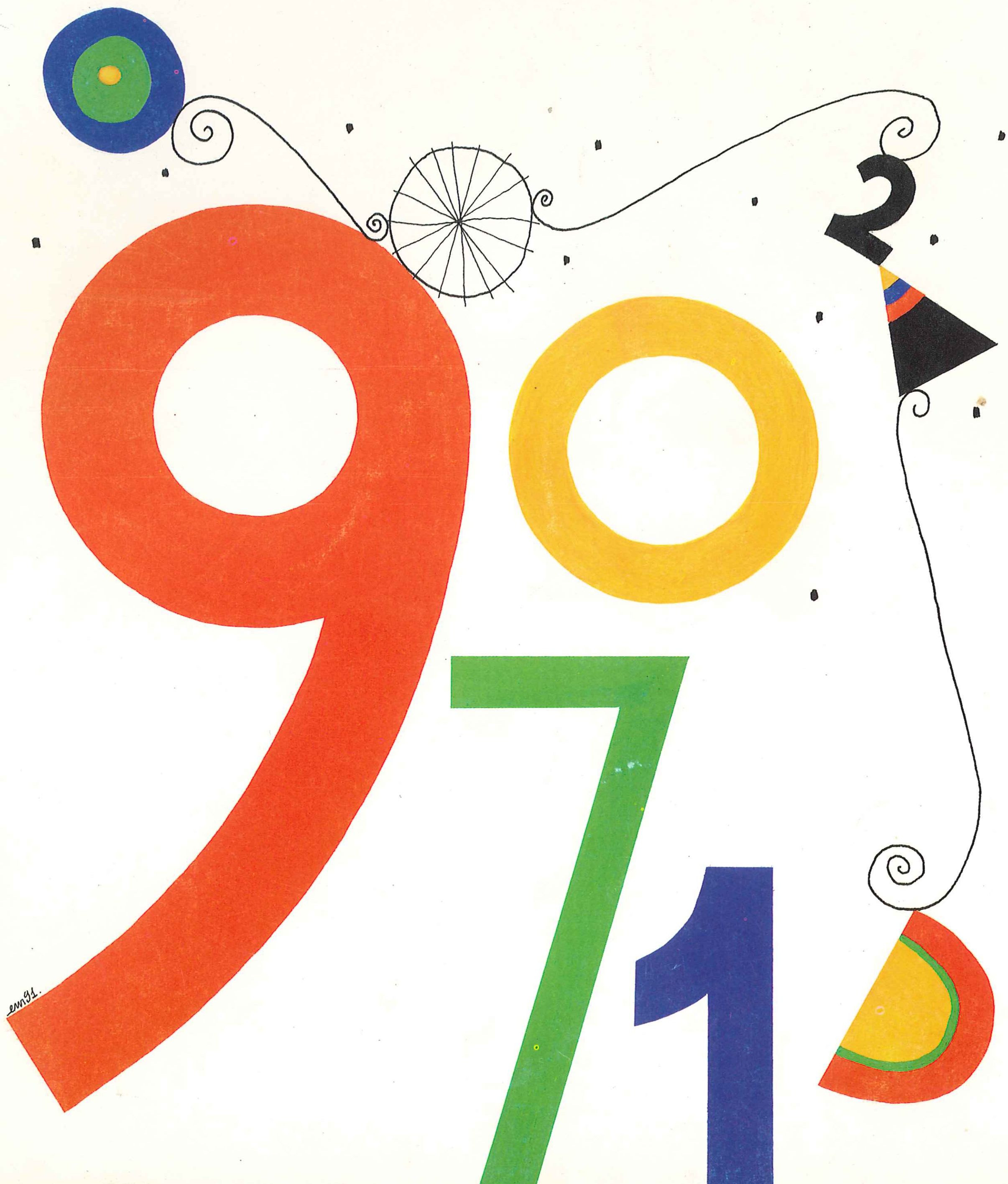
SUMA

Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Número 9 Otoño 1991



EDITA:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas
"P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas
"Isaac Newton"
Presidente: Jacinto Quevedo Sarmiento
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Charo Nomdedeu
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira"
Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n.
31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Teresa Vázquez
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad Extremeña de Educación Matemática
"Ventura Reyes Prósper"
Presidente: Ricardo Luengo
Apartado 536. 06080-Mérida

Depósito legal: Gr. 708 - 91
I.S.S.N.: 84 - 87387 - 26 - 8
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envió)

ARTÍCULOS

RIO

INFORMACIÓN

RESEÑAS

MISCELÁNEA

IDEAS PARA LA CLASE

RECURSOS PARA EL AULA

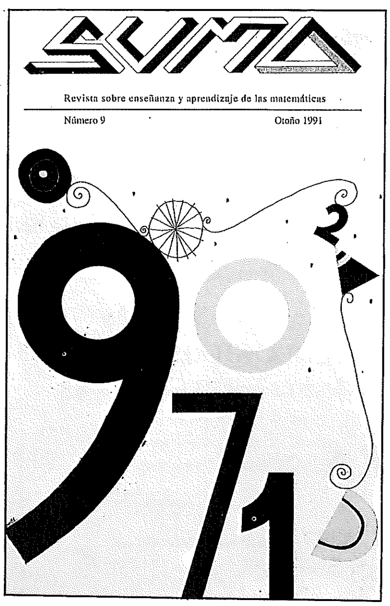
EDITORIAL

«Todo cambia, excepto el cambio»
(Israel Zangwill)
«Una obra de arte debe satisfacer a todas las musas. Es lo que yo llamo la prueba del nueve.»
(Jean Cocteau)

No tan lejos queda aquel Octubre de 1988, cuando la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas puso su confianza en Rafael Pérez y su equipo de colaboradores para llevar a cabo un bonito proyecto: SUMA, la revista de los profesores de Matemáticas de este país. Sean estas primeras líneas para expresar nuestro reconocimiento. ¡Ahí queda su brillante trabajo!

El número nueve tiene importantes significados en la cábala, y para nosotros supone un nuevo reto que afrontar, una nueva meta que traspasar y un compromiso con muchos lectores.

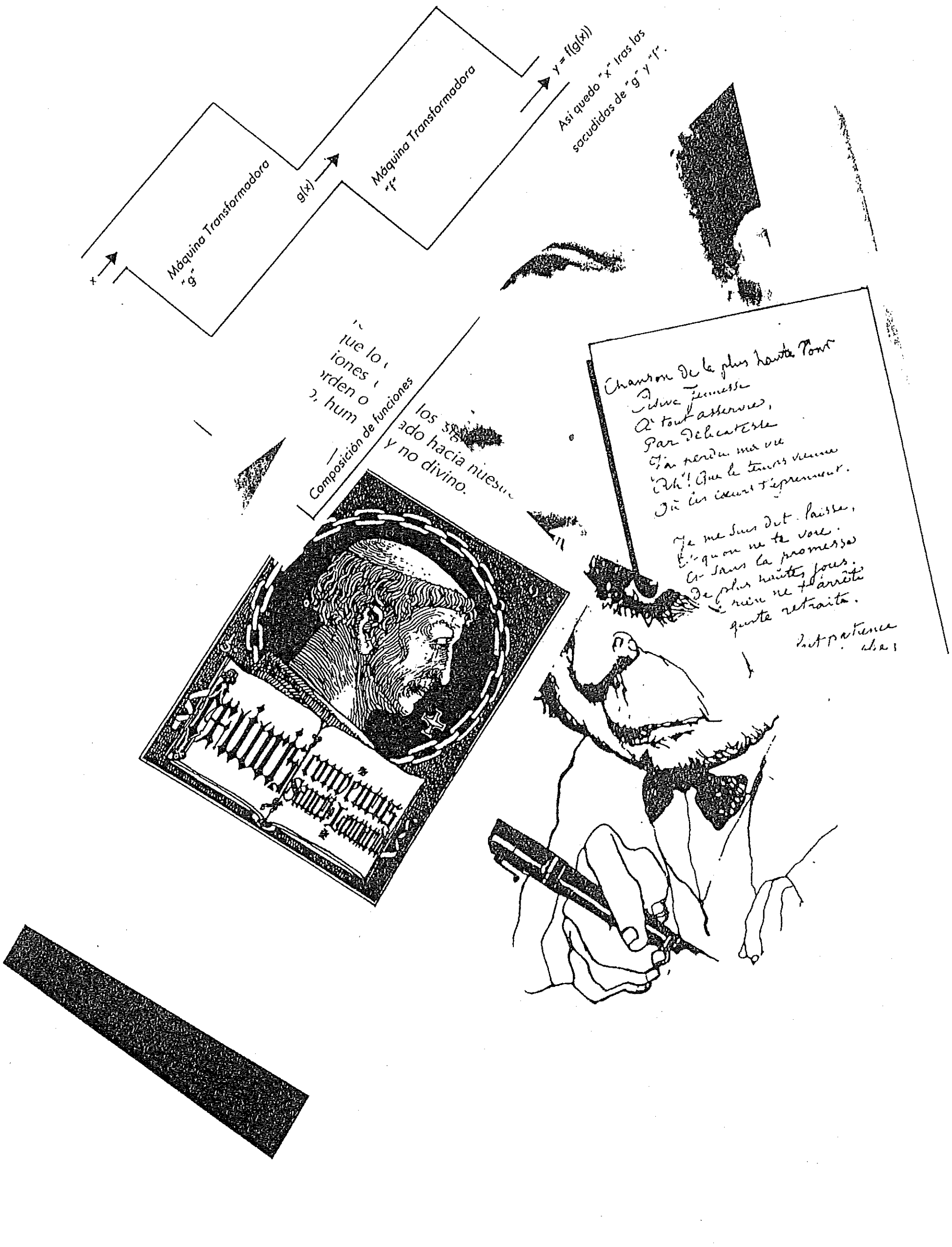
El nuevo equipo de SUMA está dispuesto a saltar el listón que nos dejó Rafael con los ocho primeros números. Subirlo con el mejor y más elegante salto va a ser harto difícil. La aportación de nuevas ideas y nuevas ganas de comunicar cosas y por supuesto, con el ánimo puesto en las colaboraciones que número tras número han ido apareciendo y que esperamos no decaigan, será el más importante de los objetivos a alcanzar: Colaboraciones que relaten experiencias, usos de materiales, sesiones especiales de clase, horas de investigación y ... tantas cosas que a veces se quedan en las paredes del aula o en las cuartillas que se amontonan en el escritorio.



Por otro lado, deseamos que las necesidades en educación matemática, sea cual fuere el nivel educativo, "puedan ser cubiertas, en las medidas de nuestras posibilidades, a través de las colaboraciones que paulatinamente van llegando a nuestra redacción. A nuestro juicio este es el camino".

Importante para la Educación Matemática es el año mítico que comienza, ya que la cita en Quebec - ICME 7 - debe tener una relevante presencia española. Desde estas páginas y en sucesivos números, podrán contar con información detallada sobre el evento.

Por último no queremos finalizar sin solicitarles disculpas porque la demora sufrida en el traslado de infraestructura y documentación hacia la nueva sede ha supuesto un inevitable retraso en la edición de este número.


Máquina Transformadora "g"
g(x)
Máquina Transformadora "f"
y = f(g(x))
Así quedó "x" tras las sacudidas de "g" y "f".
Composición de funciones
y no divino.
Chanson de la plus haute Tour

ARTÍCULOS

VALOR MATEMÁTICO ELEMENTAL DE LOS FRACTALES

Fernando Fernández Rodríguez
José Miguel Pacheco Castelao

Introducción

Desde que la productora cinematográfica Lucasfilm, gracias al empleo de técnicas fractales, se ha puesto a la cabeza de la obtención de espectaculares imágenes sintéticas, simulando decorados, paisajes naturales, vuelos de aeronaves y toda suerte de Zooms y Travellings cinematográficos, los objetos fractales han dejado de ser una pura entelequia matemática para exquisitos, para pasar a formar parte significativa de la cultura de finales del siglo XX.

Los Fractales han saltado a las páginas de los periódicos y se han convertido en asiduos habitantes de los dominicales de los mejores medios informativos del mundo. El conjunto de Mandelbrot ha ocupado las portadas de todas las revistas de divulgación científica para terminar siendo calificado como una «combinación suprema entre el arte y la técnica».

El éxito de las teorías matemáticas finiseculares ha conseguido acaparar la atención del gran público, atención que no descansaba en las matemáticas desde la época dorada del nacimiento de la Mecánica Celeste (No está de más recordar aquí que uno de los orígenes de la teoría de los fenómenos caóticos es precisamente la Mecánica Celeste). El Caos y los Fractales compiten hoy día con la ingeniería genética, la teoría de la relatividad, la energía nuclear y la gestión ambiental.

Desde la mera perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, sería interesante utilizar la tremenda curiosidad e inquietud que han despertado en el público los objetos fractales.

Al margen de las consecuencias científicas de estas teorías, existe dentro de los fractales un valor matemático elemental que, quizás por el carácter novísimo de su configuración definitiva como teoría y su vinculación con la tecnología del ordenador, es muy acorde con los nuevos valores y destrezas buscadas actualmente en la enseñanza de las matemáticas:

Geometría de exploración y teselaciones.
Recursividad y algoritmos en ambiente geométrico.
Matemáticas del crecimiento (progresiones y fracciones continuas).
Aproximaciones al infinito.
El concepto de límite a través de la geometría.
Logaritmos y escalas logarítmicas.
El concepto y papel de la escala.

Los objetos fractales

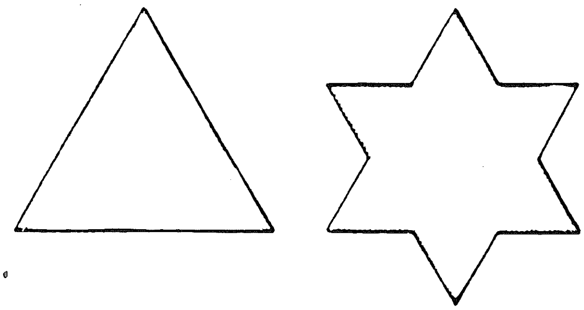
Un fractal es una figura que presenta similaridad entre el todo y sus pequeñas partes. Puede construirse recursivamente iterando un conjunto sencillo de instrucciones, que a pesar de su complejidad origina formas muy complejas desde el punto de vista de la geometría euclídea. Objetos de este tipo se han construído a lo largo de los últimos cien años como fuente de contraejemplos en diversas teorías. La intención de Mandelbrot al sistematizarlos fue buscar una nueva geometría capaz de simular la forma que tienen los objetos reales como los ríos, las costas, los cráteres lunares o la caprichosa distribución de la materia en el universo. Como señalaba jocosamente su redescubridor, parece como si la naturaleza hubiese gastado una broma a los matemáticos. El modelo euclídeo, puntos, rectas o planos, es una idealización que raras veces aparece en los objetos reales. El hecho de abstraer de un hilo el concepto de recta y de un velo el de plano son simplificaciones que en ocasiones se revelan extraordinariamente burdas.

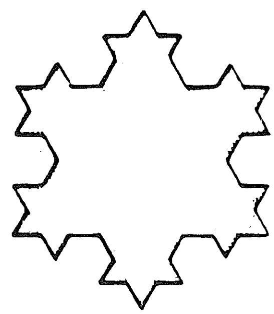
La existencia de funciones continuas no derivables no constituyen una sutileza ajena a la naturaleza. Las curvas que no admiten tangentes son la regla. Las curvas «regulares», aunque sean objetos interesantísimos mucho más fáciles de manejar con las heramientas habituales del cálculo diferencial, constituyen la excepción, por lo cual la geometría de las formas naturales está mal representada por el orden perfecto que reina en las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial.

La verdadera geometría de la naturaleza parece evocar más bien la complicación de extrañas teorías matemáticas, creadas a principios de siglo, caídas en desuso durante casi cincuenta años debido a la ausencia de elementos potentes de cálculo y al giro formalizador que sufrieron las matemáticas en esa época.

Helge von Koch ideó en 1904 una curva donde una longitud infinita encierra un área finita:

Es un estimulante ejercicio de progresiones geométricas el comprobar como en cada etapa de construcción de la curva de von Koch, su longitud aumenta en un factor de 4/3, teniendo por tanto límite infinito. La distancia entre dos cualesquiera de sus puntos es también infinita. Matemáticamente hablando, este objeto pertenece a la clase de curvas continuas no derivables en ningún punto y con arcos no rectificables, que comenzaron por escandalizar a Weierstrass, Bolzano, Cantor y Dedekind a finales del siglo pasado, poniéndoles de manifiesto lo escurridizo que puede llegar a ser el concepto de longitud de un arco.





Costas

A comienzos de los años sesenta Benoit Mandelbrot planteó la siguiente pregunta:

¿Cual es la longitud de la costa de Bretaña?

¡Una costa puede ser un elocuente ejemplo de lo que es un fractal!

Cuando una bahía o una península, representadas en un mapa a escala 1/100.000, se examinan de nuevo en un mapa 1/10.000, se observa que sus contornos están formados por innumerabes sub-bahías y sub-penínsulas. En un mapa escala 1/1.000, se ven aparecer también sub-sub-bahías y sub-sub-penínsulas y así sucesivamente. Los pequeños detalles son por tanto similares a los grandes.

Las fronteras que separan los países se adaptan también a la forma fractal. El científico inglés Lewis F. Richardson, conocido por sus investigaciones sobre la predicción del tiempo y los primeros modelos matemáticos del desarrollo de las guerras, intrigado por lo retorcido del trazado de las fronteras nacionales, consultó en diversas enciclopedias las longitudes de las fronteras entre España y Portugal y entre Bélgica y Holanda. Richardson encontró discrepancias de ¡hasta un 20%!en las longitudes calculadas.

Richardson observó también que al reducir la escala de medición, la longitud de las costas y fronteras aumenta prácticamente sin límites.

Es fácil idear un procedimiento para obtener la longitud de una costa en función de la escala elegida previamente en el mapa:

La idea consiste en pasear un compás de abertura μ, comenzando cada paso donde termina el anterior. El valor μ multiplicado por el número de pasos nos dará la longitud aproximada de la costa. Si se repite la operación reduciendo sucesivamente la abertura del compás, se encuentra que $L(\mu)$ tiende a aumentar sin límite. La escala μ y por tanto la extensión longitudinal geográfica es ciertamente una elección antropológica: un ratón, una mosca, las piedras grandes o el hombre adulto.

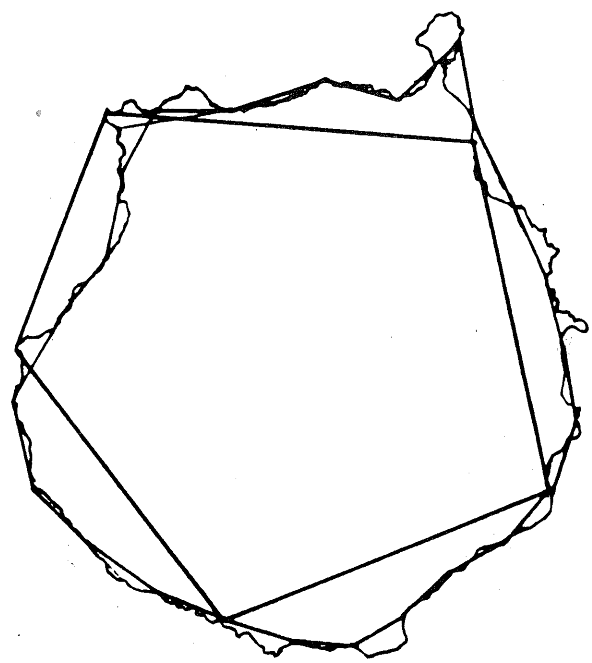
La variación de la longitud aproximada $L(\mu)$ es proporcional a $\mu^{-\alpha}$ donde α depende de la costa elegida, y distintos tramos de la misma costa, considerados separadamente, dan a menudo distintos valores de α.

Tomando escalas logarítmicas en la representación obtendríamos:

$$L(\mu) = K\,\mu^{-\alpha} \quad ; \quad \log L(\mu) = -\alpha \log \mu + \log K$$

pudiendo calcular así, de forma empírica, el valor característico α de una costa.

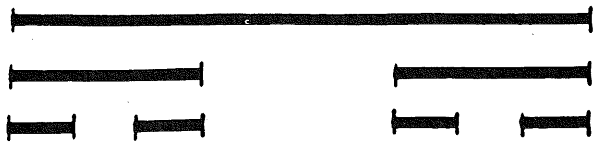
Un interesante ejercicio para realizar dentro de una clase, es llevar adelante todos estos cálculos sobre una costa de contorno familiar para los alumnos; introduciéndoles en este terreno fascinante del paso al límite, los alumnos podrán comprobar finalmente que una costa, al igual que la curva de Koch puede tener longitud infinita.



Otros fractales

A finales del pasado siglo Georg Cantor, llevado al estudio de los fundamentos de las matemáticas por sus trabajos en la teoría de las series trigonométricas, había encontrado un misterioso conjunto de puntos, que sería durante el desarrollo sucesivo de las matemáticas fuente de inspiración de importantes estudios realizados a principios de siglo sobre topología y teoría de la medida.

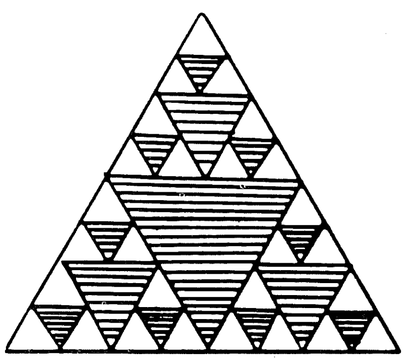
Su construcción es la siguiente:

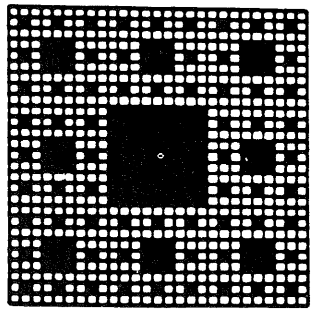


Al intervalo cerrado [0,1] le quitamos el tercio central abierto (1/3, 2/3). A continuación, a cada uno de los tercios que quedan, se les quita su propio tercio central abierto y se procede de este modo indefinidamente. el resultado final de esta interpolación es un «polvo» tenue que goza de la insólita propiedad de que cada punto es de acumulación. Entre las sucesiones que pueden ser construidas a costa del discontinuo de Cantor destacamos el número de segmentos 2^n en que quedará dividido tras n pasos, y $1/3^n$ como longitud de cada uno de esos segmentos.

El discontinuo de Cantor es por añadidura un conjunto de medida de Lebesgue nula pese a su no numerabilidad. Este resultado puede demostrarse sin más dificultad que la de comprobar que puede ser recubierto por una sucesión de intervalos cuya longitud tiende a cero (obsérvese como la longitud de cada uno de los poros, tras n pasos es de la forma $(2/3)^n$, y que tal serie geométrica tiene por suma 1).

Los fractales planos más habituales en la literatura son la «curva de cabezas de flecha» y la «alfombra de Sierpinski»: En el primer caso quitamos a cada uno de los triángulos el triángulo central abierto que se forma en su interior: Esta configuración es conocida en la cultura aborigen canaria; existen estos gráficos, llamados «pintaderas» en los vestigios conservados hasta nosotros. En el segundo sustraemos el cuadrado central abierto.

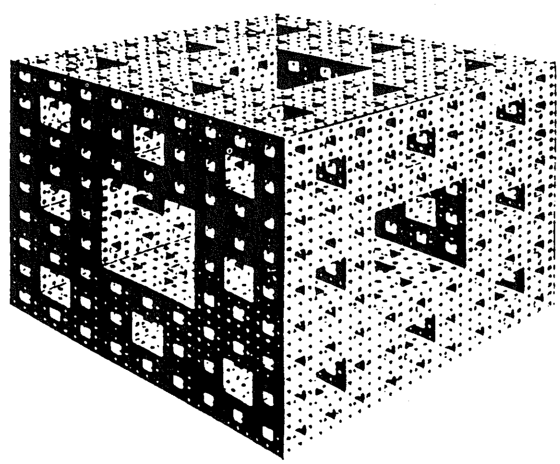




La figura límite que se forma en ambos casos es una curva extremadamente intrincada que tiene longitud infinita.

Dejamos al lector que descubra por sí mismo la rica fauna de sucesiones a que tales figuras dan lugar.

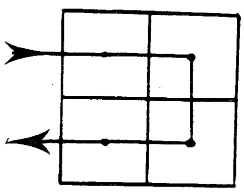
Por último citaremos la «esponja de Sierpinski», curva fractal en el espacio que goza de extraordinarias propiedades universales como objeto topológico.

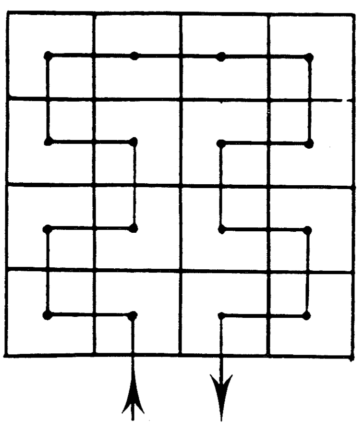


La forma de este objeto nos recuerda, no por casualidad, aquellos paisajes a través de los que se perseguían las naves del Imperio y la Federación. La base de muchos de los efectos especiales, exhibidos por Spielberg en «La guerra de las galaxias» tienen su base en la simulación de imágenes por medio de la geometría fractal.

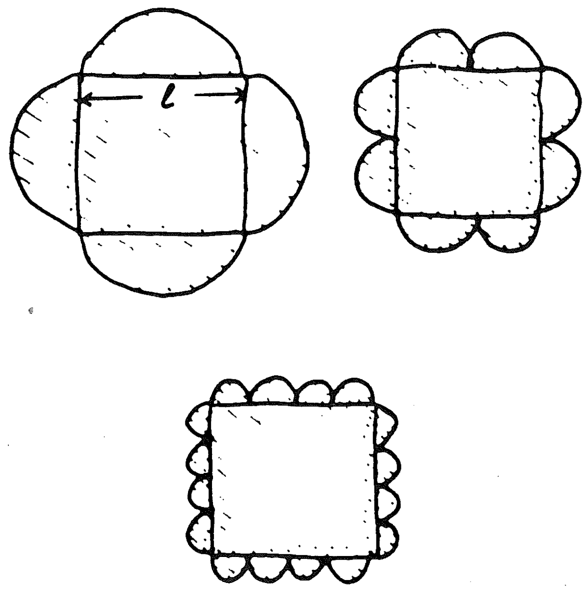
Otras aproximaciones a los fractales

Los fractales planos construidos más arriba tienen gran parentesco con unas asombrosas construcciones de principios de siglo llamadas curvas de Peano. Tales objetos son curvas, en el sentido de aplicaciones $\Phi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, capaces de pasar por todos los puntos de un recinto plano. La que se expone a continuación, al igual que los fractales, constituye un algoritmo gráfico de recursividad perfecta para construir una curva que pasa por cada punto del plano una y sólo una vez:

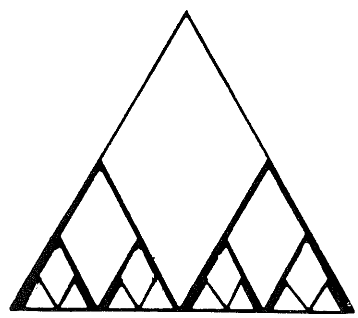


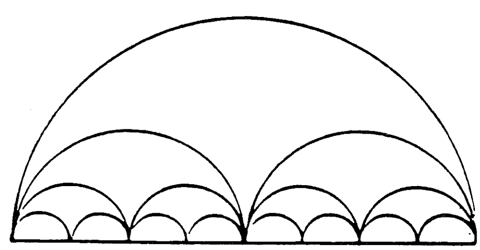


El Grupo Cero es uno de los pioneros en nuestro país en la utilización de construcciones geométricas para ilustrar el estudio de las progresiones. En unos de sus libros de Bachillerato de comienzos de los setenta aparece la siguiente sucesión de figuras de perímetro constante cuyo límite es un cuadrado:

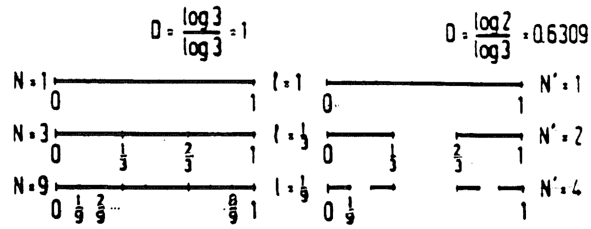


Son también clásicas el siguiente par de sucesiones de perímetro constante, cuyas áreas tienden a cero:





Ninguna de las tres construcciones señaladas anteriormente son propiamente fractales. La definición precisa y matemáticamente rigurosa de tales objetos requiere conceptos más refinados que una idea tan ingénua como la de autosimilitud. No obstante estas figuras de perímetro constante son muestra de un estilo a la hora de explorar el infinito, un estilo que puede continuarse con el uso de los fractales.



La dimensión fractal

Hausdorff ya había encontrado en 1919 un concepto de dimensión capaz de distinguir todos aquellos objetos raros que los matemáticos habían creado como contraejemplos. La idea era introducir dimensiones no enteras que describiesen la «porosidad» de determinados objetos.

Una costa al ser un objeto «más macizo» que una línea ordinaria, pero «más deshilachado» que una superficie, sería lógico que poseyese una dimensión comprendida entre uno y dos.

La teoría de la dimensión no entera de Hausdorff-Besicovitch, llamada otras veces dimensión logarítmica o dimensión fractal, puede formularse para un objeto con total independencia de que posea o no autosimilaridad interna. La idea capital es la siguiente (note el curioso lector el parentesco con la definición de compacto):

Consideremos un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$. Sea $N(\varepsilon)$ el número de esferas d-dimensionales de diámetro ε necesarias para cubrir tal conjunto.
Si $N(\varepsilon)$ varía con ε de la forma $N(\varepsilon) = \text{cte}\ \varepsilon^{-D}$ cuando $\varepsilon \to 0$, llamaremos a D dimensión de Hausdorff del conjunto.
Esta fórmula permite dar una dimensión entre 0 y 1 al conjunto de Cantor:

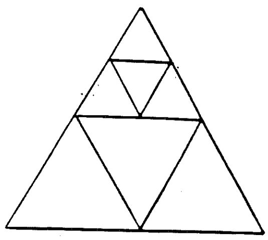
$$D = 0'6309\ldots = \frac{\log 2}{\log 3}$$

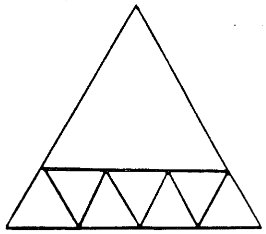
Las curvas de Peano no son sino curvas planas cuya dimensión de Hausdorff es dos. Puede resultar un agradable y sencillo ejercicio para los alumnos el comprobar que la dimensión logaritmica de la curva de von Koch es
$D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}2618\ldots$ y calcular las dimensiones de los restantes fractales.

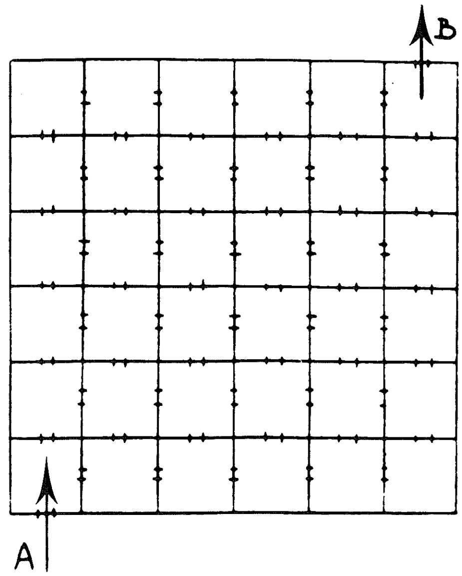
Epílogo

Para finalizar, desearíamos hacer referencia a una conversación mantenida con Claudi Alsina hace pocos meses en la que defendíamos, de forma muy parecida a como se hace en este artículo, la utilidad de los fractales en la enseñanza matemática elemental. Después de escuchar detenidamente nuestro discurso, planteó dos problemas, de reciente aparición y de índole muy parecida a los que le exponíamos, pero que tienen la cualidad de romper esa atmósfera, en ocasiones excesivamente rígida, que rodea a los fractales:

¿Es posible recubrir todo triángulo con un número cualquiera de triángulos semejantes a él?. En el siguiente dibujo exponemos algunas soluciones parciales.







Problema del ruso: por un recinto de treinta y seis habitaciones, cada una comunicada con la contigua mediante una puerta en la que acecha un funcionario, un ruso debe pasar obteniendo un visado de cada uno de los funcionarios, pero de modo que sólo podrá traspasar cada una de las puertas una y sólo una vez. ¿Conseguirá el dedichado ciudadano entrar por la punto A y salir por el B?.

Pista: A efectos de que el problema tenga sentido se supone que estos funcionarios no salen a desayunar nunca, claro está.

Fernando Fernández Rodríguez
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Las Palmas

José Miguel Pacheco Castelao
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas

Bibliografía

[1] BARNSLEY M. (1988) «**Fractals Everywhere**» Academic Press. Boston.

[2] BARNSLEY M. (1989) «**The Desktop Fractal Design Handbook**» Academic Press. Boston.

[3] FALCONER K. (1990) «**Fractal Geometry**» John Wiley. Chichester.

[4] GLEICK J. (1988) «**Caos. La creación de una ciencia**» Seix Barral. Barna.

[5] KLEIN F. (1926) «**Die Entuicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert**» Springer Verlag. Berlin.

[6] KLEIN F. (S.F.) «**Las Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior**». CSIC.

[7] MANDELBROT B. (1987) «**Los Objetos Fractales**» Ed. Tusquets. Barcelona.

NÚMEROS DE CATALAN Y TRAYECTORIAS EN LA RETÍCULA ENTERA

Peter Hilton y Jean Pedersen

Introducción

Dos rasgos característicos hacen que la combinatoria sea un tema matemático particularmente apropiado para los niveles de secundaria y de licenciatura. En primer lugar, reúne un número importante de conceptos aparentemente diferentes y, por lo tanto ilustra la unidad básica de las matemáticas. En segundo lugar, no hace necesarias técnicas matemáticas excesivamente sofisticadas, sino más bien aquellas que se adquieren en los niveles anteriores al estudio del cálculo.

Los números de Catalan, que deben su nombre al matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894), pero, que de hecho, se remontan como mínimo a Euler en el siglo XVIII, son particularmente interesantes por su multiplicidad de interpretaciones. En este artículo damos tres interpretaciones que pueden ser consideradas como primarias en tanto que están relacionadas con ideas básicas de teoría de grafos, computación y geometría. A su vez, damos una cuarta interpretación que los relaciona con la trama entera del plano de coordenadas y por lo tanto nos permite introducir su estudio en un rico dominio del álgebra clásica.

