

Aprendiendo a resolver problemas en un contexto de juegos de estrategia

ANNA NAVARRO FARRÉ
JORDI DEULOFEU PIQUET

En este artículo se analizan las influencias del uso de los juegos de estrategia en el aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas en la educación secundaria. En concreto se analiza si, después de haber trabajado con pequeños juegos de estrategia en un taller de juegos, hay evidencias de cambios en distintos aspectos de la resolución de problemas: la comprensión del enunciado, la determinación de la solución del problema, las estrategias heurísticas utilizadas y en el lenguaje empleado para expresar las resoluciones de los problemas. Los resultados de la investigación muestran que las mejoras existen en todos los ámbitos estudiados aunque con diferente intensidad.

Palabras clave: Juegos de estrategia, Estrategias heurísticas, Resolución de problemas de matemáticas, Educación secundaria.

Learning Problem Solving in a Strategy Games Environment

The following assignment studies the influence on the use of strategy games in the learning of solving maths problems in Secondary Education. We have analysed specifically if, before working with little strategy games, there are some changes in the comprehension of the statement, in the solving of the problems, in the heuristic strategies used and in the language used to express the solution of the problems.

Keywords: Strategy games, Heuristic strategies, Solving math problems, Secondary education.

Las investigaciones sobre el uso de juegos matemáticos en relación con la enseñanza de las matemáticas han mostrado el interés del trabajo con juegos de estrategia para el desarrollo de heurísticas (Deulofeu, 1995; Corbalán, 1997; Mallart, 2008). Sin embargo, estas investigaciones no abordan, en general, una cuestión que nos parece relevante para poder considerar los juegos como una herramienta real para la enseñanza de las matemáticas. Esta problemática se puede formular así: ¿hasta qué punto el trabajo con juegos, y en particular los llamados pequeños juegos de estrategia, proporcionan un contexto que favorece el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos en general?

A partir de la problemática mencionada, hemos realizado una investigación (Navarro 2010, 2013), para analizar si la realización de un taller de pequeños juegos de estrategia con alumnos de la ESO era útil para mejorar su capacidad de resolver problemas de matemáticas y en concreto para qué aspectos y para qué niveles esta mejora era más significativa.

En este artículo nos proponemos, por un lado, mostrar algunos de los resultados de la investigación y, por otro, poner a disposición del profesorado un taller de pequeños juegos de estrategia.

Sobre los pequeños juegos de estrategia y su relación con los problemas

Del amplio abanico de situaciones derivadas de los juegos educativos matemáticos nos hemos centrado en los llamados juegos de estrategia. Estos juegos, para dos jugadores, tienen las siguientes características: son de corta duración, sin intervención del azar, y, de acuerdo con la Teoría de Juegos, existe, en general, una estrategia ganadora, es decir, un conjunto de instrucciones que nos permiten decidir en todo momento y en cualquier situación cómo debemos jugar, que permite ganar a uno de los dos jugadores, el primero o el segundo en jugar (Corbalán y Deulofeu, 1998).

Esta tipología de juegos, como han mostrado investigaciones anteriores (Corbalán, 1997) son especialmente interesantes por el hecho de que su desarrollo y análisis tiene una gran similitud con la resolución de problemas, de manera que es posible establecer un paralelismo entre las fases de resolución del juego con las correspondientes a la resolución de un problema. En efecto, la comprensión del problema (lo que nos pide y los datos que nos da) se corresponde con la comprensión del juego: su objetivo y sus reglas. El diseño de un plan de resolución del problema, tiene relación con la determinación de estrategias para intentar conseguir el objetivo del juego. La ejecución del plan se corresponde con la implementación de las estrategias y, finalmente, la verificación de la solución del problema es similar a la validación de la estrategia ganadora, que es la que resuelve el juego.

Diseño de la investigación

Nuestra investigación se centra en el análisis de resoluciones de problemas realizadas por alumnos de secundaria antes y después de trabajar con juegos de estrategia. Para realizar este estudio, hemos diseñado un instrumento de recogida de datos formado por cuatro problemas, cuya

presentación se realizará más adelante cuando presentemos el análisis cualitativo de los datos.

