suma+
Artículos
Marzo 2016
81
pp. 41-51

Los gnómones y la solución geométrica de ecuaciones de segundo grado y su aplicación a los productos notables

Julio César Barreto García

En este artículo mostraremos otra forma de encontrar la solución de la ecuación de segundo grado, usando algunos procesos cognitivos y algunas aplicaciones algebraicas entre las que cabe destacar la diferencia de cuadrados, la cual se puede deducir usando el teorema de Pitágoras. Esta diferencia de cuadrados nos permitirá deducir los gnómones geométricos o gnómones matemáticos. Podemos usar los gnómones para hallar la solución geométrica de diversas ecuaciones de segundo grado, colocando las longitudes en un triángulo rectángulo adecuado a partir de estos gnómones. Además, mostramos otra forma de cuadrar un rectángulo y de completar cuadrados en ecuaciones de segundo grado que aparecen en las cónicas y las cuádricas.

Palabras clave: Teorema de Pitágoras, Gnomon, Ecuación cuadrática, Cónicas.

Gnomons and the geometric solving of the equations of second degree and its application to notable products

In this article will show another way to find the solution of the quadratic equation, using some cognitive processes and some algebraic applications among which include the difference of squares, which can be solved using the Pythagorean Theorem. This difference of squares allows us to deduce the geometrical gnomons or Mathematical gnomons. At the same time these gnomons can use to find the solution of various geometric quadratic equations by placing appropriate lengths triangle from these gnomons. Furthermore, we find another way to square a rectangle and complete square in quadratic equations appearing in conical and quadric.

Keywords: Pythagorean Theorem, Gnomon, Quadratic Equation, Conics.

El desarrollo de las acciones cognitivas, también llamados los procesos cognitivos, en el campo de la Didáctica de la Matemática, es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en la percepción geométrica de la diferencia de cuadrados y en alguna de sus aplicaciones en las diversas situaciones que se les presenten cuando se usen en la ecuación de segundo grado, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998), desarrollados por Torregrosa y Quesada (2007) y ampliamente usado por Barreto (2008*a*) para hacer un estudio didáctico de las áreas de figuras geométricas y de la acepción geométrica de algunos productos notables en Barreto (2009*b*, 2011).

En este sentido, tenemos el proceso cognitivo de *visualización* que está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración geométrica y el *razonamiento* el cual se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les correspondan algebraicamente. La coordinación de estos procesos cognitivos les permitirá *construir* desde una perspectiva geométrica las fórmulas usadas en algunos productos notables y hasta el teorema de Pitágoras, en términos de áreas, las cuales serán usadas en la solución geométrica de la ecuación

Artículo recibido en *Suma* en julio de 2015 y aceptado en noviembre de 2015

de segundo grado. Usaremos algunos procesos cognitivos que se aplican en didáctica de la geometría como propuesta didáctica en el aula, en particular, la *visualización-aprehensión* como camino para llegar al posterior razonamiento matemático.

Referentes Teóricos (Didáctica de la Matemática)

Sin embargo, en este artículo tomaremos en cuenta la *aprehensión*, en el cual «concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar», según el Diccionario de la Real Academia Española (2001) y nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice, por ejemplo, una *aprehensión operativa de reconfiguración* la cual se refiere a la manipulación de las subconfiguraciones iniciales como piezas de un puzzle, donde puzzle se considera como sinónimo de un rompecabezas y se refiere a piezas planas según el Diccionario de la Real Academia Española (2001). Luego a través de un *razonamiento discursivo como un proceso natural* que es realizado espontáneamente en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación, llegamos a conclusiones que se pueden usar para deducir la solución a los problemas, razonando sobre las figuras hechas en foami o cartulinas de colores que pueden ser manipuladas por nuestros estudiantes, al tratar los problemas geométricos y haciendo una analogía entre la parte algebraica y geométrica, logrando así incentivar la *visualización* en nuestros estudiantes, aunque sea de una manera un poco restringida como en la *aprehensión*, que no es originada por el uso de todos los sentidos.

Además, usaremos un proceso cognitivo, llamado *aprehensión operativa de cambio figural,* que se refiere a añadir (o quitar) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones, como por ejemplo, al colocar una línea de división a un rectángulo para transformarlo en cuadrados y otros rectángulos que nos permitan formar el gnomon que tenga la misma área del rectángulo de donde se originó. Usaremos *una conjetura sin demostración* que nos permitirá resolver el problema, aceptando las conjeturas simples a través de una aprehensión operativa de cambio figural, que nos conduce a la solución del problema, según los procesos cognitivos de Duval (1998).