Hemos escrito otras veces sobre este tema (ver [HP 1, 2,]), ya sea para proporcionar información básica, o para - tal como esperamos - ofrecer un árticulo atractivo para matemáticos profesionales con intereses particulares distintos. Nuestro propósito ahora es otro, queremos proporcionar a los profesores de secundaria - y a los profesores de los futuros profesores de secundaria - lo que nosotros creemos que es un ejemplo excelente de una fuente de ideas y de motivaciones convincentes para el desarrollo de técnicas e intuiciones matemáticas.

Naturalmente, nuestra exposición presenta una argumentación debida al matemático francés del siglo XIX Désiré André que, a nuestro parecer, trae consigo una de las intuiciones matemáticas más estimulantes y emocionantes que puede ser plenamente apreciada a un nivel de secundaria. Este argumento fue desarrollado, de hecho, por André para dar solución al llamado ***Problema de la votación***, pero resulta ser un instrumento de vital importancia para el estudio de los números de Catalan en su cuarta interpretación, tal como mostraremos a continuación. La última sección de este artículo la dedicamos al estudio del Problema de la votación.

Quisieramos agradecer a nuestro colega y amigo Pere Mumbrú, de la Universidad de Barcelona, su invitación para dar una serie de conferencias de las que se deriva este artículo.

Árboles, expresiones bien construidas y polígonos convexos

Empezamos presentando tres conceptos naturales de combinatoria, que aparecen en contextos bastante diferentes, pero que resultan ser matemáticamente equivalentes.

Sea p un entero fijado ≥ 2. Definimos tres sucesiones de enteros positivos, que dependen de p, del modo siguiente:

a_k: ${}_pa_0 = 1$, ${}_pa_k$= número de árboles con bifurcaciones de p ramas y k vértices fuente, para $k \geq 1$.

b_k: ${}_pb_0=1$, ${}_pb_k$= número de maneras de asociar k aplicaciones de una operación de p elementos, para $k \geq 1$.

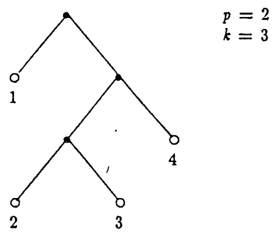
c_k: ${}_pc_0= 1$, ${}_pc_k$= número de maneras de diseccionar un polígono convexo en k polígonos disjuntos de p+1 lados mediante diagonales que no se corten, para $k \geq 1$.

Observamos que, si $k \geq 1$,

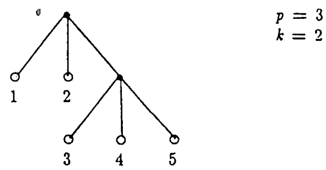
(i) un árbol con bifurcaciones de p ramas y k vértices fuente tiene (p-1) k+1 vértices terminales y pk+1 vértices en total (Figura 1 (a,b));

(ii) las k aplicaciones de una operación dada de p elementos actúan sobre una sucesión de (p-1) k+1 símbolos (Figura 1(a', b'));

(iii) el polígono tiene (p-1) k+2 lados y se descompone en k polígonos disjuntos de (p+1) lados mediante (k-1) diagonales (Figura 1 (a", b")).



(a) Arbol binario (p = 2) con 3 (k = 3) vértices fuente (•) y 4 vértices terminales (o)



(b) Arbol ternario (p = 3) con 2 (k = 2) vértices fuente (•) y 5 vértices terminales (o)

$p = 2$
$k = 3$

$$(s_1((s_2s_3)s_4))$$

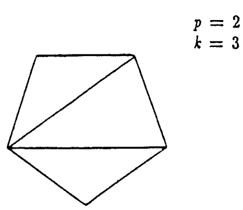
(a') Expresión con 3 (k = 3) aplicaciones de una operación binaria (p = 2) de 4 elementos.

$p = 3$
$k = 2$

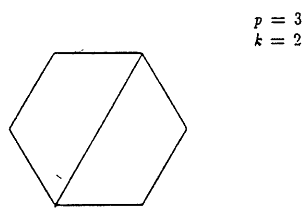
$$(s_1s_2(s_3s_4s_5))$$

(b') Expresión con 2 (k = 2) aplicaciones de una operación ternaria (p = 3) de 5 elementos.

Un polígono de ((p - 1) k + 2) lados se descompone en k polígonos disjuntos de p + 1 lados mediante k - 1 diagonales.



(a") Pentágono descompuesto en 3 triángulos por 2 diagonales.



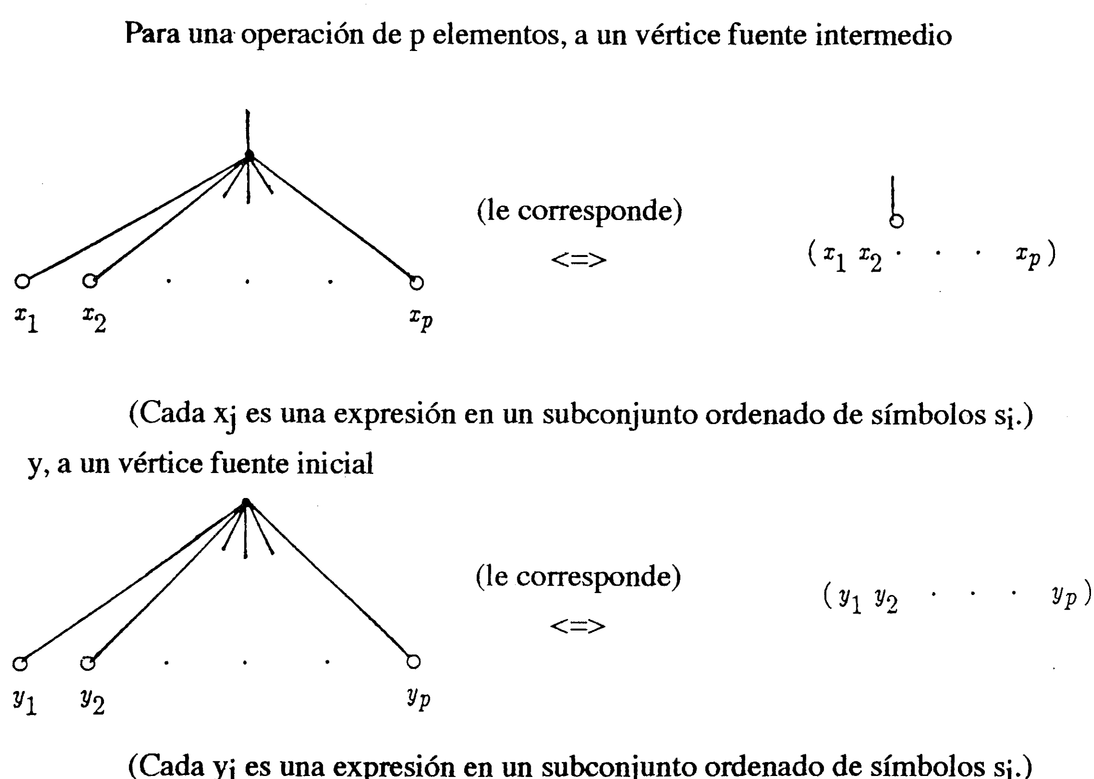
(b") Hexágono descompuesto en dos cuadriláteros por 1 diagonal

Un resultado bien conocido y que puede ser demostrado con facilidad (véase Sloane [S] para el caso p=2) es el siguiente:

TEOREMA 1.1

$$ {}_p a_k = {}_p b_k = {}_p c_k . $$

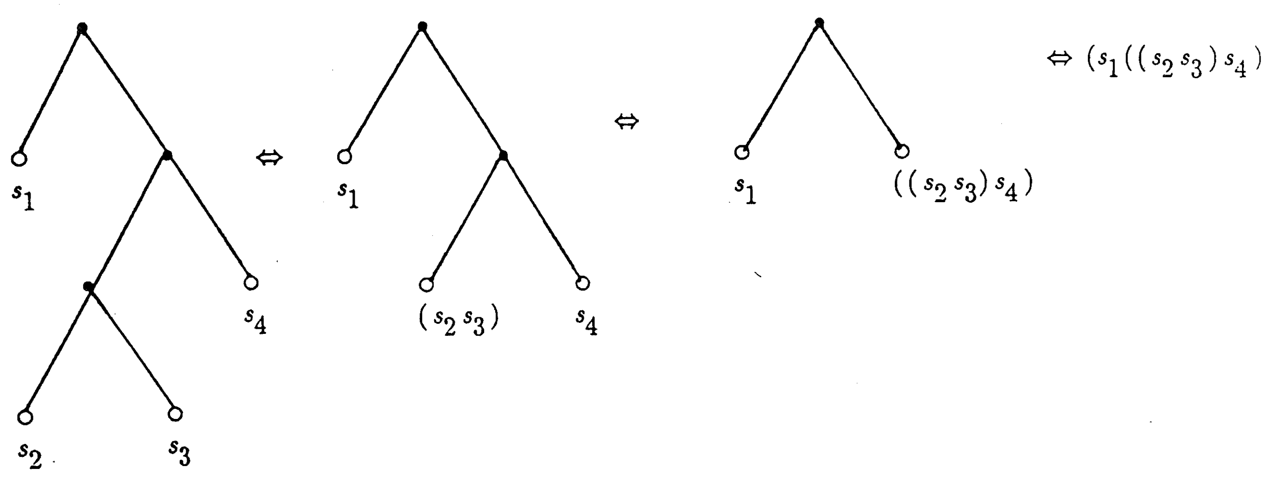
Los árboles de la Figura 1 (a,b) pueden convertirse en las expresiones correspondientes de la Figura 1 (a',b') aplicando una sucesión de las correspondencias indicadas en la Figura 2. Para convertir un árbol particular con bifurcaciones de p ramas en su correspondiente expresión, primero se numeran los vértices terminales del árbol de una manera que podemos designar toscamente como "de izquierda a derecha" y que creemos está suficientemente explicitada a partir de los ejemplos de la Figura 1 (a,b). Después se asocia el símbolo s_i a cada número i. Ahora consideramos cualquier colección de ramas terminales, en las que existe un conjunto completo de p símbolos y aplicamos la correspondencia de la Figura 2 para un vértice fuente intermedio (1). Repetimos este proceso, en todos los vértices fuente intermedios (en un caso especial este podría haber sido el punto de partida del proceso), hasta alcanzar el vértice fuente inicial; entonces aplicamos la correspondencia al vértice fuente inicial (eliminando toda evidencia del árbol) para obtener la expresión deseada. La Figura 3 ofrece un ejemplo de la aplicación paso a paso del proceso. Para obtener el árbol a partir de una expresión simbólica, es suficiente invertir el proceso.



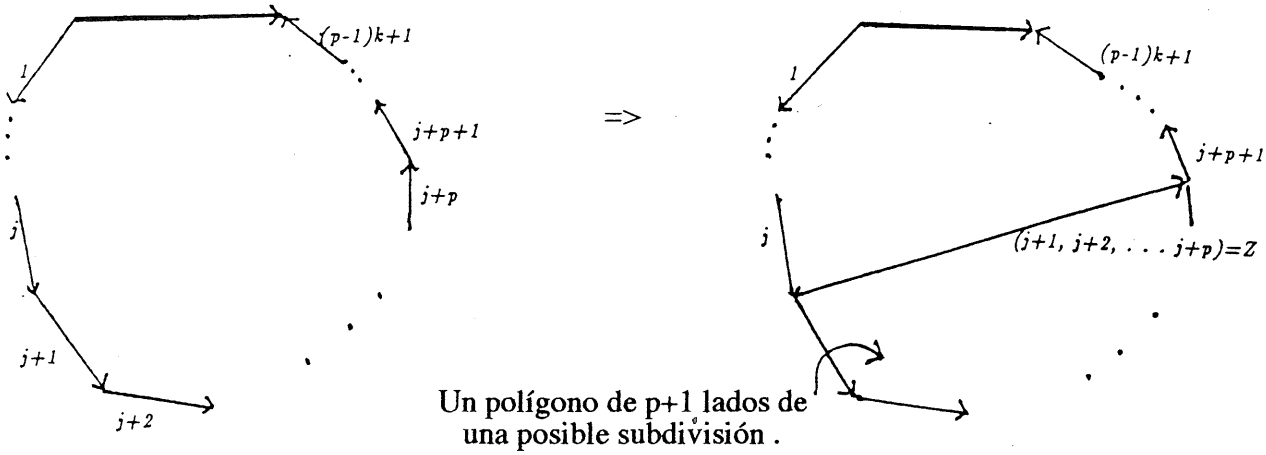
Pasos típicos que relacionan árboles y expresiones entre paréntesis.

(1) Si hay más de un lugar donde pueda hacerse el proceso indicado, entonces todas las correspondencias pueden realizarse simultáneamente de una sola vez.

El proceso que relaciona los árboles de la Figura 1 (a, b) - o las expresiones de la Figura 1 (a', b') - con los correspondientes polígonos descompuestos de la Figura 1 (a", b") es más sutil (y la indicación dada en [S], para el caso p= 2, es un poco críptica). Por lo tanto describiremos explícitamente el modo de establecer la correspondencia que nos permite asegurar que ${}_pb_k = {}_pc_k$. Supongamos pues que conocemos el modo de asociar k aplicaciones de una operación de p elementos a una serie de (p-1) k+1 símbolos $s_1, s_2, \ldots, s_{(p-1)k+1}$ para producir una expresión bien construida. Comenzamos con un polígono convexo de (p-1) k+2 lados y, comenzando por el lado superior, numeramos los demás lados (siguiendo la dirección de las agujas del reloj) desde 1 hasta (p-1) k+1, como se ilustra en la Figura 4. Tomamos el primer lugar en la expresión (empezando por la izquierda) en el que una sucesión de p símbolos está encerrada entre paréntesis. Si los subíndices de dichos símbolos van de j+1 a j+p, trazamos una diagonal desde el vértice inicial del lado j+1 hasta el vértice final del lado j+p, y la etiquetamos como (j+1,...,j+p). Esta diagonal descompone el polígono en un polígono de p+1 lados, tal como queremos, y en otro polígono con un número de lados menor que el del polígono original. Por otra parte, si sustituimos la parte (j+1,..., j+p) de nuestra expresión por un único símbolo (llamémosle, Z), habremos reducido dicha expresión a una que contiene tan solo k-1 aplicaciones de la operación. Por lo tanto podemos actuar de modo inductivo hasta completar el proceso de introducción de las diagonales. Naturalmente, si substituimos los números i de los lados del polígono por los símbolos s_i, entonces el último lado nos permite obtener la expresión original. La Figura 5 (a, b) ilustra la designación de las disecciones del pentágono y el exágono determinados por las correspondientes expresiones de la Figura 1 (a', b').



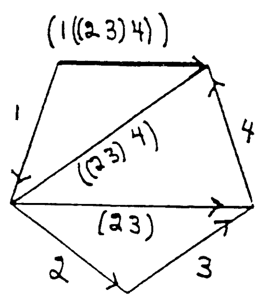
Sucesión de pasos para relacionar un árbol con una expresión entre paréntesis.

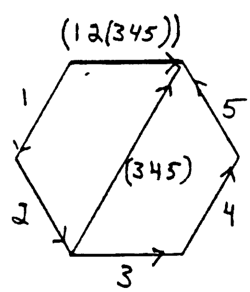


$(s_{j+1}\ s_{j+2}\ \ldots s_{j+p})$ aparece en la expresión

Trazado de una diagonal y su etiquetado.

Primer paso en la conversión de una expresión en un polígono descompuesto.





(a) Polígono para (s_1 ((s_2 s_3) s_4))
$p = 2$, $k = 3$.

(b) Polígono para (s_1 s_2 (s_3 s_4 s_5))
$p = 3$, $k = 2$.

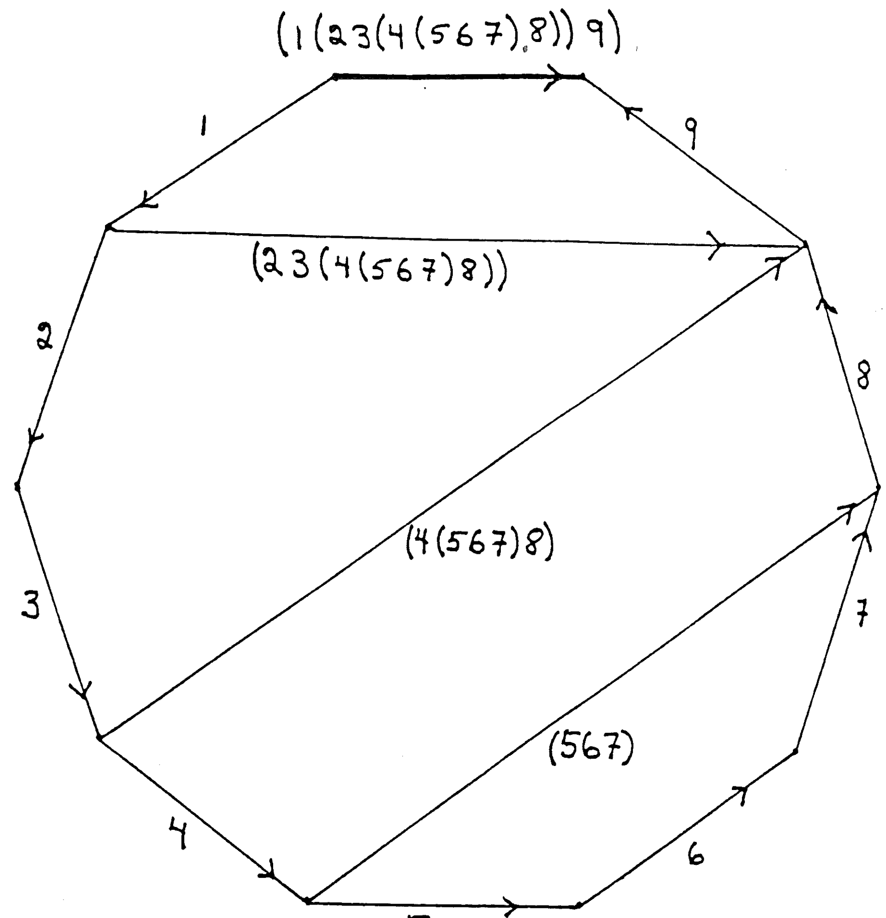
Polígonos descompuestos y sus correspondientes expresiones.

Obviamente podemos reproducir el proceso en sentido inverso. Es decir, dado a un polígono de (p-1) k+2 lados que ha sido descompuesto en k polígonos disjuntos de p+1 lados por k-1 diagonales, podemos obtener la correspondiente expresión y, por lo tanto el árbol correspondiente. Vamos a mostrar brevemente cómo se puede asociar de modo directo un árbol con un polígono descompuesto. Ilustraremos cómo establecer estas correspondencias en el caso un poco más complicado del siguiente ejemplo.

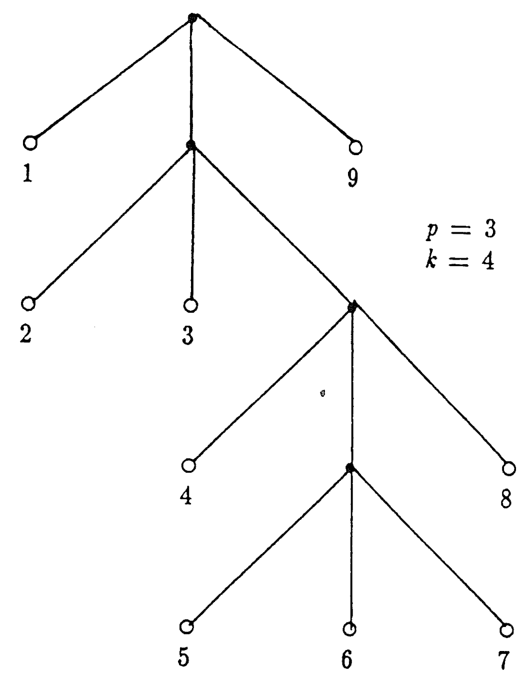
EJEMPLO 1.1. Tomemos p= 3, k=4 y consideremos la expresión:

$$(s_1\ (s_2\ s_3\ (s_4\ (s_5\ s_6\ s_7)\ s_8))\ s_9).$$

La correspondiente descomposición de un polígono convexo de 10 lados en cuatro cuadriláteros mediante 3 diagonales, con las designaciones apropiadas, se muestra en la Figura 6. El correspondiente árbol ternario se muestra en la Figura 7.



Descomposición de un polígono asociada a la expresión
(s1 (s2 s3 (s4 (s5 s6 s7) s8)) s9),
después del etiquetado.

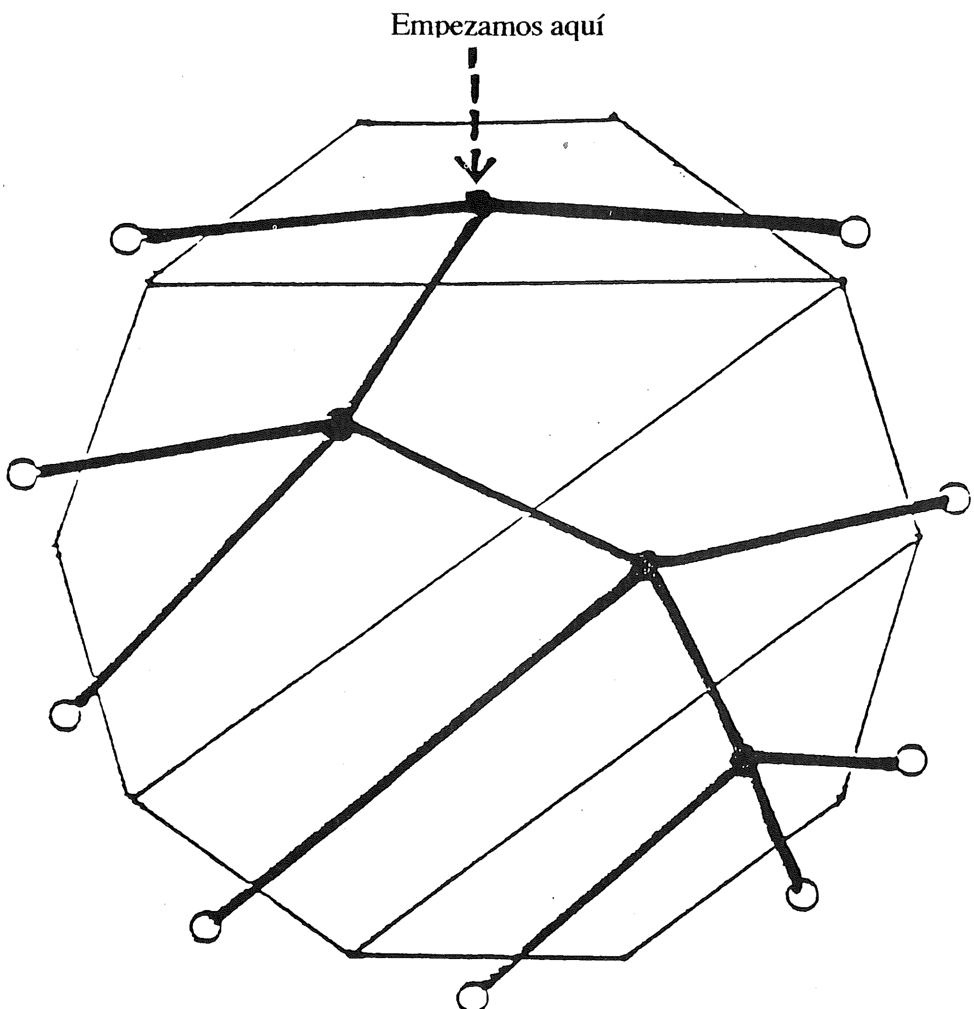


Arbol asociado a $(s_1(s_2\ s_3(s_4(s_5\ s_6\ s_7)\ s_8))\ s_9)$.

En primer lugar, vamos a tratar como se deduce del polígono descompuesto (sin designaciones) la correspondiente expresión asociada. El hecho de que el polígono esté descompuesto en cuadriláteros nos dice que la expresión está formada mediante una operación ternaria. Comenzando por el lado superior del decágono original, numeramos los demás lados, empezando por el lado contiguo por la izquierda (siguiendo la dirección contraria a las agujas del reloj) tal como se ilustra en la Figura 6. Al mismo tiempo escribimos la 'expresión' preliminar $s_1\ s_2\ s_3\ s_4\ s_5\ s_6\ s_7\ s_8\ s_9$. Ahora el objetivo consiste en designar el lado superior del decágono original de modo que podamos determinar la expresión asociada a partir de dicha designación. Empezamos buscando un lugar (o lugares) en la frontera del polígono en el cual 3 lados sucesivos estén conectados por una diagonal formando un cuadrilátero. Donde esto ocurra (en nuestro caso para los lados 5,6 y 7) designamos la diagonal mediante los números de los lados (en este caso (5 6 7)) y ésta se convierte en el lado de un polígono con dos lados menos que el original. Al mismo tiempo encerramos entre paréntesis los símbolos s_5 s_6 y s_7. Consideramos el nuevo polígono en el que (5 6 7) es una designación de uno de los lados y nuestra 'expresión' es la expresión preliminar, siendo (s_5 s_6 s_7) un símbolo como los demás.

Por lo tanto estamos en disposición de repetir el proceso que acabamos de describir. Continuamos de este modo hasta conseguir que el lado superior tenga una designación simbólica y la expresión preliminar posea todos los paréntesis correspondientes. Naturalmente, si reemplazamos cada uno de los símbolos i del lado superior por símbolos s_i obtendremos la expresión deseada.

Vamos a ver ahora cómo podemos obtener el diagrama en árbol directamente a partir del polígono descompuesto. La Figura 8 proporciona un buen ejemplo para ilustrar el proceso. En primer lugar elegimos el cuadrilátero de la descomposición que contenga el lado superior del polígono. En él dibujamos un vértice inicial del árbol y observamos que podemos dibujar ramas que, partiendo de este vértice, pasen a través de cada uno de los otros 3 lados del cuadrilátero. Si una rama sale del cuadrilátero sale de él a través de un lado del polígono original, entonces su extremo será un vértice terminal del árbol (y perderemos todo interés en esta parte del árbol). Pero, si una rama sale del cuadrilátero a través de una diagonal interior del polígono, nos introduciremos en un nuevo cuadrilátero de la descomposición y, entonces, su extremo será un nuevo vértice a partir del cual podemos dibujar nuevas ramas; y así sucesivamente...



Correspondencia entre un árbol y un polígono descompuesto.
(En este caso, el árbol de la Figura 7 y el polígono de la Figura 6).
Observemos que
• = vértice interior = vértice fuente
o = vértice exterior = vértice terminal.

En el caso p=2, cualquiera de los valores a_k, b_k, o c_k, puede considerarse como la definición del *k-ésimo número de Catalan.* Por lo tanto podemos considerar cualquiera de los ${}_pa_k$, ${}_pb_k$ o ${}_pc_k$ como la definición del *k-ésimo número de Catalan generalizado.*

TEOREMA 1.2.

$$ {}_pa_k = \frac{1}{k}\binom{pk}{k-1} = \frac{1}{(p-1)\,k+1}\binom{pk}{k}, \quad k \geq 1. $$

La demostración usual de este resultado (ver [K]) es bastante sofisticada y en ella se utilizan argumentos de análisis complejo. Uno de nuestros objetivos principales ha sido poder ofrecer una demostración elemental del Teorema 1.2. que se base en el álgebra ordinaria. Sin embargo, en este artículo, demostraremos el Teorema 1.2. únicamente en el caso p=2; nuestro argumento usará todavía una cuarta interpretación de los números de Catalan generalizados (2). Pondremos un énfasis especial en la flexibilidad de esta cuarta interpretación, que vamos a describir a continuación.

Trayectorias en la retícula entera

En primer lugar definamos lo que es una trayectoria. Una *trayectoria* en la retícula entera del plano de coordenadas es una sucesión de puntos $P_0, P_1, \ldots, P_m$, $m \geq 0$, en $\mathbf{R}^2$ de manera que cada P_i es un punto de la *retícula* (es decir, tiene coordenadas enteras), y P_{i+1} se obtiene avanzando una unidad hacia el norte o hacia el este desde P_i. Una trayectoria diremos que es una *trayectoria de P a Q* si $P_0= P$ y $P_m=Q$. Una trayectoria se llama *p-correcta* si se encuentra toda ella en el semiplano inferior de la recta y=(p-1) x; en el caso contrario se llama *p-incorrecta.*

Sea $d_k= {}_pd_k$ el número de trayectorias p-correctas de (0,- 1) a (k, (p-1)k-1). (considerando d_0=1). Vamos a extender el resultado del Teorema 1.1.

TEOREMA 2.1.

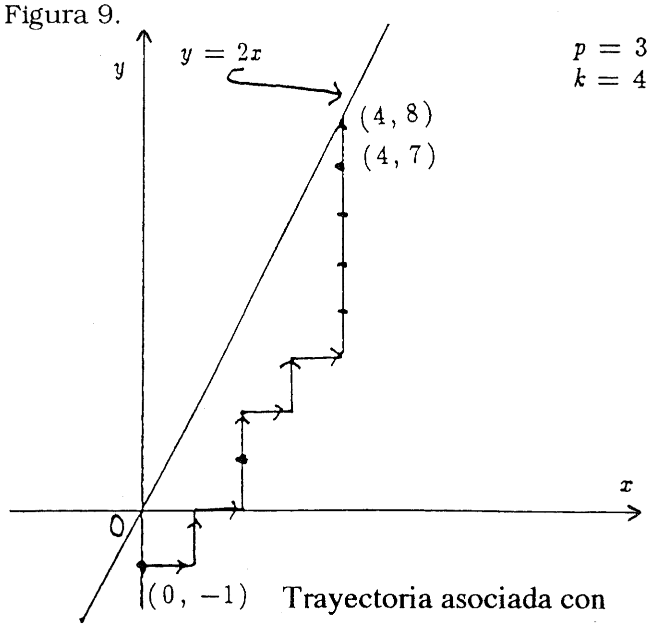
$$ {}_pa_k = {}_pb_k = {}_pc_k = {}_pd_k. $$

Demostración. Podemos suponer que $k \geq 1$ y vamos a probar que ${}_pb_k={}_pd_k$. Consideramos una expresión obtenida asociando k aplicaciones de una operación de p elementos sobre un conjunto de (p-1) k+1 símbolos. Suprimimos todos los paréntesis de cierre (3) en nuestra expresión y obtenemos lo que llamamos una *expresión de trabajo*. Ahora, leyendo de izquierda a derecha, interpretamos un paréntesis abierto como la instrucción 'avanzar un lugar a la derecha' y un símbolo como la instrucción 'avanzar un lugar hacia arriba'. De este modo, si empezamos en el punto (0, - 1), cada expresión de trabajo da lugar a una trayectoria de (0, -1) a (k, (p-1)k), puesto que hay k paréntesis abiertos y (p-1)k + 1 símbolos. Vamos a comprobar:

(i) que el penúltimo punto de la trayectoria es (k, (p-1) k - 1), y

(ii) que la subtrayectoria de (0, - 1) a (k, (p-1) k - 1) es p-correcta.

La trayectoria obtenida aplicando el procedimiento anterior al Ejemplo 1.1 se muestra en la Figura 9.



Trayectoria asociada con
(s1 (s2 s3 (s4 (s5 s6 s7) s8)) s9).

(2) Los lectores interesados en nuestra demostración del Teorema 1.2. para el caso general pueden consultar [HPI, 2].

(3) Esto convierte nuestra expresión en una 'expresión polaca inversa con significado'("meaningful reverse Polish expresion (MRPE)); véase [HAG]. Observemos que los paréntesis de cierre son innecesarios para el significado de dicha expresión.

Para demostrar (i) observemos simplemente que nuestra expresión de trabajo no puede terminar con un paréntesis abierto. Para probar (ii), hagamos la hipótesis inductiva (respecto k) de que si en cualquier paso de la expresión, excepto en el último, hemos contado (a partir de la izquierda) u_i paréntesis y v_i símbolos, y por lo tanto hemos alcanzado el punto $(u_i, v_i - 1)$, entonces $(p-1)\, u_i > v_i$, es decir, el punto alcanzado está por debajo de la linea $y = (p-1)x$. La hipótesis es evidentemente cierta para k=1, por lo tanto supongamos k >1. De acuerdo con el argumento utilizado en el Teorema 1.1, encontramos una parte de nuestra expresión que consiste en un paréntesis seguido de p símbolos. Al sustituir esta parte por un único símbolo obtenemos una expresión con (k-1) aplicaciones de la operación.

Consideremos los u'_i y v'_i obtenidos en este caso del mismo modo que los u_i y v_i anteriores. Por las hipótesis de inducción resulta que $(p-1)u'_i > v'_i$, excepto en el último paso. Por lo tanto, para todos los pasos *i* anteriores a la parte sustituida en la expresión, resultará que $(p-1)u_i > v_i$; en particular $(p-1)u_{i_0} > v_{i_0}$. para el paso i_0 inmediatamente anterior a la parte sustituida. Si ahora insertamos el nuevo símbolo obtendremos $(p-1)u_{i_0} > v_{i_0}+1$, y si reinsertamos la parte sustituida resultará que, al final de dicha parte, es $u_{i_1} = u_{i_0}+1$, $v_{i_1} = v_{i_0}+p$, y por lo tanto $(p-1)\, u_{i_1} > v_{i_1}$. A partir de aquí se satisface $u_i = u'_i+1$, $v_i = v'_i+p$, y por lo tanto también $(p-1)u_i > v_i$, excepto para el último paso.

En conclusión, omitiendo el último símbolo obtenemos una trayectoria p-correcta de (0, - 1) a (k, (p-1) k-1). Dejamos al lector la demostración de que, recíprocamente, toda trayectoria p-correcta produce una expresión de trabajo bien construida. (Análogamente, este hecho requiere un argumento inductivo del mismo tipo).

