suma+ 81
Secciones
Marzo 2016
pp. 55-60

Buscar patrones para enriquecer tareas

David Barba Uriach
Cecilia Calvo Pesce

En esta entrega analizaremos una serie de actividades que podemos proponer para propiciar la discusión oral sobre Matemáticas por parte de los alumnos, entre ellos y con su maestra. Estas actividades se centran en la búsqueda de patrones, el establecimiento de conjeturas y la búsqueda de justificaciones para esas conjeturas.

Comenzaremos describiendo qué entendemos por patrones, conjeturas y justificaciones en el aula de matemáticas en Primaria y plantearemos cuatro ejemplos para ilustrarlo.

Búsqueda de patrones

Según el diccionario de la RAE, una de las acepciones de la palabra patrón es «modelo que sirve de muestra para sacar otra cosa igual». En las matemáticas escolares hablamos de buscar patrones para referirnos al reconocimiento, a partir de unos pocos ejemplos, de una estructura abstracta que estos ejemplos tienen en común.

Tal como se establece en el currículo básico de Educación Primaria (Real Decreto 126/2014), en Matemáticas no se trata sólo de «utilizar cantidades y formas geométricas sino, y sobre todo, encontrar patrones, regularidades y leyes mate-

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2015 y aceptado en enero de 2016

máticas». Y es así que se indica como meta «conseguir que todo el alumnado, al acabar la Educación Primaria, sea capaz de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones».

Establecimiento de conjeturas

Las conjeturas son afirmaciones que se creen ciertas pero de las que no se disponen argumentos suficientes para darles certeza. En Primaria se puede trabajar con los alumnos esta idea, en el momento que alguien observa un patrón determinado y lo enuncia, ya que a pesar de tener indicios de que la afirmación es verdadera, los casos particulares no implican certeza matemática. Se puede elaborar un programa de ordenador para que elija números aleatoriamente, ejecute los cálculos y tenerlo funcionando durante un año, día y noche, comprobando la conjetura formulada y no encontrar ningún número para el que falle. Pero en Matemáticas esto no alcanza para decir *siempre pasa esto,* ya que puede haber un número que aún no hemos comprobado que no lo cumpla y como los números son infinitos se necesita una demostración.

Justificaciones y refutaciones

Las justificaciones son explicaciones que buscan explicitar el carácter verdadero de una afirmación en base a unas ciertas normas aceptadas por una comunidad. Cuando la comunidad involucrada es la matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado de los enunciados que le preceden, las justificaciones reciben el nombre de demostraciones. Cuando la comunidad involucrada son los alumnos de una clase de matemáticas en Primaria, las justificaciones son razonamientos que, aunque no posean la estructura de una demostración, buscan evidenciar por qué podemos creer que la afirmación es cierta más allá de verificarla para algunos casos particulares.

Un contraejemplo es un ejemplo que contradice una afirmación. Si afirmamos que el resultado de una multiplicación es mayor que cada uno de los factores, $8 \times 0{,}5 = 4$ constituye un contraejemplo, pues evidencia que hay algunas multiplicaciones en que el resultado es menor que alguno de los factores. La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad. Pero para los alumnos, la presencia de un contraejemplo no siempre es suficiente para rechazar tajantemente la afirmación, pues en ocasiones lo ven como *una excepción que confirma la regla* y por ello es central dedicar esfuerzos a corregir esta confusión.

Ejemplos

Presentamos a continuación cuatro ejemplos de actividades relacionadas con la búsqueda de patrones, el establecimiento de conjeturas en relación a esos patrones y la decisión del carácter de verdad que tienen esas conjeturas. En los dos primeros se presentan tareas que invitan a establecer conjeturas que se pueden justificar en Primaria, en el tercero se propone una tarea que invita a establecer una conjetura que aún hoy tiene este estatus en la comunidad matemática y en el último se plantea una tarea que invita a plantear una conjetura que se puede refutar.

Primer ejemplo

Calcula: 34×36 y 35×35
73×75 y 74×74
22×24 y 23×23

¿Qué observas? ¿Pasará con otros números? Inventa otra pareja de multiplicaciones en las que pase lo mismo.

A partir de los cálculos pedidos los alumnos podrán conjeturar que el primer producto de cada pareja es una unidad menor que el segundo y que eso ocurre siempre que en el segundo producto se multiplique un número por sí mismo y en el primero el anterior por el siguiente de ese número. Aunque la justificación algebraica es sencilla, sólo es accesible para alumnos que ya han incursionado en el álgebra. De todas maneras hay representaciones visuales de ambos productos que permiten entender por qué siempre la diferencia entre ellos es de una unidad.

