

# Andrei Nikolaevich Kolmogórov

JOSÉ LUÍS MUÑOZ CASADO

He seguido toda mi vida el precepto de que la verdad es sagrada, que nuestro deber es burcarla y defenderla, sin considerar si es agradable o no.

A. N. Kolmogórov



## En puertas del tercer milenio

**A**quella mañana no hizo falta esperar el sonido del despertador, el simple hecho de estar donde estaba ya era motivo para tener el sueño ligero. Era una casa de campo rusa, situada a unos cuarenta kilómetros de Moscú, amplia, con dos pisos, una gran librería y varias habitaciones para invitados.

Vladimir sabía el porqué de su presencia allí, hacía diez años que Andrei Nikolaevich Kolmogórov había muerto y varios de sus discípulos habían organizado la recreación de una semana en la dacha Komarovka.

Vladimir observó que habían dejado una hoja en la mesita de su habitación, reconoció la letra y sin darse cuenta comenzó a recordar a su maestro.

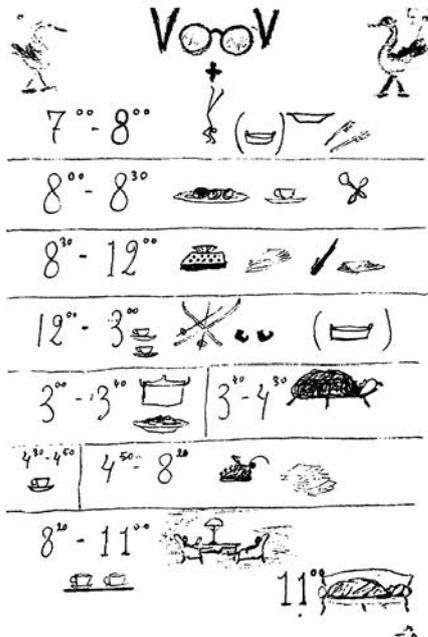
Andrei Nikolaevich Kolmogórov nació el 25 de abril de 1903 en la ciudad de Tambov, al suroeste de Moscú. Por desgracia, su madre falleció en el parto y la responsabilidad de su crianza pasó a manos de su tía Vera Yakovlevna Kolmogorova, de cuya familia aristocrática heredó el apellido, puesto que los Kolmogórov nunca aprobaron el matrimonio de su hija con un ingeniero agrónomo. A. N. Kolmogórov pudo disfrutar de su padre hasta que en 1918 éste fue llamado a filas por el Ejército Rojo en la Guerra Civil de 1918, perdiendo la vida en el frente sur.

A los siete años la familia decide trasladarse a Moscú y A. N. Kolmogórov es enviado a la escuela Repman, una institución con fama de promover el pensamiento liberal y usar métodos no convencionales. Allí hará grandes amigos y conocerá a la que será su futura esposa, Anna Albertevna Egorova.

En 1920, A. N. Kolmogórov ingresa simultáneamente en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Moscú y en el Instituto Químico-Tecnológico D. I Mendeléiev. Siendo estudiante escribe su primera publicación conjunta con Gleb Seliverstov, amigo de Repman, sobre series trigonométricas, publicada en los *Comptes Rendues* de la Academia de Ciencias de París.

Comenzó a asistir a las clases de Nikolai Nikolàyevich Luzin. De fuerte personalidad, Luzin poseía una extraordinaria capacidad pedagógica atrayendo a multitud de estudiantes. En aquella época, Luzin y Egorov capitanearon la escuela rusa de teoría de funciones conocida como *Luzitania*.

En uno de los seminarios de topología que se impartía en la universidad conocería a Pável Serguéyevich Aleksandrov, experto en topología y miembro de *Luzitania*. Este encuentro supondría el inicio de una gran amistad que duró hasta 1982, año en el que P. S. Aleksandrov murió.