Solución geométrica de ecuaciones de segundo grado aplicando la diferencia de cuadrados (o los gnómones) a partir del teorema de Pitágoras

Deduciremos las soluciones de algunas ecuaciones de segundo grado que, aunque se definen como expresiones del tipo $Ax^2+Bx+C=0$, con $A,\ B,\ C\in\mathbb{Q}$, como $A\neq 0$, se puede dividir la ecuación por él y obtener la ecuación equivalente $x^2+ax+b=0$, en la que los coeficientes son $a=B/A$ y $b=C/A$.

Veamos las soluciones de algunas ecuaciones de segundo grado de una manera geométrica, es decir razonando en términos de áreas, pero tomando en cuenta su expresión algebraica.

Solución de la ecuación de la forma $x^2=a\cdot b$ *con* $a\neq b$ [1]

Hallemos una solución geométrica de la ecuación. Dado un rectángulo de lados *a* y *b* y como el mostrado en el lado izquierdo de la figura 1:

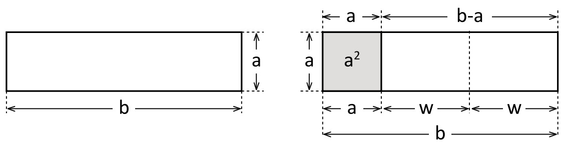

Figura 1

A la derecha formamos un cuadrado de lado *a* y un rectángulo de lados *a* y $b-a$, lo que se puede hacer aplicando una aprehensión operativa de cambio figural al rectángulo original mostrado a la izquierda, el cual tiene los lados *a* y *b*.

Tengamos en cuenta que $w=(b-a)/2$.

Ahora, formemos la figura elemental mediante una aprehensión operativa de reconfiguración según la parte izquierda de la figura 2:

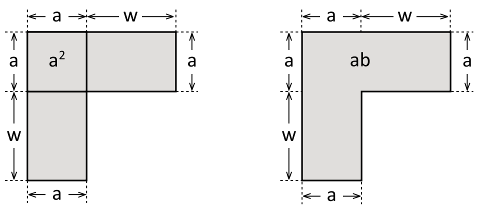

Figura 2

A la derecha se puede observar que podemos formar un gnomon al que le podemos agregar un cuadrado de lado w para formar el cuadrado grande de lado $a+w$.

Podemos obtener el gnomon de acuerdo con la diferencia de cuadrados según la figura 3:

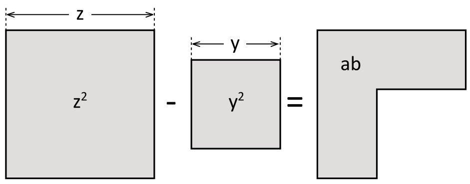

Figura 3

Notemos que al cuadrado grande de lado z le podemos quitar el cuadrado pequeño de lado $y=w$ quedándonos el gnomon que vemos a la derecha y podemos dividir en dos rectángulos los cuales tendrán las áreas:

$$z\cdot(z-y) \quad \text{e} \quad y\cdot(z-y)$$

La figura 3 muestra el gnomon, o hexágono cóncavo, de acuerdo con las longitudes de los cuadrados grande y pequeño. Se le aplica a este gnomon una aprehensión operativa de cambio figural para poder dividirlo en dos rectángulos según se ve en la figura 4:

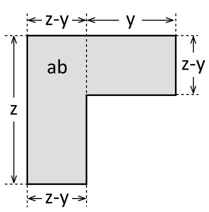

Figura 4

Un *polígono convexo* no tiene ángulos que *apunten hacia dentro*. En concreto, los ángulos internos no son mayores que 180°. Si hay algún ángulo interno mayor de 180° entonces es un *polígono cóncavo*. En la figura 5, a la izquierda, vemos un polígono convexo y, a la derecha, un polígono cóncavo. Para recordar podemos notar que *cóncavo* es como *tener una cueva*.

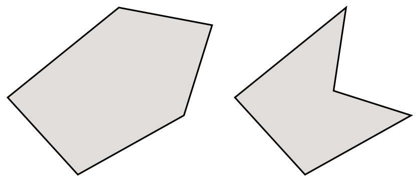

Figura 5

La figura 4 muestra un polígono de seis lados llamado hexágono y que al ser además cóncavo se le denomina hexágono cóncavo, el cual es llamado más comúnmente *gnomon*.

> Los griegos antiguos usaron el *gnomon* y lo definieron como la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño (sin embargo complementariamente Aristóteles lo definió como la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma). Además, Euclides amplía el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general» (Puerta, 1996, p. 265).

Por el teorema de Pitágoras y de acuerdo con Barreto (2011), dados dos cuadrados de diferentes áreas, puede construirse un cuadrado cuya área sea la diferencia entre las áreas de los cuadrados dados. En este caso el cuadrado *diferencia* (que permite dar otra acepción geométrica de la diferencia de cuadrados) se construye sobre un cateto y se trata de hallar ese cateto desconocido.