Simon Gregg propone a sus alumnos de Primaria una justificación manipulativa de este hecho con regletas Cuisenaire. Se pueden ver imágenes de su trabajo en:

https://picasaweb.google.com/mrsimongregg/CuisenaireRodSquares

Si no se dispone de regletas, éstas pueden substituirse por el *applet* utilizado para generar la figura 1.

Segundo ejemplo

> A partir del 1 se forma una serie en la que cada número se duplica y se suma 1 al resultado para obtener el siguiente:
>
> 1, 3, 7, 15, 3...
>
> ¿Cuál es el primer número de esta serie mayor que 1.000?
>
> ¿Por qué crees que todos los números que aparecen en la serie son impares?
>
> ¿Por qué crees que ninguno de los números que aparecen en la serie termina en 9?

Los 12 primeros elementos de esta serie son: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047 y 4095.

Algunos alumnos mayores podrán darse cuenta de que son los números anteriores a las potencias de 2. Pero sin necesidad de conocer dichas potencias todos podrán ver que son impares y podrán justificarlo en base a que al duplicar siempre obtienen un número par y que al sumar 1 siempre será impar. Pueden ir más allá, fijándose en las unidades, pueden ver que hay un ciclo en las terminaciones: [1, 3, 7, 5], [1, 3, 7, 5] que explica por qué ningún elemento de la serie acaba en 9.

Tenemos en este caso la justificación de una conjetura en base a argumentos lógicos al alcance de alumnos de 10 u 11 años.

Tercer ejemplo

> Forma una cadena de números con las siguientes condiciones. Para la primera posición elige un número natural cualquiera, para las siguientes posiciones:
>
> Si el último número escrito es par, lo divides entre 2.
>
> Si el último número escrito es impar, le sumas 1 a su triple.
>
> Cada cadena termina cuando se repite un número que ya había aparecido.
>
> Escribe las cadenas correspondientes a diferentes números iniciales elegidos entre 20 y 30. ¿Qué observas?

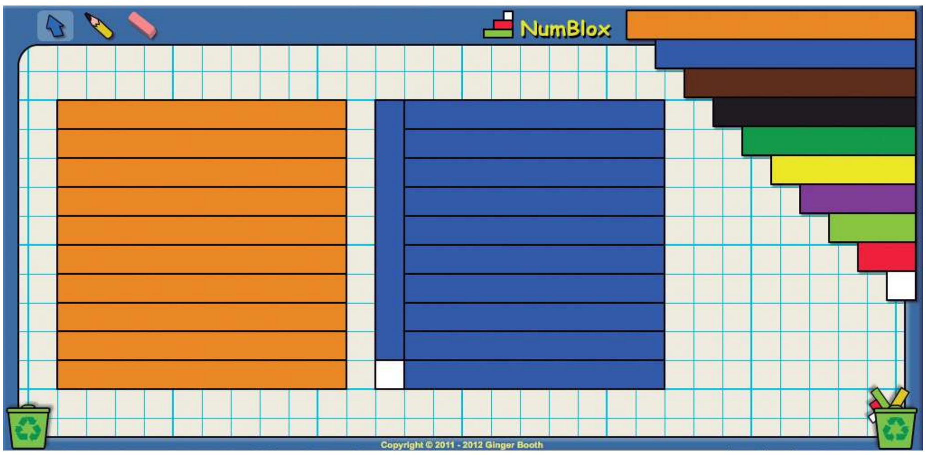

Figura 1. Captura de pantalla del applet <http://mathtoybox.com/numblox/NumBlox.html>

Completar diez de las once cadenas que se piden no ofrece ninguna dificultad:

20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

21, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, 4

22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

24, 12, 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

28, 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

30, 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4

A partir de estas diez cadenas se puede establecer la misma conjetura que han establecido los matemáticos a partir de sus múltiples comprobaciones y que conocemos como *conjetura de Collatz*: siempre se termina con el ciclo [4, 2, 1].

¿Qué ha pasado con el 27? Pocos alumnos (si es que hay alguno) habrà conseguido llegar al ciclo. Muchos habrán desistido en el intento y otros habrán creído que este número rompía la regla. En realidad, requiere 111 pasos, pero también llega al ciclo:

27, 82, 41, 124, 62, 31, 94, 47, 142, 71, 214, 107, 322, 161, 484, 242, 121, 364, 182, 91, 274, 137, 412, 206, 103, 310, 155, 466, 233, 700, 350, 175, 526, 263, 790, 395, 1186, 593, 1780, 890, 445, 1336, 668, 334, 167, 502, 251, 754, 377, 1132, 566, 283, 850, 425, 1276, 638, 319, 958, 479, 1438, 719, 2158, 1079, 3238, 1619, 4858, 2429, 7288, 3644, 1822, 911, 2734, 1367, 4102, 2051, 6154, 3077, 9232, 4616, 2308, 1154, 577, 1732, 866, 433, 1300, 650, 325, 976, 488, 244, 122, 61, 184, 92, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