Plan horario elaborado por A. N Kolmogórov y P. S. Aleksandrov

Tras terminar la universidad, ya centrado en la Facultad de Matemáticas, realizó el doctorado bajo la tutela de N. N. Luzin llegando a publicar hasta catorce trabajos de investigación sobre teoría de funciones, probabilidad y lógica.

Vladimir volvió a la realidad, tenía que bajar, en la hoja que había encontrado en la mesita ponía 7:00. En el comedor se encontró con varios amigos y colegas de la universidad. Algunos reconocieron la letra de maestro y otros simplemente estaban expectantes por entender lo que parecía un jeroglífico.

Se respiraba un aire de tranquilidad y sosiego. Las paredes cargadas de historia transmitían esa sensación de solemnidad que te envuelve haciéndote sentir partícipe de sus historias.

## Axiomatización de la probabilidad

Tras realizar algunos ejercicios físicos y de desayunar, la mañana continuó con una sesión de estudio. Uno de los grupos se centró en la definición axiomática de la probabilidad de A. N. Kolmogórov, un resultado que marcó el devenir de la teoría de probabilidad para los años siguientes.

Los primeros intentos de calcular probabilidades ya se realizaron en el siglo XV a cuenta de los juegos de azar. Sin embargo, el primer estudio riguroso fue la publicación póstuma, en 1713, del libro «*Ars Conjectandi*» de J. Bernoulli, donde aparece su Ley empírica del azar:

Cuando el número de realizaciones de un experimento aleatorio crece mucho, la frecuencia relativa del suceso asociado se va acercando cada vez más y más hacia un cierto valor.

Esta definición de la probabilidad presentaba varios aspectos negativos que a los

matemáticos de la época no les terminaban de gustar:

–No muestra ninguna pista sobre el error entre «cierto valor» y la probabilidad real.

–La definición se basa en la experiencia.

–No menciona el número de realizaciones necesarias.

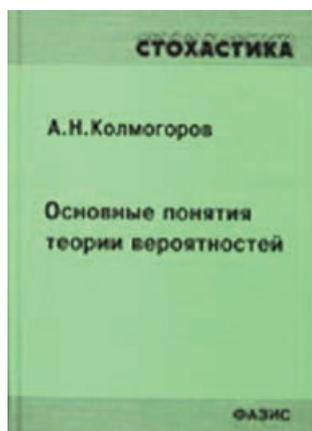
Está también la definición de Laplace:

La probabilidad del suceso  $A$  es el cociente entre el número de casos favorables a que ocurra dicho suceso y el número de casos posibles, bajo el supuesto de que todos los casos posibles sean igualmente equiprobables.

Pero una vez más, encontramos un problema en la definición de probabilidad y es que menciona «igualmente equiprobables», es decir, menciona el concepto a definir en la propia definición.

Volviendo al siglo de Kolmogórov, en la década de los años veinte se fraguó la escuela rusa-francesa de probabilidad comandada por Markov, Lyapunov, Bernstein, Borel y Levy. Además, ya se había producido la generalización de los conceptos de longitud, área y volumen naciendo así la teoría de la medida.

Kolmogórov tuvo la genial idea de ver la probabilidad como una medida. En 1933, dos años después de ser nombrado profesor de la Universidad de Moscú, publica



Fundamentos de la teoría de la probabilidad

en alemán su Fundamentos de la teoría de la probabilidad, obra en la cual define los axiomas de la teoría de probabilidad:

Sea  $\Omega$ . una colección de elementos llamados sucesos elementales, y sea  $F$  un conjunto de subconjuntos de  $\Omega$ . A los elementos del conjunto  $F$  se les llama sucesos aleatorios.  $F$  es un álgebra de conjuntos si:

I.  $F$  contiene al conjunto  $\emptyset$ .

II. A cada conjunto  $A$  de  $F$  se le asigna un número real no negativo  $P(A)$ . Este número  $P(A)$  se llama probabilidad del suceso  $A$ .