Asimismo hemos escogido una muestra de alumnos de secundaria (alumnos de 1.º, 2.º y 3.º de ESO, de un mismo instituto público de Cataluña, y alumnos, también de secundaria, que siguen un programa de estimulación del talento en matemáticas (ESTALMAT). La muestra está formada en total por 103 alumnos.

Por otra parte, hemos diseñado un taller de juegos de estrategia, cuya resolución tiene elementos comunes, especialmente en cuanto al tipo de heurísticas, la resolución de los problemas.

La secuencia para la recogida de datos ha sido la siguiente:

- Pasar, una primera vez, el cuestionario de problemas en el conjunto de la muestra.
- Realizar un taller con los juegos seleccionados de 6 sesiones de una hora (en el caso de ESTALMAT una única sesión de 3 horas). En este taller, además de conocer los juegos, practicarlos en parejas y proponer el descubrimiento de posibles estrategias ganadoras, hemos puesto especial énfasis en la verbalización de cada una de las principales heurísticas que nos han permitido resolver los distintos juegos.
- Pasar nuevamente el mismo cuestionario de problemas. El tiempo transcurrido entre las dos pruebas fue de 6 semanas. Por tanto, hemos recogido los datos del protocolo de problemas en dos fases: la fase 1, antes de trabajar los juegos y la fase 2, después de trabajarlos.
- Realizar una entrevista con una muestra reducida (25 alumnos), seleccionada entre los alumnos que habían mostrado mejoras significativas en la fase 2.

El análisis se ha centrado en la comparación de los resultados de las dos pruebas. Para poder comparar las dos fases y valorar la mejora, no nos hemos fijado solo en el resultado de la resolución (bien o mal), sino que hemos considerado 5 características de los problemas para el análisis de sus resoluciones:

- la respuesta subjetiva que cada alumno hace sobre si ha resuelto el problema.

- la respuesta objetiva de si han resuelto efectivamente el problema.
- la comprensión del enunciado del problema.
- la estrategia/as heurística/as utilizada/das para resolver el problema
- la expresión de la resolución y el tipo de lenguaje matemático utilizado.

Una primera parte del análisis ha sido de carácter cuantitativo. Para poder cuantificar las variaciones de las resoluciones en cada fase, hemos definido tres índices llamados: índice de comprensibilidad, índice de facilidad e índice de análisis.

La comprensibilidad hace referencia a la capacidad para entender el problema (es decir, entender el enunciado y poder resolver el problema). Un problema es más comprensible cuanto mayor es el porcentaje de respuestas que muestran una comprensión del enunciado, así como el porcentaje de alumnos que dicen que han resuelto el problema y efectivamente ha sido así, total o parcialmente.

La facilidad se refiere a las dificultades para resolver el problema, total o parcialmente. Es lo que recoge si han encontrado o no una solución (total o parcialmente), con independencia de lo que crea el alumno.

Finalmente, el índice de análisis sirve para cuantificar la aparición de las heurísticas esperadas en la resolución de cada problema.

A partir de los resultados obtenidos, hemos comparado las diferencias entre las dos fases para cada problema, de cada grupo y de la muestra

| Juego | Estrategias heurísticas previstas |
|---------------------------|---|
| Juego del 15 | Hacer un estudio sistemático de todos los casos posibles Utilización de la simetría numérica |
| Quitar fichas | Empezar por el final |
| Llegar el primero o reina | Empezar por el final Utilizacióne la simetría |
| Fichas en línea | Utilización de la simetría |
| Margarita | Utilización de la simetría |

Tabla 1. Principales estrategias para cada uno de los juegos del taller

total. También hemos realizado, para cada característica definida, un análisis de la mejora global por niveles, obtenida de las mejoras en cada problema.

Finalmente, hemos realizado un análisis cualitativo que ha consistido en un estudio de casos, de alumnos con cambios significativos, para exponer ejemplos de mejoras de las resoluciones de los problemas después de trabajar los juegos y mostrar así evidencias concretas de la influencia del uso de juegos en la resolución de los problemas.

El taller de juegos

Los cinco juegos propuestos son los siguientes:

Juego del 15. Es un juego para dos jugadores. Tenemos nueve fichas numeradas del 1 al 9. En un tablero cuadrado de 9 casillas (3×3), cada jugador a su vez coloca una ficha en la casilla vacía que quiera. Gana el jugador que forma línea recta de 3 fichas que sumen 15.

