suma+ 81
Secciones
Marzo 2016
pp. 79-84

A la luz de un eclipse: de un punto al espacio sideral

José Luis Muñoz Casado

Comenzamos esta sección *CreoGebra* con gran ilusión y con una enorme responsabilidad. Geogebra es un software ampliamente extendido, y por eso sabemos que las propuestas que aquí realicemos serán miradas con lupa. Nuestra idea es presentar una serie de actividades para realizar con alumnos en un aula de informática o para mandar al alumno hacer en casa. Entre los objetivos generales de las actividades propuestas siempre estarán fomentar el uso de cuatro verbos: ver, tocar, investigar y descubrir.

Presentamos una actividad muy sencilla de realizar con los alumnos pero que permite desarrollar muchas facetas matemáticas en el alumno. Planteada para 3.º de ESO nos permitirá ver múltiplos y divisores, explorar las relaciones que aparecen cuando asignamos a ciertos elementos geométricos dichos múltiplos, investigar sobre como obtener ciertos patrones y descubrir lo que hay detrás de un eclipse.

Primera parte

Una de las muchas cosas que ofrece Geogebra es la posibilidad de empezar a caminar con un concepto muy sencillo en apariencia e ir descu-

CreoGebra

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2015 y aceptado en enero de 2016

briendo poco a poco aspectos que al principio pasan inadvertidos.

En esta actividad comenzamos con la idea de mover un punto alrededor de otro siempre a una distancia fijada y ver su trayectoria. Obviamente esa trayectoria es una circunferencia (figura 1). Esta simple idea nos permitirá introducir múltiples conceptos e ideas.

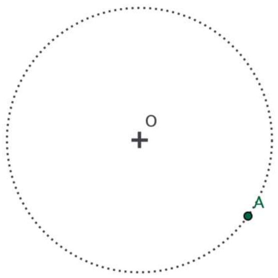

Figura 1

Guía de construcción

Repetimos el proceso tomando como centro el punto *A*, obteniendo la circunferencia *d* y el punto *B* en *d*. Añadimos la opción de velocidades (figura 2).

Los alumnos ya están en condiciones de empezar a *jugar*.

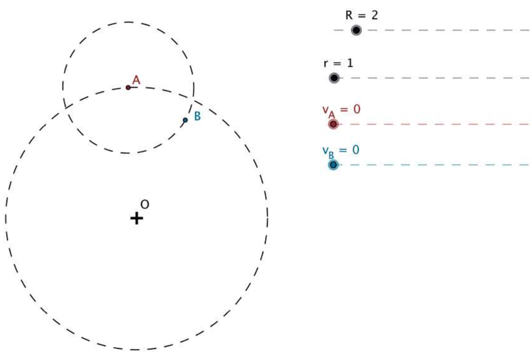

Figura 2. Deslizador tipo entero, v_A, con valor mínimo 0 y valor máximo 10

Actividades

— Coloca los deslizadores *R*, *r* y v_B con valores 2, 1 y 0 respectivamente.

— Coloca el deslizador v_A en 1. Describe lo que sucede. Prueba con otras velocidades de v_A.

— Coloca el deslizador v_B en 1. Describe lo que sucede. ¿Por qué salen circunferencias concéntricas?

— Coloca el deslizador v_B en 2. ¿Cómo describirías esa curva que sale?

— Explora otras velocidades y otros radios (tabla 1).

R	*R*	v_A	v_B	*Descripción imagen*	*Imagen*
1	2	1	1		
1	3	1	1		
1	*n*	1	1		
1	2	1	2		
1	3	1	2		
1	*n*	1	2		
1	4	1	3		
1	4	1	4		
1	4	1	*n*		
1	4	2	3		
1	4	2	4		

Tabla 1

Las posibilidades son numerosas, y además hay diferencias sustanciales si $v_B > v_A$ o $v_B < v_A$.