Como ya hemos dicho, en el caso particular p=2 la sucesión de números producida por cada una de las cuatro definiciones es la sucesión C_k de los números de Catalan. Es decir,

$$_2a_k = {}_2b_k = {}_2c_k = {}_2d_k = C_k.$$

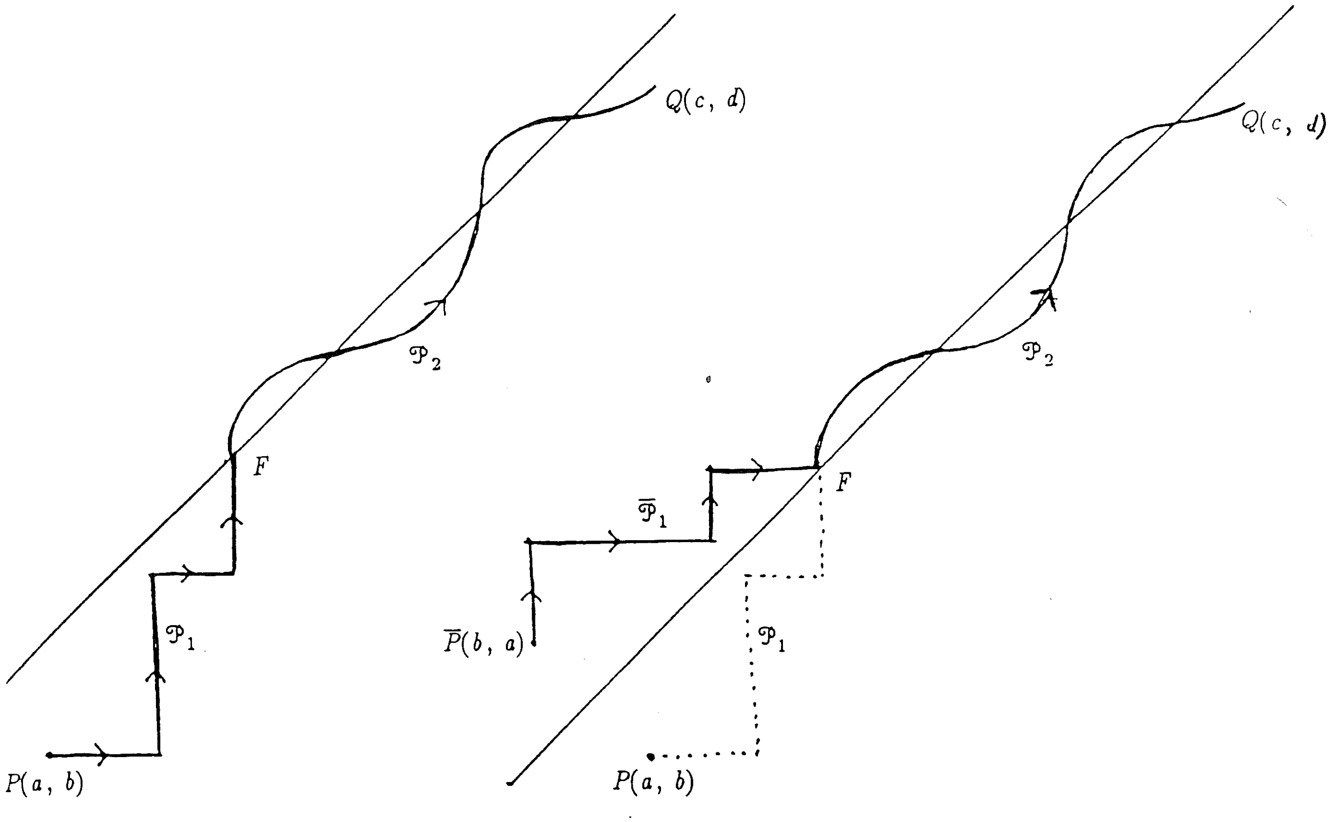
Los números $_pa_k$ (= $_pb_k$ = $_pc_k$ = $_pd_k$) se llaman *números de Catalan generalizados* (ver [HPI, 2]. La siguiente sección está dedicada a encontrar una fórmula explícita para C_k; es decir, nos restringiremos al caso p = 2.

Cálculo de los números de Catalan (p = 2); el método de reflexión de André.

Hace poco más de cien años el matemático francés Désiré André publicó una nota breve, titulada "*Solution directe de problème résolu par M. Bertrand*", en la prestigiosa revista francesa "*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*" [A]. El problema en cuestión es conocido como el problema de la votación y vamos a describirlo y a solucionarlo, utilizando una variación del método de André, en la sección siguiente. Pero antes, vamos a discutir el método utilizado por André para calcular $_2d_k$, es decir, para calcular todas las trayectorias 2-correctas de (0, - 1) a (k, k-1).

André quería calcular el número de trayectorias 2-correctas de P (a, b) a Q (c, d) en la retícula entera, con $b < a \leq d < c$ (ver Figura 10 (a)). Su solución es preciosa y, todavía hoy, se la considera un recurso modelo en combinatoria (ver, por ejemplo [C]). Vamos a exponerla.

Puesto que siempre consideraremos p=2, a lo largo de esta sección no explicitaremos la *p* en la terminología simbólica.



(a) (b)

$a \leq c,\ b \leq d,$ existencia de trayectorias,

$a > b,\ c > d,$ ambos puntos bajo la linea $y = x$, y

$a \leq d,$ existencia de trayectorias incorrectas.

número total de trayectorias — número de trayectorias incorrectas

$$\binom{(c+d) - (a+b)}{d-b} - \binom{(c+d) - (b+a)}{d-a} = \text{número de trayectorias correctas.}$$

Método de reflexión de André.

En primer lugar, observemos que el número total de trayectorias, correctas o incorrectas, de P (a, b) a Q(c, d) es precisamente el coeficiente binominal.

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} \text{ o, de modo equivalente, } \binom{(c+d)-(a+b)}{c-a}$$

Por lo tanto es suficiente calcular las trayectorias incorrectas. Si P es una trayectoria incorrecta, sea F su primer punto de contacto con la línea y=x. Denotemos por P_1 y P_2 las subtrayectorias PF y FQ; de modo que, considerando la composición de trayectorias como su yuxtaposición, se verifica $P= P_1 P_2$. A su vez, denotemos como $\bar{P}_1$ la trayectoria obtenida a partir de P_1 mediante *reflexión en la línea* y=x. Entonces, si $\bar{P}= \bar{P}_1 P_2$, $\bar{P}$ es una trayectoria de P (a, b) a Q (c, d) y, de este modo, la correspondencia $P \to \bar{P}$ establece una biyección entre el conjunto de trayectorias *incorrectas* de P a Q y el conjunto de *todas* las trayectorias de $\bar{P}$ a Q. Por lo tanto el número total de trayectorias *incorrectas* de P a Q viene dado por el coeficiente binominal.

$$\binom{(c+d)-(b+a)}{c-b} \text{ o, de modo equivalente por, } \binom{(c+d)-(b+a)}{d-a}$$

Así pués, existen al menos cuatro modos aparentemente distintos (pero realmente idénticos) de escribir una expresión explícita para el número de trayectorias correctas de P a Q. Con la intención de que el cálculo posterior de los números de Catalan resulte lo más sencilla posible, elegimos la siguiente expresión:

$$(3.1) \qquad \binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} - \binom{(c+d)-(b+a)}{d-a}$$

para designar el número de trayectorias correctas de P (a, b) a Q (c, d). La argumentación anterior se ilustra en la Figura 10. En ella, la subtrayectoria FQ se representa por una línea ondulada para indicar que simplemente es *cierta trayectoria* (con nuestro sentido específico) de F a Q, pero que no estamos interesados en ninguna particularidad suya.

En el caso concreto que nos interesa, a partir de (3.1), resulta que el número C_k de trayectorias correctas de P (0, - 1) a Q (k, k - 1) viene dado por

$$C_k= \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k-1} \left[\frac{k+1}{k} - 1\right] = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1}, \; k \geq 1.$$

En la próxima sección utilizaremos (3.1) y el ingenioso principio de reflexión de André para resolver el famoso problema de la votación.

El problema de la votación

El problema de la votación cautivó a matemáticos y probabilistas a finales del siglo XIX. Supongamos que se realiza una votación para una elección a la que concurren dos candidatos, X e Y; supongamos además que X recibe *a* votos y que Y recibe *b* votos, siendo a>b y, por lo tanto que X es elegido. La cuestión que se plantea es la siguiente: "¿Cuál es la probabilidad "p" de que, durante el recuento de votos (4), X esté siempre por delante de Y?". Naturalmente esta cuestión se puede traducir en una cuestión sobre trayectorias en la retícula entera del plano de coordenadas. Cada trayectoria de (0, 0) a (a, b) representa una posible evolución del recuento de votos, por esto su número total será:

$$(4.1) \qquad \binom{a+b}{a}$$

Llamemos *favorable* a un recuento en el que X siempre esté por delante de Y. Está claro que un recuento favorable corresponde a una trayectoria

(4) Suponemos que una sola persona realiza el escrutinio.

que (excepto en su punto inicial (0, 0)) es correcta. Por lo tanto necesitamos saber cuantas trayectorias de este tipo existen.

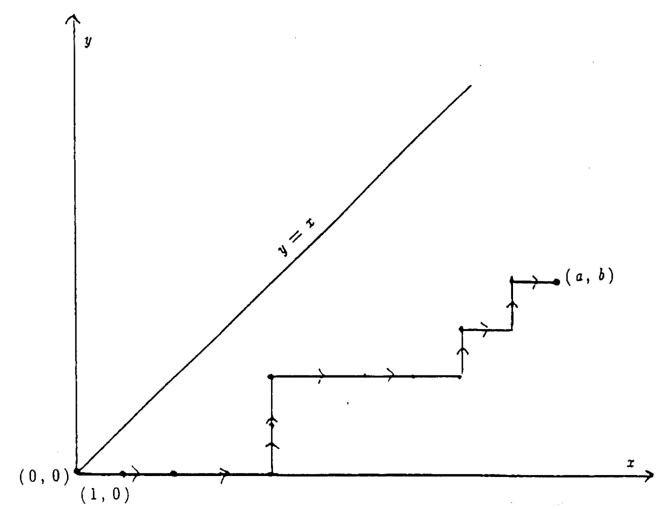
Observemos que, en un recuento favorable, X ha de recibir el primer voto y la trayectoria correspondiente alcanza inmediatamente el punto (1,0). Por lo tanto nuestro problema consiste en contar el número de buenas trayectorias de (1,0) a (a, b) . El número de dichas trayectorias, calculado a partir de la expresión (3.1) resulta ser:

$$\binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{b-1} = \frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}(a-b) \tag{4.2}$$

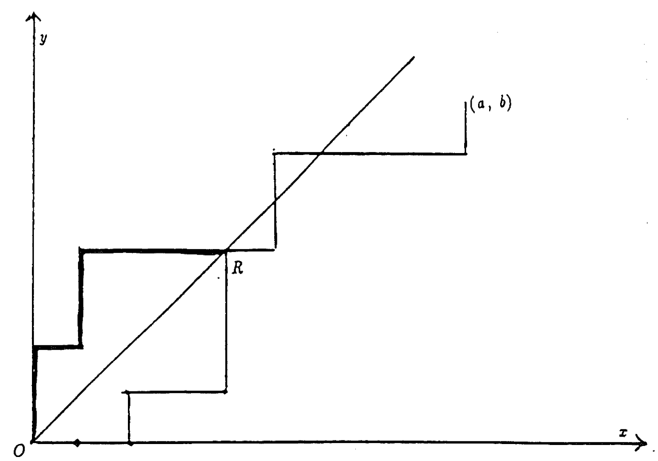
Para obtener el valor de p en el problema de la votación basta con dividir (4.2) por (4.1) y obtenemos:

$$p = \frac{(a+b-1)!}{a!\,b!}(a-b)\frac{a!\,b!}{(a+b)!} = \frac{a-b}{a+b}$$

Este resultado sorprendentemente sencillo muestra que, de hecho, la probabilidad "*p*" depende solo de la razón b/a y no del número total de votos recibidos por los candidatos. Este resultado nos parece algo misterioso y poco intuitivo. Quizás el siguiente argumento alternativo, basado en conceptos probabilísticos combinados con el método de André, nos puede proporcionar una idea más clara del porqué de nuestro resultado. (5)



Trayectoria de un suceso favorable.



Método de reflexión de André para una trayectoria incorrecta.

(5) Agradecemos al profesor James A.Wahab habernos enviado una carta con las ideas básicas de este argumento.

Consideremos una trayectoria producida por una sucesión de votos que satisface el criterio del problema de la votación, tal como se muestra en la Figura 11. Entonces podemos observar fácilmente que, dada una trayectoria de (0, 0) a (a, b) correspondiente a un recuento particular de una votación, la probabilidad p_E de que el *primer paso* vaya en dirección Este es:

$$p_E = \frac{a}{a+b}$$

y la probabilidad p_N de que el *primer paso* vaya en dirección Norte es:

$$p_N = \frac{b}{a+b}$$

Estamos buscando la probabilidad *p* de que una trayectoria dada se encuentre bajo la linea y=x excepto en el origen. Podemos ver fácilmente que todas las trayectorias que empiezan con un paso hacia el Norte seran trayectorias incorrectas, mientras que las que empiezan con un paso hacia el Este pueden ser correctas o incorrectas. Con un análisis más detallado podemos ver (usando la idea de André) que, de hecho, a cada trayectoria que empieza con un paso hacia el Norte le corresponde otra trayectoria necesariamente incorrecta que empieza con un paso hacia el Este. Esta correspondencia biyectiva entre trayectorias que empiezan con un paso hacia el Norte y trayectorias incorrectas que empiezan hacia el Este, se establece tomando la reflexión de la subtrayectoria OR sobre la línea y=x y manteniendo la parte de la trayectoria original que va de R a (a, b) (tal como se ilustra en la Figura 12). Por esto, la probabilidad de que una trayectoria empieze con un paso hacia el Este y sea incorrecta es exactamente la misma que la probabilidad de que una trayectoria empieze con un paso hacia el Norte. Por lo tanto:

$$p = p_E - p_N = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

coincidiendo con (4.3).

De este modo, tal como dijimos, la probabilidad buscada depende sólo de la razón a/b; por ejemplo, la probabilidad es la misma tanto si X recibe 80 votos e Y recibe 40 como si X recibe 800 votos e Y recibe 400 (en concreto 1/3). Sin embargo, esto no implica que la probabilidad no se vería afectada si agrupásemos los votos, por ejemplo de 10 en10, antes del recuento. De hecho, en el caso extremo en que todos los votos se agrupan en un único conjunto antes del recuento, la probabilidad resultaría ser 1!. He aquí otra cuestión interesante.

Peter Hilton. *Department of Mathematical Sciences. State Univ. of New York.*
Jean Pedersen. *Department of Mathematics. Santa Clara University.*

Bibliografía

[A] D. ANDRÉ. "**Solution directe du problème résolu par M. Bertrand**", *Comptes Rendus. 105*, 436-437, 1887.

[C] L. COMTET. **Advanced Combinatorics.** D. Teigel Publishing Co.. Netherlands. 1974.

[HAG] A. P. HILLMAN, G. L. ALEXANDERSON y R.M. GRASSL. **Discrete and Combinatorial Mathematics.** Dellen-Macmillan. 1987.

[HP1] P. HILTON y J. PEDERSEN. "**Catalan numbers and their uses**". *Supplement to the Handbook of Applicable Mathematics.* John Wiley and Sons. Chichester. 1990. (93-115).

[HP2] P. HILTON y J. PEDERSEN. "**Catalan numbers, their generalizations and their uses**" *Mathematical Intelligencer.* (En prensa).

[K] D. A. KLARNER. "**Correspondences between Plane Trees and Binary Sequences**". *J. of Comb. Theory. 9.* 401-411. 1970.

[S] N. J. A. SLOANE. "**A handbook of Integer Sequences**". Academic Press. Nueva York. 1973.

ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS: SUS POSIBILIDADES EN LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

M. C. Batanero Bernabeu
A. Estepa Castro
J. Díaz Godino

En la actualidad la enseñanza de la Estadística se realiza de forma gradual desde séptimo de E.G.B. hasta los primeros cursos universitarios, en donde existen asignaturas de Estadística Aplicada en distintas licenciaturas: Medicina, Biología, Farmacia, Economía, Psicología, Ciencias de la Educación, Ingeniería, etc.

Debido al espectacular desarrollo de la informática y a la disponibilidad de paquetes de cálculo, fácilmente manejables y accesibles, asistimos en nuestros días a una demanda cada vez mayor de formación estadística, lo que sin duda ha contribuído a que en los diseños curriculares propuestos para la Reforma de las Enseñanzas no Universitarias estos contenidos reciban mayor peso. Baste citar que de los cinco bloques de contenido que se proponen para la Enseñanza Secundaria Obligatoria, dos están relacionados con la Estadística: el 4, «*Interpretación, representación y tratamiento de la información*» y el 5, «*Tratamiento del azar*». (Diseño Curricular Base). Este fenómeno no es exclusivo de nuestro país: la enseñanza de los contenidos referidos a estadística y probabilidad se acentúa en los nuevos planes de estudio de diferentes países. Como ejemplos podemos citar el Curriculum Nacional de Inglaterra y Gales [1], puesto en funcionamiento en 1988 y las recomendaciones sobre el tema incluídas en los Curriculum and Evaluation Standars del N.C.T.M. [2] en Estados Unidos.

Pero si queremos aprovechar las posibilidades de renovación curricular que se manifiesta en la intención de la reforma, desde las primeras tomas de contacto con el tema, debiera tratarse el análisis de datos desde un punto de vista exploratorio, como se está iniciando en otros países, máxime teniendo a nuestra disposición herramientas tan poderosas como los microordenadores.

Enfoques confirmatorio y exploratorio en el análisis de datos

Las capacidades de cálculo y representación gráfica de los ordenadores actuales, permiten de una forma sencilla, la obtención de una amplia variedad de gráficos y estadísticos diferentes y han hecho posible la aparición de una nueva filosofía en los estudios estadísticos: el análisis exploratorio de datos, introducido por Tukey [3].

Anteriormente a este enfoque, el análisis de datos se basaba fundamentalmente en el cálculo de estadísticos, conduciendo a dos consecuencias: En primer lugar se disminuía la importancia visual de la representación de los datos, dándosela exclusivamente a los cálculos y en segundo se equiparaba el análisis con el modelo confirmatorio.

En este tipo de análisis el conjunto de valores de las variables observadas se supone que se ajusta a un modelo preestablecido, calculando los estadísticos para aceptar o no una hipótesis, que es previa a la toma de las observaciones, las cuales han sido recogidas con el único propósito de poner tal hipótesis a prueba. Al contemplar sólamente dos alternativas, (confirmación o no de la hipótesis), los datos no se suelen explorar para extraer cualquier otra información que pueda deducirse de los mismos.

Para entender los principios por los que se guía el análisis exploratorio, se ha de tener en cuenta que los datos están constituidos por dos partes: la «regularidad» y las «desviaciones». La regularidad indica la estructura simplificada de un conjunto de observaciones (en una nube de puntos, por ejemplo, es la recta a la cual se ajusta). Las diferencias de los datos con respecto a esta estructura (diferencia en nuestro caso respecto a la recta), representan las desviaciones o residuos de los datos, que usualmente no tienen por qué presentar una estructura determinada.

Tradicionalmente el estudio se ha concentrado en la búsqueda de un modelo que exprese la regularidad de las observaciones. Por el contrario, el análisis exploratorio de datos es básicamente el desglose de los mismos en las dos partes que hemos citado. En lugar de imponer, en hipótesis, un modelo a las observaciones, se genera dicho modelo desde las mismas. Por ejemplo, cuando se estudian las relaciones entre dos variables, el investigador no sólamente necesita ajustar los puntos a una línea recta, sino que estudia los estadísticos, compara la línea con los residuos, estudia la significación estadística del coeficiente de correlación u otros parámetros para descubrir si la relación entre las variables se debe o no al azar. Aunque los estadísticos calculados presenten un valor estadísticamente significativo (en el ejemplo, el coeficiente de correlación sea significativamente distinto de cero), la relación entre las variables puede no ajustarse bien a una línea recta. En este caso al investigador le faltaría descubrir algo importante: el modelo latente no es el esperado.

Características del análisis exploratorio de datos

Como hemos indicado, nos encontramos ante una nueva filosofía en la aplicación de los métodos de análisis de datos, aunque unida a ella se han desarrollado también algunas técnicas concretas para su aplicación. Esta filosofía consiste en el estudio de los datos desde todas las perspectivas y con todas las herramientas posibles, incluso las ya existentes. El propósito es extraer cuanta información sea posible, generar «hipótesis» nuevas, en el sentido de conjeturar sobre las observaciones de las que disponemos.

Como contrapartida, tales «hipótesis» no quedan contrastadas en el sentido estadístico del término al finalizar el análisis, por lo que sería preciso la toma de nuevos datos (una replicación) sobre el fenómeno y efectuar sobre ellos un análisis estadístico tradicional con el fin de contrastarlas. Por ello, el análisis exploratorio se utiliza especialmente en las fases iniciales del estudio experimental en las diversas ciencias -Biología, Ciencias Humanas, Economía,- en la que se dispone de poca información sobre los objetos bajo estudio, siendo especialmente útil en el denominado paradigma cualitativo de investigación.

Al considerar la conveniencia o no de incluir un tema como objeto de enseñanza hemos de tener en cuenta su utilidad y que este tema se halle al alcance de los alumnos. Además de la utilidad, ya razonada, el análisis exploratorio de datos tiene las siguientes características que lo hacen un tema apropiado de estudio en la enseñanza secundaria:

* **Posibilidad de generar situaciones de aprendizaje referidas a temas de interés al alumno**. Lo usual es trabajar sobre un fichero de datos que han sido codificados previamente e introducidos en el ordenador, ya que se pretende estudiarlos mediante cuantas perspectivas y técnicas tengamos a nuestro alcance. Estos conjuntos de datos pueden ser obtenidos por los mismos estudiantes, mediante la realización de una encuesta a sus compañeros sobre temas diversos, como características físicas, aficciones, empleo del tiempo libre, etc, o incluyendo valores de variables relacionadas con otras áreas curriculares obtenidos en anuarios o publicaciones estadísticas
* **Fuerte apoyo en representaciones gráficas:**»*Una idea fundamental del análisis exploratorio de datos es que al usar representaciones múltiples*

de los datos se convierte en un medio de desarrollar nuevos conocimientos y perspectivas. Esto puede ejemplificarse al pasar de tablas a gráficos, de lista de números a representaciones como la del «tronco», reduciendo los números a una variedad discreta en un mapa estadístico para facilitar la exploración de la estructura total, construyendo gráficos, como el de la «caja» que hace posible la comparación de varias muestras».
(Biehler [4],pg.2).

Empleo preferente de los estadísticos de orden, porque son sensibles a la mayor parte de los datos y con ellos se palía el efecto producido por los valores atípicos, escasos y muy alejados de la norma.

No necesita una teoría matemática compleja, *«Como el análisis de datos no supone que estos se distribuyen según una ley de probabilidad clásica (frecuentemente la normal), no utiliza sino nociones matemáticas muy elementales y procedimientos gráficos fáciles de realizar.*

Hasta aquí es, pues, bastante parecida a la estadística descriptiva tradicional, pero se aleja de ella por su intención. Pues, al contrario que en ella, la representación o el cálculo no son en el análisis exploratorio de datos un fin, sino un medio de descubrir la información oculta en los mismos», Jullien y Nin [5], págs. 30-31.)

Uso de diferentes escalas o reexpresión: La escala en la que una de las variables es observada y registrada no es única. A veces, transformando los valores originales de la variable a una nueva escala se puede lograr que dichos valores sean más manejables. De este modo se incluye también el empleo de otros contenidos matemáticos, especialmente los referidos al concepto de función y el estudio de las propiedades de las funciones elementales.

En resumen, como indica Biehler [4], pg. 5: *«El curriculum tradicional de Estadística Descriptiva debiera transformarse en dirección al análisis exploratorio de datos. Sería esencial, sin embargo, dar apoyo sustancial a la actitud investigadora, contra la tendencia de la mayor parte de las transposiciones didácticas de reducir el conocimiento a la técnica.»*

Técnicas elementales de análisis exploratorio de datos

Aunque, como hemos indicado, lo usual en este enfoque sería trabajar con un ordenador, muchas de estas técnicas son sencillas de realizar, incluso a mano. En lo que sigue, y para ejemplificar algunas de ellas, trabajaremos con el conjunto de datos que se muestra en la Figura 1, y que supondremos ha sido recogido en clase por los propios alumnos.

Peso en Kg.

Varones	Hembras
55 64 70 74 75 70	60 45 46 50 47 55
64 93 60 62 70 80	49 52 50 46 50 52
61 60 62 68 65 65	52 48 52 63 53 54
66 68 70 72 72 71	54 54 53 55 57 44
	56 56 56 53 60 65
	67 61 68 55 64 60

Figura 1

Gráfico del tronco

El gráfico del tronco (en inglés -stem and leaf-) fue descrito por Tukey y es utilizado para la representación de distribuciones de variables cuantitativas, consiguiendo con él, además de una gráfica de la distribución, la visualización de los valores de los datos que estamos estudiando. Para realizar este gráfico procederemos de la siguiente forma:

- Se redondean los datos a dos o tres cifras, expresando los valores con números enteros. En nuestro ejemplo, puesto que los datos disponibles constan sólo de dos cifras, este paso no es necesario.

- Se ordenan de menor a mayor, como se muestra en la Figura 2.

44 45 46 46 47 48 49 50 50 50 52 52 52 52 53
53 53 54 54 54 55 55 55 55 56 56 56 57 60 60
60 60 60 61 61 62 62 63 64 64 64 65 65 65 66
67 68 68 68 70 70 70 70 71 72 72 74 75 80 93

Figura 2

- Se separan por la izquierda uno o más dígitos de cada dato, según el número de filas que se quiera obtener, en general no más de 12 ó 15. Cada uno de estos valores se escriben uno debajo del otro, trazando una línea a la derecha de los números escritos. Estas cifras constituyen el «tronco». En nuestro caso tomaremos la primera cifra para formar con ella el «tronco».

- Para cada dato original se buscan los dígitos escritos de su tronco y a la derecha de los mismos se escriben las cifras que nos habían quedado. Estas cifras forman las «hojas».

De este modo obtenemos el gráfico del tronco para nuestros datos (Figura 3).

Gráfico del tronco del peso de los alumnos

4	4 5 6 6 7 8 9
5	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4 5 5 5 5 6 6 6 7
6	0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4 5 5 5 6 7 8 8 8
7	0 0 0 0 1 2 2 4 5
8	0
9	3

Figura 3

Como se observa, el resultado es, en la práctica, un histograma de amplitud de intervalo 10, que además de mostrarnos la forma de la distribución, presenta todos los datos ordenados. Esta representación puede ser ampliada o condensada para aumentar o disminuir el número de filas, subdividiendo o fundiendo dos o más filas adyacentes. Por ejemplo, para extender el gráfico de la Figura 3, podemos subdividir en dos cada fila de la siguiente forma: marcamos con un asterisco las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 0 a 4 y con un punto las filas cuyos dígitos de la derecha varian de 5 a 9. Este nuevo diagrama, que podemos observar en la Figura 4, recibe el nombre de gráfico del «tronco extendido».

Gráfico del tronco extendido del peso de los alumnos

4*	4
4.	5 6 6 7 8 9
5*	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
5.	5 5 5 5 6 6 6 7
6*	0 0 0 0 0 1 1 2 2 3 4 4 4
6.	5 5 5 6 7 8 8 8
7*	0 0 0 0 1 2 2 4
7.	5
8*	0
9	3

Figura 4

Al comparar el gráfico del tronco con un histograma de frecuencias observamos las siguientes ventajas:

- Su fácil construcción, especialmente con papel cuadriculado.

- Se pueden observar los datos con más precisión que en el histograma, pues los rectángulos pueden ocultar diferencias importantes entre los valores, mientras que en el gráfico del tronco estas lagunas pueden ser fácilmente detectadas y observadas.

- Pueden obtenerse a partir de él rápidamente los estadísticos de orden, como los valores máximo y mínimo, la mediana, cuartiles, percentiles y sus rangos, así como la moda.

Como contrapartida observamos que no podemos elegir la amplitud del intervalo, como en el caso del histograma, sino que viene impuesta por el sistema de numeración. Tampoco podemos escoger la escala de la representación gráfica, que viene impuesta por el espaciado del papel empleado.

Además de emplear este gráfico para el estudio de una variable aislada, también puede servir para establecer comparaciones entre dos distribuciones, observando claramente las diferencias y semejanzas en las mismas. Este hecho es importante a nuestro juicio, pues permite desde los comienzos de los estudios de Estadística una iniciación intuitiva para el estudio posterior del contraste de hipótesis, como ilustraremos con el estudio separado de los pesos para chicos y chicas en nuestro ejemplo.

Construyendo un gráfico del tronco separado para cada uno de estos conjuntos de datos y uniéndolos en la forma expuesta en la Figura 5 podemos hacer ver a los alumnos qué quiere decir que las chicas pesan menos que los chicos: no se trata de todos los casos, pues hay varones y hembras de igual peso. Tampoco se trata de casos aislados: al comparar las frecuencias relativas de pesos en los mismos intervalos observamos que esta frecuencia es distinta en los dos sexos, al menos para algunos intervalos. Estas diferencias de frecuencias, también se corresponden con otras en los distintos estadísticos: máximo, mínimo, moda, mediana, media,...

Estas diferencias son en este ejemplo muy acentuadas y pueden servir también, como una primera introducción intuitiva al concepto de asociación y dependencia estadística entre variables. Cuando en lugar de tomar en clase observaciones de dos variables distintas (peso y sexo en nuestro caso) hemos recogido varias sobre los mismos individuos (sexo, peso, altura, longitud de brazos, fumar o no, practicar o no deporte, pulsaciones por minuto en reposo, etc..) se puede hacer ver los distintos grados de dependencia de una de las variables con las restantes, especialmente cuando combinamos el uso de estos métodos con las técnicas más clásicas: histogramas, cálculo de estadísticos, tablas de contingencia, representación de nubes de puntos y cálculo de la recta de regresión.

Gráfico del tronco extendido del peso para varones y hembras

CHICOS		CHICAS
	4*	4
	4.	5 6 6 7 8 9
	5*	0 0 0 2 2 2 2 3 3 3 4 4 4
5	5.	5 5 5 6 6 6 7
4 4 2 2 1 0 0	6*	0 0 0 1 3 4
8 8 6 5 5	6.	5 7 8
4 2 2 1 0 0 0 0	7*	
5	7.	
0	8*	
3	9	

Figura 5

Gráfico de la «Caja»

El gráfico de la caja fue descrito por Tukey [3] denominándolo «*box and whiskers*». Para su construcción se utilizan 5 estadísticos de la distribución: el mínimo, el primer cuartil, Q_1, la mediana, el tercer cuartil, Q_3, y el máximo y se procede en la forma siguiente:

- Se traza una línea vertical u horizontal de longitud proporcional al recorrido de la variable, que llamaremos **eje** (Véase la Figura 6). Los extremos del eje serán el mínimo y el máximo de la distribución, que en nuestro caso son 44 y 93 kilos. En el interior del eje se señalarán las subdivisiones que creamos necesarias, para formar una escala.

Paralelamente al eje se construye una caja rectangular con altura arbitraria y cuya base abarca desde el primer cuartil al tercero. Como vemos, esta «caja» indica gráficamente el intervalo de variación del cincuenta por ciento de valores centrales en una distribución que, para el peso de los estudiantes, abarca desde 53 a 66.5.

- La caja se divide en dos partes, trazando una línea a la altura de la mediana (60 kg. en nuestro caso). Cada una de estas partes indica pues el intervalo de variabilidad de una cuarta parte de los datos. De este modo, en el ejemplo dado, una cuarta parte de los alumnos tiene un peso comprendido entre 44 y 53, estando incluídas las otras cuartas partes en los siguientes intervalos de peso: 53 a 60, 60 a 66.5 y 66.5 a 93.

- A la caja así dibujada se añaden dos guías paralelas al eje, una a cada lado, en la forma siguiente: el primero de estos segmentos se prolonga desde el primer cuartil hasta el valor máximo entre el mínimo de la distribución y la diferencia entre el primer cuartil y una vez y media el recorrido intercuartílico. Como en nuestro caso el mínimo peso es 44 kilos, y el recorrido intercuartílico es 66.5 - 53 = 13.5, al restar al primer cuartil, $Q_1 = 53$ una vez y media el recorrido intercuartílico obtenemos:

$$Q_1 - 1.5\ RI = 53 - 20.25 = 32.75$$

El máximo entre 44 y 32.75 es 44, por lo que el segmento inferior que debe dibujarse en el gráfico de la caja debe llegar hasta 44, como se muestra en la Figura 6.

El segmento dibujado al otro lado de la caja abarca desde el tercer cuartil hasta el mínimo entre el mayor de los datos y la suma del tercer cuartil con una vez y media el recorrido intercuartílico. En el peso de los alumnos el máximo es 93 kilos y, al sumar una vez y media el recorrido intercuartílico al cuartil superior 66.5, obtenemos:

$$Q_3 + 1.5\ RI = 66.5 + 20.25 = 86.75$$

De este modo, el extremo superior del segmento debe prolongarse ahora sólo hasta 86.75

Si alguno de los datos queda fuera del intervalo cubierto por la caja y estos segmentos, como ocurre en el ejemplo con el alumno que pesa 93 kg., se señala en el gráfico mediante un asterisco o cualquier otro símbolo, como puede verse en la Figura 6.

Estos datos son los llamados valores atípicos («outliers» en la terminología anglosajona), que son valores muy alejados de los valores centrales de la distribución. En la distribución normal, fuera del intervalo que resulta de extender los cuartiles en una vez y media el recorrido intercuartílico, solo aparecen un uno por ciento de los casos, por lo que estos valores, si no son debidos a errores, suelen ser casos excepcionales.

Gráfico de la caja para el peso de los alumnos

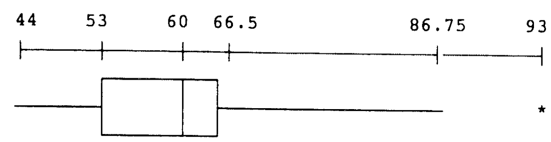


Figura 6

Como vemos en el ejemplo dado, este gráfico nos proporciona, en primer lugar, la posición relativa de la mediana, cuartiles y extremos de la distribución. En segundo lugar nos proporciona información sobre los valores atípicos, sugiriendo la necesidad o no de utilizar estadísticos robustos. En tercer lugar, nos informa de la simetría o asimetría de la distribución, y posible normalidad o no de la misma.

El gráfico de la caja también se puede utilizar para comparar la misma variable en dos muestras distintas, como se muestra en la Figura 7 al comparar los pesos de chicos y chicas.

Gráfico de la caja para los pesos de chicos y chicas

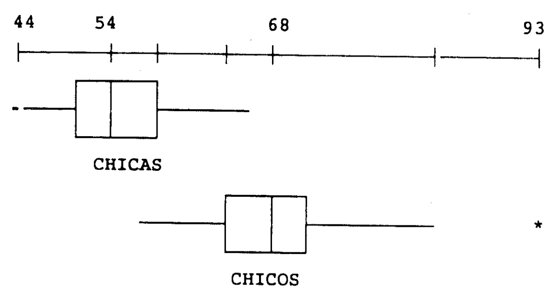


Figura 7

Además de estas representaciones gráficas existen otras específicas, tanto para datos univariantes, como para representar conjuntamente un grupo de variables. Una buena exposición de estos gráficos y su utilización se puede estudiar en Chambers y cols. [6]. Asimismo, para el estudio conjunto de dos variables se emplean, además de la regresión lineal ordinaria y diversos tipos de regresión no lineal, la recta de regresión respecto a la mediana, es decir cuando la suma de cuadrados de residuos que se trata de minimizar se refiere a la mediana. (Hartwing y Dearing [7]). En el análisis multivariante, que, de momento creemos queda fuera de este nivel de enseñanza, la mayor parte de las técnicas pueden ser empleadas tanto para realizar un análisis clásico como con un enfoque exploratorio.

