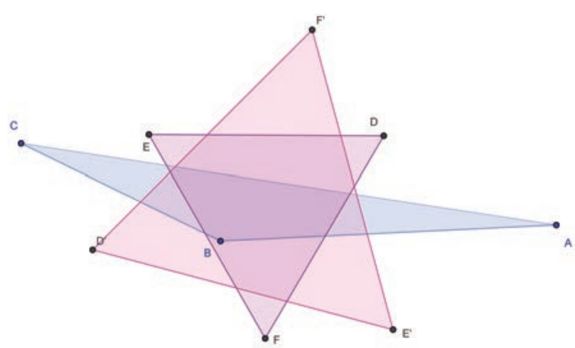


Figura 20

Con lo visto anteriormente ya podemos responder a José Luis.

> —¿Sucederá lo mismo con los triángulos interiores?

Sí. Sucede lo mismo, el triángulo que aparece se llama *Triángulo interior de Napoleón* y es equilátero.

Es de destacar que ya en la demostración que apareció en *El Diario de las Damas* de 1826 se indicaba al final del desarrollo de la misma que era cierta esta afirmación «cuando los puntos *D*, *E* y *F* están girados hacia el centro», el autor se estaba refiriendo a los triángulos equiláteros interiores construidos sobre los lados de *ABC*.

Actividad

Comprueba que el centro del triángulo exterior e interior de Napoleón coinciden en el mismo punto.

Todas estas imágenes se pueden visualizar en el libro digital CreoGebra <geogebratube.org>

> —En la construcción original, se me ocurre dibujar las rectas *HA, KB* y *GC*, aparece un punto misterioso [figura 21], ¡qué mosqueo!
>
> —También se me ocurre dibujar las circunferencias circunscritas a los tres triángulos equiláteros [figura 22], de nuevo ese punto.
>
> —Y me pregunto ¿quién es ese punto y qué propiedad tiene? ¿Sucede siempre?

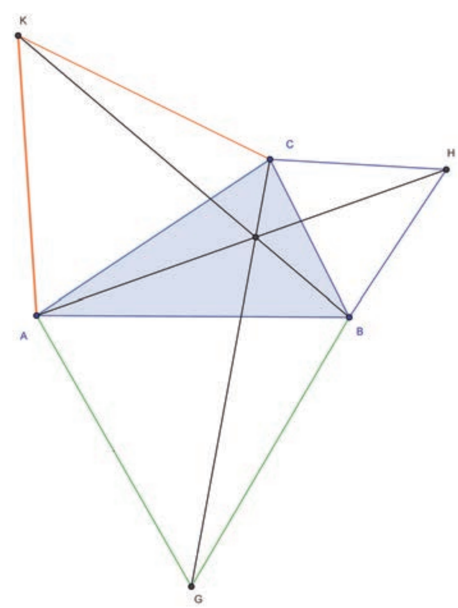


Figura 21

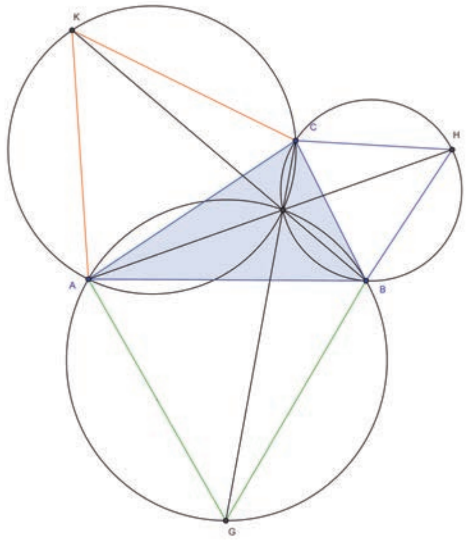


Figura 22

Primer punto isogónico

Revelamos varias sorpresas:

- Los segmentos *AH*, *BK* y *CG* miden lo mismo.
- *AH* y *BK* forman entre sí ángulos de 120°, al igual que *AH* y *CG* o *BK* y *CG*.
- El punto que hemos encontrado es el *primer punto isogónico* (figura 23), es decir desde él se ven los lados del triángulo *ABC* bajo un ángulo de 120° siempre que el triángulo tenga los ángulos menores a 120°.