III.  $P(\Omega)=1$ .

IV. Si  $A$  y  $B$  son disjuntos:  $P(A+B) = P(A) + P(B)$ .

Un sistema de conjuntos  $F$ , con una asignación definida de números  $P(A)$  que satisfaga los axiomas I–IV se llama álgebra de probabilidad.

Nota de Kolmogórov:

Un sistema de conjuntos se llama álgebra si la suma, producto y diferencia de dos conjuntos del sistema también pertenece al mismo sistema. Por  $A+B$  se entiende el conjunto compuesto por los elementos de  $\Omega$  contenidos en  $A$  o  $B$ , o bien en  $A$  y  $B$  simultáneamente. Por  $AB$ , el conjunto de los elementos de  $\Omega$  pertenecientes a  $A$  y  $B$  al mismo tiempo. Y, finalmente, por  $A^*(B^*)$  se entiende el conjunto de los elementos de fórmulano contenidos en  $A$  o en  $B$ .

Con estos axiomas podemos definir la probabilidad conforme la conocemos actualmente. Si  $\Omega$  es finito, la probabilidad es una función  $P:F \rightarrow \mathbb{R}$  que asigna un número  $P(A)$  a cada conjunto  $A$  del álgebra  $F$  y que satisface:

1)  $P(A) \geq 0 \forall A \in F$ .

2)  $P(\Omega) = 1$ .

3) Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son conjuntos disjuntos de  $F$ , entonces:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$$

Los más jóvenes del grupo conocían a Kolmogórov por sus trabajos, desconociendo por completo la historia del lugar donde se encontraban. En 1935 Kolmogórov, siendo ya director de Facultad de Mecánica y Matemática de la UEM1 y Alek-

sandrovs compraron a la familia del director de teatro Konstantin Seguéyevich Alekseiev la mitad del palacete de Komarovka. Allí, Kolmogórov y Aleksandrov cultivaban el teatro, la música, la literatura, el deporte y las matemáticas. Invitaban a sus amigos matemáticos y llevaban a alumnos realizando auténticas convivencias matemáticas llegando a tener hasta quince alumnos. Después de una mañana de trabajo eran famosos los paseos por la nieve de hasta 40 Km. Al final de la tarde disfrutaban de una animada charla sobre teatro, música, literatura, etc.

Disfrutaban tanto de Komarovka que organizaban su actividad laboral de lunes a miércoles para poder pasar el resto de la semana en la dacha. Actividad que realizaron prácticamente hasta sus últimos años.

## Labor educativa

La mañana avanza recordando a Kolmogórov. En otra mesa de la biblioteca otro grupo comenzó hablando sobre la importancia que las escuelas de verano y la escuela internado tuvieron en el nivel científico ruso. Comenzó Sergey en calidad de discípulo más antiguo de la mesa.

Recordó que Kolmogórov desde muy joven estuvo interesado en la educación matemática, quizás porque en sus primeros años de universidad tuvo que ganarse la vida dando clases de matemáticas y física en la escuela secundaria. La forma de concebir la educación de Kolmogórov le obligaba a implicarse en todas las facetas educativas, así en esa etapa participó en el consejo escolar y fue educador del internado.

Para Sergey esta etapa marcaría muchas de las actividades que Kolmogórov realizaría posteriormente. Nunca dejó de lado su preocupación por la educación, en la década de los treinta colaboró con las asociaciones de estudiantes en la organización de la primera Olimpiada Matemática, remarcando que el valor de la olimpiada era acercar las matemáticas a los alumnos y no crear campeones. Kolmogórov decía:

Quando se cultivan de forma hábil sus capacidades, estas gradualmente se desarrollan y, como regla, ya no se pierden. Claro que hay excepciones. El interés por la matemática puede surgir también con posterioridad.