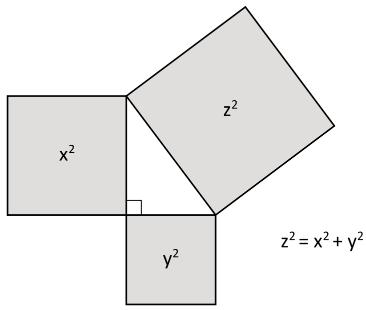

Figura 6

A diferencia del procedimiento usado cuando se construyen los cuadrados sobre las longitudes de los catetos y se encuentra el cuadrado que está sobre la longitud de la hipotenusa, ampliamente discutido en Barreto (2008b, 2009a), o para mayores resultados y extensiones en Barreto (2010), deduciremos que este cuadrado de lado x tiene la misma área que el rectángulo de ancho a y largo b.

En la siguiente configuración geométrica nuestros estudiantes pueden hacer una aprehensión operativa de cambio figural colocando una línea donde haga falta, como se realizó en la figura 4, que sirve para demostrar lo anteriormente mencionado, es decir que se cumple que:

$$z^2 - y^2 = z\cdot(z-y) + y\cdot(z-y)$$

lo que efectivamente concuerda con el área de ese rectángulo, que tiene por ancho a y por largo b.

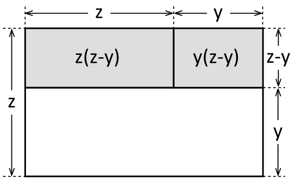

Figura 7

Veamos que podemos cuadrar el rectángulo de la Figura 7 según lo realizado en la Figura 8, resultando que podemos formar un cuadrado y expresarlo así: $z^2 - y^2 = x^2 \quad [1]$

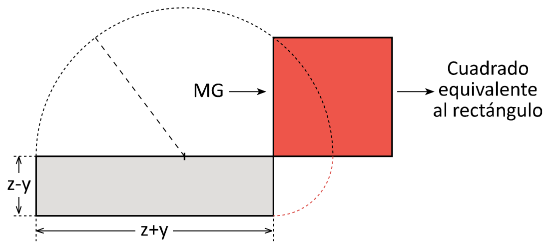

Figura 8

El problema de cuadratura es el más sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado. La solución de este problema, según Barreto (2009b), ya está explicada en la proposición 13 del sexto libro de los *Elementos* (Puerta, 1996), en la que se muestra como construir un segmento que sea media geométrica entre otros dos. La construcción en cuestión se hace dibujando una circunferencia cuyo diámetro es la suma de los lados del rectángulo y en el punto de enlace de ambas longitudes dibujamos una perpendicular al diámetro hasta la circunferencia. El segmento así generado es el lado del cuadrado buscado. En la figura 8, aplicamos una *aprehensión discursiva,* que se refiere a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas sean estas definiciones, teoremas, axiomas, cambiando del anclaje discursivo al anclaje visual que se refiere a la asociación de una afirmación matemática a un dibujo. El cambio de anclaje se denomina al vínculo que puede realizarse de dos maneras, según las direcciones de la transferencia realizada en Duval (1998).

Pero como este cuadrado rojo proviene de cuadrar el rectángulo blanco de ancho a y largo b, mostrado a la izquierda de la figura 1, entonces tenemos que se cumple lo siguiente:

$$x^2 = a\cdot b \quad [2]$$

Ahora bien, notemos que desarrollando la ecuación [1] tenemos además que se cumple:

$$z^2 - y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \\ = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Así, de la ecuación [2] nos queda la siguiente identidad o factorización muy importante:

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}$$

Producto notable de la suma de dos términos por su diferencia (binomios conjugados)

Los productos notables son productos de polinomios que aparecen con mayor frecuencia y los binomios conjugados son aquellos que solo se diferencien en el signo de la operación. Para multiplicar binomios conjugados, basta elevar los monomios al cuadrado y restarlos, obteniendo una diferencia de cuadrados:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Veamos mediante el siguiente ejemplo como se realiza el producto, tomando en cuenta la distribución anterior:

$$(3x+5y)(3x-5y)=$$
$$=(3x)(3x)+(3x)(-5y)+(5y)(3x)+(5y)(-5y)=$$
$$=9x^2-15xy+15xy-25y^2$$