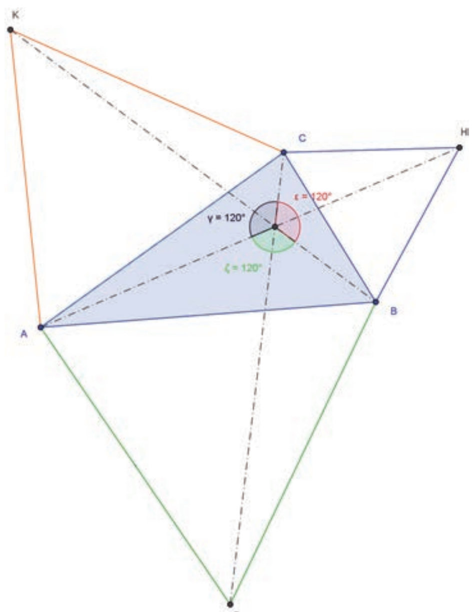


Figura 23

Construcción del primer punto isogónico

— Dibuja un triángulo *ABC*.
— Construye los triángulos equiláteros exteriores *ACK, ABG* y *BCH* sobre cada lado *AC, AB* y *BC* respectivamente (figura 23).
— El punto donde se cortan las rectas *BK, CG* y *AH* es el primer punto isogónico.

Actividad

Investiga dónde se encuentra el primer punto isogónico *I* del triángulo *ABC* según la medida de los ángulos *ABC*. Observarás que hay diferencias cuando el triángulo tiene un ángulo menor, igual o mayor a 120°.

— ¿Cuándo *I* está en el interior del triángulo *ABC*?
— ¿Cuándo *I* está sobre un vértice?
— ¿Cuándo *I* está en el exterior del triángulo *ABC*?

Segundo punto isogónico

En la actividad del apartado anterior habrás podido comprobar que cuando uno de los ángulos del triángulo *ABC* supera los 120° el punto intersección de las rectas *AH* y *BK*, *AH* y *CG*, *BK* y *CG* está *fuera* del triángulo *ABC*. En este caso se visualiza uno de los lados bajo un ángulo de 120° y los otros dos lados bajo un ángulo de 60°. A este punto se le llama *segundo punto isogónico* (figura 24).

El *segundo punto isogónico* es aquel desde el cual se ven dos lados del triángulo *ABC* bajo un ángulo de 60º y el tercer lado bajo un ángulo de 120º.

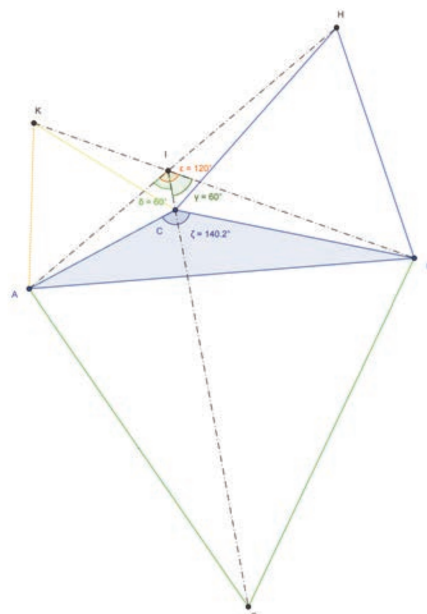


Figura 24

A partir de ahora vamos a llamar I_1 al primer punto isogónico e I_2 al segundo punto isogónico del triángulo *ABC*. En la construcción anterior el primer punto isogónico *I* se convierte en el segundo en el momento en que el ángulo del triángulo *ABC* supera los 120°, pero aún así lo vamos a seguir denotando por I_1.

Pensemos durante un momento… ¿Existirá otro punto que verifique esta propiedad?

Sí, existe y se encuentra en el semiplano que no contiene a *C* determinado por la recta *AB*.

Este punto se encuentra sobre el *arco capaz* de 120° del segmento *AB*.