Con esa idea diseñó las denominadas «escuelas de verano» y las escuelas internados anexas a la universidad. La primera escuela de verano que se organizó fue en 1963 con los ganadores de la Olimpiada Matemática. Komarovka impregnaba todo y las escuelas de verano reproducían ese ambiente. Por la mañana tras la sesión de ejercicios, se realizaban charlas, se proponían problemas tanto alumnos como profesores, por la noche se fomentaba el ambiente cultural con animadas conversaciones sobre cualquier tema.

Pero Kolmogórov sentía que de esta forma podía ayudar a un grupo reducido de alumnos. Empeñado en extender este sistema a las regiones más lejanas a la universidad se crearon con mucho esfuerzo cuatro escuelas internado anexas a la universidad en Moscú, Leningrado, Novosibirsk y Kiev. Allí se realizaban los dos últimos cursos antes de acceder a la universidad. Kolmogórov junto con Isaac Konstantínovich Kikoin fue el fundador la escuela internado de Moscú.

En el internado no se admitían alumnos que vivieran en Moscú, Kolmogórov se implicó de forma muy intensa, daba conferencias, impartía clases, se ocupaba del plan de estudios, seleccionaba a los profesores y planificaba el tiempo libre de los



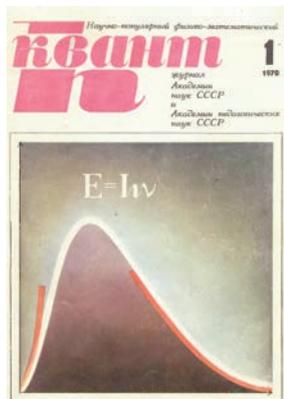
Escuela de verano en el lago Russkoye, 1971

alumnos en un afán de crear un clima de desarrollo cultural propicio.

Kolmogórov junto con su amigo Aleksandrov planificaban absolutamente todo. Las clases eran pequeñas, alrededor de unos quince alumnos con hasta tres profesores a la vez. A veces estos profesores eran investigadores de la Facultad de Mecánica y Matemática, otras veces profesores universitarios y otras estudiantes de postgrado seleccionados, la colaboración con el internado era muy alta por parte de la comunidad educativa.

En 1970 junto con el físico Issac Kikoin comienza la edición de una revista científica para estudiantes de secundaria, la revista *Kvant* (*quantum*). Se publicaban artículos científicos y se proponían problemas adecuados a la edad. Kolmogórov fue muy exigente con la calidad de los trabajos, tanto a nivel científico como a nivel gráfico. Él mismo publicó trece artículos en la década de los setenta.

Los compañeros de mesa de Sergey observaron como de repente sus ojos se volvían vidriosos al hablar de la escuela-internado de Moscú. Con un cuidado extremo, Sergey cogió su cartera que tenía junto a la silla y muy despacio, como si de algo muy frágil se tratara, sacó envuelta en un plástico, el número 1 de *Kvant*. En ese momento la mesa se quedó en silencio, observando aquel tesoro.



Primer número de la revista *Kvant*

La labor que Kolmogórov realizó en la escuela-internado queda reflejada en el legado de sus 25 años de dirección. El 95% de alumnos que allí estudiaron realizaron estudios superiores y muchos de ellos consiguieron el grado de doctor.

## La potente escuela rusa

En otra mesa estaba sentado Albert, profesor de la Facultad de Mecánica y Matemáticas. Sin darse cuenta, acostumbrado quizás por sus clases, comenzó su historia recordando los gloriosos días de la *MecMat*.

La década de los treinta comienza con la publicación del artículo Métodos analíticos en la teoría de probabilidades. Kolmogórov estudia de forma sistemática y abstracta los procesos de Márkov. Su interés por los procesos estocásticos sigue en aumento, ya en la universidad junto con Khinchín había publicado Teoría de la correlación de los procesos estocásticos, artículo que se considera el iniciador de la construcción matemática de la teoría de procesos estocásticos.