Cancelando los términos opuestos que son semejantes queda:

$$(3x+5y)(3x-5y)=9x^2-25y^2$$

A este producto notable se le conoce como producto de una suma por la diferencia de dos términos o de un binomio, también se le denomina producto de un binomio conjugado y da como resultado una diferencia de cuadrados. Una configuración geométrica está en la secuencia de la figura 9 de abajo mediante unas aprehensiones operativas de reconfiguraciones, donde a la izquierda tenemos un rectángulo de lados $a+b$ y $a-b$ y al agregarle un cuadrado de lado b podemos formar un cuadrado de área a^2:

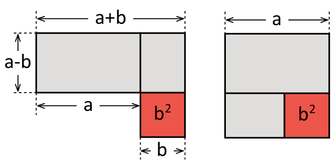

Figura 9

y que al quitarle el cuadrado rojo, de lado b, es decir, hacer la diferencia de cuadrados nos queda este rectángulo:

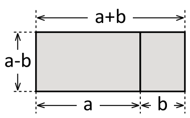

Figura 10

Según esta configuración, el rectángulo que se forma con lo que sobra de la diferencia de cuadrados, a^2-b^2, se cumple que tiene por área:

$$(a+b)(a-b)$$

Geométricamente esta es la solución de la diferencia de cuadrados:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Solución de la ecuación de la forma: $x^2+ax=b$

Desde el punto de vista geométrico, la solución de la ecuación cuadrática $x^2+ax=b$ (siendo a y b positivos), equivale a determinar las dimensiones x y $x+a$ de un rectángulo de área b y podemos rescribir esta ecuación así:

$$x^2+ax=x(x+a)=b.$$

Usamos la teoría acerca de la deducción de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas rectilíneas a través de procesos cognitivos, desarrollada en Barreto (2008a), para formalizar los siguientes temas a utilizar durante gran parte de esta teoría.

Así, de acuerdo con lo discutido además en Barreto (2011) cuando geométricamente se estudió la factorización por factor común el cual es, por ejemplo, el resultado de multiplicar un binomio $a+b$ por un término c en donde aplicando la propiedad distributiva se obtiene algebraicamente que: $c(a+b)=ca+cb$.

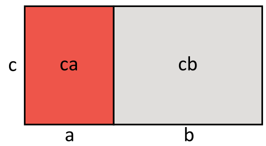

Figura 11

Esta operación tiene una interpretación geométrica ilustrada en la figura 11. El área del rectángulo es $c(a+b)$ (el producto de las longitudes de ancho y largo), que también puede obtenerse como la suma de las dos áreas de los rectángulos de colores gris y rojo que, de acuerdo con Barreto (2008a), tienen por área ca y cb respectivamente. Esto se basa en el Axioma de aditividad planteado para figuras geométricas elementales.

Ahora continuando con la solución de la ecuación de segundo grado: $x^2+ax=b$, supongamos que el área del rectángulo mostrado a la izquierda de la figura 12 es b:

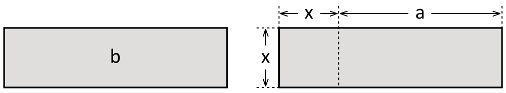

Figura 12

A la derecha hacemos una configuración al rectángulo de área b de acuerdo con las dimensiones x y $x+a$, que están en la ecuación de segundo grado según la factorización de la misma, y podemos formar el rectángulo mostrado también a la derecha.

De acuerdo con lo realizado en la figura 1, podemos hacer la subconfiguración de este rectángulo como lo vemos en la figura 13 en la izquierda, y además de acuerdo con la figura 2 obtenemos un gnomon como el mostrado en la parte derecha de la misma figura:

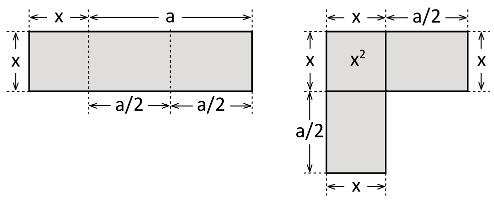

Figura 13

A la izquierda de la figura 13 le aplicamos al rectángulo, que está a la derecha, una aprehensión operativa de cambio figural para dividirlo y formar el gnomon. Además, debemos notar que a la derecha de la figura 13 podemos formar mediante una aprehensión operativa de reconfiguración el gnomon con estos rectángulos. Entonces, el área del gnomon (hexágono cóncavo obtenido a partir del rectángulo anterior) también tiene por área b. Al cuadrarse encontramos un cuadrado de lado x que da como resultado un área de magnitud b, es decir, $x^2 = b \Rightarrow x = \sqrt{b}$. Por tanto, de acuerdo a la resolución anterior tenemos que se cumple la siguiente expresión:

$$\left(\sqrt{b}\right)^2 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad b = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Es decir, el segmento $x + a/2$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen longitudes $\sqrt{b}$ (b positivo) y $a/2$. En consecuencia, el procedimiento para la resolución geométrica de la ecuación se reduce a construir un triángulo rectángulo de catetos $\sqrt{b}$ y $a/2$.