Construcción del primer punto isogónico

- — Dibuja un triángulo *ABC* (figura 25).
- — Construye los triángulos equiláteros interiores *ACK*', *ABG*' y *BCH*' sobre cada lado *AC, AB* y *BC* respectivamente.
- — El punto donde se cortan las rectas *BK*', *CG*' y *AH*' es el *segundo punto isogónico.*

Guía de construcción

- — Dibuja un triángulo *ABC*.
- — Construye los triángulos equiláteros exteriores *ACK, ABG* y *BCH* sobre cada lado *AC, AB* y *BC* respectivamente.
- — El punto donde se cortan las rectas *BK, CG* y *AH* es el *primer punto isogónico.*
- — Sobre el mismo triángulo construye los triángulos equiláteros interiores *ACK*', *ABG*' y *BCH*' sobre cada lado *AC, AB* y *BC* respectivamente.
- — El punto donde se cortan las rectas *BK*', *CG*' y *AH*' es el *segundo punto isogónico.*
- — Nombra a los dos puntos anteriores con los nombres I_1 e I_2.
- — Activa el rastro de los dos puntos.
- — Mueve el vértice *C* de tal forma que los puntos isogónicos dejen el rastro según los distintos triángulos que se forman al desplazar *C* (con la herramienta elige y mueve).
- — Según la orientación de los vértices *A, B* y *C* y la medida de sus ángulos los puntos isogónicos I_1 e I_2 quedarán en el interior o en el exterior del triángulo *ABC*.
- — Comprueba que el lugar geométrico de los puntos del plano que describen los puntos isogónicos considerando todos los triángulos que tienen un lado fijo y los otros dos variables son dos circunferencias secantes (figura 26).
- — Si dejamos fijo el lado *AC* y desplazamos el vértice *B* obtendremos otras dos circunferencias secantes (figura 27).
- — Y lo mismo si dejamos fijo el lado *BC* y desplazamos el vértice *A* (figura 28).
- — La intersección de todos estos rastros nos ofrecen seis circunferencias secantes en los dos puntos isogónicos I_1 e I_2 .

Terminamos este ejercicio mencionando una maravillosa actividad de Rafael Losada Liste y José Luis Álvarez García del proyecto Gauss: 4.º ESO-Geometría-Polígonos, «Bajo el mismo ángulo». En