Sacar fichas (o el 14 gana). Es un juego para dos jugadores. Tenemos catorce fichas iguales sobre la mesa y cada jugador, a su vez retira una o dos fichas, a su elección. Gana el jugador que consigue sacar la última ficha.

Llegar el primero (o la reina). Es un juego para dos jugadores. En un tablero cuadrado de 64 casillas (8×8), el primer jugador coloca una ficha en la casilla que quiera y a partir de ahí, de manera alternativa, cada jugador a su vez va moviendo la ficha tantas casillas como desee (como mínimo una), en sentido horizontal hacia la izquierda, vertical hacia abajo, o en diagonal hacia abajo y hacia la izquierda. Gana el jugador que consigue llevar la ficha a la casilla inferior izquierda.

Fichas en línea. Es un juego para dos jugadores. Tenemos un tablero rectangular de una sola fila con 9 casillas (9×1) y nueve fichas, una en cada casilla. Cada jugador, a su vez, saca una o dos fichas, pero en el caso de ser dos solo las puede quitar si están juntas (son vecinas). Gana el jugador que consigue llevarse la última ficha.

Margarita. Es un juego para dos jugadores. En un tablero en forma de margarita de nueve pétalos ponemos una ficha en cada pétalo. Cada jugador, a su vez, saca una o dos fichas, pero en

el caso de ser dos deben estar juntas. Gana el jugador que consigue llevarse la última ficha.

Si analizamos las estrategias heurísticas que permiten resolver cada uno de los juegos, podemos sintetizarlas en la tabla 1.

En el taller, los alumnos jugaban en parejas, y su objetivo era encontrar la estrategia ganadora; cuando creían que la tenían la validaban jugando con el profesor y a continuación escribían la estrategia encontrada. Después de cada juego se hizo una puesta en común, discutiendo las estrategias descubiertas y verbalizando las estrategias heurísticas más adecuadas para encontrar la estrategia ganadora. El objetivo de la puesta en común era promover una reflexión en los alumnos sobre el tipo de heurística más adecuado para encontrar la estrategia ganadora.

Resultados cuantitativos de la investigación

Los resultados cuantitativos nos han permitido constatar que globalmente hay una mejora significativa ya que todos los índices estudiados (la comprensibilidad, la facilidad y el índice de análisis) aumentan para la muestra total de alumnos en todos los problemas en la segunda fase respecto a la primera, tal como muestra la tabla 2.

Una primera lectura de la tabla 2 permite afirmar que, después de trabajar los juegos, los alumnos entienden mejor el enunciado de los proble-

| | Fase 1 | Fase 2 |
|--|--------|--------|
| Suma de los índices de comprensibilidad de cada problema | 1,48 | 2,11 |
| Suma de los índices de facilidad de cada problema | 0,87 | 1,44 |
| Suma de los índices de análisis de cada problema | 0,4 | 1,01 |

Tabla 2. Evolución de los índices de la muestra global entre la primera y la segunda fase

mas, los resuelven mejor y, en general, utilizan más estrategias heurísticas adecuadas para resolverlos. Sin embargo, este incremento varía según los problemas y los niveles. Más allá de esta mejora general, lo que nos ha interesado es analizar con más detalle las características que pueden explicar el incremento de los distintos índices. Por ello, estos resultados alentadores nos han llevado a hacer un estudio cualitativo para ver cuál es el sentido de las mejoras. En este artículo nos centraremos en el índice de análisis, es decir, en las mejoras relacionadas en relación al uso de estrategias heurísticas apropiadas para resolver los problemas. Antes de pasar al análisis cualitativo, en la tabla 3, se exponen los resultados que corresponden al índice de análisis para cada nivel.

Resultados cualitativos de la investigación

Para mostrar las características de las mejoras constatadas cuantitativamente presentaremos varios ejemplos de alumnos de la muestra donde esta mejora se hace evidente y concretamente el uso de heurísticas es más adecuado.