Teniendo en cuenta que la longitud de la hipotenusa de ese triángulo rectángulo es $x + a/2$, En la configuración que aparece en la figura 14 observamos que para encontrar la solución de la ecuación debemos quitarle a la longitud de la hipotenusa un segmento de longitud $a/2$.[2]

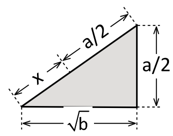

Figura 14

Ejercicio 1: Halla la solución de la siguiente ecuación cuadrática: $x^2 + 2x - 3 = 0$

Sean $a = 2$ y $b = 3$, y reescribiendo la ecuación dada como $x^2 + 2x = 3$, ahora tenemos según lo anteriormente deducido lo siguiente:

$$3 = \left(x + \frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = \left(x+1\right)^2 - \left(1\right)^2$$

Así:

$$3 = \left(x+1\right)^2 - 1^2 \Rightarrow 3 + 1 = \left(x+1\right)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4 = \left(x+1\right)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{4} = x + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \pm 2 = x + 1 \Rightarrow \pm 2 - 1 = x$$

O bien:

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - 1 = x_1 \\ -2 - 1 = x_2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array}\right.$$

Que son las dos soluciones reales de la ecuación cuadrática. Estas dos soluciones las puede verificar con la laboriosa resolvente de la ecuación de segundo grado. Y al sustituir el valor de la raíz $x_1 = 1$, tenemos que el valor de la longitud de la hipotenusa la cual es $h = 1 + 1 = 2$, puesto que $h = x + a/2$. Esto lo podemos ver geométricamente en la figura 15 y verificar que efectivamente se cumple el teorema de Pitágoras:

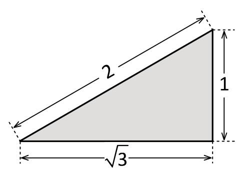

Figura 15

Es decir podemos formar efectivamente las longitudes de un triángulo rectángulo, pero al sustituir el valor de la raíz $x_2=-3$, tenemos que la longitud de la hipotenusa es $x=-3+1=-2$ que es la proyección de la longitud de la hipotenusa en sentido contrario.

Ejercicio propuesto: Dar una interpretación geométrica de la solución planteada anteriormente.

Ejercicio 2: Determinar si la expresión:

$$x^2+2x+y^2+2y=2$$

corresponde a la ecuación de una circunferencia. Hallar su centro *C(h, k)* y su radio *r*.

Sean las dos ecuaciones:

$$x^2+2x=r \quad \text{e} \quad y^2+2y=s$$

en variables x e y con $r>0$ y $s>0$ respectivamente. Luego, de acuerdo a lo deducido anteriormente tenemos:

$$r=\left(x+\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=(x+1)^2-(1)^2$$

Y además:

$$s=\left(y+\frac{2}{2}\right)^2-\left(\frac{2}{2}\right)^2=(y+1)^2-(1)^2$$

Luego sumándolas:

$$(x+1)^2-1+(y+1)^2-1=2\Rightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2-2=2\Rightarrow$$
$$(x+1)^2+(y+1)^2=2+2=4$$

Es decir:

$$(x+1)^2+(y+1)^2=\left(\sqrt{4}\right)^2=(2)^2$$

Que es la ecuación de la circunferencia centrada en el punto $C(-1,-1)$ y tiene radio $r=2$.

Solución de la ecuación de la forma $x^2=ax+b$

El cálculo geométrico de las raíces positivas de la ecuación cuadrática $x^2=ax+b$ consiste en determinar las dimensiones x y $x-a$ de un rectángulo de área b, ya que podemos reescribir la ecuación de la forma $x^2-ax=x(x-a)=b$, al sacar factor común. Sea b el área del rectángulo de la parte izquierda de la Figura 16 :

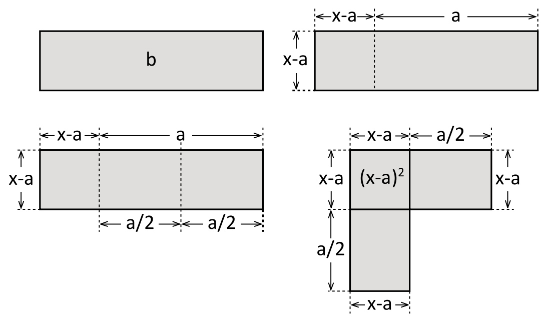

Figura 16

A la derecha y arriba hacemos una configuración al rectángulo de área b de acuerdo con las dimensiones x y $x-a$ que están en la ecuación al factorizarla. Abajo y a la izquierda le aplicamos un aprehensión operativa de cambio figural al rectángulo que está a la derecha y arriba. Así mismo, abajo y a la derecha notamos que ya formamos un gnomon con estos rectángulos mediante una aprehensión operativa de reconfiguración.