En 1933 publica Fundamentos de la teoría de la probabilidad y a finales de ese año Kolmogórov fue nombrado director de Instituto de investigaciones de Mecánica y Matemática. La publicación de este libro unido al nacimiento de nuevas tecnologías provocaron un desarrollo muy intenso de los procesos estocásticos. Durante esta década, Kolmogórov y muchos de sus alumnos estudiarían los procesos estocásticos relacionados con física y biología en lo que más tarde llamaría procesos ramificados dentro de la cátedra Teoría de probabilidades que se creó a instancia suya.

En 1941 le otorgan el premio Stalin junto a Khinchín por sus trabajos sobre procesos estocásticos. La II Guerra Mundial comienza y casi todas las investigaciones de la época están relacionadas con aspectos militares. Kolmogórov estudió el fenómeno de la turbulencia (movimiento caótico de líquidos y gases), de importancia vital en la construcción de aviones propulsados a reacción. Conocida es su ley de los dos tercios:

La media cuadrática de la diferencia de velocidades en dos puntos, localizados a distancia  $r$  (no demasiado grande ni demasiado pequeño), es proporcional a  $r^{2/3}$ .

Esta investigación provocó su nombramiento como jefe del laboratorio de investigaciones sobre turbulencia en el Instituto de Geofísica Teórica.

Después de la guerra Kolmogórov recibió la medalla «por su valiente labor en la Gran Guerra Patriótica» y la Orden de Lenin.

A mediados de los años cincuenta es nombrado decano de la Facultad de Mecánica y Matemática. Durante esta época junto Iván Gueorguievich Petrovski como rector elevaron el nivel matemático ruso de forma espectacular. Los programas de captación de alumnos con talento, los cambios introducidos en los planes de estudio y la estimulación por el trabajo científico hicieron que muchos estudiantes tuvieran las condiciones óptimas para desarrollar todo su potencial. Kolmogórov introdujo la figura del guía científico, todo alumno a partir del segundo año debía tener un profesor que aconsejará al alumno en su trabajo científico.

En ese punto Albert miró hacia la mesa de Vladimir, y comentó: «V. Arnold junto con Kolmogórov demostraron el décimo tercer problema propuesto por Hilbert en 1901».

En esa época comenzó a trabajar en la teoría de autómatas y teoría de algoritmos, una vez más junto a uno de sus alumnos. Con Uspensky formuló la noción de máquina de Kolmogórov-Uspensky.

Kolmogórov nunca explicaba nada sin motivo, siempre planteaba los problemas justos en los momentos precisos, dejando al alumno la suficiente autonomía para tratar el problema como considerara necesario. Quizás por ese saber hacer y su forma de concebir

la investigación se contabilizan más de 63 discípulos directos dedicados a la investigación en algunos de los temas que Kolmogórov trabajó a lo largo de su vida.

## La complejidad algorítmica

A finales de la década de los cuarenta apareció un artículo de Claude E. Shannon en el que propuso la idea de transmitir palabras, imágenes y sonidos mediante unos y ceros, nacía así la teoría de la información. Este artículo provocó mucho interés en Kolmogórov, hasta tal punto que decidió crear un seminario en la universidad dedicado a explorar los fundamentos matemáticos de esta nueva teoría de la información. La fama matemática de Kolmogórov era ya más que sobrada y al seminario asistieron multitud de matemáticos que dieron un gran impulso a la teoría de la información.

Si las señales continuas no pueden servir para la transmisión de una cantidad ilimitada de información es sólo porque ellas siempre se observan con una precisión limitada. Es natural, por ello, fijar la precisión de la observación y definir la correspondiente  $\epsilon$ -entropía de un objeto  $X$ .

Junto con sus colaboradores introdujo el rigor y la generalización en la teoría de la información, ampliando así la variedad de aplicaciones de la nueva teoría. Su amplia visión de las matemáticas le permitió introducir el concepto de  $\epsilon$ -entropía en otras

### Proceso Estocástico

Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias que dependen de un parámetro que generalmente suele ser el tiempo. Por ejemplo, el número de personas en un supermercado a los  $t$  minutos de abrir.