En concreto presentamos cuatro ejemplos, correspondientes a 4 alumnos diferentes, uno para cada problema. De entre los alumnos que mostraron mejoras evidentes hemos seleccionado uno de cada uno de los cursos para mostrar diferentes mejoras en todos los niveles.

| Problema | Índice An. 1 ESO II-I | Índice An. 2 ESO II-I | Índice An. 3 ESO II-I | Índice An. Estalmat II-I |
|----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------------------------|
| P1 | 0,00 | 0,00 | 0,07 | 0,49 |
| P2 | 0,13 | 0,33 | 0,31 | 0,04 |
| P3 | 0,18 | 0,05 | 0,01 | 0,06 |
| P4 | 0,12 | 0,17 | 0,13 | 0,39 |

Tabla 3. Evolución del índice de análisis para cada nivel entre la primera y la segunda fase

PROBLEMA 1

(a) Suma los números del 1 al 100. (b) ¿Puedes aplicar lo que has hecho en el apartado anterior para sumar ahora los números del 1 al 75? Hazlo y explica las diferencias.

Juan, alumno de ESTALMAT, al tratar de resolver el apartado (a) del Problema 1, en la fase 1, hace sumas parciales y no llega a la solución correcta (el error se produce en la última suma parcial donde pone 1 en lugar de 100 y por eso el resultado le da 4951 en lugar de 5050). Además, no hace el apartado (b) del problema.

En la fase 2, utiliza una estrategia totalmente diferente ya que utiliza la simetría numérica, que le permite llegar a la solución. Además, en la segunda fase resuelve el apartado b utilizando una estrategia similar, aunque no llega a un resultado correcto ya que no identifica el problema derivado del hecho de que el número de términos es impar.

Este alumno, en la entrevista para conocer su opinión sobre si los juegos le habían ayudado, ha respondido:

Para hacer el problema 1 me he acordado del juego del 15 y esto me ha ayudado.

$$\begin{aligned}
 0-9 &= 45 \\
 10-19 &= 100+45 \\
 20-29 &= 200+45 \\
 30-39 &= 300+45 \\
 &\dots \\
 90-99 &= 900+45 \\
 99-100 &= 1 \\
 0-100 &= \boxed{4951}
 \end{aligned}$$

Figura 1. Alumno de ESTALMAT, problema 1, fase 1, apartado (a)

Problema 1

a)

$$\overbrace{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 95, 96, 97, 98, 99, 100}^{50}$$

$$49 \cdot 100 + 100 + 50 = 50 \cdot 100 + 50 = 5000 + 50 = 5050$$

b)

$$\overbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, 70, 71, 72, 73, 74, 75}^{37, 38}$$

$$37 \cdot 76 = \boxed{2.812}$$

La diferencia, es que los grupos no son de 100, sino de 76, y al ser impar, el 50 que antes sobraba ahora no sobra.

Figura 2. Alumno de ESTALMAT, problema 1, fase 2: «La diferencia, es que los grupos no son de 100, sino de 76, y al ser impar, el 50 que antes sobraba ahora no sobra».

PROBLEMA 2

Si solo podemos ir hacia la derecha y hacia abajo, ¿cuántos recorridos diferentes hay para ir de A a I sin pasar dos veces por el mismo sitio?

| | | |
|---|---|---|
| A | B | C |
| D | E | F |
| G | H | I |

Marta, alumna de 2.º de la ESO, al tratar de resolver el problema 2 en la fase 1, no lo resuelve correctamente, ya que sólo identifica (dibuja) dos de los seis caminos posibles para ir desde A hasta I (figura 3).

En cambio, en la segunda fase, Marta escribe los seis caminos posibles, que es la solución correcta del problema, aunque al dibujarlos olvida uno (figura 4).