En el primer caso, $v_B > v_A$, observamos dibujos como los de la figura 3.

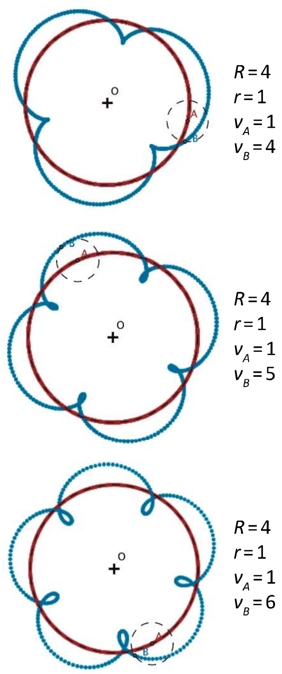

Figura 3

En todos los casos se observa un patrón que el alumno debe descubrir, el número de *pétalos* o lazos será $v_B - v_A$ y el número de vueltas que el punto B necesita para cerrar la figura v_B / v_A.

Una vez llegado a este punto podemos plantear al alumno el reto de conseguir los dibujos de la figura 4.

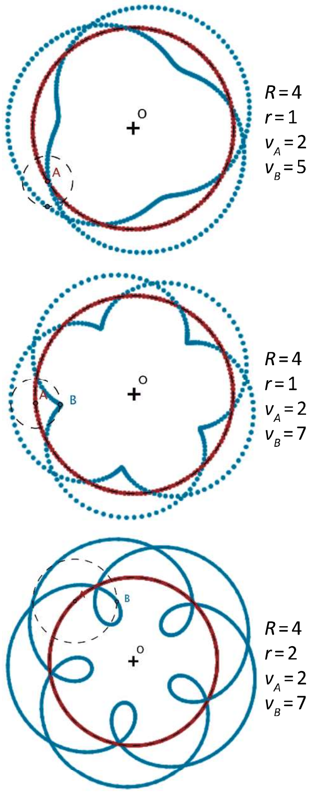

Figura 4

La figura 5, ilustra el segundo caso, $v_B < v_A$.

Como se puede observar, los dibujos son completamente distintos. Cambiando un poco la definición de *pétalo* o lazo podemos extraer las mismas conclusiones.

Por último, como elemento divertido y siguiendo los pasos de Rafael Losada en su actividad *Satélites*, podemos dibujar el segmento que une el punto A con el B, colorearlo y dejar el rastro. Los dibujos que podemos realizar son verdaderamente artísticos (figura 6).

Y también con el color podemos hacer propuestas a lo alumnos, por ejemplo, ¿cómo conseguir la imagen de la figura 7?

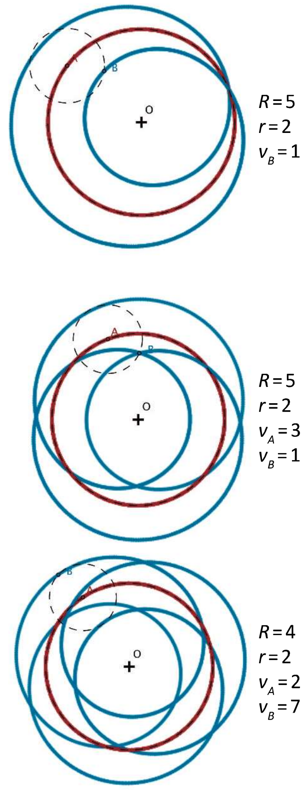

Figura 5

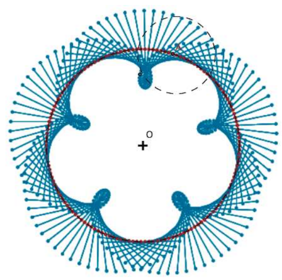
Figura 6

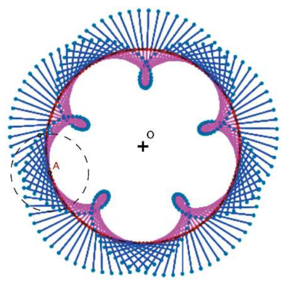
Figura 7

Segunda parte

El tablero que hemos planteado para jugar se puede contextualizar fijándonos en el sistema solar (figura 8). El punto O sería el Sol, el punto

A la Tierra y el punto *B* la Luna. Podemos añadir imágenes y observar como la Luna gira alrededor de la Tierra y la Tierra alrededor del Sol.