Entonces, el área del gnomon en la parte derecha de la figura 16 es b. En consecuencia, de lo deducido anteriormente de acuerdo con la diferencia de cuadrados, nos queda que podemos hallar la solución de la ecuación de segundo grado dada por $x^2=ax+b$:

$$b=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

Es decir, el segmento $x-a/2$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo en el que las longitudes de los catetos son $\sqrt{b}$ y $a/2$. Con esto, el procedimiento geométrico para resolver la ecuación es el siguiente:

1) Se construye un triángulo rectángulo de longitudes en los catetos $\sqrt{b}$ y $a/2$.
2) Después se prolonga la longitud de la hipotenusa a una longitud igual a $a/2$.

El segmento obtenido es la solución, x, como se puede ver en la siguiente figura 17:

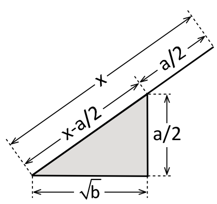

Figura 17

Ejercicios propuestos:

a) Halla la solución de la ecuación cuadrática:

$$x^2-2x-3=0$$

b) Dar una interpretación geométrica para la segunda raíz de la solución planteada anteriormente de acuerdo con el *Ejercicio 1*.

c) Determinar si la expresión:

$$x^2-2x+y^2+2y=2$$

es la ecuación de una circunferencia.

Respuesta: $(x-1)^2+(y+1)^2=(2)^2$

Solución de la ecuación de la forma $x^2+b=ax$

Resolver geométricamente la ecuación cuadrática $x^2+b=ax$ equivale a calcular las dimensiones x y $a-x$ de un rectángulo de área b, pues podemos reescribir esto de la siguiente forma $ax-x^2=(a-x)x=b$ al sacar factor común. A la hora de dibujar un rectángulo de dichas dimensiones se presentan dos casos diferentes.

Caso $a-x>x$

Sea b el área del rectángulo de la parte izquierda en la figura 18:

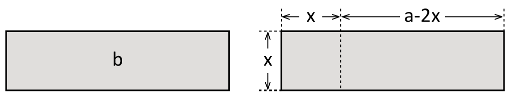

Figura 18

A la derecha hacemos la configuración al rectángulo de área b, de acuerdo con las dimensiones x y $a-x$ que están en la ecuación al factorizarla.

De acuerdo con una nueva aprehensión operativa de cambio figural, vemos en la figura 19 nuevas configuraciones del rectángulo de la derecha de la figura anterior. A la derecha de la figura 19 formamos un gnomon con los tres rectángulos de la parte izquierda mediante una aprehensión operativa de reconfiguración.

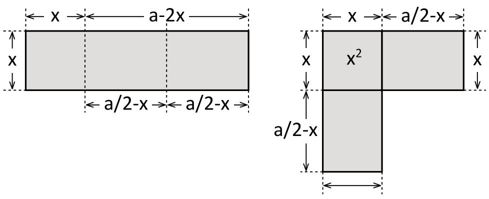

Figura 19

Entonces, el área del gnomon de la figura 19 también es b. En consecuencia de lo deducido anteriormente de acuerdo con la diferencia de cuadrados nos queda que podemos también hallar la solución de la ecuación de segundo grado dada por $x^2+b=ax$:

$$b=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}-x\right)^2$$

Dicho en otros términos, el segmento $a/2$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\sqrt{b}$ y $a/2-x$. Así, la solución geométrica de la ecuación cuadrática se reduce, en este caso, a aplicar el procedimiento siguiente:

1) Se construye un triángulo rectángulo en el que la longitud de la hipotenusa sea $a/2$, y uno de los catetos $\sqrt{b}$, lo cual es solo posible si ocurre que $a/2>\sqrt{b}$. Si $a/2=\sqrt{b}$, el triángulo se reduce a un segmento y este es el valor $x=a/2$. Ahora, bien si la construcción es posible, el otro cateto es $a/2-x$.
2) Se quita de la longitud de la hipotenusa la longitud del cateto $a/2-x$. El segmento que queda es x, la solución.

En la figura 20, podemos ver este segmento:

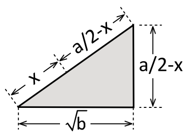

Figura 20

Caso $a-x<x$

Supongamos que b es el área del rectángulo de la figura 21. A la derecha hacemos una configuración del mismo de acuerdo con las dimensiones x y $a-x$ que están en la ecuación al factorizarla.