### Proceso de Márkov

Un proceso de Márkov es un proceso estocástico con la propiedad de que si se conocen el estado actual  $X_n$  y los estados previos  $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}$ , la probabilidad del estado futuro  $X_{n+1}$  solo depende de  $X_n$ . Por ejemplo, en el clima de una región, el estado del clima actual solo dependerá del último estado.

ramas de las matemáticas como los sistemas dinámicos y la teoría de funciones.

En este punto Albert hizo una pausa y miró su reloj, eran cerca de las dos del mediodía. Sin darse cuenta, habían pasado casi seis horas hablando de su maestro. Se dirigieron al comedor donde estaba preparado un ligero almuerzo de acuerdo a las sugerencias hechas por algunos de los que conocieron Komarovka con Kolmogórov y Aleksandrov.

El día era soleado y los profesores más antiguos sabían que en esas condiciones Kolmogórov y Aleksandrov hubieran preferido pasear todo el día a estar en la casa trabajando. Era una de las directrices, si el día era bueno mejor aprovecharlo, pero omitieron esa información a los más jóvenes.

El paseo comenzó y los diferentes ritmos de paseo volvieron a formar grupos alrededor de los profesores más veteranos, sin poder evitarlo las conversaciones volvieron a comenzar. Los más jóvenes se acercaron a Gleb Uspensky, sabían que era el coautor del último artículo publicado por Kolmogórov.

Gleb Uspensky les contó cómo surgió la idea de complejidad algorítmica.

Después de la II Guerra Mundial el desarrollo de los computadores y el nacimiento de la teoría de la información dieron un impulso muy grande a los algoritmos computacionales. Kolmogórov decía:

### Problema 13 de Hilbert

David Hilbert consideró la ecuación general de séptimo grado:

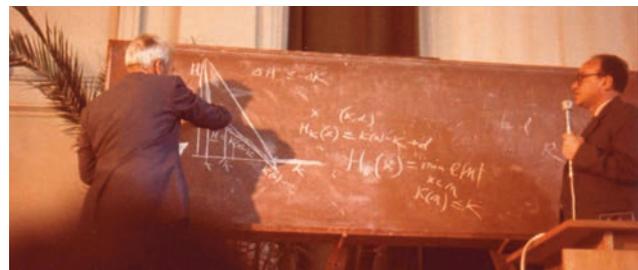
$$x^7 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 = 0$$

y se preguntó si la solución  $x$ , en función de los tres parámetros variables  $a$ ,  $b$ , y  $c$  se podría expresar usando un número finito de funciones de dos variables.

... en el interior de la matemática, después de la acumulación de gran cantidad de problemas particulares, resueltos por métodos especiales, se fundan nuevas teorías que esclarecen estos problemas desde otros puntos de vista y que permiten tratarlos con un método unificado.

Y eso precisamente fue lo que hizo Kolmogórov presentando la idea de complejidad algorítmica. Definió los conceptos de la entropía y la cantidad de información contenida en un objeto en base a los conceptos de algoritmo y función calculable.

Otros matemáticos como R. Solomonoff en Cambridge y Gregory Chaitin en Nueva York presentaron la misma idea de forma independiente, pero hoy en día se conoce como Complejidad de Kolmogórov. G. Uspensky entró en detalles sobre la teoría algorítmica de la información y sobre cómo su maestro supo mezclar la teoría de probabilidades con la teoría de la información en lo que se denomina aleatoriedad algorítmica, campo en el que él era un experto.



1973. Tallinn, Estonia. Charla sobre complejidad algorítmica

La actividad científica fue muy intensa en aquella época, se creó el laboratorio de métodos estadísticos en el departamento de probabilidad de la Facultad de Mecánica y Matemática y también en Escuela de Matemáticas y Física. Con Kolmogórov como director de laboratorio se profundizó en las investigaciones y aplicaciones de la probabilidad y los métodos estadísticos.