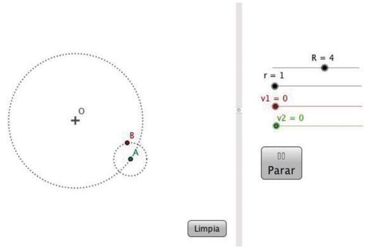

Figura 8

Un poco de historia nos puede llevar al modelo astronómico de Ptolomeo. En su libro *Almagesto* muestra la descripción de las cuarenta y ocho constelaciones clásicas (Andrómeda, Altar, Casiopea, etc.) y crea el sistema de deferentes y epiciclos para describir los movimientos retrógrados de los planetas.

El modelo situaba a la Tierra en el centro del universo y mediante la combinación de diferentes radios y velocidades consigue describir los movimientos en apariencia extraños que los planetas realizan (figura 9).

El Almagesto consta de 13 volúmenes.

- — El primer libro expone el sistema geocéntrico.

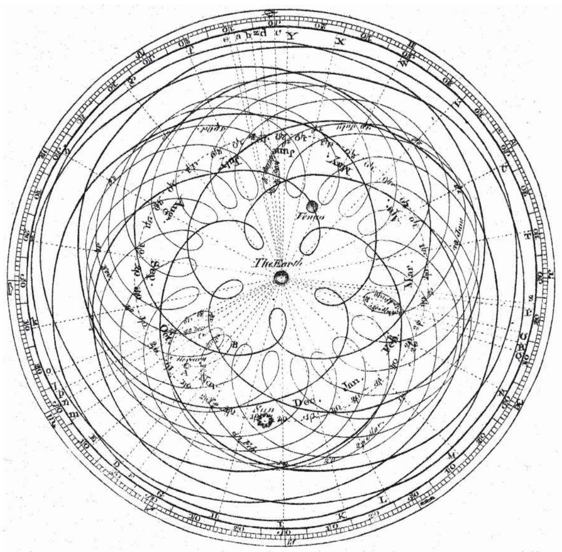

Figura 9

- — El segundo libro la periodicidad de los equinoccios y la duración del año.
- — El tercer libro discute los solsticios y equinoccios.
- — En el cuarto libro se exponen estudios de la Luna y define el mes sinódico.
- — En el quinto libro se trata sobre la corrección de paralaje de las posiciones del Sol y la Luna.
- — En el sexto libro se expone una medida del diámetro aparente del Sol y la Luna mostrando un método de predicción de eclipses.
- — En los libros séptimo y octavo se muestran cómo las posiciones relativas entre las estrellas son fijas. El octavo libro constituye un catálogo de las estrellas australes conocidas por él.
- — Finalmente, en los últimos cinco libros se muestra el método de Ptolomeo para calcular las posiciones y trayectorias de los planetas, exponiendo en detalle el sistema de epiciclos.

Nosotros no pretendemos ser tan ambiciosos como Ptolomeo y puesto que ya sabemos que la Tierra no está en el centro del universo intentaremos reproducir el movimiento de la luna alrededor de la Tierra, que en esencia es la actividad que hemos realizado en la primera parte, ahora simplemente vamos a añadir imágenes para *ver*.

Guía de construcción

Sobre el fichero anterior, añadiremos los pasos de la figura 10.

Con estas pequeñas instrucciones ya tenemos montado nuestro sistema Sol, Tierra y Luna. Ahora podemos comenzar a explorar con los alumnos.