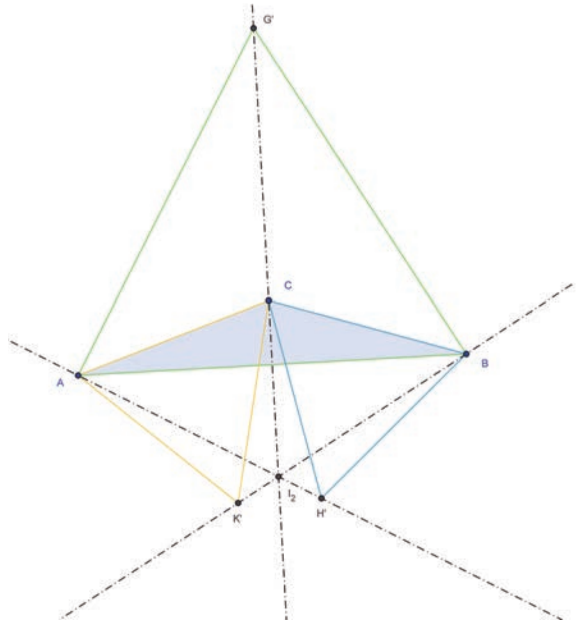


Figura 25

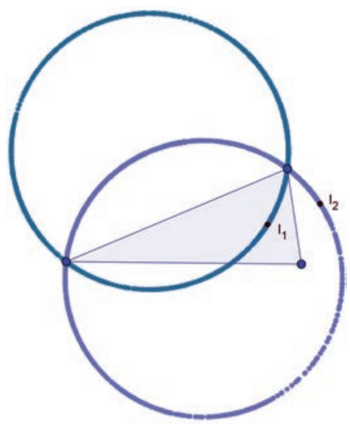


Figura 26

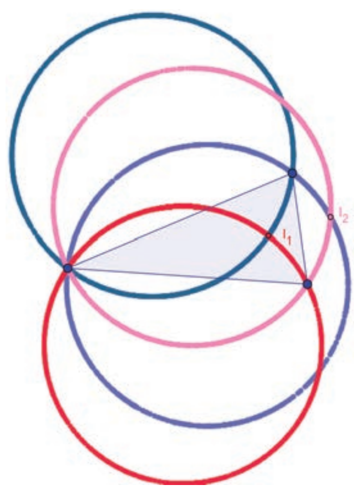


Figura 27

el escáner se puede observar un barrido de colores, cada color (rojo, verde y azul) muestra los puntos desde los cuales se ve con 60° o 120° uno de los lados del triángulo (figuras 29 y 30) y en blanco se encuentran los triángulos equiláteros exteriores e interiores sobre los lados del triángulo *ABC*.

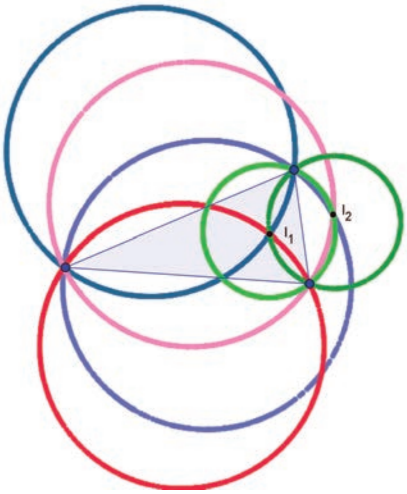


Figura 28

Figura 29

Figura 30

El problema de Fermat

> Dado un triángulo *ABC* determina un punto *I* interior al triángulo ABC que minimice la suma de las distancias a los vértices A, B y C.

El problema para localizar un *punto cuyas distancias a los vértices sean mínimas* se le atribuye a Pierre de Fermat (1601-1665). Se dice que él mismo se lo envió a Evangelista Torricelli (1608-1647) como un reto. Lo importante es que Torricelli lo resolvió y fue un discípulo suyo Vicenzo Viviani (1622-1703) quien lo publicó, en 1659, en nombre de su maestro. Hay otros que atribuyen el planteamiento y la solución de este problema a Jacob Steiner (1796-1863).

La solución del *problema de Fermat es el primer punto isogónico* I_1, este punto verifica que la suma de las distancias a los vértices es mínima.

Este es el primer punto notable que se encontró después de la época de Euclides y recibe el nombre de *punto de Fermat-Torricelli*.

Actividad

Investiga dónde está localizado el punto de Fermat-Torricelli según la medida de los ángulos del triángulo ABC (figura 31)

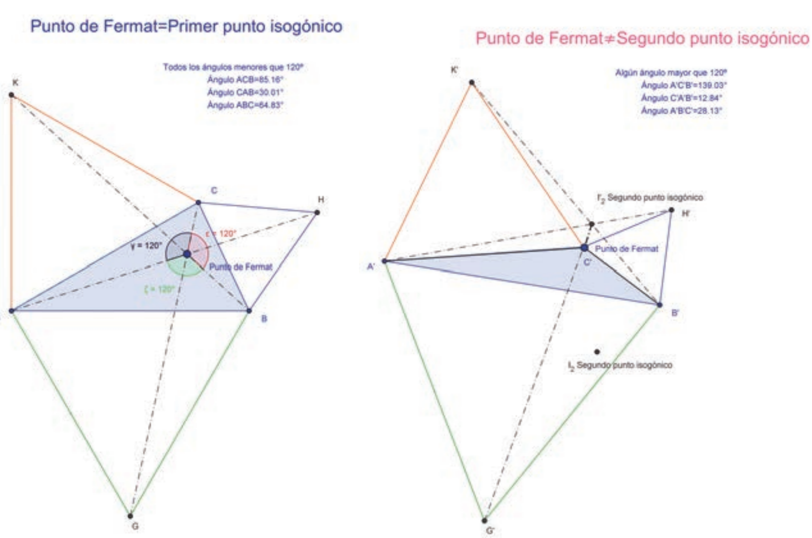


Figura 31

El lector, después de realizar el ejercicio anterior, comprobará que el Punto de Fermat se encuentra:

— En el interior del triángulo ABC si el mayor de los ángulos del triángulo no supera los 120°, en este caso coincide con el primer punto isogónico.
— En un vértice si el triángulo tiene un ángulo que mide exactamente 120°.
— En un vértice si el triángulo tiene un ángulo mayor que 120°.