En esos años el gobierno de la URSS concede a Kolmogórov el título «Héroe del trabajo socialista» y en 1963 recibe el premio internacional de Matemáticas de la Fundación Internacional Balzan, premio que dona en gran parte a la Universidad. Además, dos años después le conceden junto con V. Arnold el premio Lenin por sus trabajos en la teoría de las perturbaciones de sistemas dinámicos.

## Un matemático universal

Añoro esa forma de concebir la educación -dijo Sergey. La preocupación y el interés que Kolmogórov mostró siempre por sus alumnos no solo en temas matemáticos es algo que hoy en día se ha perdido. La generosidad con la que compartía sus ideas y la capacidad de proponerte justo el problema que más se adaptaba a tus cualidades eran excepcionales, una visión de las matemáticas que solamente los genios poseen.

Esa amplia visión quizás fue potenciada por sus múltiples viajes alrededor del mundo. Junto a Aleksandrov visitó Berlín donde conoció a H. Hopf, al cual invitaron a Komarovka, y de cuya colaboración salieron varios tratados de topología.



Kolmogorov y P. S. Aleksandrov

Ambos fueron a Göttingen y Aleksandrov le presentó a Richard Courant, David Hilbert, Edmund Landau, Feliz Bernstein, Hermann Weyl y a Emmy Noether. Visitaron París varias veces, donde pudo establecer contacto con Borel, Lebesgue, Paul Lévy y Jacques Hadamard, al cual Kolmogórov admiraba como si fuera su maestro. En uno de sus viajes por Francia visitaron la tumba del matemático P. Uryshon, miembro y compañero de ellos en Luzitania y que por desgracia murió ahogado en las costas de la Bretaña francesa, donde está enterrado.

Vladimir quiso hacer hincapié en los nombres que mencionaba y en el hecho de que no solo habían sido meros contactos, muchos de ellos influyeron con sus opiniones y teorías en Kolmogórov.

Kolmogórov nunca dejó de viajar, a veces por trabajo, como cuando participó en el barco científico Albert Mendeléiev en varias expediciones alrededor del mundo para investigar la turbulencia de los fluidos, y otras para recoger premios y menciones honoríficas de diferentes academias y universidades.

Para finalizar la noche comenzaron la lectura de *Los dioses tienen sed* de Anatole France, uno de los autores favoritos de Kolmogórov:

Evariste Gamelin, pintor, discípulo de David, miembro de la sección del Pont-Neuf, antes sección de Enrique IV, habíase encaminado, muy de mañana, hacia la antigua iglesia de los barnabitas que servía de sede desde hacía tres años, desde el 21 de mayo de 1790, a la asamblea general de la Sección...

## Referencias bibliográficas

- SÁNCHEZ, C., y C. VALDÉS (2003), *Kolmogórov. El zar del azar*, Nivola, Madrid.
- ASH, R. B (1970), *Basic Probability Theory*. Wiley.
- FRANCE, A. (2010), *Los dioses tienen sed*, versión castellana del original de 1912, editorial Barril y Barral.
- GNEDENKO, B. (1995), *Teoría de las probabilidades*. Euro Omega-Rubiños, Madrid.
- KOLMOGÓROV, A. N. (1950), *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company.
- VV. AA. (1989), *Annals of Probability*, Volumen 17, n.º 3, 813-935.
- La web de Paul M. B. Vitanyi, profesor de la Universidad de Amsterdam, recoge la biografía de Komogórov:  
<<http://www.cwi.nl/~paulv/KOLMOGOROV.BIOGRAPHY.html>>
- Web de la revista Kvant:  
<<http://www.kvant.info/>>

JOSÉ LUIS MUÑOZ CASADO  
IES Salvador Dalí, Madrid (SMPM)  
<[tercermilenio@revistasuma.es](mailto:tercermilenio@revistasuma.es)>