Actividades

- — ¿Cuánto tarda la Luna en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra?
- — ¿Cuánto tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol?

 Imagen. Insertamos la imagen en un punto cualquiera cercano a *O*. Cambiamos la definición del punto *C* en propiedades, escribiendo en el cuadro Definición: $O+(-1,-1)$.

En la ventana propiedades de la imagen 1 (Sol), pulsamos en la pestaña posición, configurando:

Esquina 1: *C*

Esquina 2: $C+(2,0)$

Borramos el punto *D.*

Ocultamos el punto *C.*

 Imagen. Realizamos el mismo proceso para la imagen de la Tierra. Cambiamos la definición del punto D en propiedades, escribiendo en el cuadro Definición: $A+(-0.5,-0.5)$.

En la ventana propiedades de la imagen 2 (Tierra), pulsamos en la pestaña posición, configurando:

Esquina 1: *D*

Esquina 2: $D+(1,0)$

Borramos el punto *E.*

Ocultamos el punto *D.*

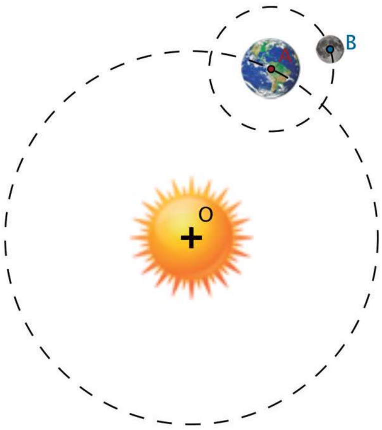

 Imagen. Realizamos el mismo proceso para la imagen de la Luna. Cambiamos la definición del punto *E* en propiedades, escribiendo en el cuadro Definición: $A+(-0.25,-0.25)$.

En la ventana propiedades de la imagen 3 (Luna), pulsamos en la pestaña posición, configurando:

Esquina 1: *E*

Esquina 2: $E+(1,0)$

Borramos el punto *F.*

Ocultamos el punto *E.*

Figura 10

— Con lo que ya sabes de la actividad anterior, ¿qué figura geométrica saldrá al ajustar la velocidad de la Luna a su velocidad real?

— Sitúa el Sol, la Tierra y la Luna en una línea imaginaria. Considera que ese día es el 1 de enero de 2016 (figura 11). ¿Cuándo se producirá un eclipse total de Luna?

— Con esta configuración del sistema, ¿cuántos eclipses habrá a lo largo de un año?

— ¿Es real esa información? Justifica tu respuesta.

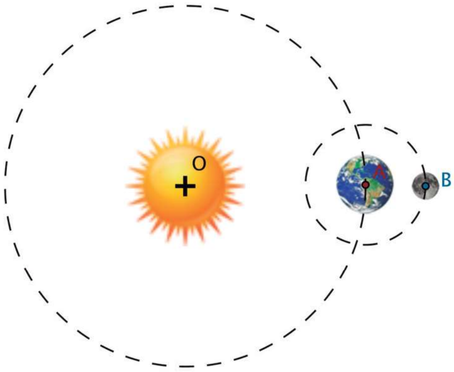

Figura 11

Tercera parte

La respuesta a la última pregunta debería llevarnos rápidamente al espacio tridimensional, pues es ahí donde está la explicación al no de la respuesta correcta a la última pregunta. Con la última versión de Geogebra es muy fácil pasarse a la vista 3D y ver qué sucede. En esta vista perdemos las imágenes del Sol, la Tierra y la Luna, sin embargo podemos añadir volumen creando pequeñas esferas para cada uno de los astros.

Guía de construcción

— Activamos la Vista Gráfica 3D.

— Escribimos en la barra de entrada: Esfera[O, 1]

— Cambiamos su color a amarillo.