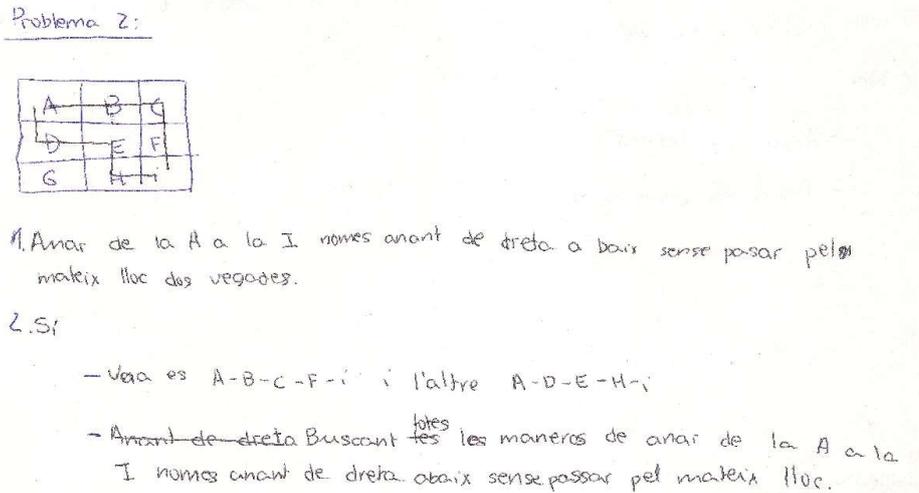


Figura 3. Marta, alumna de 2.º de la ESO, problema 2, fase 1: «Una es A-B-C-F-I y la otra A-D-E-H-I»

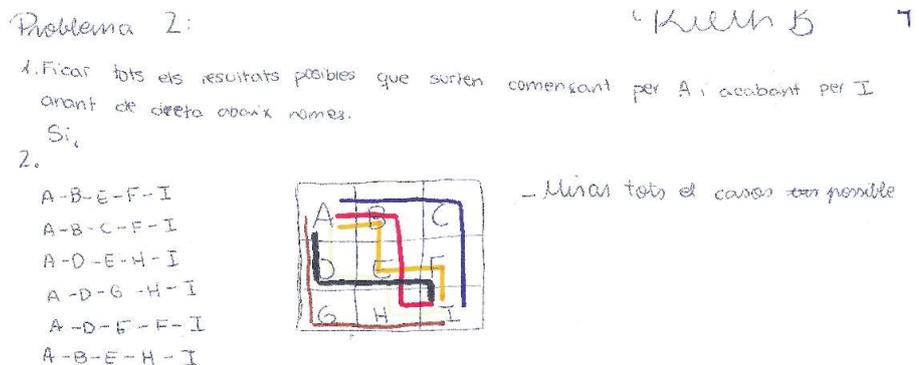
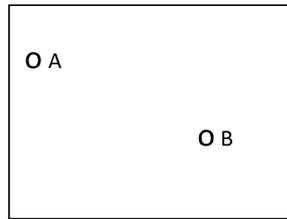


Figura 4. Marta, alumna de 2.º de la ESO, problema 2, fase 2: «1. Poner todos los resultados posibles que salen comenzando por A y acabando por I yendo de derecha abajo solamente». «-Mirar todos los casos posibles».

PROBLEMA 3

¿En qué dirección debemos impulsar la bola A para que toque al lado y luego toque la bola B?



Luis, alumno de 1.º de la ESO, al tratar de resolver el Problema 3 en la fase 1, dibuja tres recorridos posibles sin justificar la respuesta y sin que podamos intuir que ha utilizado la simetría (figura 5).

En cambio, en la segunda fase, el alumno no sólo hace un dibujo mucho más preciso que por sí mismo ya muestra una resolución correcta, sino que además justifica su construcción en la que utiliza la simetría, aunque no menciona este término (figura 6).

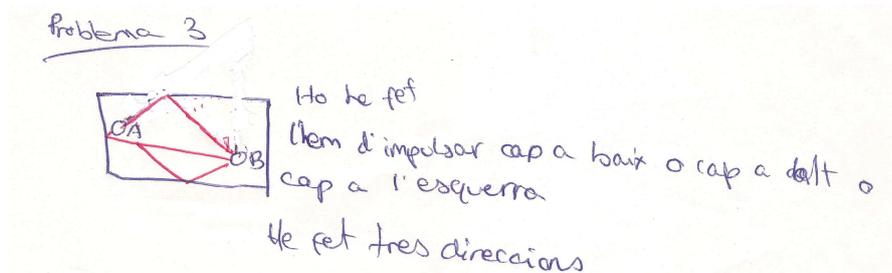


Figura 5. Luis, alumno de 1.º de la ESO, problema 3, fase 1:
«Hemos de impulsar-lo hacia abajo o hacia arriba o hacia la izquierda.
He hecho tres direcciones».