Programas disponibles para el análisis exploratorio de datos

Como hemos indicado, lo habitual en este enfoque es trabajar con un ordenador, para aligerar el trabajo de cálculo y representación gráfica, ya que el interés se centra en la comparación de todas las representaciones posibles sobre unos mismos datos. En la actualidad, muchos paquetes estadísticos profesionales, como pueden ser el B.M.D.P. o el S.P.S.S. están incorporando representaciones como el gráfico de la caja o del tronco en algunos de sus subprogramas. Con fines de enseñanza, existen paquetes concebidos para este fin exclusivo, como el distribuído por el N.C.T.M. [8], que viene acompañado con un libro de actividades, o los que se describen en Biehler [9]. Por nuestra parte, hemos incorporado la posibilidad de realizar el gráfico del tronco y el de la caja en el paquete PRODEST, que se describe en Batanero Bernabeu y cols. [10].

M. C. Batanero Bernabeu
A. Estepa Castro
J. Díaz Godino
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Bibliografía

[1] DEPARTMENT OF EDUCATION AND SCIENCE AND THE WELSH OFFICE (1989). **Mathematics for ages 5 to 16. Proposals of the Secretary of State for Education and Science and the Secretary of State for Wales.**

[2] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1989). **Curriculum and Evaluation Standars for School Mathematics.**

[3] TUKEY, J. W. (1977). **Exploratory Data Analysis.** Addisson Wesley.

[4] BIEHLER, R. (1988,a). **Educational perspectives on Exploratory Data Analysis**. Sixth International Congress on Mathematical Education.

[5] JULLIEN, M. Y NIN, G. (1989). **L' E.D.A. au secours de l'O.G.D. ou quelques remarques concernant l'enseignement de la Statistique dans les colleges**. Petit X, 19, 29-41.

[6] CHAMBERS, J. M.; CLEVELAND, W. S.; KLEINER, B. Y TUKEY, P. A. (1983). **Graphical methods for Data Analysis**. Duxbury Press.

[7] HARTWING, F. Y DEARING, B. F. (1979). **Exploratory Data Analysis.** Sage University Press.

[8] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1988). **Exploring data.**

[9] BIEHLER, R. (1988,b). **A selected bibliography on teaching Exploratory Data Analysis at school level.** Sixth International Congress on Mathematical Education.

[10] BATANERO BERNABEU, M. C.; DÍAZ GODINO, J. Y ESTEPA CASTRO, A. (1987). **Un paquete didáctico de programas para el laboratorio de Estadística. Actas del I Simposio Internacional de Educación e Informática.** I.C.E. de la Universidad Autónoma de Madrid, pp. 380-386.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Lorenzo J. Blanco Nieto

Resumen

La resolución de problemas es uno de los aspectos centrales en las nuevas propuestas curriculares que en la actualidad se realizan sobre la enseñanza de las Matemáticas. No obstante, son numerosas las dificultades que aparecen en el aula cuando esta idea quiere llevarse a la práctica, por la falta de conexión con la actividad concreta que los profesores desarrollan.

El trabajo que ahora se presenta quiere dar a conocer algunos de los resultados de una investigación más amplia llevada a cabo en la Escuela de Magisterio de Badajoz uno de cuyos objetivos era describir el conocimiento práctico personal de los profesores de E.G.B. sobre la resolución de problemas.

Introducción

Al considerar los objetivos de las diferentes propuestas curriculares podemos observar que se intenta modificar los contenidos y metodología, así como cambiar la actitud hacia las Matemáticas. Se proponen buscar y consolidar ciertas capacidades básicas que pueden surgir de la actividad matemática, al mismo tiempo que se adquieren ciertos conocimientos o técnicas que puedan ayudar a comprender y comunicar la realidad que nos rodea. A modo de resumen, podríamos considerar tres citas que reflejan estas ideas:

* "Saber matemático resulta ser esencialmente saber de método mucho más que saber de contenido" (Guzmán, 1985, p. 32).
* "Reestructurar el contenido más sobre la base de los procesos matemáticos que sobre la base actual del contenido" (I.C.M.I., 1987, p. 37).
* "Conocer Matemáticas es hacer Matemáticas" (Putnam y otros, 1990, p. 62).

Aparece la necesidad de delimitar qué tipo de actividades podrían ser llamadas matemáticas y conocer aquellas que debe desarrollar un conocedor de las Matemáticas para poder sugerir las que deben ser desarrolladas por los alumnos en las clases. A este respecto, y en referencia al *Curriculum and evaluation standars for school mathematics*, Putnam y otros (1990) sugieren que "hacer matemáticas en clase debería consistir en actividades tales como: abstraer, aplicar, convencer, clasificar, inferir, organizar, representar, idear, generalizar, comparar, explicar, desarrollar modelos, validar, proveer, conjeturar, analizar, contar, medir, sintetizar y ordenar" (p. 96).

Resolución de problemas y profesores de Matemáticas

Dentro de estas ideas de renovación la resolución de problemas es considerada por muchos autores el aspecto central de la enseñanza de las Matemáticas. A lo largo de la década de los 80 fueron numerosos los trabajos que intentaron precisar el significado de la expresión "resolución de problemas", así como los aspectos pedagógicos que se derivarían de su consideración práctica en el contexto escolar.

No obstante, la idea de la resolución de problemas como parte integral de la clase suscita algunas dificultades para que pueda tener repercución práctica en el marco curricular correspondiente. Así, para Rosenbaum y otros (1989), "la resolución de problemas surge como aspecto central de las Matemáticas en la escuela primaria para facilitar, a nuestros estudiantes, la transición al siglo XXI. Sin embargo, traducir esta aspiración a las clases prácticas llega a producir, a menudo, consternación y preocupación" (p. 7).

Esta reflexión es importante en el inicio del proceso de reforma ya que si no se encuentra el nexo de unión entre las nuevas propuestas curriculares y la práctica docente que desarrollan los profesionales de la enseñanza de las Matemáticas en los distintos niveles, la propuesta de renovación realizada caerá en terreno baldío.

Surge pues la necesidad de hacer referencia a los profesores, sus pensamientos y acciones como elementos fundamentales de la enseñanza que contribuyen a la comprensión de los procesos didácticos. El conocimiento de la perspectiva de todos los protagonistas de la enseñanza, en particular de los profesores, es una línea de investigación desarrollada por grupos de investigadores que tratan de describir el conocimiento práctico personal de los profesores de Matemáticas. (Bromme, 1988; Marks, 1989)

Para Arrieta (1987), "el profesorado en activo cuenta en su haber con una experiencia, y un pensamiento pedagógico determinado, en relación con la resolución de problemas de Matemáticas, que da igual que sea acertado o erróneo puesto que de él es imprescindible partir para utilizarlo como factor clave en el diseño y planificación de cualquier actividad educativa" (p. 214).

La perspectiva de los participantes pudiera reportarnos una nueva visión que nos hiciera comprender lo que sucede en la clase de Matemáticas, ayudándonos a estudiar y comprender en profundidad cuáles serían las nuevas demandas de los profesores, y cuáles las maneras en que estos pueden acomodarse a ella, considerando que es necesario comprender cuáles son los conocimientos, creencias y actitudes de los profesores de Matemáticas, así como las formas en que desarrollan su enseñanza. (Ernest, 1989)

Los resultados presentados forman parte de una investigación más amplia, desarrollada desde el año 1986 en la Universidad de Extremadura en el que adoptando las técnicas propias de la metodología cualitativa se aborda el "análisis de la enseñanza interactiva de profesores de EGB, con experiencia en la enseñanza de las Matemáticas, y de estudiantes para profesores, durante las prácticas de enseñanza, para contrastar el pensamiento y la acción en relación con la enseñanza de las Matemáticas, que ayude a comprender el conocimiento práctico personal de los profesores expertos y noveles". (Blanco, 1990, p. 29)

Se desarrollan, entre otros, dos estudios de casos de Profesores con experiencia en enseñanza de las Matemáticas de Ciclo Superior, que son analizados para recoger los significados e interpretaciones que hacen de su interacción didáctica. Las técnicas empleadas son entrevistas y observaciones de clases a través de grabaciones en audio y vídeo, que son métodos basados en la verbalización de los pensamientos y permiten acceder a los procesos internos de razonamientos, decisiones, creencias, etc, (Marcelo, 1987, p. 123). La combinación de los métodos asegura la comunicación y de acción necesaria para poder obtener conclusiones fiables en el estudio.

Durante los cursos 1986-87 y 1987-88, se desarrollaron un total de 26 protocolos a estos dos profesores (8 entrevistas, grabadas todas en audio, y 18 observaciones de clases, grabadas en audio y vídeo). En el presente documento se exponen algunos de los resultados considerados para uno de los profesores expertos (Luis) sobre resolución de problemas con el que obtuvimos 14 protocolos, de los que 10 eran grabaciones de clases y 4 eran entrevistas de estimulación del recuerdo (Calderhead, 1981).

El conocimiento práctico personal sobre la resolución de problemas

El análisis de las observaciones de clase así como la justificación que de su acción realiza nuestro informante nos lleva a considerar algunos aspectos que constituyen su conocimiento práctico personal sobre la resolución de problemas, que ahora exponemos.

1. Significado de la resolución de problemas

Luis hace una clara diferencia entre la enseñanza de la teoría y la de los problemas que es una de las dicotomías que el movimiento de la resolución de problemas quiere romper. La enseñanza simultánea de los conceptos matemáticos y la resolución de problemas es uno de los aspectos señalados en el movimiento de la resolución de problemas que más dificultad tiene para ser considerado en la práctica diaria y así nos lo manifiesta nuestro informante desde su experiencia.

Cuando en las entrevistas quiere delimitar el significado de la expresión "resolución de problemas" se refiere más bien a la finalidad que pretende con la actividad o a la propia acción de los alumnos, evitando las definiciones. Así señala:

> "La definición de problema la veo complicada. Distingo solo dos tipos de problemas, o que el profesor los usa con distintas finalidades. La primera al inicio, en cualquier momento de un nuevo tema o de una nueva cuestión a tratar, o sea para iniciar un nuevo tema, un nuevo concepto o una nueva idea se propone un problema que tiene el alumno posibilidades de acceder a él. El otro tipo sería el de comprobación, después de haber dado unos temas, pues una forma de comprobar si aquellos conceptos que se han impartido son dominados por el alumno es intentar resolver problemas en los que hay que aplicar los conceptos que se hayan aprendido".

Contempla dos direcciones para la resolución de problemas: a) como motor de conocimiento, b) como justificación y/o aplicación de los conocimientos aprendidos.

Considera, además, otro significado para los problemas en un intento de encontrar nuevas perspectivas para su enseñanza que entronque con las nuevas propuestas curriculares. Así, hace referencia a la necesidad de que el alumno experimente constantemente en clase sugiriendo otro tipo de problemas que suele darse en su actividad docente, y que se aleja del problema tipo que se enuncia en los libros.

> "Entiendo como problema, también, muchas situaciones que se dan en cada momento en la clase. Puedes estar hablando sobre un tema determinado y una de las situaciones, cualquiera, puede ser un problema. Una situación muy puntual. Estos problemas no son planteados a partir de un lenguaje oral, y luego aplicar lo que se sabe sino que es un mundo muy amplio donde el alumno puede tocar cosas muy puntuales, y a cada uno se les ocurre cosas distintas porque no les das líneas generales, unas líneas muy concretas, sino que les das una idea y a partir de esa idea ellos van sacando problemas e intentando resolverlos".

2. Algunos aspectos en la presentación del problema

2.1. Parte de la realidad de los alumnos.

Luis quiere plantear los problemas partiendo de una situación que estén viviendo los alumnos en esos momentos, escogiendo los datos que le van proporcionando los propios alumnos:

> "Estamos vendiendo, para la excursión, piezas de porcelana. Por cada una ganamos 100 pesetas...".

No obstante, es consciente de que esto es muy difícil, y en otros casos les indica a los alumnos:

> "... Una cosa que os he dicho siempre de los problemas es que os creáis que los problemas son de verdad. Que es algo que está sucediendo de verdad. Que intentéis vivirlo, como si fuera algo que vosotros mismos vais a hacer".

Establece una clara diferencia entre lo que es la realidad de los adultos, que es la considerada normalmente en las diferentes propuestas de los libros, (problemas sobre bancos, o sobre mercados...), y la realidad del alumno, que le hace "pasar" de las que no considera ni válida ni útiles para sus intereses de niño o de adolescente. Es importante resaltar la conexión que Luis establece, en este sentido, con la propuesta que el Diseño Curricular Base hace para la Enseñanza Secundaria Obligatoria, donde se señala:

"No son los mismos problemas los que necesita resolver un matemático, un adulto, un adolescente y un niño. La realidad incluye su propia percepción del entorno físico y social y componentes imaginadas y lúdicas que despiertan su interés en mayor medida que las situaciones reales desde el punto de vista adulto. En consecuencia, la activación del conocimiento matemático mediante la resolución de problemas reales no se consigue trasvasando de forma mecánica situaciones que pueden ser muy pertinentes y significativas para el adulto, pero que pueden fácilmente no tener estas características para los alumnos" (MEC, 1989, p. 480)

2.2. Relación de los problemas con la teoría.

Los problemas pueden ser el origen del estudio de diversas propiedades según señalaba en el apartado anterior. Es éste uno de los aspectos que suele indicarse, a los alumnos en la presentación de los problemas:

> "Mirad, vamos a pensar en este problema. Alguno dirá, si es muy sencillo. Quiero que saquemos de él conclusiones...".

Estas observaciones, en las que relaciona previamente el problema con la teoría y en las que declara sus objetivos, son frecuentes en la presentación de los problemas, y se manifiestan, aún cuando realiza dos o más problemas seguidos, como puede comprobarse en esta otra intervención que corresponde a la misma clase:

> "Vamos a hacer otro semejante. Siempre en estos problemas tenemos que ver los conjuntos con los que trabajamos y ver cuál es la función de proporcionalidad directa..."

2.3. Significado de términos y conceptos implicados

En la presentación de los problemas, pregunta acerca del significado de los términos empleados, no sólo en el sentido matemático sino en el vulgar, incluso recurriendo al diccionario si es necesario.

> "Un campo rectangular tiene una de sus dimensiones 15 metros... Y la otra dimensión 3,5 decámetros. ¿Cuál es el perímetro de ese campo?. Jorge, la palabra perímetro en tu lenguaje, ¿qué significa?".

Así mismo pregunta acerca de los conceptos que están implicados en el enunciado, y de la relación que entre ellos pudiera establecerse:

> "¿Cuál de las dos cantidades es mayor, 15 metros ó 3,5 decámetros?".
> "¿Mariano por qué sabes que 3,5 Dm es mayor que 15 metros?".
> "¿35 metros, entonces si esto fuera el dibujo donde pondríamos los 35 metros. ¿Aquí o aquí?

3. Proceso seguido

3.1. Necesidad de reflexión antes, durante y después

Cuando Luis considera terminada la presentación del problema, suele implicar a los alumnos en un proceso de reflexión anterior a la ejecución de alguna mecánica que pudiera llevarles a la solución del ejercicio. Podemos ver cómo suele plantearles a los alumnos que le expliquen cómo harían para resolverlo:

> "Bueno la pregunta es cuánto media el perímetro. Entonces, tú, ¿qué harías para averiguar ese perímetro?".

En otro momento de la grabación, podemos observar que ralentiza el trabajo de un alumno, durante la realización del problema, para que este sea más consciente de sus acciones. Así, le señala:

> "Piensa por qué. No te vayas a una operación rápida... Mentalmente, ¿qué está sucediendo?. A todos".

De igual forma, una vez que el alumno ha encontrado la solución al problema, llama nuevamente a la reflexión y a que manifieste el proceso seguido para alcanzarla:

"Explícanos como piensas tú para llegar a esa conclusión. Por favor, sal y explícalo en la pizarra".

Luis, una vez realizado el problema, lo repasa, con participación de los alumnos, incidiendo sobre los diversos aspectos, matemáticos o no, que han aparecido en el desarrollo de la actividad. Podemos observar cómo a partir de un problema resuelto, va estudiando conceptos que han aparecido en el trabajo diario, así como propiedades nuevas que surgen en su resolución. Existe una relación estrecha entre la teoría que están estudiando y los problemas que propone que reflejan los conceptos y propiedades de esa teoría.

Finaliza algunos problemas preguntando a los alumnos sobre otra posible forma de hacerlo, en una forma más de implicar a los alumnos, y de favorecer su iniciativa y de suscitar estrategias propias de ellos:

"Eso sería una posible forma de hacerlo, ¿a alguien se le ocurre otra forma de hacerlo?".

3.2. La comprensión del problema es más importante que la rutina operatoria.

Luis intenta constantemente que el alumno reflexione sobre la situación planteada. Le concede más importancia al proceso a seguir, que a la mecánica concreta para resolver el problema. Cuando los alumnos sugieren con prontitud una operación para encontrrar la solución, cuando dudan o se equivocan, etc, se dirige a ellos, incitándoles a utilizar su capacidad de razonamiento.

"Vamos a ver. Vamos a pensar, no intentes, lo hemos dicho muchas veces, no intentes simplemente buscar en la mente algo que recuerdes, y que puedas aplicarlo".

"Da igual 15 ó 9, lo que queremos ver es cómo piensa él".

"Mirad, en los problemas, no importan los números que están contenidos, 19, 90... no importan. Los fundamentos de los problemas no están en los números, en las cantidades que llevan, están en como relacionar esas cantidades para resolver el problema".

3.3. Necesidad de una correcta expresión

Luis hace constantes llamamientos a que este pensamiento, y la acción que de él se derive, se exprese correctamente a fin de poder establecer con claridad una buena comunicación.

"Pon las cosas bien, las cosas ordenadas. Poned las cosas siempre con orden. Escribid con orden. La igualdad es un signo que sirve exclusivamente para decir esto es igual que esto. Pero 2 Kg. nunca pueden ser igual a 115 ptas., sino que el precio de 2 Kg. son 115 ptas.".

3.4. Establece pautas de conducta a los alumnos.

En muchos momentos hace referencia a cuestiones generales de educación de sus alumnos, (de comunicación entre ellos, de comportamiento general,...) es como si quisiera aprovechar cualquier circunstancia para educar, más que para enseñar Matemáticas, ya que se considera maestro antes que profesor de Matemáticas:

"Un momento Jorge. Os lo he dicho muchas veces, cuando os hablen escuchad, oid lo que os hablan, pensad sobre lo que os hablan y sacad conclusiones. Tanto si me lo dices tú a mí, como si te lo digo yo a ti, Paulino. Cuando vamos a una conferencia, cuando leemos la prensa, un artículo".

4. Factores en la resolución de problemas

4.1. El lenguaje en la resolución de problemas

A pesar de las diferentes formas en las que sugiere que se puede presentar un problema, considera que el lenguaje utilizado en todo momento en la presentación de la actividad debe cuidarse, puesto que es una de las fuentes principales de dificultad que encuentran los alumnos en su actividad docente.

"La dificultad fundamental que veo en mis alumnos, según mi experiencia es el lenguaje. Lo que no son capaces es de observar el lenguaje, qué es lo que le está diciendo, qué es lo que está expresando. Además, dificultades de vocabulario, de palabras nuevas que aparecen en ese problema que ellos no las conocen".

Sin embargo no sólo se refiere a la comprensión de los vocablos o frases que aparecen en el enunciado, para él la propia estructura del problema puede condicionar la resolución del mismo.

"Un problema se plantea muchas veces, en su redacción, de varias formas distintas. Si el lenguaje escrito del problema es isomorfo, por decirlo de alguna manera, con la resolución algorítmica, el número de operaciones que se requieren están en el mismo orden, entonces al alumno la mayoría de las veces no les crea dificultad. Cuando el lenguaje ya no está en el mismo orden que las operaciones que hay que hacer, se crea una dificultad muy grande".

Se refiere, así mismo, a la propia ciencia matemática de la que dice que aporta un lenguaje propio que los alumnos deben conocer, añadiendo una dificultad más a la compresión del problema.

"Las Matemáticas, acompañan otro lenguaje específico que es otra dificultad más, aparte, el lenguaje diríamos de uso normal, es inmaduro. Cuando resuelve un problema matemático en el que aparece además el lenguaje propio de la ciencia matemática, la dificultad es mayor. O sea, diríamos es una dificultad del lenguaje en los dos aspectos, el lenguaje normal del alumno y el lenguaje de las Matemáticas".

4.2. Referencia al alumno.

a) El alumno como investigador

Reiteradamente se refiere al trabajo del alumno, para situarlo, en la clase, más como un investigador que como un receptor de conocimiento. Sin embargo no se olvida nunca del papel del profesor al que le asigna un protagonismo decisivo en la clase, aunque no lo considere nunca el centro de la actividad docente. En la entrevista nos habla sobre cuál debería ser el papel del profesor y cuál el del alumno, en la resolución de problemas, sin embargo su visión podríamos enmarcarla en un intento de considerar la resolución de problemas más como una metodología de la enseñanza de las Matemáticas que como un ejercicio que se desarrolla en un determinado momento en clase.

"El profesor nunca puede dejar de ser guía. Hay unas metas, unos objetivos a los que hay que llegar, pero hay que conseguir que el alumno no sea completamente receptivo, hay que conseguir que, a partir de algunas ideas, intente conseguir otras nuevas, o mejorarlas, o ampliarlas. Eso se consigue haciéndole que intervenga mucho en la clase, que ante cualquier situación nueva que se le presente ellos experimenten, y eso son soluciones de problemas, ante una idea nueva, experimenta, comprueba si cosas que él está pensando sobre aquello se dan o no se dan. El fundamento de las Matemáticas en los primeros niveles, sin olvidar lo que hemos dicho sobre la guía del profesor, es que el alumno tiene que experimentar mucho, tiene que acostumbrarse a trabajar las Matemáticas, si se las damos nosotros trabajadas y elaboradas, pues le estamos rompiendo todo lo que pueda aportar de imaginación y su posible potencial que tenga, de descubridor. Que le va a hacer una persona mucho más integral".

b) Relación profesor-alumno

Luis se refiere a la relación que se establece entre profesor-alumno, y a determinadas circunstancias para poder garantizar que la implicación del alumno en la actividad sea una implicación de investigación necesaria para que éste se implique en el problema. En esta línea manifiesta:

"Lo primero que tiene que existir es una atracción del profesor al alumno y del alumno al profesor. Los alumnos necesitan un tiempo de adaptación. Se necesitan unas circunstancias, porque en cualquier momento (plantear problemas) no es válido, todas esas cosas (condiciones para la resolución de problemas) se dan cuando hay un intercambio perfecto entre alumno y profesor".

La actitud que toma el alumno antes las cuestiones que se le plantean, es una variable importante para poder delimitar lo que sería la actividad de resolución de problemas. La situación de resolución de problemas, en consonancia con su idea de hacer Matemáticas, debe ser de investigación aceptada por el alumno como tal, e intentar que éste se sitúe ante estas actividades como investigador.

"Creo que la situación se da cuando el alumno acepta experimentar sobre aquello que se le ha dicho para obtener unos resultados. Para mi esa es la situación problemática. Expongo algo, una expresión oral, una expresión escrita y ante aquello el alumno se sitúa, en forma de investigador, para obtener unos resultados. Eso sería una situación problemática del alumno".

4.3. Relación de la teoría con los problemas

Otro aspecto importante señalado por Luis en las entrevistas se refiere a la dificultad de los alumnos de relacionar los conceptos aprendidos con las aplicaciones prácticas que se reflejan en los problemas. Así, cuando se refiere a los métodos de enseñanza de las Matemáticas, dice expresamente:

"Los alumnos, muchas veces, con el sistema tradicional de teoría y después práctica, he observado que conocen muy bien la teoría, saben perfectamente cualquier concepto, o cualquier idea matemática que le has expresado. Sin embargo le pones un problema y no son capaces de resolver un problema".

Para Luis existe una clara relación entre la teoría y la realización de los problemas, en estos subyace siempre algún concepto que es el que los alumnos deben saber para poder generalizar su conocimiento sobre la resolución de problemas en algún tema determinado:

"El alumno o cualquier persona cuando resuelve un problema, si solo resolviera los números que allí existen entonces no estaría resolviendo el problema, eso es imposible. Un alumno cuando es capaz de resolver un problema, lo que tiene claro son los conceptos que intervienen en el problema, o sea que cuando una persona resuelve un problema, lo que es capaz es de manejar son los conceptos en abstracto. Lo que pasa es que ese concepto en el problema se concreta en problemas de la vida real, en situaciones concretas".

Reflexión final

Con el presente artículo no se ha pretendido establecer ninguna teoría acerca de la resolución de problemas partiendo de los resultados presentados. Sin embargo, nos ha parecido oportuno dar a conocer algunas reflexiones que a partir de la práctica docente ha surgido en un trabajo concreto de investigación y que se consideran pueden ayudar, al igual que a nuestros informantes, a reflexionar sobre la acción diaria a fin de avanzar el camino de la renovación didáctica.

Lorenzo J. Blanco Nieto.
Profesor de la Escuela de Magisterio de Badajoz. Miembro del Grupo Beta

Bibliografía

[1] ARRIETA, J. J. (1987). **Teoría y práctica de las Matemáticas en el Ciclo Inicial de la E.G.B.** Tesis doctoral inédita presentada en el Departamento de Ciencias de la Educación de la Universidad de Oviedo.

[2] ARRIETA, J. J. (1989). "**La resolución de problemas y la educación matemática. Hacia una mayor interrelación entre investigación y desarrollo curricular**". Enseñanza de las Ciencias 7 (1). 63-71.

[3] BLANCO, L. (1990). **Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas, de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores.** Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. Cáceres.

[4] BROMME, R. (1988). "**Conocimiento profesional de los profesores**". Enseñanza de las Ciencias 6 (1). 19-29.

[5] CALDERHEAD, J. (1981). "**Stimulated recall. A method for research on teaching**". British Journal of Educational Psychology 51. 180-190.

[6] ERNEST, P. (1989). "**The Knowledge, Beliefs and Attitudes of the Mathematics Teacher. a model**" Journal of Educational for Teaching, 15, (1). 13-33.

[7] GUZMAN, M. (1985). "**Enfoque heurístico de la enseñanza matemática**". Aspectos didácticos de Matemáticas. ICE de la Universidad de Zaragoza. 31-46.

[8] I.C.M.I. (1987). **Las Matemáticas en primaria y secundaria en la década de los 90**. Valencia. Mestral.

[9] LAMPERT, M. (1990). "**When the problem is not the question and the solution is not the answer:**

Mathematical knowing and teaching". American educational research journal. 27, (1). 29-63.

[10] LEINHARDT, G. (1987). "**Integraton of lesson structure and teacher´s subject matter knowledge**". AERA. Washington.

[11] LEINHARDT, G. (1990). "**Capturing craft knowledge in teaching**". Educational Researcher. 19, (2). 18-25.

[12] LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. V. (1990). "**El conocimiento profesional del profesor y la enseñanza de las Matemáticas**". En Llinares y Sánchez, Teoría y práctica en educación matemática. Alfar. Sevilla. 63-116.

[13] MARKS, RICK. (1989). "**What exactly is pedagogical content knowledge?. Examples from Mathematics**". AERA. San Francisco.

[14] M.E.C. (1989). **Libro blanco para la reforma del sistema educativo**. Madrid.

[15] M.E.C. (1989). **Diseño Curricular Base. Educación Primaria**. Madrid.

[16] M.E.C. (1989). **Diseño Curricular Base. Educación Secundaria obligatoria**. Madrid.

[17] N.C.S.M. (1989). "**Essential Mathematics for the twenty-first century. The position of the NCSM**". Aritmetic Teacher 37, (1).

[18] N.C.S.M. (1989). **Curriculum standards for scholl Mathematics**. Virginia.

[19] PUTNAM, R. T.; LAMPERT, M. y PETERSON, P. L. (1990): "**Alternative perspectives on knowing Mathematics in elementary schools**". En C. B. Cazden, Review of research in education, 16 Washington. AERA. 57-150.

[20] ROSENBAUM, L. y otros (1989). "**Step into problem solving with cooperative learning**". Aritmetic Teacher 36, (7). 7-11.

[21] SCHOENFELD, A. H. (1985). **Mathematical Problem Solving**, Orlando. Academic Press Inc.

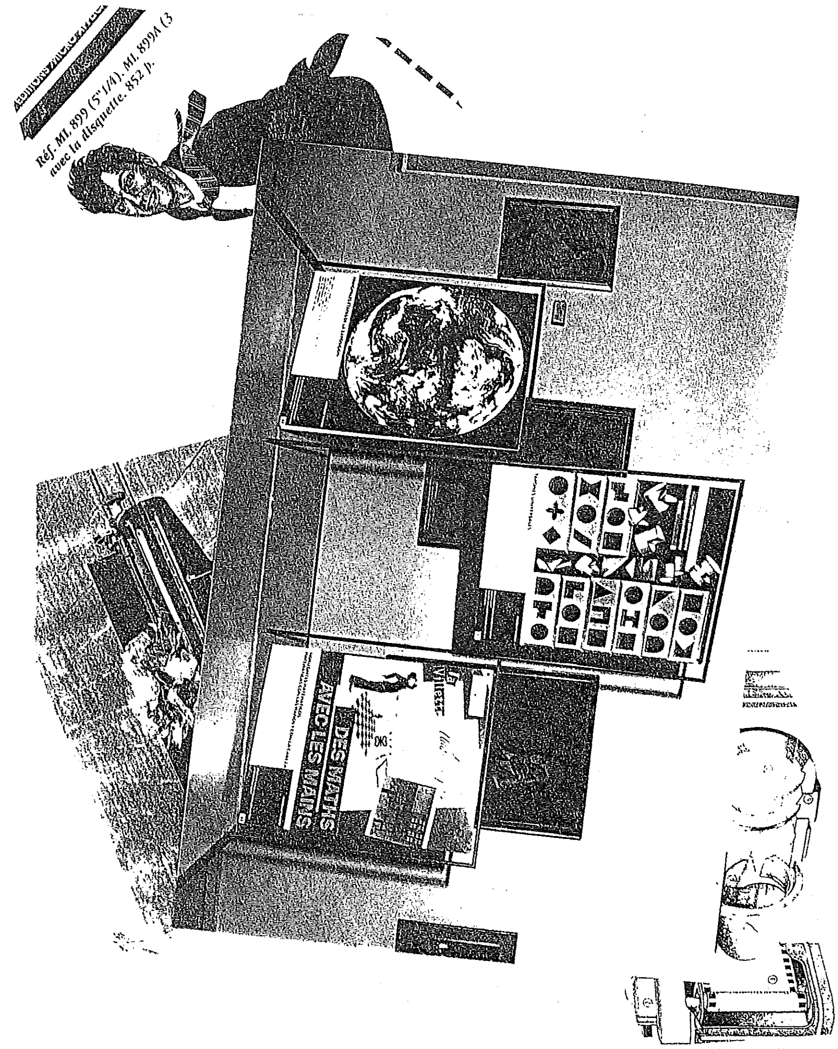
NUEVA DIRECCIÓN

PARA LA CORRESPONDENCIA

CON **SUMA**

Apdo. de Correos 1304

21080 - HUELVA



IDEAS PARA LA CLASE

EXPLORAR LAS MATEMÁTICAS CON LA HOJA DE CÁLCULO

Luis M. Botella López

Resumen

Las hojas de cálculo son programas comerciales bien conocidos en el ámbito de gestión, pero desgraciadamente, quizá no tanto en el educativo, a pesar de su gran utilidad como medio de exploración para las asignaturas experimentales. Se trata en las siguentes líneas de dar una primera aproximación que pueda despertar el interés de los profesores de distintas materias, y en especial de matemáticas, por este recurso didáctico tan versátil e interesante en las clases.

Introducción

Los paquetes integrados se componen de una hoja de cálculo, un procesador de textos y una base de datos, que interaccionan entre sí (como Open Access, Framework, Works, etc.); encontramos también hojas de cálculo como PcCalc, Multiplan, Lotus 1-2-3, etc.; todo lo que sigue se puede llevar a cabo con cualquiera de ellas, con quizás, pequeñas modificaciones, habiéndose utilizado para los ejemplos la Lotus 1-2-3.

La hoja de cálculo

Al mirar el monitor, vemos una hoja en blanco, que nos podemos imaginar como un papel cuadriculado, pero en el que no se ven las líneas. Cada casilla se designa mediante una letra que indica la columna, y un número para la fila; en nuestro caso, disponemos de 256 columnas (A, B, C, ... , AA, ..., IV) y 8.192 filas, lo que hace un total de 2.097.152 casillas. El monitor es una especie de ventana en la que se ve un trozo de la hoja (fig. 1).

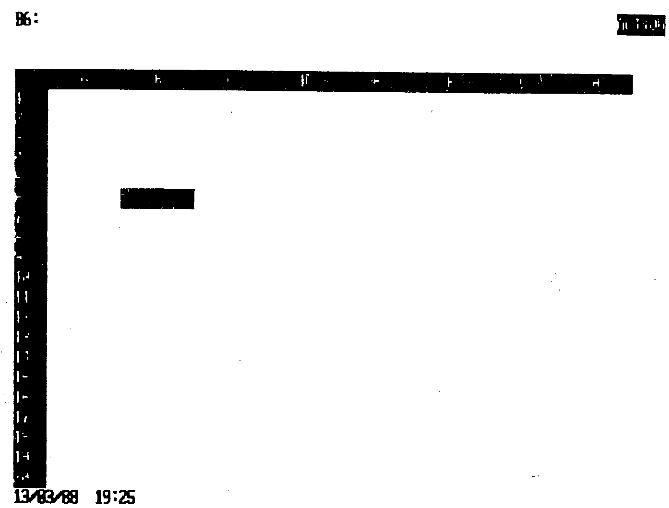


Figura 1

En cada una de las casillas se puede introducir uno de los tres tipos distintos de datos: alfanuméricos, numéricos o fórmulas. Las fórmulas se refieren siempre a los datos numéricos o resultados de calcular las fórmulas de otras o, incluso, de la misma casilla en que está la fórmula (en este caso se dice que hay una referencia circular, dando lugar a posibles definiciones recursivas), teniendo en cuenta que dichas referencias pueden ser absolutas o relativas. Cada fórmula se recalcula cada vez que se cambia algún dato de la hoja (salvo que indiquemos recálculo manual, lo que permite cambiar varios datos y recalcular después). Las referencias relativas evitan el tener que escribir varias veces una misma fórmula, bastando con copiarla.