A alumnos con dificultades se les puede plantear la misma tarea con los números iniciales en otro rango para evitar cadenas tan largas como la del 27 que acabamos de analizar. Por ejemplo, podemos pedir que analicen las cadenas que empiezan con números entre 32 y 40. En:

https://oeis.org/A008908

encontramos información sobre la cantidad de pasos necesarios para llegar al ciclo y en:

http://www.mathcelebrity.com/collatz.php

tenemos una calculadora con todos los valores que se alcanzan paso a paso hasta llegar a él.

Pero para alumnos más pequeños también podemos proponer una simplificación diferente:

> Formad un *gusano* de tarjetas encadenadas con números en cada una de ellas, de tal manera que en la primera tarjeta aparezca un número entre 10 y 99, y en cada una de las siguientes aparezca:
>
> La mitad del número que aparece en la tarjeta anterior, si éste es par.
>
> El siguiente del número que aparece en la tarjeta anterior, si éste es impar.

Podemos repartir los 90 números iniciales entre todos los alumnos de la clase reunidos en pequeños grupos de trabajo, pedirles que realicen los gusanos correspondientes y que investiguen cuál es el gusano más largo que pueden obtener.

Tal como se ve en la figura 2, cuando se planteó esta actividad con alumnos de 3º de Primaria, cada pequeño grupo de trabajo colgó en una ventana el más largo de los gusanos que había obtenido partiendo de diferentes números iniciales entre 10 y 50 y así se pudo visualizar el más largo de todos ellos: el que comienza con 33.

Figura 2

Merece la pena mencionar que la variante propuesta da lugar a conjeturas que cualquier matemático (incluso algún alumno de secundaria) podría demostrar como ciertas, cosa que sabemos que no ha sido posible en el caso de la versión inicial de la actividad. Estas conjeturas pueden ser:

— Comenzando con cualquier número, siempre se termina en el ciclo [2, 1].
— Comenzando con números en un determinado rango el gusano más largo posible se obtiene usando como número inicial el mayor valor de la forma «potencia de 2 más 1» incluido en ese rango. Por eso en el rango $10-50$, el mayor gusano es el que comienza en 33 = 32 + 1; y en el rango 1 – 100, es el que comienza en 65 = 64 + 1.

Hay otras variantes del problema que conducen a la conjetura de Collatz para proponer a aquellos alumnos que tengan ganas de investigar más sobre este tema. Una primera variante se propone en:

http://demonstrations.wolfram.com/VisualizingTheCollatzConjectureAndSomeVariants

donde cada elemento de la cadena, llamémosle *n*, da lugar al siguiente término de la cadena según las siguientes reglas:

— $n:3$ si n es un múltiplo de 3
— $(2n+1):3$ si $n-1$ es un múltiplo de 3
— $(2n-1):3$ si $n+1$ es un múltiplo de 3

Por ejemplo, comenzando con el 7 la cadena continuaría 5, 3, 1, 1, 1, 1, 1… y con otros números iniciales, los alumnos conjeturarán que pasa igual, llegan al 1 y allí se quedan. Empezando con un número menor que 100, la cadena que más tarda en llegar al 1 se consigue partiendo del 82, que requiere 10 etapas: 82, 55, 37, 25, 17, 11, 7, 5, 3, 1, 1, 1… pero también llega al 1. No es difícil justificar que la conjetura da lugar a una afirmación cierta debido al carácter decreciente de los elementos de toda la cadena.

Una segunda variante propuesta en:

http://mathpickle.com/project/daedalus-and-icarus-try-to-escape/

permite ver cómo pequeñas variaciones de las reglas cambian totalmente el problema. Aquí cada elemento de la cadena da lugar al siguiente término de la cadena según las siguientes reglas:

— Si es par, lo dividimos por 2.
— Si es impar, lo triplicamos y le restamos una unidad.

Podemos preguntar a los alumnos si pueden encontrar ejemplos de números que con esta ley no lleguen nunca al 1. Seguramente no tendrán dificultades para encontrar algunas cadenas en estas condiciones como, por ejemplo 40, 20, 10, 5, 14, 7, 20, 10, 5, 14, 7…, que acaba permaneciendo en este ciclo: [20, 10, 5, 14, 7].