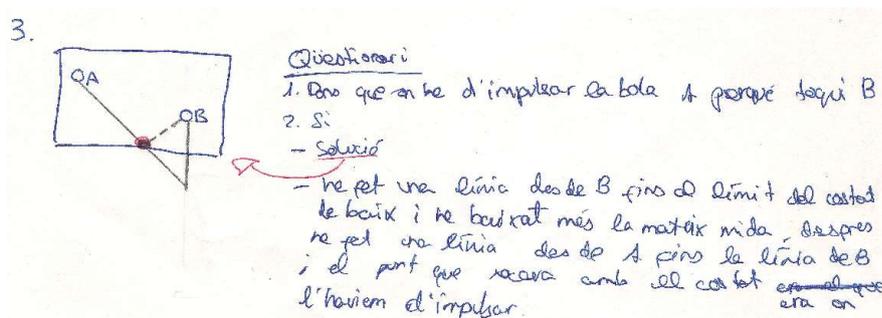


Figura 6. Luis, alumno de 1.º de la ESO, problema 3, fase 2:
«He hecho una línea desde B hasta el límite del lado de abajo y he bajado más la misma medida, después he hecho una línea desde A hasta la línea de B y el punto que tocaba con el lado era donde teníamos que impulsarlo».

PROBLEMA 4

De una cantidad sacamos la mitad más uno, de lo que queda sacamos la mitad más uno, de lo que queda sacamos la mitad más uno, de lo que queda, de nuevo, sacamos la mitad más 1 y queda 1. ¿Cuál es la cantidad inicial?

Joana, alumna de 3.º de ESO, al resolver el problema 4 en la fase 1 (figura 7), da una cantidad inicial incorrecta sin justificar la respuesta y además su solución no tiene sentido en el contexto del problema, ya que corresponde a un número negativo. En cambio, en la segunda fase, resuelve el problema correctamente utilizando la heurística de empezar por el final, y de esta manera obteniendo los diferentes resultados intermedios, justificando que empieza a hacer el problema por el final (imagen 8).

Esta alumna, en la encuesta para conocer su opinión sobre si los juegos le habían ayudado, respondió:

Me han ayudado los juegos porque me han dado la idea de empezar por el final.

Conclusiones

El conjunto de resultados obtenidos en nuestro estudio (Navarro, 2013) nos han permitido llegar a la conclusión de que trabajar con juegos de estrategia con alumnos de secundaria es una buena herramienta para la mejora del aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas. De acuerdo con los datos del estudio, después de trabajar con pequeños juegos de estrategia, los alumnos encuentran más fáciles los problemas, comprenden mejor el enunciado, se incrementa el uso de heurísticas apropiadas, utilizan lenguajes más adecuados y resuelven mejor los problemas.

En concreto, con respecto al índice de análisis de las estrategias heurísticas, este aumenta para la muestra global, en todos los problemas, en la segunda fase. Sin embargo, esta mejora depende de los grupos y de los problemas. Podemos afirmar que la estrategia heurística que más utilizan antes de trabajar los juegos es el estudio de casos (habitualmente de manera no sistemática y a menudo no completa).

4 -
1- tens que buscar un numero que fent operacions et donat
2- 51
Resp si la solucio es -14

Figura 7. Joana, alumna de 3.º de la ESO, problema 4, fase 1:
«Tienes que buscar un número que haciendo operaciones te dé...»
«La solución es -14»

$x - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = y$ $y = \left(\frac{y}{2} + 1\right) = 2$ $z = \left(\frac{z}{2} + 1\right) = 4$ $a = \left(\frac{a}{2} + 1\right) = 1$
 $a = 6$ La solució es 46
 Es comença pel final hi vas trobant els nombres corresponents.
 $z = 10$ sempre el nombre següent es el doble d'aquest + 2.
 $y = 22$
 $x = 46$

Figura 8. Joana, alumna de 3.º de la ESO, problema 4, fase 2:
«La solución es 46»
«Se comienza por el final y vas encontrando los números correspondientes.
Siempre el número siguiente es el doble de este más 2»

Después de trabajar los juegos, aunque bastantes alumnos siguen utilizando el estudio de casos, este es a menudo completo y con características de sistematización. Por otra parte, las estrategias heurísticas cuyo uso se incrementa son: empezar el problema por el final, uso de la simetría numérica y uso de la simetría geométrica, en este orden. Por tanto, podemos concluir que, después de trabajar los juegos, los alumnos, en general, utilizan más y más adecuadas estrategias heurísticas para resolver los problemas de matemáticas.