— Escribimos en la barra de entrada: Esfera[*A*, 0.60]

— Cambiamos su color a un azul celeste.

— Escribimos en la barra de entrada: Esfera[*B*, 0.20]

— Cambiamos su color a un gris (figura 12).

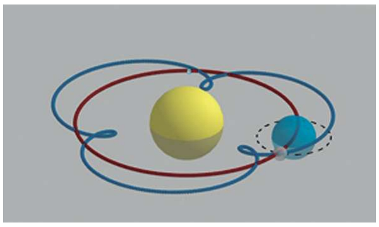

Figura 12

Podemos observar que el Sol, la Tierra y la Luna están situados en el mismo plano, el fondo gris que se aprecia en la imagen. Como casi todo el mundo sabe, la Luna tiene al menos dos peculiaridades, una es que el tiempo de rotación sobre su eje, unos 27,32 días, coincide con el tiempo de rotación alrededor de la Tierra, unos 29,53 días, por eso siempre vemos la misma cara. Y la segunda es que la órbita de la Luna está inclinada 5º con respecto a la eclíptica (es la curva que se obtiene al cortar el plano de la órbita con la esfera celeste).

¿Y cómo podemos representar esos 5º para que nuestra representación sea lo más fiable posible? (figura 13)

Observamos que hemos convertido la cuestión en un problema de geometría analítica tridimensional, ¿qué ecuación tendrá un plano π para que el ángulo entre π y el plano XY sea de 5º? ¿Qué ecuación tendrá la circunferencia contenida en π?

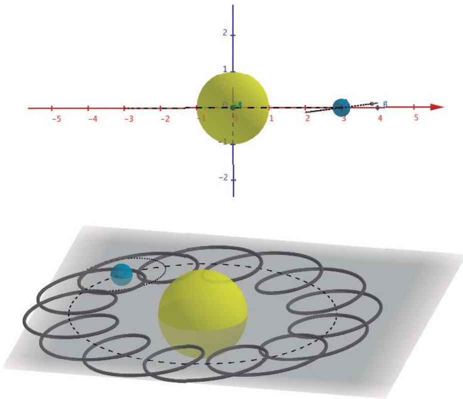

Figura 13

Ahora no es tan fácil visualizar cuándo la Tierra, la Luna y el Sol están alineados. Se puede lanzar la siguiente investigación ¿cómo encontrar una condición que determine la alineación de los tres astros?

La vista gráfica 3D de GeoGebra ofrece suficientes herramientas para poder resolver las cuestiones anteriores.

Rúbrica

Para evaluar la tarea dejamos aquí una rúbrica (tabla 2) para medir dos cosas, la realización del fichero GeoGebra con la actividad propuesta y la ficha de actividades a realizar con la construcción ya hecha.

Categorías	*Excelente*	*Bueno*	*Suficiente*	*Insuficiente*
Conceptos matemáticos	La construcción demuestra un completo entendimiento de los conceptos matemáticos involucrados.	La construcción demuestra un entendimiento sustancial de los conceptos matemáticos usados.	La construcción demuestra algún entendimiento de los conceptos necesarios para resolver los problemas.	La construcción demuestra un entendimiento muy limitado de los conceptos subyacentes necesarios para resolver problemas.
Habilidad Geogebra	Las construcción es clara y concisa. Demuestra una gran destreza en el uso del software.	Las construcción es clara y concisa.	La construcción es algo difícil de entender.	La construcción es difícil de entender.
Trabajo escrito	El trabajo es presentado de una manera ordenada, clara y organizada. Las respuestas son amplias y muy bien justificadas.	El trabajo es presentado de una manera ordenada y organizada. Las respuestas son correctas.	El trabajo es presentado de forma correcta pero es difícil de leer.	El trabajo se ve descuidado y desorganizado. No realiza todas las tareas propuestas.

Tabla 2

José Luis Muñoz Casado
IES Gran Capitán, Madrid