Aplicaciones

El punto de Fermat soluciona algunas situaciones prácticas. Así, lo podemos utilizar:

— Para construir carreteras de mínima longitud que conecten tres o más ciudades.
— Para buscar el lugar donde se debe colocar un pozo de agua, por ejemplo en Kalalé, Benín, de tal forma que los africanos deban realizar un camino mínimo desde sus aldeas para conseguir el agua.
— Para establecer una oficina a la misma distancia de tres fábricas para minimizar los costes de trasportes.
— Para el diseño óptimo de circuitos eléctricos y redes de telecomunicaciones.
— Para conocer dónde se tiene que colocar un centrocampista de fútbol, ubicándose a una distancia estratégica frente a tres jugadores del equipo contrario.

Descubriendo la verdadera historia del triángulo

Napoleón era un entusiasta matemático, fascinado por la geometría, ciencia de gran importancia militar. Además sentía ilimitada admiración por los matemáticos franceses, asistió a clases de Louis Monge y de Pierre-Simón de Laplace al que nombró ministro del Interior durante un breve periodo del Consulado, y después senador.

Napoleón se rodeó en su corte de científicos, geógrafos, químicos, zoólogos y artistas, incluyendo el gran matemático Monge, al que nombró conde y senador.

Mascheroni fue ardiente admirador de Napoleón y de la Revolución Francesa. Ambos se conocieron en 1796 con la invasión francesa del norte de Italia y estrecharon una sólida amistad. La influencia de Mascheroni en el militar francés fue decisiva. Se dice que en 1797, mientras Napoleón estaba con Joseph Louis Lagrange y Pierre Simon de Laplace, el pequeño general sorprendió a ambos explicándoles la demostración del teorema que da nombre a este artículo de *CreoGebra*. Laplace comentó en esa ocasión:

> General, esperábamos de vos cualquier cosa, excepto lecciones de geometría.

Napoleón dio a conocer la obra de Mascheroni a los matemáticos franceses. En 1798, un año después de la primera edición italiana, ya se había publicado en París una traducción de la Geometría del Compasso.

A Bonaparte L'Italico

Io pur ti vidi coli invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimò pace,
Meco divider con attento guardo
Il curvo giro del fedel compasso.
E te pur vidi aprir le arcane cifre
D'ardui problemi col valor d'antico
Geometra Maestro, e mi sovvenne
Quando l'alpi varcasti Annibal nove
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L'anno di tue vittorie, anno che splende
Nell'abuso de' secoli qual sole.
Segui l'impresa, e coll'invitta mano
Guida all'Italia tua liberi giorni.

[*Y yo te vi con la mano invicta,*
Que partió los reinos y en Viena ordenó la paz,
Divisor de Meco con mirada atenta
Al curvo giro del fiel compás.
Y también te vi abrir arcanas cifras
En difíciles problemas con valor de antiguo
Geómetra maestro, y me hace recordar
Cuando los Alpes sometiste como Aníbal
Para liberar a tu querida Italia, y con gran
Rapidez pasó delante de mí
El año de tus victorias, año que brilla
En el paso de los siglos como el sol.
Sigue tu empresa, y con la mano invicta
Guía a tu Italia a sus días de libertad.]

Figura 32. Imagen de Mascheroni

Figura 33. Retrato de Napoleón como primer cónsul (1803) pintado por François Gérard

Referencias bibliográficas

Baum, J. (1986), *The Calculating Passion of Ada Byron*, Archon Books.

Cohen, G. (2005), *Le triangle: Trois points, c'est tout! HS n.º 24 Bibliothèque Tangente. L'aventure mathématique*. Éditions POLE, París.