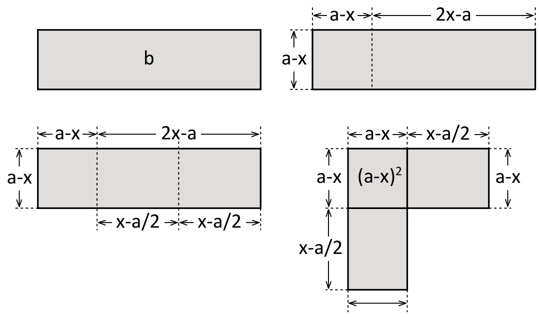

Figura 21

Además, abajo y a la izquierda en la figura 21, tenemos una nuevas configuración del rectángulo obtenida aplicando una aprehensión operativa de cambio figural. Además, tenemos que abajo y a la derecha en la misma figura, también formamos un gnomon con estos rectángulos mediante una nueva aprehensión operativa de reconfiguración.

El área del gnomon de la figura 21 también es b. En consecuencia de lo deducido anteriormente de acuerdo con la diferencia de cuadrados nos queda que:

$$b=\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2$$

El segmento $a/2$ es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\sqrt{b}$ y $x-a/2$. Consecuentemente, la solución geométrica de la ecuación $x^2+b=ax$ se reduce, en este caso a:

1) Construir un triángulo rectángulo en el que la longitud de la hipotenusa sea $a/2$ y en el que uno de sus catetos mida $\sqrt{b}$. Esto solo es posible si $a/2>\sqrt{b}$, pues si $a/2=\sqrt{b}$, el triángulo se reduce a un segmento y la solución es $x=a/2$. Si la construcción es posible, el otro cateto es $x-a/2$.
2) Se debe prolongar la longitud de la hipotenusa una longitud igual a $x-a/2$ y el segmento obtenido es x, la solución.

Veáse la siguiente figura 22:

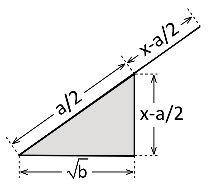

Figura 22

Ejercicio propuesto: Halla la solución de la ecuación cuadrática $x^2+1=2x$.

Aplicaciones del gnomon a los productos notables planos

En el producto notable del binomio de una suma al cuadrado $(x+a)^2=(x+a)(x+a)$, se puede hacer una configuración geométrica como la de la figura 23:

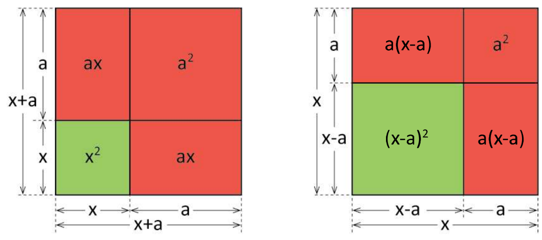

Figura 23

Podemos revisar la interpretación geométrica para el cuadrado de una suma y de la diferencia de un binomio en Barreto (2009b). Aquí notamos en rojo el gnomon.

De donde obtenemos, cambiando de un *anclaje visual* a un *anclaje discursivo,* lo siguiente:

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$$

En este sentido, Aristóteles decía que el gnomon es la figura que añadida a un cuadrado aumenta sus lados pero no altera su forma según se ve en la figura 23 a la izquierda. Pero los griegos antiguos usaron el gnomon y decían que esta es la figura que queda después de quitar de la esquina de un cuadrado otro cuadrado más pequeño, como se ve en la figura 23 a la derecha, lo cual nos da: $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$. Este es el producto notable del binomio de una diferencia al cuadrado: $(x-a)^2=(x-a)(x-a)$.

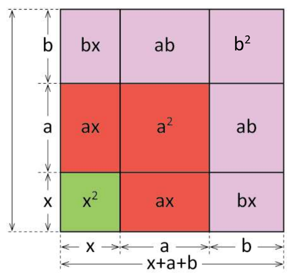

Figura 24

Ahora bien, para elevar un trinomio al cuadrado, $(x+a+b)^2$, podemos hacer una configuración geométrica, usando gnómones, como se muestra en la figura 24.