Por ejemplo, supongamos que en A1 está el número 2 y en A2 la fórmula + A1 + 3; en pantalla aparecería un 5. Si en B1 escribimos la fórmula +A1*2, la pantalla mostrará un 4; si se copia la fórmula de B1 en B2, en ésta tendremos +A2*2, apareciendo un 10. Si en A1 se escribe un 4, inmediatamente aparecerá un 7 en A2, un 8 en B1 y un 14 en B2. Sin embargo, si en B1 se hubiera escrito +$A$1*2, al copiar, en B2 también se tendría +$A$1*2.

	A	B	A	B
1	2	+A1*3	2	4
2	+A1+3	+A2*2	5	10

Tenemos así el potencial de una multitud de calculadoras que interaccionan entre sí y recalculan cada vez que uno de los datos cambia pudiendo, además, definir distintos tipos de gráficas con los datos existentes en cada momento. Si dichos datos se alteran, también se modificará la gráfica.

Modos de utilización

Una hoja de cálculo es un instrumento que permite el desarrollo de unas clases en que se puede esperar un mayor o menor grado de creatividad por parte del alumno según el planteamiento previo por parte del profesor.

a) - El alumno como usuario

Los chicos utilizan el ordenador de una forma dirigida; muestra una serie de resultados en función de unos parámetros que pueden ser modificados, obteniendo como conclusiones la influencia de los mismos sobre los resultados.

i. Macros

Dado que es posible crear "macros" (presionando una sola tecla, se realiza una serie de operaciones, como copiar, redefinir rangos, etc.), es posible utilizar la hoja como un programa dirigido (caja negra), que permita al alumno cambiar una serie de parámetros y utilizar unas macros realizadas por el profesor para ver resultados. Desde este punto de vista, un programa específico suele ser más cómodo que uno que, como éste, es de empleo general.

ii. Plantillas

El profesor crea una "plantilla", es decir, una hoja con las fórmulas para realizar los cálculos necesarios para un cierto proceso. El alumno, al cambiar los parámetros, observa los cambios producidos a lo largo de todo el proceso.

b) - El alumno como conocedor de algoritmos

Se espera que los chavales conozcan el algoritmo para resolver un cierto problema y lo apliquen. La hoja de cálculo es un medio auxiliar que sustituye con ventaja a la calculadora, lápiz, papel y/o papel milimetrado.

c) - El alumno como investigador

Se plantea una cierta cuestión y el alumno, que conoce cómo moverse en una hoja de cálculo, debe diseñar sus propias técnicas de investigación y resolución de problemas.

El comienzo

Salvo que se desee emplear la hoja solamente como "caja negra", es necesario introducir a los alumnos en el manejo de una hoja de cálculo. Ello se debe hacer mediante una serie de problemas prácticos en los que vayan surgiendo dificultades estructuradas de una forma progresiva y que impliquen la necesidad de explotar los distintos recursos disponibles (copiar, mover, variar el ancho de las columnas, necesidad de visualizar más o menos decimales, definición de gráficos, etc.), para lo que son necesarios tres o cuatro períodos lectivos. Veamos algunos ejemplos; algunas soluciones propuestas por los alumnos se pueden encontrar en el apartado de soluciones propuestas.

a) - El comerciante

Diseña una hoja que permita a un comerciante conocer sus ingresos al cabo del día según el número de unidades vendidas de cada artículo y el precio unitario.

b) - Más comercio

Modifica la anterior para que pueda conocer sus ganancias del día. Considera los impuestos que debe pagar.

c) - Un concurso

Entre un grupo de compañeros vais a organizar un concurso de fotografía. Considerad los distintos gastos que ello supone, así como los ingresos y subvenciones; se trata de decidir cuál es la cuota que cobraréis a cada participante para asegurar, dentro de lo posible, el no tener pérdidas.

Hoja de cálculo y Matemáticas

Lo que sigue son algunos ejemplos de utilización de la hoja de cálculo en las clases de Matemáticas. En el siguiente apartado se presentan algunas soluciones, varias de ellas propuestas por los alumnos.

a) - Gráficas

Se presenta a los alumnos la hoja de la figura 2.

i. Representa las gráficas de funciones del tipo:

f (x) = ax+b

¿Qué influencia tienen los valores de a y b en la gráfica?.

ii. Lo mismo para funciones del tipo:

f (x) = a (x-p)2 +q

(Insisto en el hecho de que un programa diseñado para el dibujo de gráficas de funciones es más útil que la hoja de cálculo).

b) - Más gráficas

Es posible, sin embargo otro enfoque del mismo problema: "Diseña una hoja de cálculo para representar la gráfica de una cierta función".

c) - Introducción a la noción de límite

Se ha introducido a los alumnos en el campo de las sucesiones numéricas mediante diversas situaciones previas (paradojas de Zenón, Fibonacci, rectángulos áureos, análisis de "Square Limit" - Escher-), y han buscado el término general de algunas sucesiones. "Diseña una hoja para intentar ver si una determinada sucesión se acerca cada vez más a algún número".

i. "Utiliza la plantilla (fig. 3), para probar con distintas sucesiones".

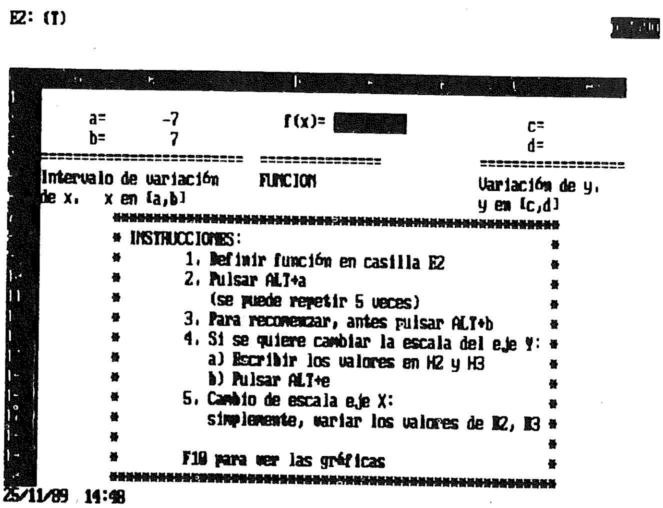


Figura 2

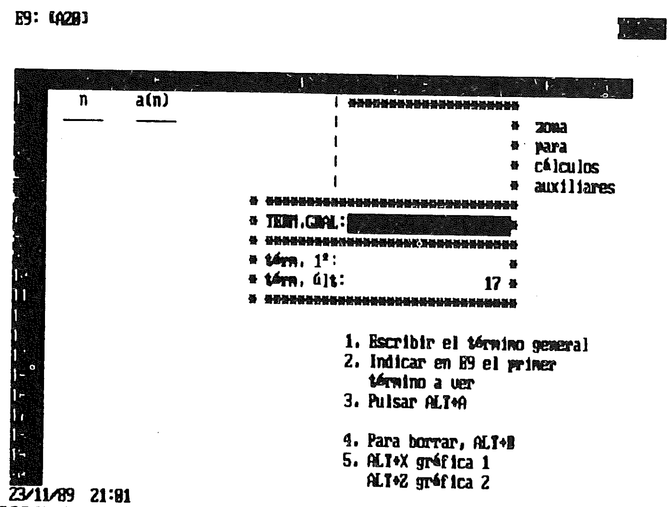


Figura 3

ii. "Diseña una hoja de cálculo para ver si los términos de una sucesión se acercan cada vez más a un cierto número".

d) - Transformaciones geométricas
i. "Dibuja un polígono utilizando la hoja de cálculo".
ii. "Utiliza lo anterior para visualizar una traslación".
iii. "Lo mismo para un giro o una homotecia de centro el origen. Generalízalo para cualquier transformación de la que conozcas la matriz asociada".
iv. "Diseña una plantilla que resuma los casos anteriores en una misma hoja".

e) - Probabilidad
"¿Cuál es el número de personas que debe haber en una reunión para que la probabilidad de que dos hayan nacido el mismo día sea mayor que 0.5?".

"Se eligen dos números al azar (a y b), en el intervalo [0,1]. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud del intervalo [a,b] sea mayor que 0.5?".

f) - Números
"Construye una sucesión de Fibonacci. Investiga qué ocurre con la sucesión formada por la razón de cada dos términos consecutivos".

"Modifica los dos primeros términos para ver qué ocurre".

"Investiga las sucesiones en que cada término a partir del tercero se obtenga dividiendo entre dos la suma de los dos anteriores".

"Prueba con distintos números iniciales (incluyendo números negativos). ¿Puedes predecir lo que va a ocurrir?".

"¿Y si divides entre otros números en lugar de 2?".

"Intenta encontrar una expresión para la suma 1+3+5+7+...+(?)".

"Calcula

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \qquad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}}$$

¿Deduces alguna consecuencia?".

g) - Estadística
Resulta evidente el gran valor de una hoja de cálculo como material auxiliar para el estudio de la estadística descriptiva, con las facilidades que proporciona para la realización de gráficas de barras o de sectores, así como las facilidades de cálculo.

Conclusiones

Espero que estas líneas puedan dar una idea de la gran riqueza de posibilidades que ofrece la hoja de cálculo como material didáctico para nuestras clases, permitiendo a los alumnos observar regularidades y desarrollar su intuición matemática. Os agradecería, amigos lectores, que me comunicáseis vuestras experiencias.

Soluciones propuestas

a) El comerciante: Se muestra la hoja visualizando las fórmulas empleadas.

	B	C	D	E
4	Artículo	N. Unidad	P. Unidad	Total por Art.
5				
6	vaqueros	29	4.500	+C6*D6
7	mini-faldas	13	2.400	+C7*D7
8	cazadoras	6	9.000	+C8*D8
9	calcetines	36	550	+C9*D9
10	calzones	9	990	+C10*D10
11	tenis	3	2.500	+C11*D11
12	cinturones	7	855	+C12*D12
13	camisas	16	2.900	+C13*D13
14				
15	TOTAL:	+E6+E7+E8+E9+E10+E11+E12+E13		

b) Más comercio

	B	C	D	E	F	G
4	Artículo	N. Unidad	P. Unidad	Total por Art.	Coste	Beneficios
5						
6	vaqueros	29	4.500	+C6*D6	3.750	+(D6-F6)*C6
7	mini-faldas	13	2.400	+C7*D7	1.500	+(D7-F7)*C7
8	cazadoras	6	9.000	+C8*D8	7.500	+(D8-F8)*C8
9	calcetines	36	550	+C9*D9	450	+(D9-F9)*C9
10	calzones	9	990	+C10*D10	870	+(D10-F10)*C10
11	tenis	3	2.500	+C11*D11	2.200	+(D11-F11)*C11
12	cinturones	7	855	+C12*D12	770	+(D12-F12)*C12
13	camisas	16	2.900	+C13*D13	2.000	+(D13-F13)*C13
14						
15		Total:		+E6+E7+E8+E9+E10+E11+E12+E13		
16		Beneficios:		+G6+G7+G8+G9+G10+G11+G12+G13		
17		Impuestos:		+E16-E17		
18						
19		Total ganancias:		+E16-E17		

c) Concurso fotografía: "Al cambiar el número de participantes, se observa cómo cambia el beneficio. Cada concursante debe presentar tres fotos".

	C	D	E	F
1	INGRESOS:		N. UNIDAD	
2	Cuota:	500	20	+D2*E2
3	Folletos:	50	200	+D3*E3
4	Publicidad folleto	1.000	2	+D4*E4
5	Part. escuela:	5.000		+D5
6	Part. APA	2.500		+D6
7	Reventa marcos:	50	+E2*3	+D7*E7
8				
9	TOTAL INGRESOS......			@SUMA (F2..F7)
10				
11	GASTOS:			
12	Precios marcos:	150	+E2*3	+D12*E12
13	Alquiler local:	2.00	4	+D13*E13
14	Electricidad:	500	4	+D14*E14
15	Imprenta folletos:	20	+E3	+D15*E15
16	Premios:	6.500		+D16
17				
18	TOTAL GASTOS.........			@SUMA (F12..F16)
19				
20	BALANCE FINAL........			+F9-F18

INGRESOS:		Num. unid.	
Cuota:	500	20	10.000
Folletos:	50	200	10.000
Publicidad folleto	1.00	2	2.000
Part. escuela:	5.000		5.000
Part. APA	2.500		2.500
Reventa marcos:	50	60	3.000
TOTAL INGRESOS			32.500
GASTOS:			
Precios marcos:	150	60	9.000
Alquiler local:	2.000	4	8.000
Electricidad:	500	4	2.000
Imprenta folletos:	20	200	4.000
Premios:	6.500	6.500	
TOTAL GASTOS			29.500
BALANCE FINAL			3.000

a) Gráficas

Un grupo de alumnos (2º BUP) propuso la solución de la fig. 4, siendo el contenido de las celdas el siguiente:

A1 : +D1
A2 : +A1+$D$3 que se copió hacia abajo
A3 : +A2+$D$3
... A100 : +A99+$D$3
D3 : +(D2-D1)/100
B1 : +f (x), en este caso, @SEN (A1)
y se copió hasta B100

Se definió una gráfica de tipo XY, con rango X = A1...A100 y rango A = B1...B100. Cambiando los valores de D1 y D2, se puede estudiar la función en distintos intervalos.

A1: +D1

-8	-0.98935	a=	-8
-7.84	-0.99990	b=	8
-7.68	-0.98490	inc.:	0.16
-7.52	-0.94474		
-7.36	-0.88045		
-7.2	-0.79366		
-7.04	-0.68660		
-6.88	-0.56201		
-6.72	-0.42305		
-6.56	-0.27329		
-6.4	-0.11654		
-6.24	0.043171		
-6.08	0.201790		
-5.92	0.355253		
-5.76	0.499641		
-5.6	0.631266		
-5.44	0.746765		
-5.28	0.843187		
-5.12	0.918870		
-4.96	0.969580		

25/11/89 16:50

Figura 4

b) Sucesiones: Se muestran las fórmulas definidas y resultados:

	A	B	A	B
1	1	1+1/A1)^A1	1	2
2	A1+1	(1+1/A2)^A2	2	2.25
3	A2+1	(1+1/A3)^A3	3	2.3703703704
4	A3+1	(1+1/A4)^A4	4	2.44140625
5	A4+1	(1+1/A5)^A5	5	2.48832
6	A5+1	(1+1/A6)^A6	6	2.5216263717
7	A6+1	(1+1/A7)^A7	7	2.546499697
...	...	...	...	...

c) Transformaciones geométricas: Para dibujar un polígono a partir de sus coordenadas basta con repetir el primer punto y definir un gráfico de tipo XY.

ii y iii). El contenido de las casillas es (ver fig. 5):

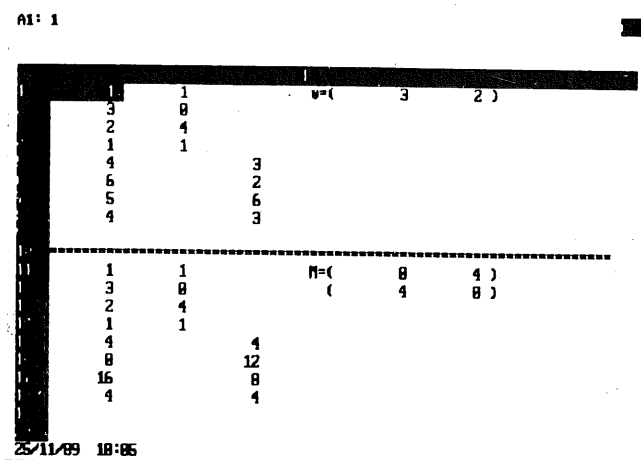


Figura 5

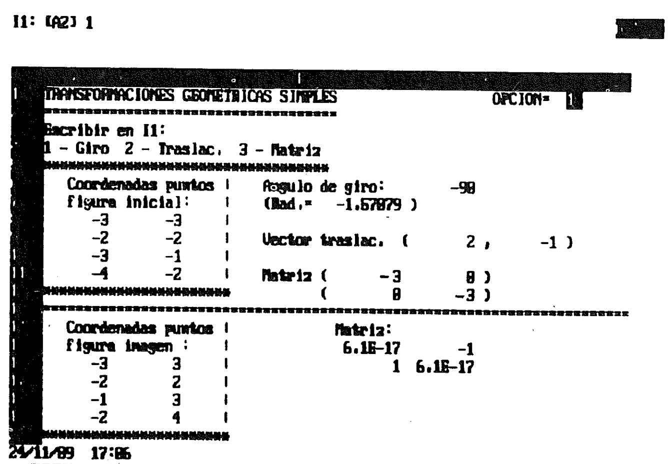


Figura 6

A5 : +A1+E$1 que se copia a la derecha (en C5) y abajo tres veces

A15: +A11*$E$11+B12*$F$11

C15 :

+A11*$E$12+B12*$F$12

que se copian hacia abajo tres veces

Para dibujar la traslación, la gráfica es de tipo XY, con rango X = A1...A8, rango A = B1..B8 y rango B = C1..C8. De forma análoga para la parte inferior de la hoja.

iv. La plantilla de la figura 6 parte de los mismos conceptos, añadiendo el hecho de que se debe especificar en I1 la opción de que se trata. Merece la pena señalar el contenido de algunas casillas:

E15: @SI ($I$1 = 1, @COS ($E$7), E11)
A16: @SI ($I$1 = 2,A8+$F$9, +A8*$E$15+B8*$F$15)

lo que permite definir el contenido de una casilla de una forma u otra según una cierta condición. Las coordenadas de la figura inicial están en A21..B25 (A21 = +A8, etc.), las abscisas de la imagen, en A26...A30, y las ordenadas, en C26...C30; de este modo, quedan fuera de la pantalla.

Las figuras 7 y 8 muestran dos ejemplos de gráficos dibujados a partir de dicha plantilla.

d) Probabilidad. Se propone a los alumnos que intenten calcular dicha probabilidad si hay una, dos, tres, ... personas; si es necesario, se les indica que consideren el suceso contrario. Rápidamente se dan cuenta de que el cálculo es recursivo. La hoja permite la definición del cálculo a partir de una fórmula que basta con copiar:

	B	C	D
1	n	P(A')	P(A)
2	---	-------------------	----
3	1	1	1-C3
4	2	+C3*(365-B4+1)/365	1-C4
5	3	+C4*(365-B5+1)/365	1-C5
6	4	+C5*(365-B76+1)/365	1-C6
7	5	+C6*(365-B7+1)/365	1-C7
8	6	+C7*(365-B8+1)/365	1-C8
9	7	+C8*(365-B9+1)/365	1-C9
10	8	+C9*(365-B10+1)/365	1-C10
11	9	+C10*(365-B11+1)/365	1-C11
12	10	+C11*(365-B12+1)/365	1-C12
13	11	+C12*(365-B13+1)/365	1-C13
14	12	+C13*(365-B14+1)/365	1-C14
15	13	+C14*(365-B15+1)/365	1-C15

Una vez realizados los cálculos, la hoja aparecerá como sigue:

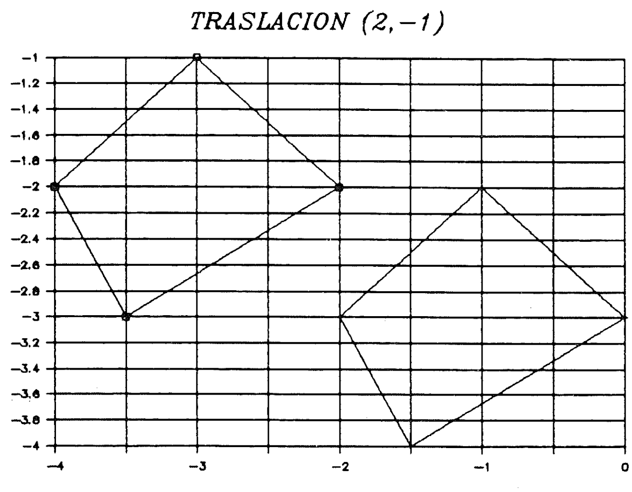


Figura 7

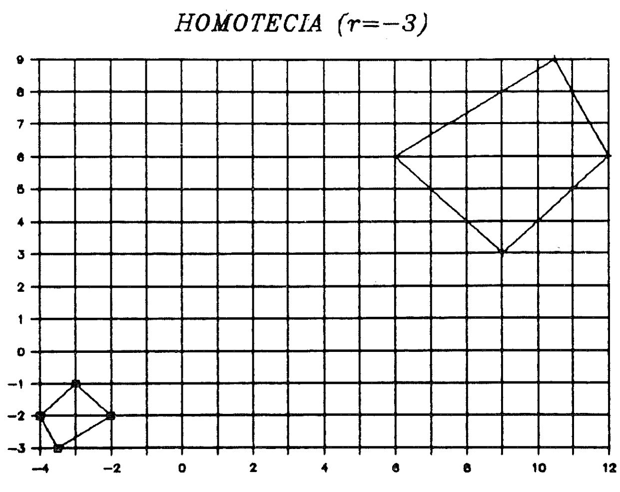


Figura 8

	B	C	D
1	n	P(A')	P(A)
2	----	-------------------	----
3	1	1	0
4	2	0.997260274	0.002739
5	3	0.9917958341	0.008204
6	4	0.9836440875	0.016355
7	5	0.9728644263	0.027135
8	6	0.9595375164	0.040462
9	7	0.9437642969	0.056235
10	8	0.9256647076	0.074335
11	9	0.9053761661	0.094623
12	10	0.8830518223	0.116948
13	11	0.8588586217	0.141141
14	12	0.8329752112	0.167024
15	13	0.8055897248	0.194410

Tras la realización de todo este proceso, los alumnos han deducido la expresión de la probabilidad:

$$P_n(\bar{A}) = \frac{365}{365}, \frac{364}{365}, \frac{363}{365}, \ldots \frac{365-n+1}{365}$$

es decir,

$$P_n(\bar{A}) = P_{n-1}(\bar{A}) . \frac{365-n+1}{365} \qquad P_1(A) = 1$$

Y, a partir del gráfico generado con los datos (fig. 9), se pueden deducir las conclusiones pedidas.

Luis Mª Botella López.
Escuela Europea, Bruselas I

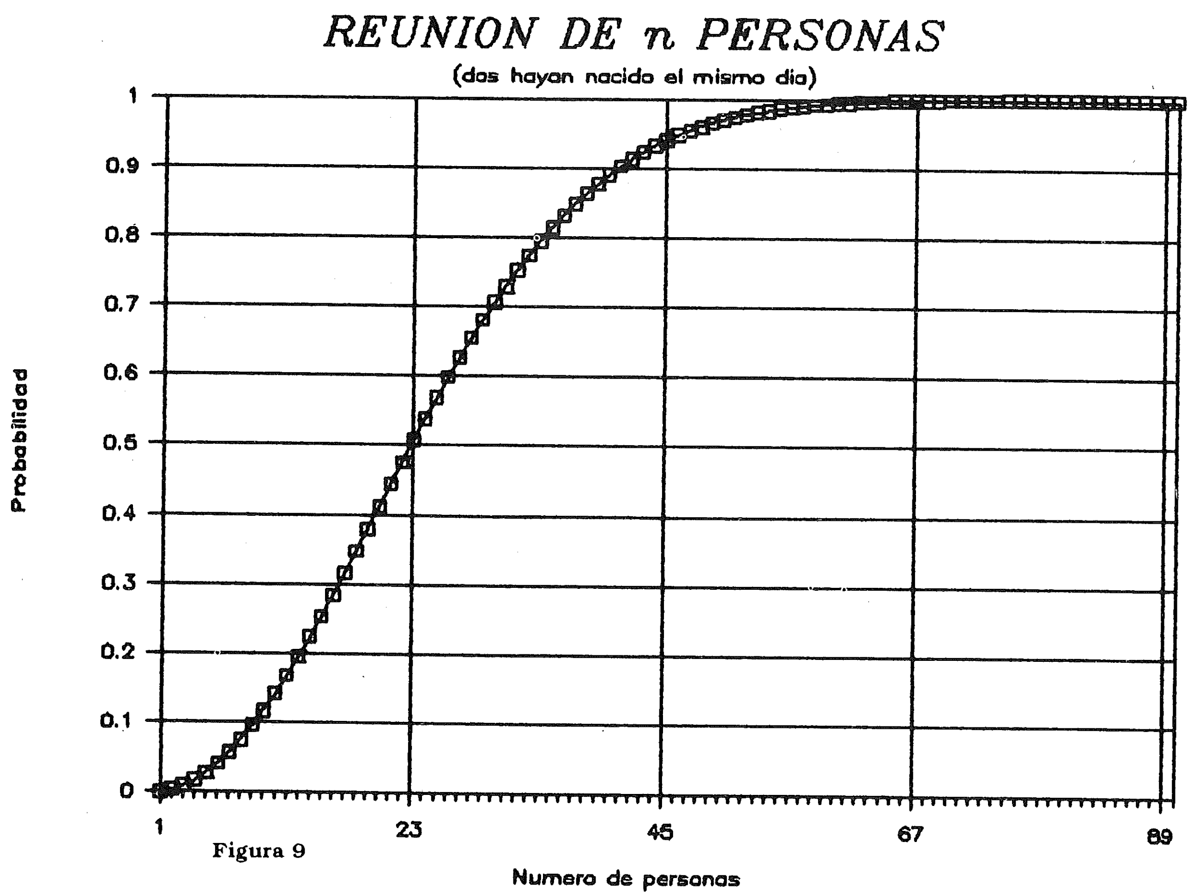


Figura 9

PLON CHIRIBICU

Experiencias de azar con niños de 7 y 8 años

Pascual Pérez Cuenca

Resumen

La propuesta curricular de las matemáticas de la Comunidad Valenciana sitúa la Probabilidad y la Estadística desde los primeros cursos de la Enseñanza Obligatoria, ésto que a primera vista puede parecer una exageración se muestra como posible e interesante siempre que quede entendido el sentido de la propuesta. No se trata de trasladar muchos años hacia abajo lo que hoy casi ni se da en la enseñanza obligatoria, la probabilidad como parte organizada de las matemáticas, se trata de aprovechar el sentido que ya tiene en estas edades las nociones de SUERTE y JUEGO JUSTO para ampliar y enriquecer su visión del azar. Al mismo tiempo el azar introduce un contexto muy ameno y rico en situaciones numéricas, situaciones en las que para determinar un ganador necesitan de trasformaciones entre los números que obtienen , recogen y organizan, fundamentalmente suma, resta y multiplicación.

Experiencia

P - *Bien, ya habéis visto que he puesto un caramelo en cada mesa, ¿quién se lo quisiera comer?.*
A - *Yo (casi todas las manos en alto).*
P - *Tendréis que llegar a un acuerdo pues todos no podéis comeros el caramelo.*
A - *Lo partimos en cuatro partes (son cuatro por equipo).*
P - *Sí, esa sería una posibilidad pero no tenemos utensilios para cortarlos y además se desharían al hacerlo. Solamente se lo puede comer un miembro de cada grupo, ¿quién?.*
A - *Yo (otra vez levantan muchos la mano).*
P - *Poneos de acuerdo, uno solo se lo puede comer.*
A - *Lo echamos a suerte (casi simultáneamente dicen tres o cuatro niños).*
P - *De acuerdo lo echaremos a suerte. Cada equipo dirá el campeón y de que forma lo ha echado a suerte.*

Aproximadamente este es el comienzo de una actividad de azar realizada en varias clases de 2º y 3º de EGB en los colegios Enric Valor de Alicante y El Palmeral de Elche.

Transcurridos los diez minutos en unas clases bulliciosas y de mucha actividad fueron contando:

G1. *Hemos tomado el Madelman (un muñequito de esos guerreros a los que son tan aficionados) y lo hemos tirado hacia arriba si caía hacia abajo ganaba yo y hacia arriba él, después ellos dos han hecho lo mismo y los ganadores lo han vuelto a repetir, al final Juan ha ganado.*

G2. *Nosotros hemos cogido la barra de pegamento y la hemos hecho moverse, al que apuntaba la tapadera ganaba. Ha ganado Sonia.*

G3. *Nosotros lo hemos hecho a piedra, papel y tijera.*

P. *¿Cómo se juega? Explicádmelo.*

G3. *En parejas se esconde una mano en la espalda y cuando se cuenta tres se saca con el puño cerrado que es la piedra, con la mano abierta que es el papel o con la mano haciendo una tijera. La piedra rompe la tijera, la tijera corta el papel y el papel envuelve a la piedra, piedra y piedra, o papel y papel, o tijera y tijera hace que se repita el juego. Lo hemos hecho así y he ganado yo.*

G4. *Lo hemos echado a suerte con una canción.*

P. *¿Con una canción? ¿cómo?*

G4. *Sí hemos cogido la canción PLON CHIRIBICU CHIRIBICA CHIRIBICURICURIFA CHIRIBICURICURIFERO ¿CUÁNTOS HIJOS TIENE EL ZAPATE-*

RO?, el niño en que acaba la canción dice un número de 1 a 20 y a quien toque ese número gana.

G6. *Nosotros hemos jugado de la misma forma pero con otra canción: PITO PITO GORGORITO ¿DÓNDE ESTAS TÚ BONITA? EN LA ACERA VERDADERA PIN PON FUERA y para que no gane siempre el mismo vamos cantando la canción hasta que uno dice basta, en ese momento empezamos a contar.*

G5. *Nosotros hemos cogido la goma de borrar y por parejas la hemos lanzado si salía la parte escrita ganaba uno y si no otro, después lo han repetido los otros y después los ganadores han hecho el desempate.*

P. *¿A qué otra manera de sortear de las ya contadas se parece ésta? (A la del primer grupo, todos a coro).*

G7. *Lo hemos hecho como el segundo grupo pero en vez de con la barra de pegar con un bolígrafo, al que le señalaba la punta ganaba.*

Hasta aquí llegó la primera parte de la clase, unos 45 minutos. Los niños estaban ansiosos pues al entrar les dije que en el maletín llevaba unos juegos y que después de resolver el problema de los caramelos jugaríamos con ellos.

P. *Después de lo bien que habéis resuelto el anterior problema os voy a dar una bolsita de dados (tetraedro, cubo, decaedro, dodecaedro e icosaedro). Tenéis que resolver el anterior problema de echar a suerte usando los dados, cada grupo tiene que inventar las reglas y jugar para ver quién gana.*

Transcurridos unos minutos en los que se acostumbraron a esos dados tan raros, empezaron a pensar las reglas y a jugar. Varios grupos preguntaron cómo se sabía quién ganaba al lanzar el dado tetraédrico pués tenía tres números marcados en cada cara. Eso lo tenéis que decidir vosotros, les contesté.

Y lo decidieron, efectivamente. Estas fueron tres soluciones:

- Tomamos la cara que queda apoyada sobre la mesa y sumamos todos los números que aparecen, esta es la puntuación del que lo ha tirado.

- Uno tira el dado y otro distinto los levanta, el que lo ha tirado dice abajo, izquierda o derecha y el número que queda en esa posición es el que se le apunta.

- Se tira sobre la mesa y se levanta, el número más grande de los tres de la cara sobre la mesa se le apunta al que tiraba.

Curiosamente ninguna de las tres era la que a los adultos nos parece la única solución, el número que se repite en las tres caras y que queda sobre la mesa.

Las soluciones en conjunto que dieron sobre el problema de cómo efectuar sorteos con los dados fueron desde el utilizar un único dado (curiosamente el que tomaron los tres grupos que optaron por esta solución fue el icosaedro), a una única tirada, el utilizar un dado y apuntar los resultados de cinco tiradas y el lanzar todos los dados y la suma se le apuntaba al que los tiraba.

Los que jugaron a una sola tirada y un solo dado enseguida acabaron, por lo que les pedí que jugaran a diez tiradas. El tener que recoger varias tiradas es lo que hace necesario la utilización de alguna técnica de recogida y ordenación de los datos. Todos los grupos sin excepción adoptaron la estrategia de poner los nombres sobre la hoja y apuntar los resultados en columna, unos apuntaron un uno al que ganaba una tirada y después de las diez partidas los sumaban, otros apuntaban el número resultante de cada lanzamiento en la columna del que lanzaba.

Los grupos que lanzaban todos los dados y apuntaban la suma tenían que obtener el resultado mentalmente con lo que tenían que ejercitar esta importante destreza de cálculo repetidamente y con agilidad ya que el resto de los compañeros esperaban impacientes su turno. Una vez efectuados los diez lanzamientos tenían que sumar cada columna para ver el ganador. En una discusión de un grupo que habia lanzado el dado icosaédrico 5 veces cada miembro, un niño había sacado 13, 12, 16, 3 y 14 dos niños dudaban si sumar el tres con las decenas o con las unidades (la cosa tenía su lógica pues al escribir rápidamente los números en columna el 3 había quedado muy a la izquierda), tuvo que intervenir el juicio razonado de una niña del grupo que les hizo ver que ese tres eran tres unidades y no treinta.

Pascual Pérez Cuenca
Asesor de Matemáticas de la Comunidad Valenciana

MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y MOSAICOS

Juan Aurelio Montero Sánchez

Resumen

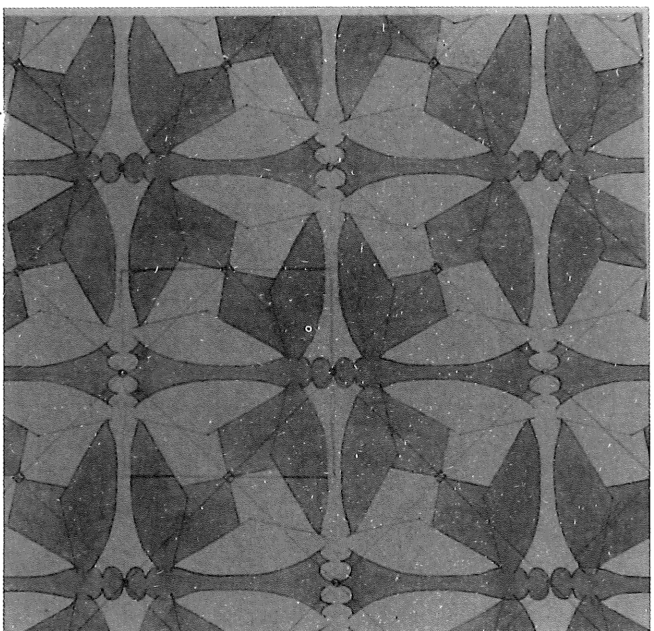
Con esta experiencia se pretende familiarizar al alumno con los Movimientos del Plano.