En cuanto a los factores que han podido intervenir en el aumento del índice de análisis de las estrategias heurísticas, pensamos que el trabajo con los juegos les ha permitido ver y verbalizar las diferentes heurísticas que luego han podido utilizar en la resolución de problemas.

La mejora es mayor en el grupo de ESTALMAT, a pesar de que este grupo parte de resultados más altos en la fase 1. Esto es debido, seguramente, a la alta capacidad de aprendizaje de estos alumnos. Por otro lado, que la mejora sea más alta en el grupo de 2.º que en los otros grupos de la ESO nos indica que este puede ser un recurso adecuado para aprender aquellas heurísticas de resolución de problemas directamente relacionados con los juegos de estrategia, lo que concuerda con las indicaciones del currículum de matemáticas de la ESO en Cataluña, que recomienda el uso de los pequeños juegos de estrategia en el primer ciclo de la ESO (Generalitat de Catalunya, 2007).

Referencias bibliográficas

- BISHOP, A. (1998), «El papel de los juegos en educación matemática», *Uno*, 18, 9-19.
- BRIGHT, G. W., J. G. HARVEY y M. M. WHEELER, (1985), «Learning and Mathematics Games.», *Journal for Research in Mathematics Education*, Monograph 1, NCTM.
- CORBALÁN, F. (1997), *Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de Estrategias y tipología de jugadores*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
- CORBALÁN, F., y J. DEULOFEU (1998), «Juegos manipulativos en la Enseñanza de las matemáticas», *Uno*, n.º 7, 71-80.
- DEULOFEU, J. (1995), «Los pequeños Juegos de Estrategia en la Enseñanza de las matemáticas. ¿Por qué?, ¿Para qué?», *Actas de las VII JAEM*, Madrid.
- (1999), «Recreaciones, juegos y Actividades matemáticas», *Uno*, n.º 20, 89-101.
- (2001), *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*, Planeta, Barcelona.
- DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ (2007), *Currículum educació secundària obligatòria*, Generalitat de Catalunya.
- EDO, M., y J. DEULOFEU, (2006), «Investigación sobre juegos, interacciones y construcciones de conocimientos matemáticos», *Enseñanza de las Ciencias*, 24 (II), 257-268.
- GAIRÍN, J. (1990), «Efectos de la utilización de los juegos Educativos en la Enseñanza de las matemáticas», *Educación*, n.º 17, 105-188.
- GÓMEZ-CHACÓN, I. M. (1992), «Los juegos de estrategia en el currículum de matemáticas», *Apuntes I.E.P.S.*, n.º 55, Narcea, Madrid.
- GUZMÁN, M. de (1984), «Juegos matemáticos en la Enseñanza», *Actas de las IV JAEM*, Sta. Cruz de Tenerife.
- (1989), «Juegos y matemáticas», *Suma*, n.º 4, 61-64.
- MALLART, A. (2008), *Estrategias de mejora para la resolución de problemas con alumnos de segundo de ESO: uso de la matemática recreativa en las fases de abordaje y de revisión*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
- NAVARRO, A. (2010), *Juegos de estrategia y resolución de problemas de matemáticas*, Trabajo de investigación del programa de doctorado en didáctica de las matemáticas y las ciencias, Universidad Autónoma de Barcelona (no publicado).
- (2013), *La influencia del uso de juegos de estrategia en el aprendizaje de la resolución de problemas de matemáticas a la educación secundaria*, Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.
- PUIG, L. (2008), «Presencia y ausencia de la resolución de problemas en la investigación y el currículum», *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Badajoz.

ANNA NAVARRO FARRÉ

Institut Campclar (Tarragona)

<anna_navarro_farre@hotmail.com>

JORDI DEULOFEU PIQUET

Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals (UAB)

<jordi.deulofeu@uab.cat>