Cabe destacar la conexión de esta actividad con la práctica productiva de procedimientos. En este caso, el objetivo de práctica era el cálculo de mitades y las discusiones de estrategias para dicho cálculo. Tal como comentamos en *Suma* 76 y en *Suma* 80, entendemos por práctica productiva la ejercitación de procedimientos matemáticos en un ambiente de resolución de problemas y en contraposición a la práctica reproductiva cuyo único objetivo es la ejercitación.

Cuarto ejemplo

¿Cuántas regiones se determinan en cada caso? (figura 3)

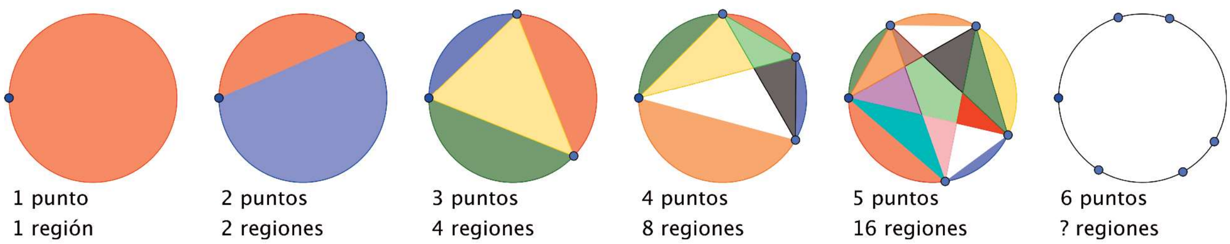

Figura 3

A pesar que los primeros resultados son 1, 2, 4, 8, y 16; el quinto no es 32, sino 31. Si los alumnos dibujan los 6 puntos equidistantes se pierde una zona porque hay tres diagonales que concurren en el centro del círculo.

¿Qué pasa si sobre la circunferencia elegimos 7 puntos? Encontraremos 57 regiones. En:

https://oeis.org/A000127

se encuentran las respuestas para otras cantidades de puntos en la circunferencia.

Conjeturas

Cuando planteamos a los alumnos un trabajo basado en la búsqueda de patrones debemos ser cuidadosos en no confundir conjeturar con afirmar. Debemos tener muy presente que al haberse basado en un número limitado de casos, sus conclusiones son en realidad conjeturas, o sea, afirmaciones basadas en indicios y observaciones, pero no verdades matemáticas hasta que se disponga de una demostración que lo confirme. Por lo tanto, en la discusión grupal que se hace de estas actividades el maestro debe procurar que quede claro qué estatus futuro se le da a las conclusiones establecidas:

— Permanecerán como conjeturas razonables,
— presentará una justificación (formal o no, dependiendo de la edad de los alumnos y sus conocimientos previos) que las convierta en resultados matemáticos confirmados o
— invitará a los alumnos a analizar un contraejemplo (una instancia que demuestra que el patrón detectado en base a un cierto número de casos no es cierto en general)

Las conjeturas que aún persisten en el mundo de las Matemáticas y las anécdotas sobre los premios prometidos y otorgados a aquellos que las justifiquen, dan una perfecta oportunidad para llevar esta discusión al aula:

http://sociedad.elpais.com/sociedad/2013/06/07/actualidad/1370616631_328551.html

Reflexión final

En esta entrega hemos comentado las demandas de búsqueda de patrones, de establecimiento de conjeturas y de justificaciones que podemos incluir en tareas de práctica de procedimientos habituales de las clases de Matemáticas en Primaria. Por ejemplo: multiplicaciones de números de dos cifras, cálculo mental del doble o el triple de un número natural o de la mitad de un número par.

Con esta duodécima entrega de *Ell@s tienen la palabra* queremos introducir una pequeña variante a los artículos que hasta ahora centrábamos en un contenido (Medida, Probabilidad, Divisibilidad, Cálculo, Geometría plana, etc.) para pasar a articularlos en relación al análisis de un conjunto de tareas ricas que podemos proponer para generar un ambiente de clase centrado en la comunicación, en la construcción del conocimiento a partir de la voz de los alumnos.

Tal como propone Afzal Ahmed en su libro *Better Mathematics: A Curriculum Development Study*, entendemos por tareas ricas aquellas que en un inicio son accesibles a todos los alumnos, pero que permiten plantear nuevos retos a partir del enunciado inicial. Aquellas que invitan a los alumnos a tomar decisiones, a que especulen, a que formulen hipótesis, que justifiquen, que expliquen, que reflexionen, que interpreten… Tareas, en definitiva, que promueven el debate y la comunicación alentando preguntas del tipo «¿qué pasaría si?».

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako (Barcelona)
<tienenlapalabra@revistasuma.es>