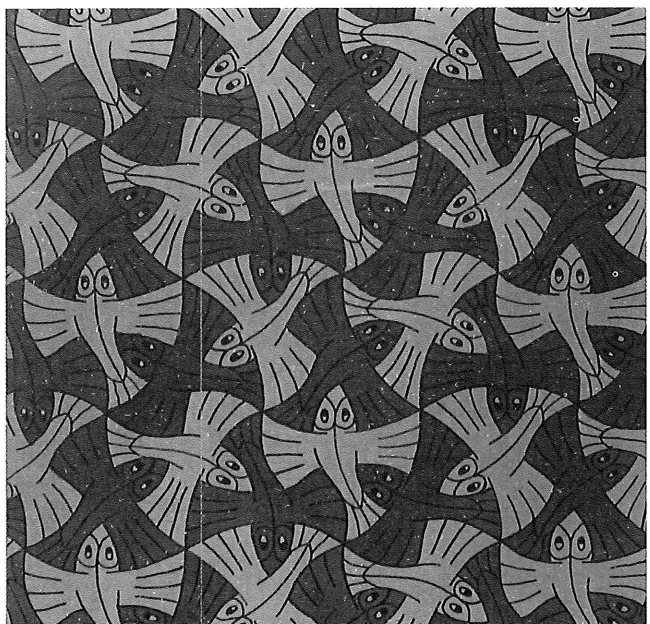
Para ello, tomando como base un mosaico, se buscarán aquellas traslaciones, giros y simetrías que dejan invariante el mosaico. La gracia está en tener varias muestras de mosaicos en los que aparezcan unos movimientos de un tipo o de otro.

Estudiadas las propiedades básicas de estos movimientos, los alumnos los definirán sobre un plano en general, sin necesidad del mosaico soporte.

Las ventajas más importantes son desde el punto de vista de la motivación y de la metodología. En éste último sobre todo ya que el alumno llega a sus conclusiones al manipular el material entregado.

Pueden utilizarse los mosaicos para estudiar otros temas como:
- División regular del plano.
- Redes y mallas en el plano.
- Etc.



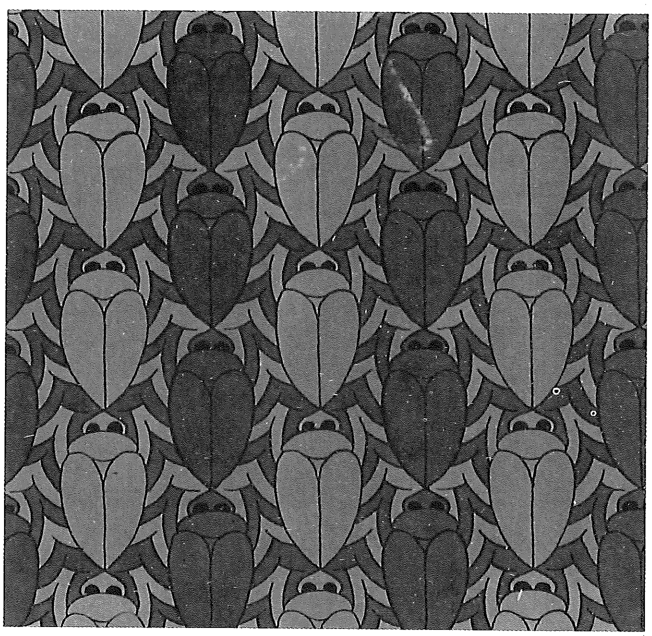


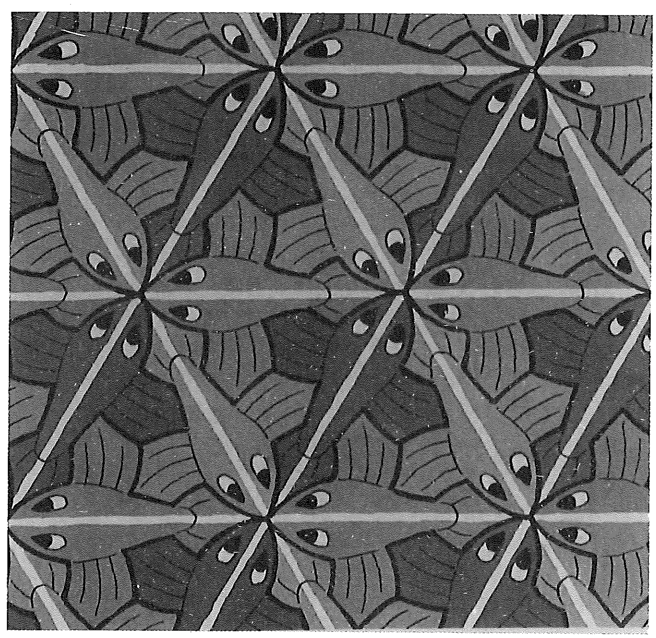
Introducción

La idea fundamental de este artículo nace a partir de la asistencia del autor al Congreso de Arte y Matemáticas. "M.C. Escher: Entre la Geometría y el Arte". Granada 1990. En dicho encuentro a parte de poder contemplar la magnífica exposición pictórica de Escher que es un desafío para los sentidos y un estímulo para la razón, pudimos constatar a partir de los ponencias y conferencias la estrecha relación entre la obra de Escher y diversos conceptos matemáticos. Pensé cómo acercar todo esto a mis alumnos. Fundamentalmente por dos razones que pasaré a explicar: en el programa de 2º de FP II de matemáticas hay unos temas sobre traslaciones, giros y simetrías que me ha costado mucho explicar por lo abstracto y poco en contacto con la realidad (al menos eso creía yo) que tienen y que siempre he postergado para el final del temario. Mi primera razón es para motivación del profesor, es más agradable y creo que se comprende mejor hablar de una traslación sobre un mosaico que sobre un plano en general. La segunda razón es obvia, así el alumno ve que todo ese estudio de transformaciones en el plano tiene una aplicación, o mejor al revés, el alumno descubre y construye de una forma natural toda una serie de movimientos que más tarde estudiará con rigor. Para un estudio de traslaciones y giros en el plano no es necesario hablar de mosaicos y menos aún de Escher, pero no he querido dejar pasar la oportunidad que brinda este tema para mostrar los estupendos trabajos de Escher. Como a este nivel los alumnos están familiarizados con el uso de vectores, y conocen bastante a fondo la trigonometría no me entretendré más y pasaré a describir cómo realizo esta experiencia.

Material a utilizar

* Mosaicos (fig. 4)
* Acetatos o papel transparente (vegetal u otro tipo)
* Regla, compás y medidor de ángulos
* Rotuladores o lápices de colores
* Chinchetas o alfileres
* Espejos y/o libro de espejos





Desarrollo de la experiencia

Cada grupo parte del mosaico nº 1 y efectúa las siguientes actividades:

1.- Calcar exactamente el mosaico propuesto.

2.- ¿Qué "movimientos" o "deslizamientos" de la copia mantienen el mosaico invariante? A estas operaciones las llamaremos movimientos.

3.- Si realizamos consecutivamente dos movimientos, ¿Obtenemos un movimiento?, ¿Por qué? Busca ejemplos.

4.- ¿Se puede una vez hecho un movimiento volver a la posición inicial?

En este punto deben de aparecer de forma natural, la traslación respecto a un vector dado y el giro. Obviamente la respuesta a las preguntas tercera y cuarta lleva aparejada la idea de grupo. (Seguimos con las actividades).

5.- El alumno una vez que ha asimilado el concepto de "traslación" debe distinguir cuáles son los vectores que "generan" todas las traslaciones posibles que dejan invariante el mosaico. Aparece aquí la idea de "generadores de un grupo". ¿Son únicos?, ¿Hay algo en ellos que permanece invariante? Piénsalo.

6.- Cuando el alumno ha visto que el giro también es un movimiento debe describir los "elementos característicos" de estos giros. (Aparece el centro de giro y el ángulo de giro).

7.- Buscar una parte del mosaico que mediante las traslaciones o giros genere todo el mosaico. (Baldosa básica).

8.- Efectuar un resumen. En este punto debe de hacerse un esquema con los "descubrimientos" más importantes (fig. 1).

Una vez finalizado el estudio de un mosaico hacemos lo propio con los restantes.

Puesta en común

	Mosaico 1	Observac.
Tipo de movimiento	Traslación Giro	
Elementos característicos	Vectores Ángulo Centro	
Baldosa básica		

(Los elementos que aparecen en esta tabla deben estar señalados, a ser posible en colores distintos, en la copia que cada grupo hace del mosaico).

Figura 1

Hasta ahora no hemos dicho nada de simetrías en el plano. El momento óptimo para introducirlas puede ser cuando algún alumno pregunte: ¿Vale levantar el papel y "darle la vuelta"? (Cambiar la cara de la copia que apoya sobre el original); o también al observar la loseta básica, alguien piense (incluyendo al profesor) que se puede generar toda esa baldosa sólo con la mitad, ya que la otra mitad se "genera" a partir de la primera.

Pues bien, esa línea que divide a la loseta en la mitad o que permanece "invariante" al levantar el papel y "darle la vuelta", la llamaremos eje de simetría.

Si doblamos el papel por el eje de simetría, los dibujos de ambas partes encajarán perfectamente.

Al poner un espejo perpendicularmente al mosaico y sobre el eje de simetría (o de reflexión) se visualizará todo el mosaico.

Debemos de completar nuestro cuadro anterior introduciendo también las simetrías y sus elementos característicos. ¿Cuáles son?

¿Por qué hemos estudiado las simetrías aparte?

¿Qué ocurre cuando ponemos un texto frente a un espejo?

¿Qué ocurre cuando una figura dibujada en un cristal la miramos por detrás?.

¿Se produce el mismo efecto?.

Matemáticamente hablando estamos invirtiendo la orientación ya que, sin meternos mucho en profundidades, hemos cambiado la derecha del dibujo por su izquierda y viceversa. La simetría es por tanto un movimiento inverso, mientras que la traslación y el giro son directos (no cambian la orientación).

Hay otra cuestión que los diferencia: en los movimientos directos la copia se mueve en el mismo plano que el original, mentras que en los inversos necesitamos la componente espacial, bien para "dar la vuelta" a la copia, bien para "doblarla" por el eje o bien para colocar el espejo perpendicularmente al plano del mosaico.

Una vez buscadas las simetrías y señalados sus ejes en los distintos mosaicos, resaltamos en una tabla las propiedades específicas de cada uno de ellos y en otra tabla las propiedades comunes. (Fig. 2)

TABLA DE PROPIEDADES ESPECÍFICAS

	Elementos generad.	baldosa mínima
MOSAICO 1	Traslaciones Giros Simetrías	
MOSAICO 2		

Figura 2

Las tablas obtenidas por los alumnos, por grupos, serán parecidas a éstas (fig. 3).

TABLA DE PROPIEDADES GENERALES

Tipo de Movimiento	Propiedades generales
Traslación	1.-"La composición de traslaciones vuelve a ser una traslación". ¿Cuál es su vector asociado? 2.-"Hecha una traslación siempre puedo volver al punto de partida". 3.- En una traslación la copia se "mueve" sobre el original, no queda ningún punto fijo, todos se mueven en la misma dirección y sentido. 4.- Si consideramos el no "deslizar" la copia como una traslación, el conjunto de traslaciones tendría estructura de grupo.
Giro	1.- Lleva asociado un centro de giro y un ángulo. 2.- Si dejamos fijo el centro de giro, cumple las propiedades 1, 2 y 4 de las traslaciones (arreglando un poco el enunciado). 3.- Deja un punto fijo, salvo cuando damos "vueltas completas".
Simetría	1.- Lleva asociado un eje que queda fijo al efectuar la simetría. 2.- Son inversas de si mismas (como los giros de 180º). 3.- ¿Cómo son las rectas que unen un punto y su simétrico?
La composición entre los elementos anteriores es también un movimiento.	

Figura 3

Quedan todavía una serie de preguntas sin responder, que deberán responder los alumnos.

¿Podemos definir movimientos en un plano cualquiera, prescindiendo de mosaico?

¿Cómo se verán afectados sus puntos al efectuar un movimiento?

¿Conservarán las mismas propiedades?

Los alumnos deben de estar capacitados para definir una traslación, giro o simetría en general y preveer como actúan sobre un plano.

Conclusión

* Esta experiencia puede ser realizada con alumnos de distinto nivel. Para un primer o segundo curso de bachiller la veo suficiente. Para cursos más elevados veo necesario el considerar (cuando el curso no lo haya preguntado) por parte del profesor de las siguientes cuestiones:

- ¿Qué ocurre con la composición de giros de distinto centro?
- ¿Y con la composición de simetría?
- ¿Es todo movimiento composición de simetría?

En mi opinión, para responder a estas últimas cuestiones, lo más cómodo es partir de movimientos en general (están ya definidos por los mismos alumnos), y comprobar los resultados en nuestros diversos mosaicos, pero sin renunciar a que sean los propios alumnos los que pronostiquen, intuyan e incluso encuentren la solución[1].

* Aparte de la ventaja desde el punto de vista de la motivación creo que de esta forma se hace más evidente y menos teórico el estudio de los movimientos.

* El alumno cuenta con unos problemas en los que de forma natural y casi por necesidad se encuentra con unos conceptos, en principio, nada fáciles de visualizar como: grupo, generadores de un grupo, composición de movimientos, etc; fuera de un ambiente matemático y que va obteniendo de forma experimental.

* Se consigue una interrelación entre ciencias aparentemente tan distantes como Matemática y Arte. Respecto a esto último dice Servien: *La más elevada voluptuosidad de los hombres es la aprehensión de relaciones matemáticas sencillas bajo la infinita variedad de las cosas. Convertida en sensación es arte; convertida en conceptos, es ciencia....*

Actividades complementarias:

Pueden realizarse las siguientes:

- Confección de puzzles y/o mosaicos a partir de figuras geométricas y no geométricas.

- Estudio de algunos movimientos en el plano inducidos desde el espacio tridimensonal:

* La simetría con desplazamiento como caso particular del movimiento helicoidal espacial.

* La simetría en el plano como caso particular del giro en el espacio.

J. Aurelio Montero Sánchez.
P.N. del I.F.P. Baza

Bibliografía

(1) ALSINA, C. - PÉREZ, R. - RUIZ, C. **Simetría dinámica**. Ed. Sintexis. Madrid 1989.

(2) Monográfico sobre la Alhambra, EPSILON, Granada.

(3) ERNST, B., **El espejo mágico de M.C. Escher**, Ed. Taco. Berlín 1989.

[1]Encuentro particularmente adecuado el desarrollo del tema que hace el libro **Simetría Dinámica** (1).

SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON CALCULADORAS GRÁFICAS

Francisco González Maján

Resumen

En el presente trabajo se estudia cómo utilizar calculadoras gráficas (modelo CASIO) para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones, y cómo puede continuarse el proceso iniciado hasta obtener soluciones con cualquier grado de precisión.

El artículo termina con el enunciado, y ejemplos de aplicación, de una regla general para resolver cierta clase de ecuaciones trigonométricas.

Es conocido que las calculadoras con pantalla gráfica permiten resolver fácilmente y con cualquier grado de precisión (dentro de sus límites internos) la mayoría de las ecuaciones que plantean combinando funciones elementales (e^x, x^n, $\sqrt{x}$, *senx*, etc...)

Denotamos pro $f(x) = 0$ la ecuación a resolver. Además, para que se puedan seguir los ejemplos, advertimos que usamos la calculadora gráfica más sencilla que conocemos, la CASIO FX-7000G.

El proceso para obtener en primera aproximación las soluciones de la ecuación suele constar, básicamente, de tres etapas.

PRIMERA ETAPA: *Consiste en establecer intervalos adecuados (o rangos) de las variables* X *e* Y.

Llamaremos a esos intervalos $[X_{min}, X_{max}]$ y $[Y_{min}, Y_{max}]$.
Como interesa hallar los puntos donde la curva $Y = f(x)$ corta al eje horizontal, Y_{min} e Y_{max} deben elegirse de forma que entre ellos se halle el 0. Por ejemplo, puede adoptarse la costumbre de elegir $Y_{min} = -1$ e $Y_{max} = 1$.
(Ambos intervalos se eligen mediante la tecla **Range**)

SEGUNDA ETAPA: *Consiste en dibujar la gráfica* $Y = f(x)$

Para ello, se pulsa la tecla **Graph** y, a continuación, se escribe la expresión f (x) y se pulsa la tecla **EXE**.
Sea, por ejemplo, la ecuación $x^2 + \text{sen}(x) = 0$, a la cual nos referiremos después. Para dibujar la función, pulsaríamos

Graph	Alpha	+	x^2	+	sin	Alpha	+	EXE

TERCERA ETAPA: *Consiste en recorrer la curva desde su izquierda hasta el último punto de corte con el eje horizontal (última solución).*

Para ello, se pulsan las teclas **Shift** y **Graph** (función **Trace**). Se verá un valor de X, y un *punto parpadeante* en la parte izquierda de la curva. Entonces, pulsando la tecla *cursor-derecho* $\boxed{\rightarrow}$ se podrá llevar ese punto sobre las distintas soluciones; en cada una, veremos el valor de X y ya tendremos una primera aproximación de la misma.

Normalmente, la etapa difícil es la primera y, más concretamente, elegir los valores extremos X_{min} y X_{max}. Generalmente, se intentará que ambos estén suficientemente separados como para que entre ellos queden situados todas las soluciones de la ecuación, o, al menos, todas las que nos puedan interesar. Pero eso, además de requerir un análisis previo de la fórmula a representar, muchas veces no es posible debido a las limitaciones físicas de la pantalla y ese inconveniente puede comportar serias dificultades.

Como ejemplo, resolveremos la ecuación mencionada antes:

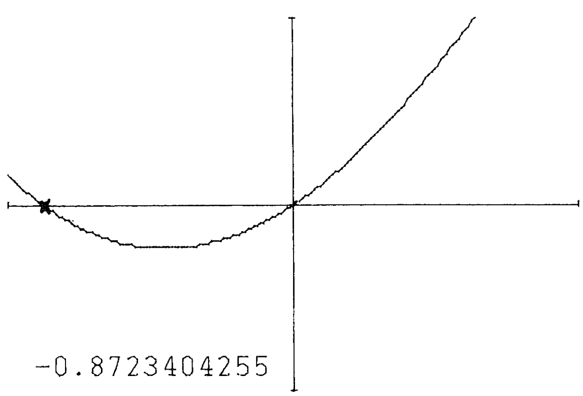
$$x^2 + \text{sen}\,(x) = 0$$

PRIMERA ETAPA

(En primer lugar, debe elegirse el radian como unidad angular, para lo cual basta pulsar las teclas **Mode** **5**)
Como sen(x) tiene sus valores entre -1 y 1, la expresión x^2 + sen(x) nunca dará 0 si x^2 supera 1. Por tanto, podemos elegir $X_{min} = -1$ y $X_{max} = 1$. Concretamente, pulsando la tecla **Range**, podemos elegir los siguientes valores:

Xmin	:	-1
max	:	1
scl	:	1
Ymin	:	-1
max	:	1
scl	:	1

Después, tras dibujar la curva Y = x^2 + sen(x) como ya dijimos (**SEGUNDA ETAPA**), veremos que hay dos soluciones (puntos de corte con el eje OX). Lógicamente, una es 0.



A continuación (**TERCERA ETAPA**) activaremos la función **Trace** y veremos a la izquierda el *punto parpadeante*. Llevándolo hasta el eje X, veremos el valor X = -0.8723404255. Pues bien, este valor es una primera aproximación de la solución.

En resumen.

> *Una solución de la ecuación* x^2 + sen(x) = 0 *es, aproximadamente,* X = -0.8723404255.

Pero, obviamente, el dar un resultado aproximado no sirve de nada si sabemos responder a las preguntas siguientes:

¿Cuál es el error máximo cometido en esa aproximación?

¿Cómo podemos obtener aproximaciones mejores, incluso hasta alcanzar cualquier grado de precisión prefijado?

Enseguida, lo veremos.

Error máximo de una solución aproximada

Volvamos sobre nuestra ecuación-ejemplo: x^2 + sen(x) = 0

El error máximo en la aproximación X = -0.8723404255, podemos obtenerlo anotando los valores de X que corresponden al *último punto encontrado por encima de la horizontal y al primero encontrado por debajo de ella*. Llamaremos a esos valores *anterior* y *posterior* respectivamente, y los denotaremos por X_a y X_p.

En nuestro ejemplo, se verá que:

$X_a = -0.8936170213$ $\quad X_p = -0.8510638298$

De momento, sólo estaremos seguros de que la solución está entre X_a y X_p, luego podemos decir que:

> *Una solución aproximada es* X = -0.8723404255, y el *error es menor que* $X_p - X_a = 0.0425531915$

Cómo obtener aproximaciones mejores

Una forma de mejorar esa aproximación consiste en dibujar de nuevo la función, pero cambiando adecuadamente los rangos de la X y la Y. Concretamente, podemos tomar $X_{min} = X_a$, $X_{max} = X_p$, y elegir para Y_{min} e Y_{max} los valores correspondientes a X_a y X_b (los cuales podrán verse en la pantalla utilizando la tecla $\boxed{X \leftrightarrow Y}$).

Otras formas, quizá en algún caso menos eficientes, pero a nuestro juicio más cómodas, se basan en el uso de la función **Factor**, o el del **factor instantáneo**. Personalmente, nos inclinamos por esta última, pues, aunque el proceso puede ser más lento, es más fácil, cómodo, y no requiere cálculos, ni anotaciones.

Veamos cómo mejorar considerablemente nuestra solución aproximada utilizando repetidamente la función **factor instantáneo**.

PRIMERO: Situar de nuevo el *punto parpadeante* en el eje horizontal (hasta ver nuestra aproximación X = -0.8723404255)

SEGUNDO: **Repetir**
la pulsación de las teclas $\boxed{\textbf{Shift}}$ $\boxed{x}$ (es el *factor instantáneo* de ampliación *doble*)

hasta que desaparezca el punto de corte con el eje horizontal (o **hasta que** la diferencia X_{max}-Y_{min} sea inferior al límite de error que deseemos).

(Si tal punto no desapareciera nunca de la pantalla, estaríamos ante la solución exacta, porque cada pulsación de aquellas teclas parte en dos el intervalo $[X_{min}, X_{max}]$, luego la longitud de éste tiende a cero).

TERCERO: En cuanto desaparezca el punto de corte con el eje 0X (*solución gráfica*), pulsemos las teclas $\boxed{\textbf{Shift}}$ $\boxed{\div}$ y volveremos a ver la *solución gráfica*. Mediante la función **Trace**, llevemos el *punto parpadeante* al eje horizontal y veremos una aproximación mejor que la primera.

Concretamente, en nuestro ejemplo, obtenemos:

Nueva aproximación: X = -0.8766622385

X_a=-0.8769946853 X_p=-0.8764960151

Error < X_p-X_a = 0.0004986702

Es obvio que hemos logrado mejorar considerablemente la precisión, pues el error máximo es mucho menor.

NOTA: En el ejemplo, la *elección de rangos* ha sido fácil. Pero, no suele serlo, ni aún cuando la ecuación parezca sencilla. Y si no, pruébese con $X^4 - 1000.001X^2 + 1 = 0$, donde el análisis previo no es muy difícil (la ecuación tiene cuatro soluciones), pero "difícilmente" conseguiría el lector verlas en la pantalla. Ello prueba que *no hay normas para elegir el rango aplicables a todo tipo de ecuaciones.* No obstante, podemos dar algunas para ciertos tipos de ecuaciones.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Llamaremos trigonométrica a una ecuación en la que la incógnita X figure sólo como parte del argumento de las funciones seno, coseno o tangente. Por ejemplo, no consideramos trigonométrica la ecuación del ejemplo anterior, y sí las cinco siguientes:

1. $\text{sen}(2x) + 2\cos^2 x - 2 = 0$

2. $\text{sen}\,(x/3) + 2\cos X - 1 = 0$

3. $\text{sen}(6x) + \text{sen}(4x) - 1 = 0$

4. $\text{tg}(3x) - \text{tg}(2x) + 1 = 0$

5. $\sqrt{1-\text{sen}(x/6)} - \cos(x/4) = 0$

Utilizando el carácter periódico de las funciones *sen, cos, tan*, podemos dar una regla general para cubrir la etapa de *elección de rangos* al resolver ciertas ecuaciones *trigonométricas*.

REGLA: *Si en la ecuación los ángulos son de la forma* kX, o de la forma kX+r, donde k se supone entero, como en los casos **1**, **3** y **4**, *puede elegirse el rango así:*

a) Xmin= 0 y Xmax= $2\pi/d$, *siendo* d *el máximo común divisor de los coeficientes* k *de la variable* X.

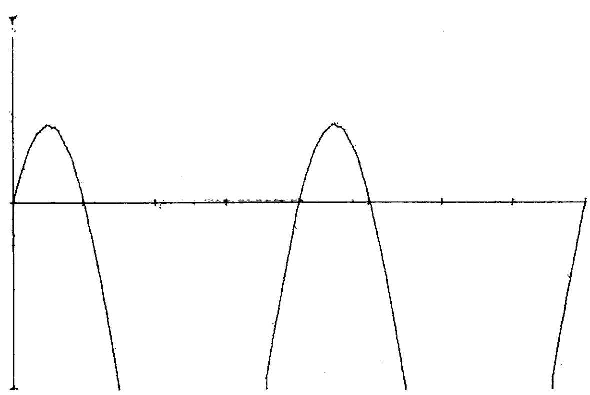
b) Si sólo aparece la función tangente, conviene más elegir Xmin= 0 *y* Xmax= π/d, *siendo* d *el mismo número del apartado anterior.*

Apliquémosla a los ejemplos anteriores.

1. ECUACIÓN: $\text{sen}(2x) + 2\cos^2 x - 2 = 0$

RANGOS:

Xmin: 0
max: 6.283185307 (pues d = m.c. d(2,1) = 1)
scl: 0.785398163 (o sea, $\pi/4$)
Ymin: -1
max: 1
scl: 1



Dibujo obtenido:

Se ven *cuatro* soluciones en el intervalo elegido (La quinta es 2π y puede considerarse equivalente a la solución 0). Con la función **Trace** se encontrarán las primeras aproximaciones:

0, 0.802, π, 3.943

Las demás soluciones resultarán sumando múltiplos enteros de 2π a las cuatro anteriores.

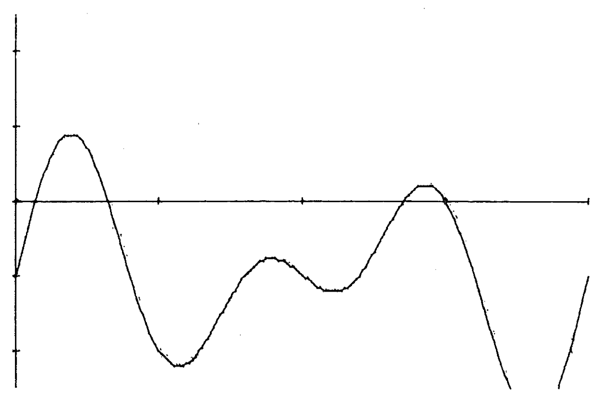
2. ECUACIÓN: $\text{sen}(x/3) + 2\cos x - 1 = 0$

Con el cambio $X/3 = X'$, resulta $\text{sen}(x') + 2\cos(3x') - 1 = 0$ y ésta se resolverá gráficamente como en el caso anterior.

3. ECUACIÓN: $\text{sen}(6x) + \text{sen}(4x) - 1 = 0$

RANGO:

Xmin : 0
max : 3.141592654 (pues d = m. c. d(6,4) = 2)
scl : 0.785398163
Ymin : -2,5 (se ve mejor la gráfica)
max : 2,5
scl : 1



Dibujo obtenido:

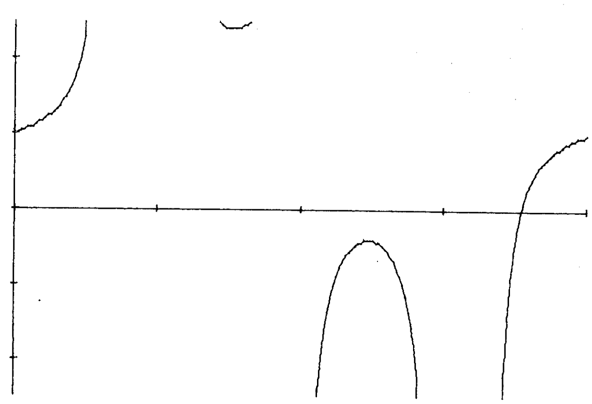
Se ven *cuatro* soluciones, que valen, en primera aproximación, 0.1003, 0.5013, 2.1389, 2.3395.

Para obtener las demás soluciones, habrá que sumar a éstas múltiplos enteros de $2\pi/d = \pi$.

Por cierto, esta última ecuación "no puede resolverse con las fórmulas trigonométricas" que se enseñan en Bachillerato (y, por supuesto, la quinta tampoco). Sin embargo, como acabamos de ver, es muy fácil resolverla si se utiliza una calculadora gráfica, lo que es una clara muestra, a nuestro juicio, de la conveniencia de enseñar su manejo.

4. ECUACIÓN: $tg(3x) - tg(2x) + 1 = 0$

RANGOS: Xmin : 0
max : 3.14159265 $(\pi/d = \pi/1)$
scl : 0.785398163 $(\pi/4)$
Ymin : -2,5
max : 2,5
scl : 1



Dibujo obtenido:

Hay una sola solución en el intervalo elegido. Con la funcion **Trace**, resulta una primera aproximación: 2.7739. Las demás soluciones resultan sumando a esa un múltiplo de π.

5. ECUACIÓN: $\sqrt{1-sen(x/6)} - cos(x/4) = 0$

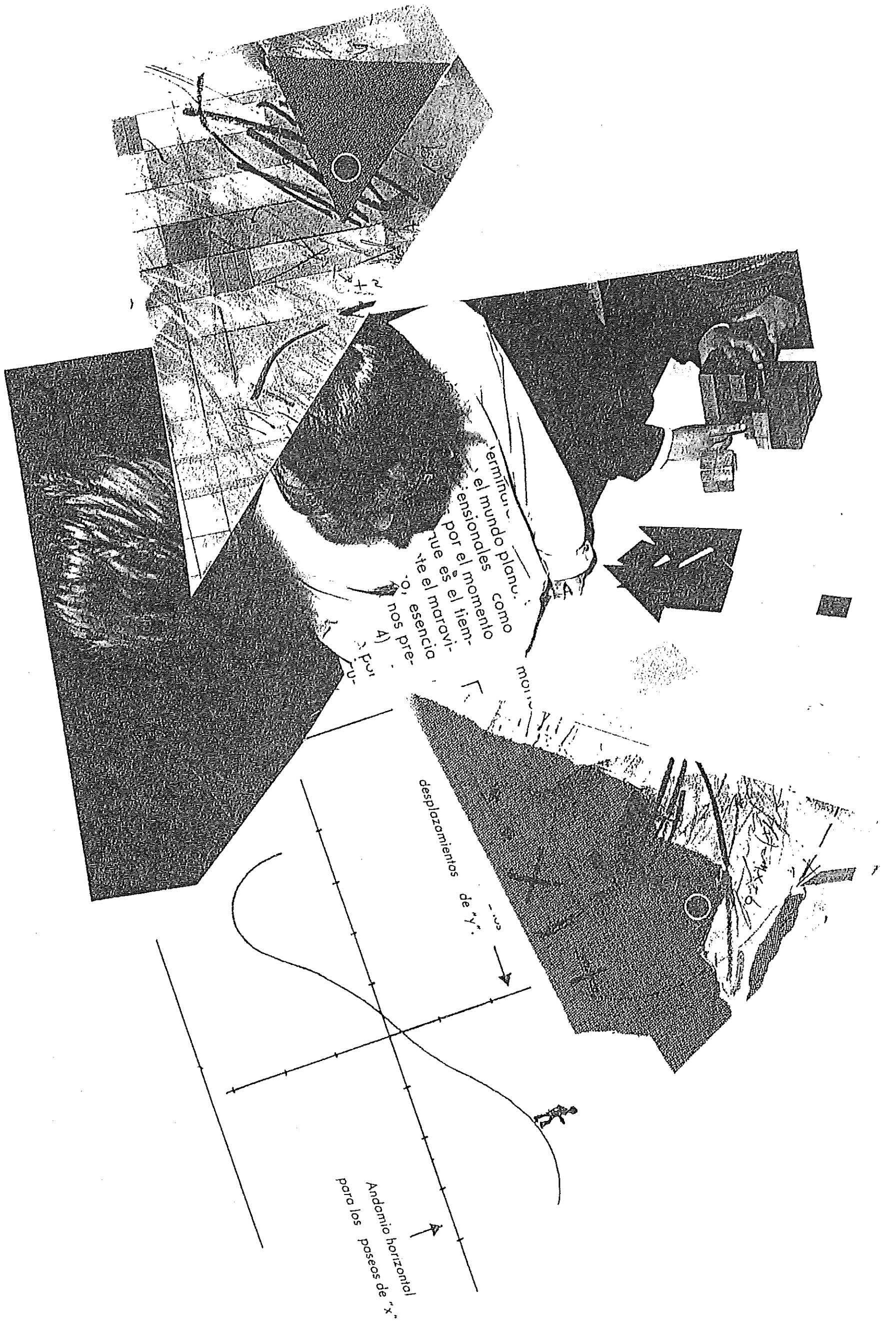
Con el cambio $X/12 = X'$ resulta $\sqrt{1-sen(2x')} - cos(3x') = 0$ y ésta puede resolverse eligiendo [Xmin, Xmax] = $[0, 2\pi]$

Conclusiones

Las calculadoras gráficas son herramientas útiles y potentes para resolver ecuaciones que, de otro modo, caerían fuera del nivel del Bachillerato. Con ellas, no sólo se puede hacer que esos alumnos sean capaces de resolver fácilmente muchas más ecuaciones, y más variadas, que las que encontrarán en su libro de Matemáticas, sino que, al mismo tiempo, y como hemos comprobado personalmente, pueden incrementar, y aún renovar, las posibilidades didácticas del Profesor en otros temas.

No nos gustaría que nadie interpretara estas líneas como una sugerencia a abandonar los métodos tradicionales de resolución de ecuaciones trigonométricas, basados en el empleo de fórmulas. Antes al contrario, creemos que tales métodos deben ser mantenidos; pero, también podrían complementarse usando calculadoras gráficas, aunque su utilización se redujera a comprobar, como si de un juego se tratara, si las soluciones obtenidas son correctas. A fin de cuentas, sería un juego que podría desarrollar bastante la intuición, siempre necesaria en Matemáticas, por habituar al alumno a pensar gráficamente ante ciertos problemas algebraicos. Aunque mejor sería para tal fin la pantalla de un ordenador, parece que aún estamos lejos del momento en que dicha pantalla sea tan barata, nos quepa en el bolsillo y tengamos el aula llena de ellas.

Francisco González Maján
I.B. Menéndez Pelayo. Barcelona



RECURSOS PARA EL AULA

PAPIROFLEXIA: ACTIVIDADES PARA INVESTIGAR EN CLASE DE MATEMÁTICAS

Julián Baena Ruiz

El plegado, además de tener reconocido valor educativo en el desarrollo de habilidades psicomotoras, constituye un recurso importante para enseñar Geometría en todas las etapas educativas. Son tantas las posibilidades de la papiroflexia, que no resulta demasiado difícil encontrar las actividades, para el aula-taller de Matemáticas, que se adapten a cada edad o nivel.