Coxeter, H. S. M. (1993), *Retorno a la Geometría,* HSM Coxeter, Universidad de Toronto y SL Greitzer Universidad de Rutgers, DLS-EULER.

Horne, A. (2004), *The age of Napoleon. El tiempo de Napoleón. Breve historia universal.*

Lentz, T. (2012), *Correspondance générale publiée par la Fondation Napoléon*, tome duozième. La Campagne de Russie 1812, Librairie Arthème Fayard, París.

Perl, T. (1979), «The Ladies' Diary or Woman's Almanack, 1704-1841», *Historia Mathematica,* n.º 6, 36-53.

Referencias web

http://agrega.educacion.es/repositorio/24052012/dd/es_2012052412_9141449/eso_puntos_isogonicos/viviani_fermat_2/actividad.html

http://elpais.com/elpais/2016/09/16/el_aleph/1474027615_918655.html

http://miscelaneamatematica.org/Misc40/Cardenas_s.pdf

http://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/MundoMatematicas/Torricelli/

http://trazoide.com/glosario/punto-simediano/

http://www.bma.arch.unige.it/IT/AUTORI/it_autori_Mascheroni_L.html

http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_complex.shtml

http://www.historytoday.com/gemma-betros/napoleon-man

http://www.jupenoma.es/gauss/materiales_didacticos/eso/actividades/geometria/poligonos/viviani_fermat_2/actividad.html

http://www.matifutbol.com/es/triangulo.html

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086079901034

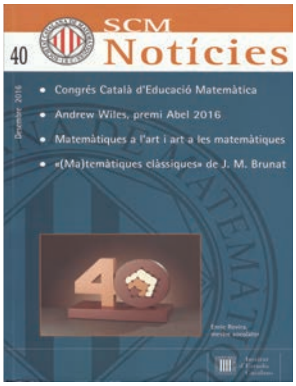
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/ContribucionesV7n12006/Napoleon/node5.html

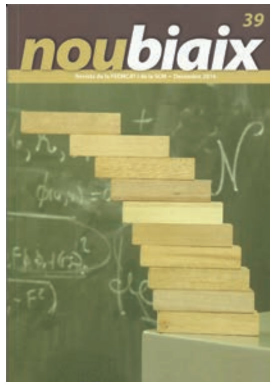
https://www.flickr.com/photos/8449304@N04/4301354026

Montserrat Diestro Tejeda
IES Salvador Dalí
<creogebra@revistasuma.es>

Publicaciones recibidas (1)

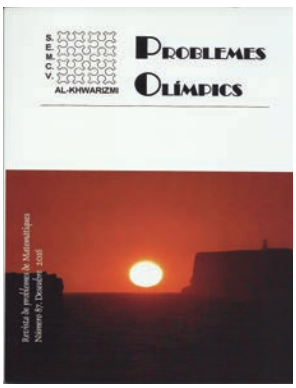
SCM/Notícies
Societat Catalana de Matemàtiques
N.º 40, desembre 2016
ISSN: 1696-8247





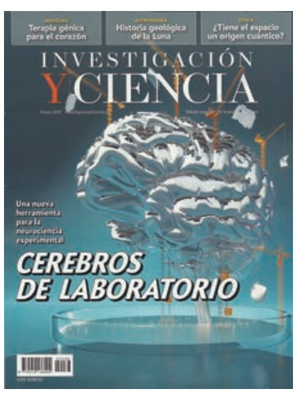
NouBiaix
Revista de la FEEMCAT i de la SCM
Nº 39 desembre 2016
Barcelona
ISNN : 2014-2021

Problemes Olímpics
SEMCV Al Khwarîzmî
n.º 87, desembre 2016
València
ISSN: 1578-1771



La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española
Vol. 19, n.º3,
Año 2016
Madrid
ISNN : 1138-8927

Investigación y ciencia
Prensa cientifica, S.A.
n.º 486, marzo 2017
Barcelona
ISSN: 02210136X



365 Juegos de lógica que te romperan la cabeza
Miquel Capó
Penguin Random House Grupo Editorial
2016
Madrid
ISBN: 978-84-9043-656-1
224 páginas