En esta configuración le agregamos a la figura 23 de la izquierda un gnomon rosado y, como dice Aristóteles, se sigue formando un cuadrado. De acuerdo con la configuración geométrica de la figura 24 podemos cambiar de un anclaje visual al anclaje discursivo, y por tanto algebraicamente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&(x+a+b)^2 = \\
&= x^2+ax+ax+a^2+bx+bx+ab+ab+b^2 = \\
&= x^2+2ax+a^2+2bx+2ab+b^2
\end{aligned}
$$

Es decir, para calcular el trinomio de una suma al cuadrado, geométricamente ocurre de la siguiente manera: Se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de los productos de cada posible par de términos. O bien, se suman los cuadrados de cada término individual y luego se añade el doble de la suma de los productos de cada posible par de términos (propiedad distributiva) como veremos en la siguiente ecuación:

$$
\begin{aligned}
&(x+a+b)^2 = \\
&= x^2+a^2+b^2+2(ax+bx+ab)
\end{aligned} \qquad [3]
$$

Ejemplo: Hallar el desarrollo del siguiente producto notable $(2u+3v+5w)^2$

Sean $x=2u$, $a=3v$ y $b=5w$. De acuerdo con la ecuación [3]:

$$
\begin{aligned}
&(2u+3v+5w)^2 = \\
&= (2u)^2+(3v)^2+(5w)^2+2(2u\cdot 3v+2u\cdot 5w+3v\cdot 5w) = \\
&= 4u^2+9v^2+25w^2+2(6uv+10uw+15vw) = \\
&= 4u^2+9v^2+25w^2+12uv+20uw+30vw
\end{aligned}
$$

Ejercicios propuestos:

a) Generalizar geométricamente, usando gnómones, el desarrollo de $(x+a+b+c+\quad z)^2$

b) Hacer configuraciones geométricas para los casos $(x-a+b)^2$ y $(x+a-b)^2$

Y además hacer una generalización como la de la parte (a) con sumas algebraicas.

Las figuras hechas en foami nos ayudan a visualizar los gnómones. En la figura 25 vemos fotos correspondientes a las figuras 23 y 24.

Euclides ampía el significado de gnomon aplicándolo a paralelogramos en general. Una representación geométrica de la misma la podemos ver en la foto de la figura 26. En ella observamos los gnómones de otros paralelogramos hechos con foami, como son un rectángulo y un romboide, además del cuadrado.

Conclusión

En esta experiencia, realizada con los estudiantes, se evidenció que el trabajo en equipo es muy importante sobre todo cuando se construye el

Figura 25

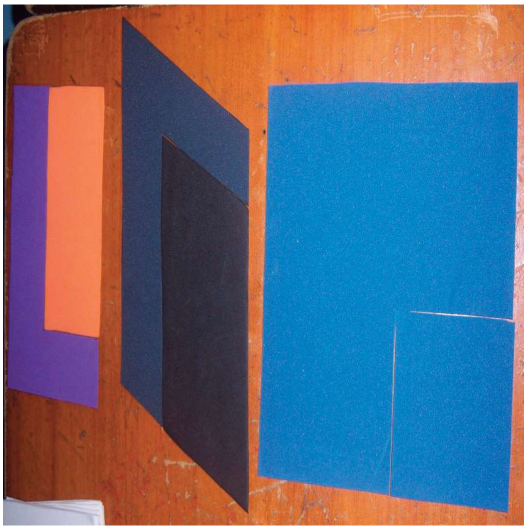

Figura 26

aprendizaje a partir de figuras geométricas realizadas en cartulinas de colores o en foami. Estas tareas les permiten a los integrantes del grupo configurar y reconfigurar los procedimientos a través de procesos, llegando luego a razonamientos que les ayudan a crear un aprendizaje significativo.

Referencias Bibliográficas

Barreto, J. (2008*a*), «Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos», *Números*, n.° 69.

— (2008*b*), «Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática», *Números*, n.° 69.

— (2009*a*), «Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico», *Números*, n.° 70.

— (2009*b*), «Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica», *Números*, n.° 71.

— (2011), «Dos perspectivas geométricas de la diferencia de cuadrados como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática», *Matematicalia*, n.° 7 (2).

Duval, R. (1998), *Geometry from a cognitive point of view*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 37-51.

Euclides (1996), *Elementos (tres vols.),* (1.ª ed. a cargo de M. ª L. Puertas). Editorial Gredos, España.

Real Academia Española (2001), *Diccionario de la lengua española.* [Recuperado el 08 de enero de 2016 de <http://www.rae.es/rae.html>.]

Torregrosa, G., y H. Quesada (2007). «Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría», *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, n.° 10 (2), 273-300.

Julio César Barreto García
Unidad Educativa «José Antonio Sosa Gillén». Yaracuy-Venezuela
Universidad Nacional Experimental de Yacuruy (UNEY))
<juliocbarretog@hotmail.com>

1 La solución de la ecuación $x^2 = a \cdot b$ con $a = b$ y nos da como solución $x = a$ o $x = b$. Recordemos que estamos trabajando con longitudes por tanto no tenemos las soluciones $x = -a$ o $x = -b$.

2 Esto nos puede ayudar en la ardua tarea tan incómoda para nuestros discentes de completar cuadrados como veremos en lo planteado en el *Ejercicio 2*.