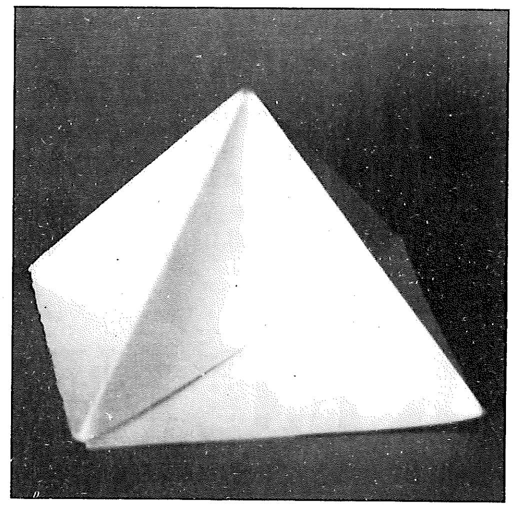
La determinación y obtención de figuras recortando y plegando papel o cartulina[1], nos permiten crear condiciones en las que nuestros alumnos planteen y resuelvan problemas, contando con apoyo visual, manipulación, y lo que es más importante: nuevas formas de construcción y experimentación.

Se trata de algo más que un material didáctico barato: llevar la papiroflexia a clase de Matemáticas, significa ofrecer un método de trabajo divertido que favorece el desarrollo de la visión espacial, las destrezas manuales, y la capacidad de concentración e imaginación.

Para empezar necesitamos que los alumnos conozcan técnicas elementales de plegado y disponer en el aula de hojas suficientes de papel.

De esta inagotable fuente de actividades voy a destacar, por su interés didáctico, las siguientes:

- Construcción de figuras: planas y tridimensionales. (Descripciones y pasos a seguir, se pueden encontrar en cualquier libro de papiroflexia). Un ejemplo puede verse en la foto 1 [5].
- Descripción y medida(s) (superficie y volumen) de(en) dichas figuras.
- Relaciones entre las partes.
- Paso del plano al espacio: identificar en el plano (hoja plana desplegada) elementos de la figura obtenida en el espacio.
- Paso del espacio al plano (procedimiento recíproco al anterior)
- Establecimiento de leyes de dependencia entre valores del plano (lámina) y del espacio (figura obtenida).



[1] A diferencia de otros tratamientos del plegado, en papiroflexia, la rigidez de los cuerpos se consigue sin usar cola ni pegamento.

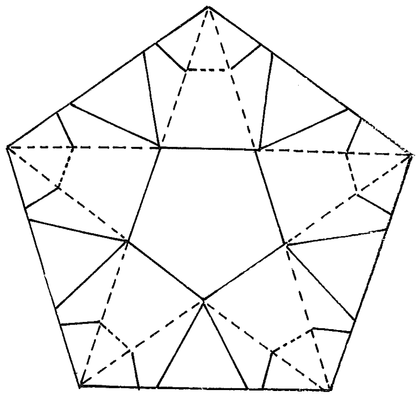
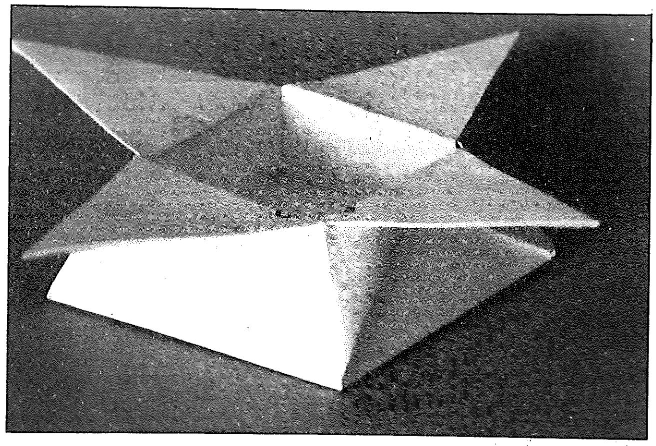


figura 1

Las líneas discontinuas indican los pliegues «monte» y las continuas los pliegues «valle».



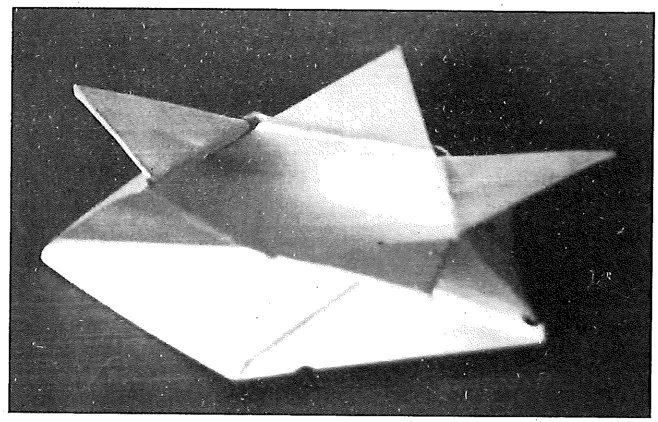
Ahora bien, la papiroflexia es, además, un campo de investigación en la escuela.

Desde esta óptica, la Geometría se constituye en herramienta generadora de nuevas formas. Distintas investigaciones, propuestas por el profesor, pueden permitir a los alumnos y a él mismo, descubrir variantes de un método de plegado que generalicen una figura conocida, como después veremos. El objetivo final consiste en descubrir nuevas formas básicas de plegado.

Los dos ejemplos que presento son fruto de experiencias personales tanto dentro como fuera del aula.

El tronco pentagonal (Experiencia 12-16)

Un amigo cocotólogo[2] me enseñó, en una conferencia, a hacer ceniceros (troncos de pirámide) como el de la foto 2. Al día siguiente, tras construir en clase dicha figura y hacer un estudio de la misma en el sentido expuesto anteriormente, pregunté a los alumnos si se podría obtener un cenicero análogo pero cuya base fuese pentagonal. Nuestras investigaciones nos llevaron a construirlo (ver foto 3) a partir de una hoja pentagonal cuyos pliegues vienen descritos en la figura 1. A tí, amigo lector, si deseas experimentar, te reto a que lo construyas y encuentres el parámetro (libre) que determina la altura del tronco y que descubras una nueva figura haciendo el cenicero hexagonal.

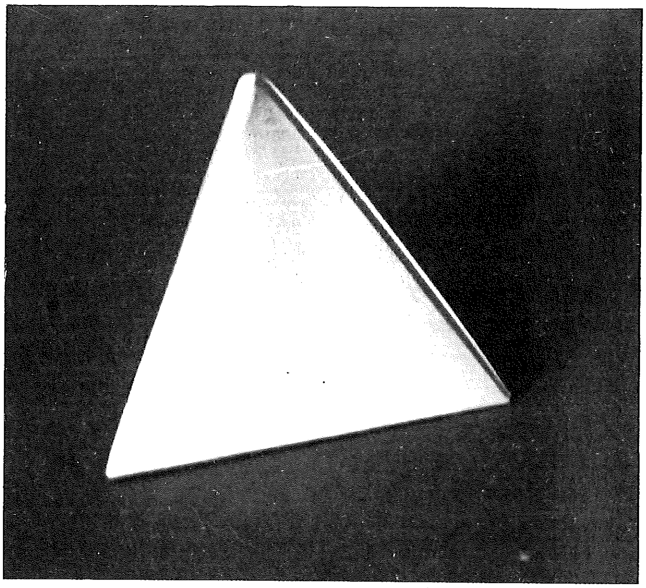


Una nueva forma de plegado (16-18)

Al construir un simple cenicero de papel, cuya forma es de prisma rectangular, estamos generando cuatro triedros (esquinas) cada uno de ellos procedente de tres ángulos rectos en el plano. A partir de ese plegado y dando un tratamiento matemático de generalización, hemos trabajado en clase sobre el paso, mediante el plegamiento, de los ángulo planos a los diédricos así como de tres

[2]Se usa cocotología como sinónimo de papiroflexia. Los lectores de SUMA recordarán el artículo que sobre dicha «ciencia» apareció» en el número 6, Iriarte, Mª D.).

ángulos planos a un triedro. Múltiples experimentos y tanteos nos llevaron a descubrir una nueva forma básica de plegado: la que obtiene el tetraedro a partir de un triángulo equilátero. La figura está en la foto 4 y se obtiene de una hoja cuya forma es un triángulo equilátero.

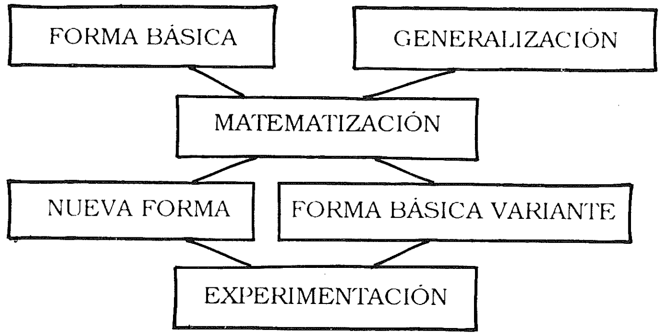


Estas ejemplificaciones resumen las dos líneas de investigación sobre las que estamos experimentando en clase:

• A partir de una forma básica obtener una variante que la generalice.

• Descubrimiento de nuevas formas básicas de plegado.

El siguiente diagrama resume los pasos a seguir:



Por último, quiero animar a los lectores a que participen de esta aventura.A que hagan una «lectura matemática» en los libros de papiroflexia; con toda seguridad van a descubrir figuras maravillosas que, además de facilitar ideas para llevar al aula, ayudarán a conocer y amar más la Geometría.

Julián Baena Ruiz

Bibliografía

[1] AZZITA, E. **Papiroflexia. Esculturas de papel**. Ed. de Vecchi. Barcelona (1989).

[2] KASAHARA, K. **Papiroflexia, origami fácil**. Ed. EDAF. Madrid (1987).

[3] KNEISSLER, I. **Cómo hacer Origami. Plegado de papel**. Ed. CEAC. Barcelona (1984).

[4] KNEISSLER, I. **Origami. Papel plegado**. Ed. CEAC. Barcelona (1989).

[5] MARTINEZ P.S.- BAENA J.- CORIAT M. **Recursos para el aula - Papiroflexia**. V JAEM. Castelló (1991)

[6] RIGLOS (GRUPO). **El libro de las pajaritas de papel**. Ed. Alianza. Madrid (1988).

[7] UNAMUNO, M. de. **Amor y pedagogía**. Ed. Espasa Calpe. Madrid (1979).

PARA MEDIR ÁNGULOS

Amaia Basarrate Zaldibar

"Ahora podemos medir cualquier ángulo, incluso diedros, más fácilmente".

Este podría ser el anuncio de propaganda del invento que os presento. No tiene nada de nuevo, pues parece ser que los traumatólogos lo vienen utilizando desde hace unos años para medir el grado de desviación de la columna vertebral en algunos pacientes. De hecho, fue uno de ellos quien me regaló mi primer ejemplar.

El fundamento es bien simple: Dos reglas idénticas con un extremo semicircular en uno de los cuales se imprime un círculo graduado. Las reglas se unen mediante un remache colocado en el centro del círculo.

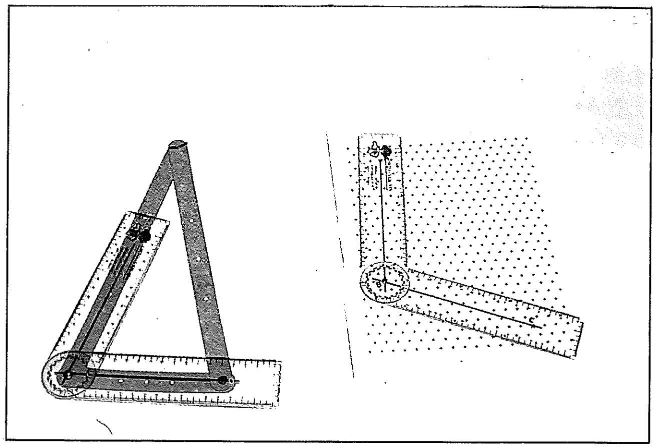
Si esto se hace en plástico transparente y flexible (como el de encuadernar, pero más consistente) y se le añaden algunos detalles más para facilitar la medición, tendremos este útil "goniómetro". Detalles: "una línea eje" en cada regla, en sentido longitudinal a lo largo del eje de simetría que pasa por el centro del círculo; cantos graduados en centímetros. Pienso que sería útil, además, graduar en centímetros también las "líneas eje" para facilitar algunas tomas de medida (aunque quizá restaría nitidez a las mediciones normales).

Para medir cualquier ángulo, sólo hay que colocar el goniómetro sobre él, de forma que el centro de giro coincida con el vértice y los trazos centrales de las reglas con los lados del ángulo.

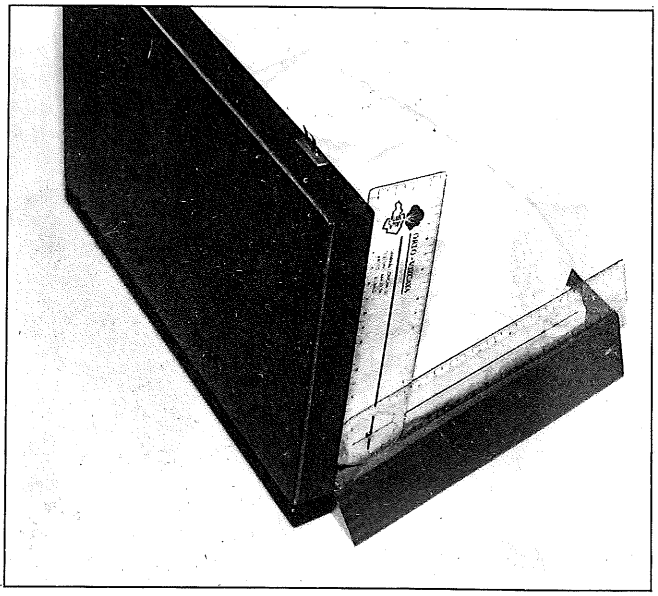
Tal como se presenta el instrumento actualmente, permite tan sólo la medida de ángulos ya construidos, pero no permite la construcción de ángulos de medida dada. Para subsanar este inconveniente bastará con sustituir la línea eje de la regla móvil por una ranura que permita la escritura con lápiz o bolígrafo.

Ventajas respecto al transportador:

- Es más clara y fácil la medida de todos los ángulos planos, ya sean el dibujo, trama construcción con mecanos, etc... (Foto nº 1)

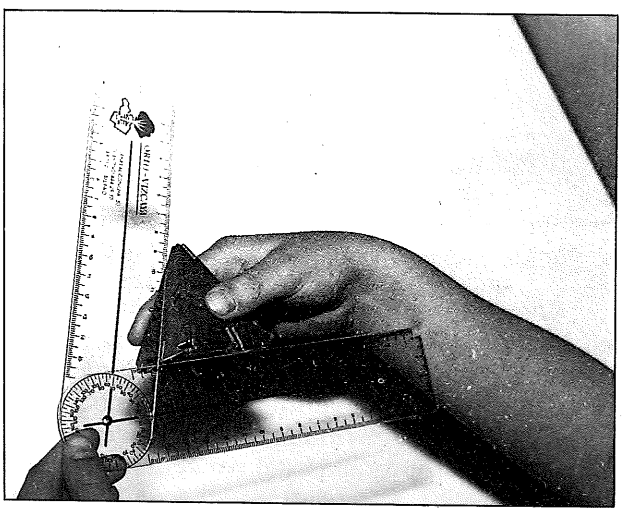


- Como permite medir ángulos diedros, los alumnos pueden efectuar mediciones directas de ángulos dentro y fuera del aula, medir ángulos de aberturas de puertas, ventanas, cajas, etc... (Foto nº2). Este tipo de actividades les ayudará enormemente en la comprensión del concepto de ángulo.



Esta posibilidad de medir ángulos diedros representa una serie de nuevas posibles actividades a realizar con alumnos de la futura Secundaria Obligatoria:

- Podrán sorprenderse comprobando, por ejemplo, que aunque un tetraedro está formado por cuatro triángulos equiláteros, cuyos ángulos miden 60º, sus ángulos diedros no miden 60º, sino algo más de 70º. La deducción matemática la podrán hacer en cuanto tengan unas nociones de trigonometría y así podrán contrastar resultados. (Foto nº3).



- Podemos llenar un plano con cuadrados y también lo podemos llenar con triángulos equiláteros. ¿Podremos llenar el espacio con cubos? ¿Y con tetraedros? ¿Con qué otros poliedros regulares?

- ¿Con qué tipo de polígonos no regulares podremos llenar un plano? ¿Con qué poliedros irregulares podremos llenar el espacio? Estudio de las secciones del cubo, sus ángulos.

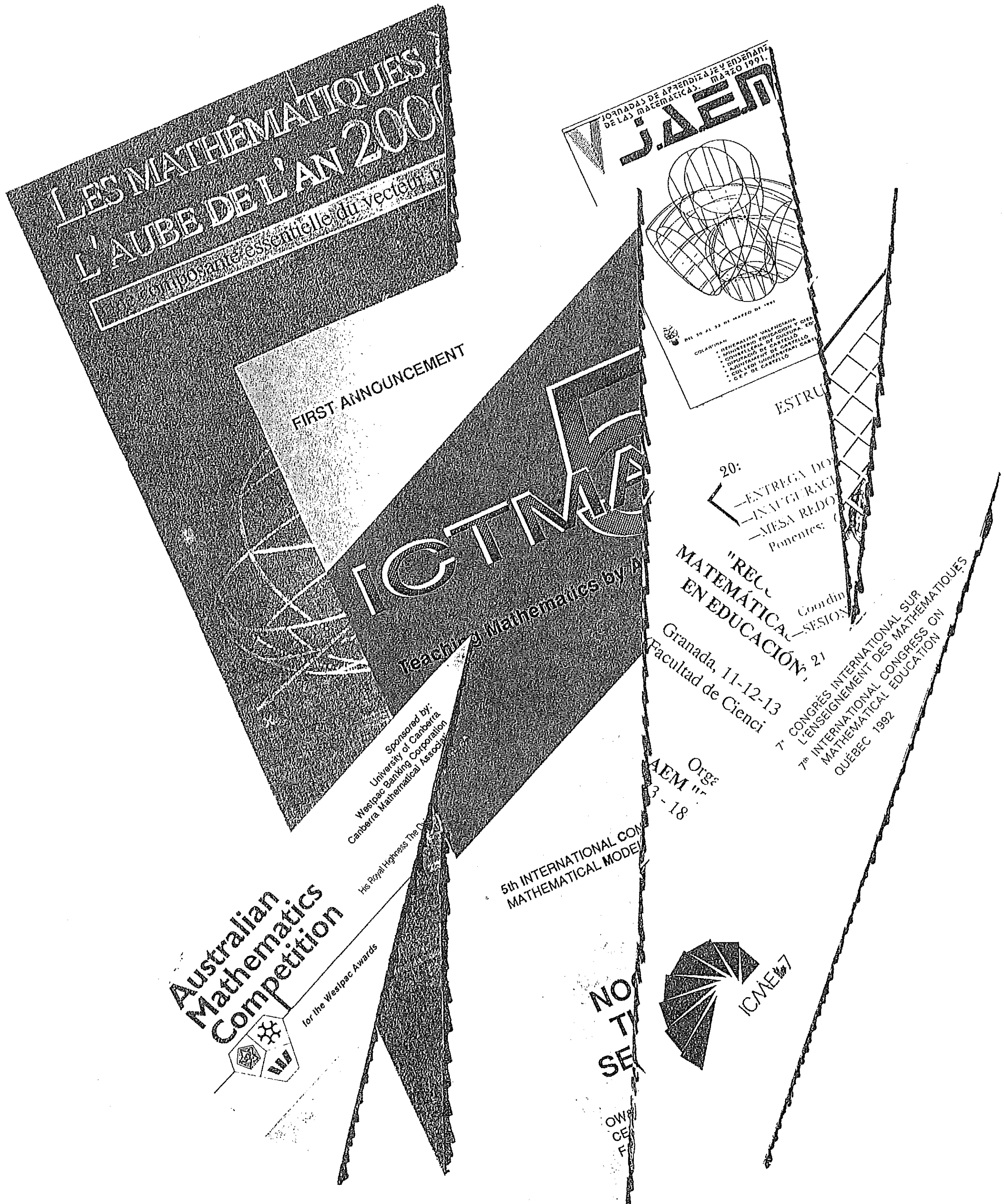
- Con Polydrón o cualquier otra construcción y este goniómetro, se pueden plantear actividades de trigonometría, sin salir del aula, para alumnos de 2º de B.U.P.

- Sujetando con pegamento un bolígrafo sin "mina", a lo largo de la "línea eje" de la regla móvil - es decir, de la que no tiene el círculo graduado -, se pueden efectuar todo tipo de medidas de ángulos necesarios para hallar alturas de edificios, árboles, etc... Esta última actividad deberá ser contrastada con las medidas tomadas con transportadores más grandes y graduaciones más finas del círculo.

Espero que encontréis interesante su utilización y que vuestros alumnos lo disfruten.

Del mismo modo, espero que las casas de material didáctico también lo encuentren interesante y se dediquen a fabricarlo. Por el momento, tan sólo las casas de ortopedia disponen de él.

Amaia Basarrate Zaldîbar
I. B. José Miguel de Barandiaran.
Lejona (Vizcaya)



INFORMACIÓN

VIII CIAEM CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.

Celebrada en Miami - Florida. (Estados Unidos)

Javier Domínguez García

Los pasados días del 3 al 7 de agosto tuvo lugar en el recinto de la Universidad de Miami, Coral Gables (Florida) la VIII CIAEM, donde se reunieron cerca de doscientos profesores de Matemáticas de países iberoamericanos, Estados Unidos, Canadá y de algunos europeos como Francia y España, todos ellos especialistas e interesados en la educación matemática.

Esta Conferencia que ya ha cumplido sus treinta años de existencia desde la celebración de la Primera en el año 1961 en Bogotá, y de forma regular cada 4 a 5 años en distintas capitales de América, tuvo su sede en esta ocasión en los Estados Unidos y en concreto correspondió a la Universidad de Miami su organización. El comité Interamericano de Educación Matemática, cuyo primer presidente fué el prestigioso matemático norteamericano Marshall Stone y que tuvo como primer representante en el ICMI (International Commitee of Mathematics Instruction) al reconocido profesor e investigador español D. Luis Santaló, es el encargado de la organización de esta Conferencia y de importantes estudios y trabajos en el campo de la educación Matemática en las Américas. Sus miembros actuales y en los que recayó la organización de esta VIII Conferencia son:

Eduardo Luna, República Dominicana. Presidente.
Patrick Scott, EEUU, Vice-Presidente y Organizador general.
Fidel Oteiza, Chile. Vice-Presidente.
Angel Ruiz, Costa Rica. Secretario.
Carlos Vasco, Colombia. Vocal.
Marta Villavicencio, Perú. Vocal.
Ubitarán d'Ambrosio, Brasil. Ex-Presidente.
Emilio Lluis. Mexico. Representante en el ICMI.
El responsable local de organización fué el Profesor Gilberto Cuevas de la Facultad de Educación de la Universidad sede.

El principal patrocinador de la Conferencia fue la UNESCO organismo que siempre ha colaborado con aportaciones económicas y publicación de documentos y Actas. Además de la Universidad de Miami, también colaboraron la Oficina de Cooperación Técnica Internacional de la Universidad de Nuevo México, el Departamento de Matemáticas y Ciencia de la Computación de la Barry University y el Dade Country Council of Teachers of Mathematics de los EEUU.

La mayoría de las secciones del evento tuvieron lugar en el edificio Pearson de la Universidad de Miami, aunque algunos actos como el de apertura se celebraron en el Aula Magna de la Facultad de Leyes y las conferencias plenarias en el Learning Center de la Universidad de Miami. Esta Universidad, que es la cuarta de los EEUU en número de alumnos, tiene sus especialidades más prestigiosas en las facultades de Leyes, Medicina, Negocios y Educación. Hemos de destacar las muchas actividades dedicadas a la formación de profesores debido a la gran demanda que hay en el estado de Florida por la immigración tan grande que recibe. Cada mes, alrededor de 700 escolares nuevos son inscritos en sus escuelas, lo que indica que en ese período debe abrirse una nueva escuela y de ahí la importancia en formar maestros para las mismas.

La financiación de la Universidad es privada, aunque recibe ayuda de las autoridades del Condado de Dade al que pertenece geográficamente y de otros Organismos públicos así como de fundaciones privadas o patrocinadores. Tiene unas magníficas instalaciones tanto para la docencia como para actividades complementarias tales como deportes, museos, comedores, salas de reunión, etc..., todo ello en un inmenso campus rodeado de zonas ajardinadas alrededor de una lago y edificios de apartamentos y servicios para los estudiantes. Dispone de un sistema de transporte interno y de vigilancia y seguridad donde participan muchos estudiantes que con esta labor se ayudan a pagar sus estudios.

Actividades desarrolladas en la Conferencia

Como en todas las reuniones de este tipo, los actos programados fueron los clásicos, tales como: mesas redondas, conferencias, comunicaciones, exposiciones, posters, grupos de discusión y la natural convivencia e intercambio de información entre los participantes. También se celebraran diversos actos sociales y de recreo como fueron un cocktel el día de la inauguración o una visita al Museo de la Ciencia.

El contenido científico de la Conferencia consistió en:

LOS PANELES: Actividad donde un grupo de expertos trataba sobre un tema en dos sesiones. En la primera se exponían las ídeas por los panelistas y en la segunda se debatía y discutía con los asistentes. Estos paneles versaron sobre:

"Integración del contexto Sociocultural en la enseñanza de las Matemáticas" moderado por Marta Villavicencio de Perú.

"La enseñanza eficaz de las Matemáticas", moderado por Roberto Baldino de Brasil.

"Usos innovativos de calculadoras y computadoras", moderado por Carlos Vasco de Colombia.

LAS CONFERENCIAS PLENARIAS:

"Las Matemáticas modernas en las Américas: filosofía de una reforma", impartida por Angel Ruiz Zúñiga de la Universidad de Costa Rica.

"The Joy of Mathematics", (Los juegos en Matemáticas) por Peter Hilton de la State University of New York (EEUU).

LOS GRUPOS DE DISCUSIÓN:

Estaban previstos como sesiones de trabajo donde un grupo de profesores interesados en un tema debatían y proponían ídeas sobre educación matemática. Eran dirigidos por un profesor experto nombrado de antemano por la organización. Se reunieron en dos sesiones y trataron sobre los siguientes temas propuestos por sus directores:

"Formación de maestros". Por Beatriz d´Ambrosio de Brasil.

"Aulas multiculturales y multilingues". Por Elisa Bonilla de Perú.

"Laboratorios de Matemáticas en Secundaria". Por Doris Cetina.

"Resolución de problemas". Por Luiz Dante de Brasil.

"Tecnología audiovisual en Matemáticas: Aplicaciones". Por Javier Domínguez de España.

"La enseñanza de la estadística". Por Bayardo Mejía de Guatemala.

"Deficiencias matemáticas de los estudiantes de nuevo ingreso en la Universidad". Por Carmen Ortiz de Puerto Rico.

"El uso de la historia de las Matemáticas en las aulas". Por Carlos R.Vianna de Brasil.

LAS COMUNICACIONES:

Estas comunicaciones breves fueron sesiones de veinte minutos para la exposición y diez minutos para preguntas o debate. Se presentaron 106 comunicaciones. Acompañamos en la fig. 1 una tabla con la distribución por países. En lo referente a España, se presentaron nueve, por parte de los once profesores españoles participantes pertenecientes a colectivos o Universidades de nuestro país. Estos fueron:

Gonzalo Sánchez Vázquez, presidente de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Javier Pérez y Antonio Pérez, de la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales".

Paco Padilla y Javier Domínguez, de la Sociedad

Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton".
José Mª Galdón y Cristina Ramírez, del Grupo AC de Tecnología Educativa, de Madrid.
Lola Ugarte, de la Universidad de Zaragoza.
Joaquín Giménez de la Universidad de Barcelona.
Joaquín Fivilia, Mª Teresa Ramos de la Universidad de La Laguna.

EXPOSICIONES Y POSTERS:

Hubo una sesión especial de presentación de materiales, publicaciones, programas especiales, etc... Destacamos los siguientes:

Presentación del Ministerio de Educación de Colombia sobre nuevos curriculos en Matemáticas, a cargo de Celia Castilblanco y Carlos Vasco.

El programa "Matemática para la Familia" por Mary Jo Cittadinno de los Estados Unidos.

Una metodología para la enseñanza de la Geometría Descriptiva por Marie Clire Pola de Brasil.

Textos de los hermanos Zúñiga Topete de México.

Revistas varias de Asociaciones de Profesores de Matemáticas como las presentadas por los compañeros de la Sociedad Andaluza "Thales".

Material Didáctico presentado por colegas brasileños, así como otro material variado y diverso de representantes de los Estados Unidos.

El Grupo AG de Tecnología Educativa de Madrid expuso transparencias para retroproyector aplicadas al estudio de funciones, límites y continuidad.

De forma general la Conferencia estuvo a un alto nivel de participación y debate en casi todas sus secciones. Los problemas políticos y sociales en Latinoamerica estuvieron continuamente presentes ya que han dado un frenazo a la educación en general en esos países y con ello a la educación Matemática. Grandes problemas económicos hacen que los presupuestos en educación sean recortados en muchos países. No es el caso de los Estados Unidos, Canadá y los países europeos, por lo que en palabras del Presidente del Comité, Dr. Eduardo Luna, la educación en Latinoamerica debe hacerse desde otra óptica diferente a la de los países desarrollados. Anunció para el próximo ICME-7, a celebrar en Quebec (Canadá) en agosto de 1992, un grupo de trabajo sobre "Educación Matemática y recursos escasos" que será moderado por uno de los miembros del Comité Interamericano, Fidel Oteiza de Chile.

El profesor Claude Gaulin de Canadá hizo la presentación del ICME-7 y anunció que para el mismo se buscarán ayudas para que la participación latinoamericana sea considerable ya que hasta ahora en estos encuentros internacionales ha habido predominancia sajona.

En el transcurso de la Conferencia se reunió el Comité Interamericano para renovar a sus miembros y anunciar los próximos encuentros internacionales de esta índole. El nuevo Comité quedó formado por:

Fidel Oteiza de Chile como Presidente.
Patrick Scott de EEUU, Vice-Presidente.
Angel Ruiz Zúñiga, de Costa Rica, Secretario.
Marta Villavicencio de Perú, Vocal.
Carlos Vasco Uribe, de Colombia, Vocal.
Elfriede Wenzelberger, de México, Vocal.
Eduardo Luna de la República Dominicana como ex-Presidente.

Este Comité será el encargado de organizar las próximas reuniones: El II CIBEM. Se decidió que la próxima Conferencia (IX CIAEM), tenga lugar en Santiago de Chile en el mes de Enero de 1995 y que la II CIBEM se celebre en Brasil en 1994 para la que se formará un Comité Organizador formado por España, Portugal y países Americanos. El Organizador de la misma será Ubiratan d' Ambrosio, de Brasil.

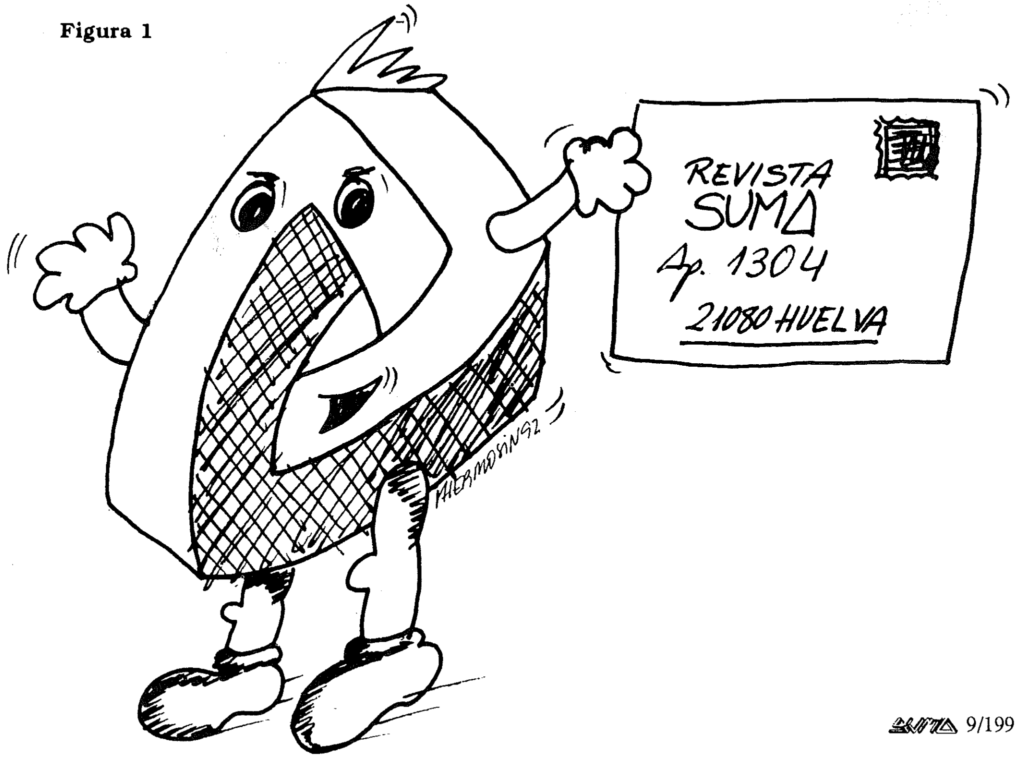
En el acto de clausura intervino Gonzalo Sánchez Vázquez, Presidente de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, quien destacó la importancia que tienen los países iberoamericanos en la educación Matemática. Agradeció a la UNESCO y al Comité Interamericano la colaboración recibida para celebrar el I CIBEM el pasado año en Sevilla, evento que fue un éxito de participación y es otro encuentro importante dentro de los de este tipo en el contexto internacional. Informó que ello ha colaborado al logro conseguido de celebrar el ICME-8 en Sevilla el año de 1996, donde el español será idioma oficial. Esta información fué acogida por los asistentes con una salva de

PAÍSES	**Nº Participantes**	**- Nº Comunicaciones**
ARGENTINA	8	3
BRASIL	20	26
BARBADOS	1	0
CANADÁ	2	1
COLOMBIA	4	3
COSTA RICA	9	7
CUBA	1	1
CHILE	9	7
EL SALVADOR	1	1
ECUADOR	2	0
ESPAÑA	11	9
GUATEMALA	3	3
FRANCIA	1	1
HAÍTI	1	1
HONDURAS	1	1
ISRAEL	1	0
MÉXICO	22	9
PANAMÁ	2	9
PERÚ	4	4
PUERTO RICO	10	3
R. DOMINICANA	20	3
U.R.S.S.	2	2
URUGUAY	4	3
U.S.A.	24	14
VENEZUELA	7	4

Figura 1

aplausos que interrumpieron su intervención, no sólo por ser la primera vez que un pais de habla hispana consigue la organización, sino también porque nuestra lengua no es oficial hasta el momento en este tipo de encuentros, lo cual ha sido un obstáculo para la participación de los paises latinoamericanos. Asímismo animó a todos en seguir trabajando por la mejora en la educación en general con nuestra aportación desde la instrucción Matemática, como garantía para el progreso y desarrollo de los paises de latinoamerica en el futuro inmediato de esta década de fin de siglo.

Javier Domínguez García
Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"



UN MODELO DE CONVIVENCIA EN TORNO A LA MATEMÁTICA: "LA OLIMPIADA NACIONAL"

José Romero Sánchez

Los cambios científicos, tecnológicos y metodológicos hacen difícil predecir cuales han de ser los conocimientos que cualquier joven necesitará al concluir su etapa educativa. Pero nadie duda que precisará una sólida preparación matemática.

En la sociedad actual las matemáticas se incorporan torrencialmente en multitud de actividades, y determinados aspectos forman parte del glosario de términos del lenguaje usual.

De todas las actividades que forman parte de la educación matemática, destaca sobremanera **"la resolución de problemas"**, ya que en ello se combinan: la hipótesis, la creatividad, la imaginación, el placer lúdico, el orden, la tenacidad, la capacidad de abstraerse..., y el fomento del ego personal.

Con la puesta en marcha, por parte de diversas sociedades matemáticas, de las Olimpiadas y Certámenes se quiere contribuir al desarrollo de la inquietud por la mejora de la enseñanza de las matemáticas, provocando una mayor sensibilización hacia las Ciencias Exactas. Y se ha escogido el momento en el que los escolares terminan la EGB, como edad idónea para la celebración de estas pruebas; ya que aún no se han desarrollado en demasía las fobias y miedos hacia esta disciplina.

Cuando la década de los 80 acabada de comenzar, un grupo de profesores de todo el territorio peninsular e insular prepararon sus maletas, sacaron sus billetes e hicieron viajar sus anhelos renovadores para poner en marcha la máquina de: congresos, jornadas, seminarios, certámenes matemáticos, y un largo etc...

Tras un penoso caminar, en 1989, ese viaje en el tren imaginario de sus inquietudes profesionales se manifiesta como un gran horizonte luminoso en compañia de otras sociedades que viajan en el vagón de la Federación Española de Profesores de Matemática.

Poniendo los motores en marcha, haciendo que las máquinas y los vagones giren sus pesadas ruedas por los raíles del tiempo y aunando el esfuerzo de todas las sociedades, miraremos por la ventanilla para situarnos en:

Primera Estación: "NAFARROA - IRUÑEA 1990".

En este lugar empezó el lento caminar de la I Olimpiada Matemática Nacional, con un vagón repleto de ilusiones y viajeros de Canarias, Aragón, Andalucía, Murcia, Albacete y Navarra.

La prueba individual se celebró en el marco incomparable del Castillo de Olite y la de parejas en el recinto amurallado de la Ciudadela de Pamplona.

Segunda estación: "CANARIAS 1991".

Guaguas circulando por las calles de Tenerife, Las Palmas y Lanzarote, guanches, el Teide en todo el horizonte y miles de cepas esperando la caricia suave del rocío nocturno. Aquí... el número de olímpicos había aumentado, pues a las comunidades del año anterior se unieron Castellón y el Principado de Andorra.

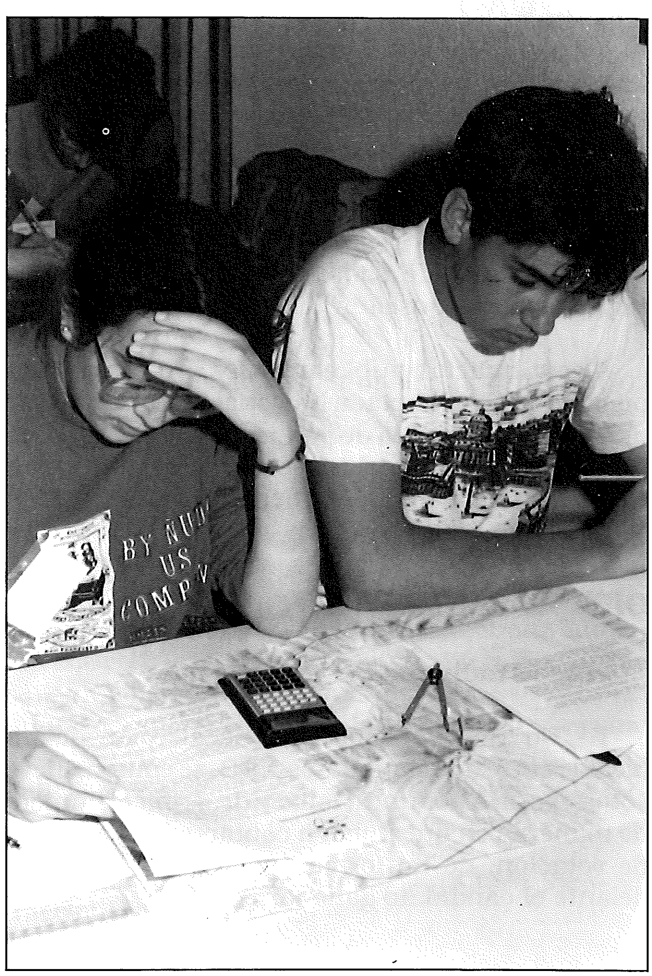
La prueba individual se celebró en la montaña de Arucas y la de parejas en un escenario bellísimo, Las Cañadas del Teide.

El chucu-chucu-chú del tren FESPM alargó su recorrido cruzando la frontera pirenáica y en L'Ecole Polytechnique tres españoles embajadores matemáticos: David García Alvarez, Juan A. Mates Valdivielso y Patricio Molina Corpas, intentaron derrochar el depósito de partículas de Convivencia que la FESPM quiere imprimir en este certamen. Pero amén de un noveno puesto entre un centenar de franceses, suizos, belgas, marroquies y tunecinos y un gratísimo recorrido por París, la decepción hizo acto de presencia en estos tres chavales.

Como muestra de lo anterior reproduzco literalmente algunas observaciones de ellos:

"La Prueba... para que contar. Sin razonamiento, sólo se puntua el resultado con 0 ó 1".

"Con el planteamiento del certamen no he podido ampliar el círculo de mis amistades, que era lo que yo esperaba".



Si bien en la revista SUMA apareció recientemente un artículo detallando los pormenores de los Juegos Matemáticos, quisiera hacer algunas puntualizaciones tras mi vivencia:

- Los tres alumnos españoles fueron encuadrados en el grupo C2 y tuvieron que resolver en dos jornadas 6 problemas cada día.
- De los 12 problemas propuestos en cada jornada, el grupo C1 debía resolver los 4 primeros, el grupo C2 los 6 primeros, el gran grupo y lycées los 9 primeros y el grupo alta competición la totalidad de los ejercicios.
- A la gran final se podía acceder habiendo salvado las distintas cribas eliminatorias o bien accediendo al concurso paralelo, independientemente de haber sido o no eliminado.
- El planteamiento es totalmente contrario al de la Federación, pues prima el aspecto económico sobre el de convivencia.
- Participar implica pagar una cuota de inscripción.
- Las casas comerciales son un eslabón importantísimo en los Juegos Matemáticos.
- El **RAMA** fue el momento más positivo de todos "les Jeux Mathématiques". En un salón se reunieron todos los participantes, el equipo organizador y el equipo que elaboró la prueba. Tras una explicación exhaustiva de los problemas por los autores, se entabló un debate sobre los diferentes caminos seguidos para conseguir la solución.

A continuación publicamos los problemas propuestos en La Olimpiada Nacional tanto en la parte individual como en la de parejas. En el suplemento "Para Coleccionar" del Nº 10 aparecerán los doce ejercicios de los "Jeux Mathématiques".

Olimpiada Nacional

Prueba Individual.-

1.- En una votación para la elección de un alcalde entre dos candidatos A y B, se emiten nueve votos y gana A por uno. Hallar y describir el número de maneras en que pueden contarse las papeletas de votación, de tal forma que siempre vaya por delante el candidato ganador.

2.- En la Agencia de Investigaciones M.I.A. (Matemáticas Investigadas y Aclaradas), se han de resolver cierto número de misiones, pero disponemos de un número de agentes tal que: si encargamos una misión a cada agente, sobran "x" misiones; pero si damos x misiones a cada agente, se quedan "x" agentes sin misión. Como los agentes y misiones suman menos de quince, ¿sabrías decirnos cuántos agentes y misiones son?.

Por supuesto que nuestro especial agente 007 lo resolvió en dos patadas.

3.- Las reglas del "TRES EN RAYAS" son bien conocidas, sobre un tablero de 3x3 dos jugadores, alternativamente, colocan sus piezas (cruces o monedas, por ejemplo) sobre las casillas del tablero. Gana quien logra primero colocar tres de sus piezas en línea. Pues bien, observando las figuras 1,2 y 3 y considerando que ninguno de los jugadores es bobo, resuelve las siguientes situaciones:

- En el tablero de la figura 1, ¿cuál fue el primero en jugar: cruces o monedas?.
- En el tablero de la figura 2, ¿es posible que se dé esta situación?.
- En el tablero de la figura 3, ¿en qué casilla se hizo la última jugada?.

Explícalo adecuadamente.

	X	
	O	X
		O

Figura 1

X	O	O
O	X	O
X	O	X

Figura 2

X		X
	O	
O		X

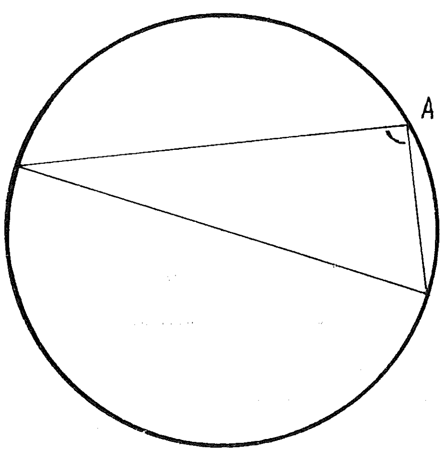
Figura 3

4.- Se quiere batir el record Guinnes de apilamiento de pelotas de tenis. Para ello, se forma una piramide de base cuadrada adosando las pelotas y disminuyendo en cada capa una pelota por lado de los sucesivos cuadrados hasta la bola final, que formará el vértice superior de la pirámide.

Sabiendo que el número de bolas del lado de la base es 1000, ¿cuántas pelotas se verán externamente?.

5.- Demuestra que si el producto de los números anterior y posterior a un múltiplo cualquiera de 6 le sumamos 1, el resultado es múltiplo de 36.

6.- Demuestra que el ángulo A de la figura es recto. El lado opuesto al ángulo es un diametro del círculo.



7.- Tenemos el número suficiente de cubitos como el de la figura 1. Los apilamos formando un cubo de 2x2x2= 8 cubitos. ¿Cuántos cubitos no se ven sin variar el punto de vista de la figura? Basta con que veas una de las caras del cubito para considerar que se ve. (figura 2).

Tomamos 27 cubitos y los apilamos hasta formar el cubo de 3x3x3 (figura 3); ¿cuántos cubitos no ves?.

Se hace lo mismo con el cubo 4x4x4= 64. ¿Cuántos cubitos no ves? ¿Y en el caso de que se apilen nxnxn= n^3 cubitos?.

Explica las conclusiones a las que llegues.

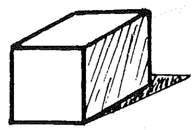


Figura 1

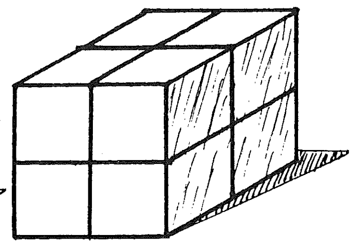


Figura 2

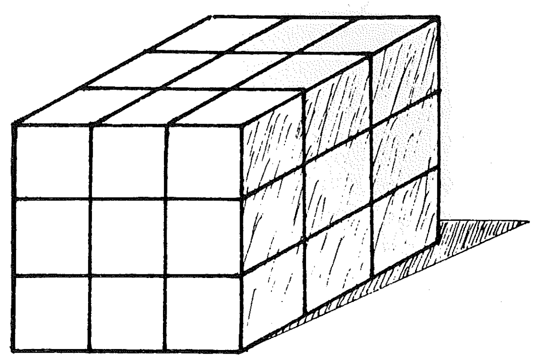


Figura 3

8.- ¡Mira que fácil se "simplifican" esta serie de fracciones!

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1\cancel{66}}{\cancel{66}4} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1\cancel{666}}{\cancel{666}4} = \frac{1}{4} \quad \ldots$$

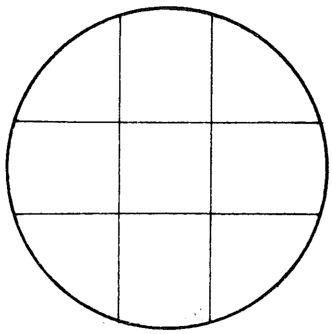
¿Hay fracciones, como la primera de la serie, donde el numerador y el denominador son números entre 10 y 100, con sus cifras diferentes, y que se "simplifican" de igual manera?.

¿Generan fracciones de forma diferente a como lo hace $\frac{16}{64}$?

Encuentra una ley general para esta clase de fracciones.

9.- En el país de los números andan locos para intentar colocar las cifras 1,2,3,4,5,6,7 y 8 en los ocho espacios de esta superficie circular, atendiendo a la siguiente condición:

No pueden estar dos números consecutivos formando frontera por línea, ni vertice. ¿Puedes encontrar una solución?.



10.- Si a los términos de una fracción irreducible se les suma el denominador y a la fracción resultante se le resta la fracción de partida, se obtiene de nuevo ésta. ¿De qué fracción se trata?.

Prueba por Parejas.-

Descripción: Estamos en el Parador Nacional de Las Cañadas del Teide que se encuentra en el interior del Parque Nacional del mismo nombre. Como se puede observar, es un paraje de singular belleza que merece la pena admirar y preservar.

Uno de los elementos paisajísticos más notable de este lugar es la majestuosa imagen del Pico Teide que, como sabes, es el punto más alto de España y de todo el Atlántico Norte.

Las Cañadas del Teide es una caldera de las llamadas de hundimiento. Esto quiere decir que había aquí una montaña que, en un momento determinado, se hundió y dió lugar a la caldera.

Pero vamos a orientar tu atención hacia los aspectos un poco más matemáticos y estudiar algunas cuestiones curiosas que, por cierto, pocas personas conocen.

La forma cónica que observas en el Pico Teide se repite mucho a lo largo de la geografía de las islas. Es una formación montañosa muy típica de los volcanes y se debe a los materiales expulsados por la boca del volcan, se van acumulando a su alrededor, dando lugar así, a lo que se conoce como cono volcánico. Si te fijas, a partir de ahora identificarás muchos conos volcánicos en tus recorridos por las islas.

Actividad.- La actividad que te proponemos tiene que ver con el cono volcánico que vemos en frente: el del Pico del Teide. Para ello te hemos entregado un mapa del Parque Nacional, una regla y una calculadora. Vas a hacer ahora una estimación sobre el volumen de ese cono, teniendo en cuenta las siguientes instrucciones:

- Considera que la forma del cono volcánico es perfecta. Recuerda que el volumen de un cono se calcula multiplicando la superficie de su base por la altura y dividiendo por tres.

- Convenimos en considerar la línea de nivel de la parte baja del teleférico, como la base del cono. Por tanto, el radio de la base se calculará midiendo sobre el mapa la distancia que hay desde ese punto hasta el Pico y aplicando la escala que se indica en el mapa.

- Observando las líneas de nivel, podrás obtener la altura a la que se encuentra el Pico sobre la línea que hemos considerado como la base del cono.

Cuestiones.- Ahora responde a las siguientes cuestiones, procurando explicar los cálculos que realizas, las fórmulas que empleas y presentar los resultados de la forma más clara posible:

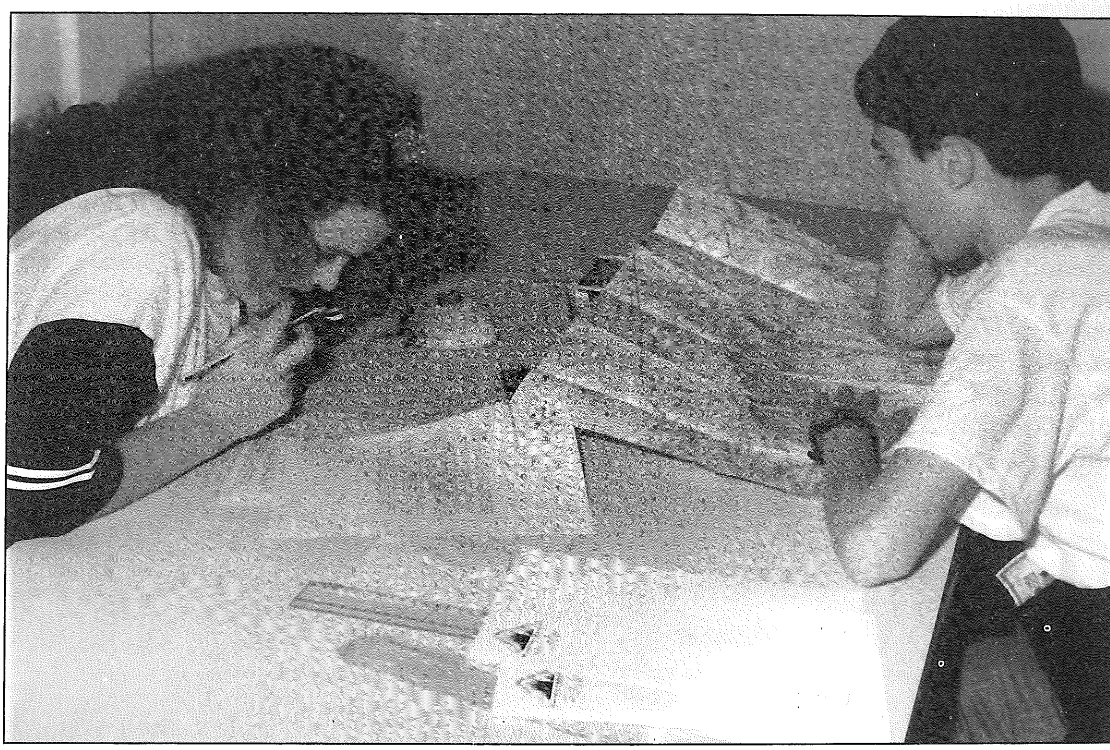
1ª.- Calcula el volumen, aproximado, del cono volcánico del Teide, tal y como se te explica en el apartado "ACTIVIDAD".

2ª.- Supongamos que se desea trasladar todo el material que forma el cono, es decir, dejar un llano a la altura de la línea de nivel que hemos convenido. Suponiendo que cada minuto saliesen diez camiones con diez metros cúbicos de materiales cada uno, y durante las 24 horas del día. ¿Cuánto tiempo se tardaría en trasladar todo ese volumen de tierras volcánicas?. ¿Cuántos viajes hay que dar?.

3ª.- El material extraido se va a utilizar para ganar terreno al mar, así que los camiones van a ir descargando en una franja que se irá adentrando en el mar. La franja tiene 100 m de frente y una altura media de 80 m. Cuando descarguen el último camión, ¿qué largo tendrá la franja?.

4ª.- Una vez que se ha trasladado todo el material, quedará una enorme superficie plana circular donde antes estaba el cono. Considerando que un campo de fútbol mide 60x120 metros cuadrados. ¿Cuántos campos caben en el círculo? ¿Seguro?

José Romero Sánchez
Coordinador Nacional de la Olimpiada



EL ICME-8 DE 1996, EN SEVILLA

Nos complace informar a todos los participantes en la VIII CIAEM, que el Comité Ejecutivo del ICMI (International Comission on Mathematical Instruction) ha acordado por unanimidad en su última reunión, celebrada en Madrid el 9 de Abril de 1991, aceptar el ofrecimiento que la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas presentó como organizadora del 8º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), en 1996, en la ciudad española de Sevilla.

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática "THALES", en representación de la Federación, ha asumido la responsabilidad de llevar a cabo este encuentro internacional. La SAEM "THALES" organizó en Sevilla el 1º Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (I CIBEM) en septiembre de 1990, al que asistieron unos ochocientos profesores, de ellos más de ciento cincuenta americanos y cerca de cien portugueses.

Con este anuncio, pretendemos animaros a preparar ya vuestra participación en dicho Congreso en el que deseamos tenga una presencia importante la Comunidad Iberoamericana. Estamos seguros de que con el apoyo de todos vosotros haremos frente con éxito al reto que supone para nuestra área cultural que la Comunidad Matemática Internacional nos haya confiado la organización de tan importante acontecimiento.

¡Bienvenidos a Sevilla en 1996!

Gonzalo Sánchez Vázquez
Presidente de la FESPM

ICTMA 5

Se ha celebrado en Noordwijkerhout (Holanda) durante el pasado mes de Septiembre la 5ª edición del ICTMA (International Conference of Mathematicall Modelling and Aplications). La organización estuvo a cargo de los componentes del Instituto Freudentahl (antes OW&OC) cuyo director - Jan de Lang - es bien conocido en España por el Proyecto IOWO, traducido en parte al castellano.

A lo largo del Congreso se desarrollaron en paralelo unas sesenta sesiones de trabajo, dedicadas la mayor parte de ellas a presentar experiencias sobre construcción y aplicación de modelos matemáticos a las ciencias físicas y naturales, ciencias sociales, arte, etc..., tanto para la enseñanza Primaria como Secundaria.

Entre las sesiones plenarias, cabe destacar las que estuvieron a cargo de Christine Keitel ("Modelos matemáticos implícitos en la práctica social y enseñanza de la modelización matemática"), Gila Hanna y Peter Harrison ("Fractales en el currículo de Matemáticas) y J. M. Kantor ("Mostrando la importancia de las Matemáticas a través de videofilms").

La próxima edición tendrá lugar en 1993, en EE.UU., y será anunciada oportunamente a través de las páginas de SUMA.

Mª Jesús Luelmo
I.B. San Mateo
Madrid

TESIS DOCTORAL

Mª Luz Callejo

En la comunidad matemática estamos de enhorabuena, el pasado mes de Enero, Mª. Luz Callejo de la Vega leyó su tesis doctoral en la Universidad Paris VII, dirigida por la profesora Dra. Josette Adda de la Universidad Lumière (Lyon II). El título de la tesis es *"Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes de type Olympiades: Une expérience de Club mathématique"* [Las representaciones gráficas en la resolución de problemas de tipo Olimpiadas: Una experiencia de Club matemático], y la propia autora nos hace un comentario-resumen del contenido de la misma.

Resumen de la Tesis

Este trabajo de investigación supone un esfuerzo por comprender mejor el papel que las representaciones gráficas pueden jugar en la resolución de problemas matemáticos y se ha centrado en el estudio sistemático de los aspectos siguientes:

- los elementos que determinan la elección, la interpretación y las modificaciones de las representaciones gráficas en los comportamientos de resolución de problemas;
- las consecuencias de un entrenamiento en resolución de problemas en la utilización de representaciones gráficas.

Dicho estudio ha estado motivado por la constatación del deterioro sufrido por la educación matemática, y en particular por la resolución de "verdaderos problemas" en España en las últimas décadas, y también por el declive del aspecto visual de las matemáticas en beneficio de los aspectos simbólicos, verbales y analíticos.

Las **hipótesis de partida** planteadas al comienzo de este estudio son las siguientes:

Primera hipótesis: La forma en que está redactado el texto de un problema influye en la elección y en la interpretación de la primera representación gráfica.

La elección de esta representación gráfica va a influir en la elección de la estrategia de resolución. De la misma forma, si se elige primero la estrategia de resolución, ésta influirá en la elección de la primera representación gráfica.

La sucesión de representaciones gráficas dibujadas en la resolución de un problema está influenciada por la primera representación.

La confirmación de esta hipótesis significaría que en el proceso de resolución de un problema es necesario saber cambiar de representación, a fin de encontrar la buena estrategia de resolución. Por tanto hace falta preparar a los estudiantes con objeto de que empleen las representaciones gráficas de forma fluida y flexible. Se formula pues así la **Segunda Hipótesis**:

Si se hace reflexionar a los estudiantes sobre la forma en que eligen las representaciones gráficas, se puede favorecer en ellos flexibilidad para que cambien de representación gráfica y cierta fluidez para que consideren varias representaciones gráficas. La flexibilidad y la fluidez les ayudarán a encontrar la buena estrategia de resolución. Es pues necesario entrenar a los estudiantes para favorecerles una actitud reflexiva, crítica y abierta ante la resolución de problemas.

Para hacer este estudio se contó con las hojas de resolución de problemas de los participantes en algunas de las fases finales de las Olimpiadas Matemáticas Españolas (OME). El estudio de este material permitía una aproximación interesante pero limitada al tema de investigación. Por ello se organizó un Club matemático con estudiantes de bachillerato, que condujo la autora del trabajo, para explorar las formas de pensamiento de sus componentes y arrojar así más luz sobre el empleo de representaciones gráficas en el proceso de resolución de problemas. Los problemas seleccionados se propusieron también en dos clases de COU de Ciencias.

El entrenamiento de los estudiantes del Club matemático trataba, como hemos dicho, de desarrollar una actitud reflexiva, crítica y abierta para resolver verdaderos problemas y se ha fundado: en la reflexión sobre el comportamiento seguido; en la explicación de este comportamiento, y en el trabajo y discusión en grupo. Tras la reflexión sobre dicho comportamiento, los estudiantes debían exponer al grupo el proceso de resolución. Esto dió lugar a una discusión moderada por la autora del trabajo, en el curso de la cual se explicitaban los procedimientos que habían contemplado los estudiantes. Así se trató de comprender por qué ciertos caminos no conducían a la solución, y se intentó profundizar hasta el final. En último lugar se consideró el papel que las representaciones gráficas habían jugado en el proceso de resolución.

La recogida de datos acerca de los comportamientos de los estudiantes en la resolución de problemas se hizo a partir de las hojas de resolución (borrador, semiborrador y hojas de limpio) de los participantes en las OME y de los alumnos de COU, de los protocolos de los componentes del Club matemático y de entrevistas individuales a estos últimos.

El análisis de datos de las hojas y de los protocolos de resolución tuvo en cuenta los siguientes aspectos: en primer lugar la elección o no de una representación gráfica; en segundo lugar la interpretación de la representación gráfica y el papel que juega ésta en la aplicación de una estrategia de resolución y en tercer lugar las modificaciones de las representaciones gráficas a lo largo del proceso de resolución.

En el análisis de la evolución de los estudiantes entrenados en el Club matemático, se tomó como punto de referencia sus comportamientos durante las primeras sesiones en el Club y se estudió en detalle: el comportamiento general de resolución (familiarización con el problema, búsqueda de varias estrategias, elección de una estrategia y desarrollo de la misma, revisión del proceso), las diferentes ideas puestas en juego y la capacidad para adaptarlas a las nuevas situaciones y el conocimiento que cada estudiante tiene de sí mismo.

En el trabajo se hace una aproximación al tema de dos modos complementarios: un estudio sincrónico acerca de los comportamientos de cada uno de los grupos de población en relación a las representaciones gráficas utilizadas en la resolución de 6 problemas de las fases finales de las OME y de 2 problemas relacionados con éstos; un estudio diacrónico, caso por caso, de la evolución de 10 participantes en el club durante el entrenamiento que han seguido en el mismo.

El estudio sincrónico se estructura en torno a cuatro series de problemas:

- Minimización de caminos: 4 problemas en los que se trata de encontrar la línea poligonal más corta entre dos puntos, imponiéndole algunas condiciones;
- Problemas alrededor de un triángulo equilátero: se proponen 6 versiones de un mismo problema.
- Expresiones algebraicas e interpretaciones geométricas: 2 problemas en los que el transfert del dominio algebraico al dominio geométrico ayuda en su resolución;
- Puntos y flechas, un problema que puede ser ilustrado mediante un grafo.

Al final de esta parte se pueden esbozar algunas conclusiones parciales entre las que destacamos las siguientes:

1) En relación a los grupos de población, se constató por un lado que los bloqueos engendrados por las representaciones gráficas, y en particular por la presentación del problema son mayores en los alumnos de las clases de COU que en los otros

grupos de población; por otro lado que los estudiantes del Club y los participantes en las OME determinan mejor el papel que las representaciones gráficas deben jugar en la resolución de modo que les ayude en la misma.

2) En relación al tipo de estrategia elegida, se manifestó una preferencia por las estrategias de tipo analítico sobre las de tipo geométrico. Esta preferencia, junto con la "rigidez geométrica" han determinado la aparición y persistencia de determinadas representaciones gráficas que bloquean al estudiante en el proceso de resolución.

El estudio de los participantes del Club matemático, caso por caso, ha permitido destacar las relaciones entre las representaciones gráficas y las características individuales de los sujetos y enriquecer y matizar las conclusiones anteriores.

De forma breve esbozamos las **conclusiones finales** de este trabajo:

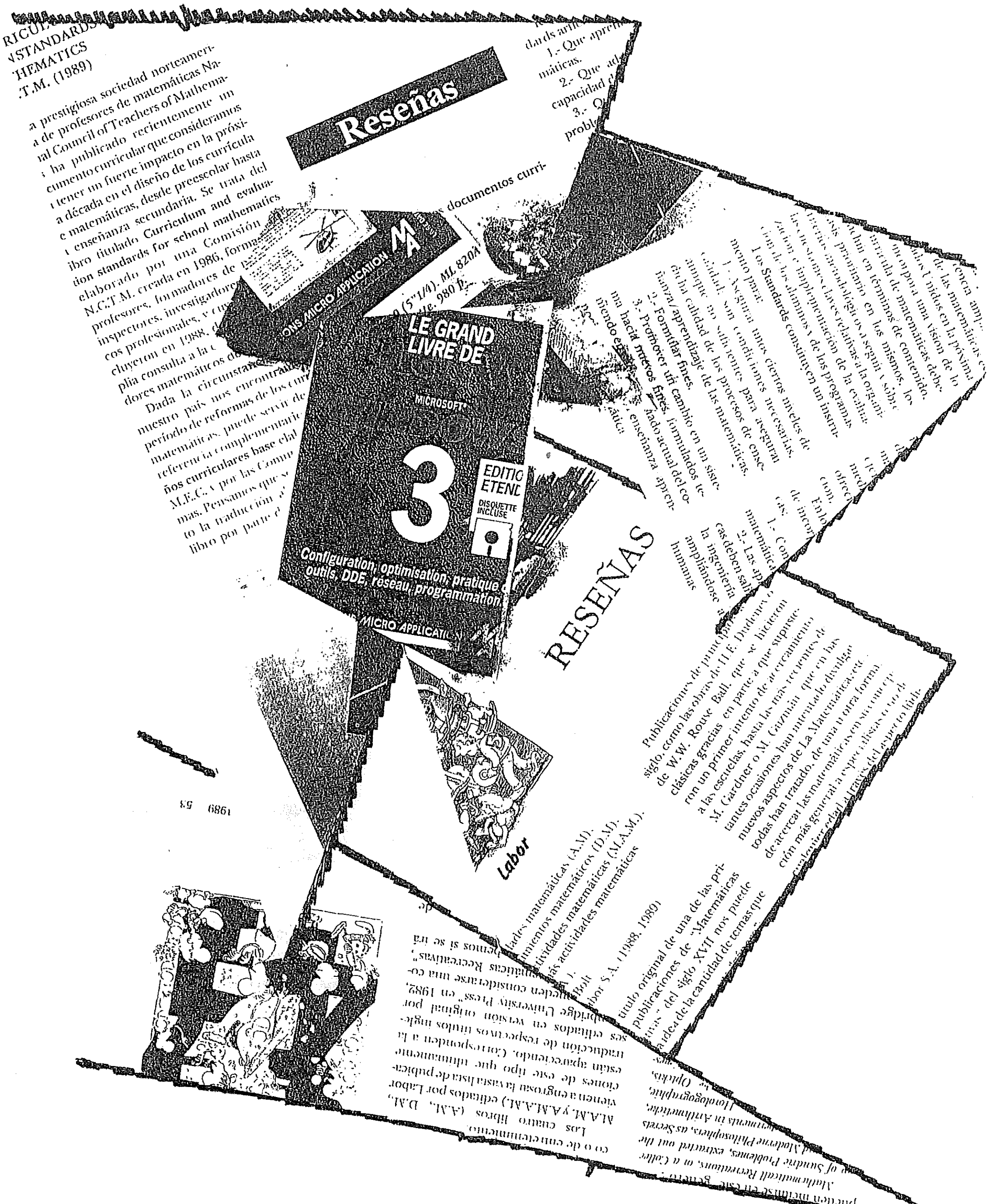
• Respecto a la primera hipótesis según la cual se relacionaba la elección de la primera representación gráfica dibujada en la búsqueda de la solución con la presentación del problema, no sólo se ha confirmado sino que ha aparecido una nueva variable independiente: las habilidades específicas desarrolladas por los estudiantes como los conocimientos de programación de ordenadores o de otras ramas científicas. Respecto a la presentación del problema se distinguieron dos aspectos: la formulación del problema (palabras, signos, gráficos, orden en que se da la información, forma de plantear la cuestión, contexto extramatemático del enunciado) y las condiciones en que el problema ha sido formulado (presupuestos de la comunicación, sobreentendidos, leyes del discurso, pragmática del cuestionamiento escolar). Con relación a la formulación del problema se constató que ésta ha determinado las representaciones gráficas cuyo papel es resumir o ilustrar el enunciado, en particular en el caso de enunciados de problemas geométricos; respecto a las condiciones de enunciación se ha podido comprobar que dichas condiciones han determinado las "representaciones-tipo" asociadas a ciertos problemas.

La primera hipótesis afirmaba también la influencia de la primera representación gráfica sobre las que se dibujarían más tarde. En el conjunto de representaciones dibujadas podemos distinguir una representación que llamaremos generatriz, y en algunos casos varias representaciones generatrices, que se caracterizan porque cada una de las otras puede reducirse a la(s) generatriz(ces) de distintas formas, dependiendo de la familiarización del estudiante con distintas aproximaciones a la realidad (por ejemplo, los conocimientos de programación o de otras ramas científicas).

• La segunda hipótesis esbozaba un tipo de entrenamiento que pretendía que los estudiantes no se aferrasen exclusivamente a sus propias representaciones gráficas sino que también contemplaran las que utilizaban sus compañeros, que reflexionasen ante el enunciado de un problema, que lo estudiasen, lo explorasen y fuesen capaces de buscar otras formulaciones en lenguaje natural o gráfico. En las entrevistas individuales, los estudiantes han advertido los hechos siguientes en relación al empleo de representaciones gráficas: haber concebido ciertas representaciones gráficas intentando imitar a sus compañeros; haber descubierto una adecuada utilización de las representaciones gráficas durante su estancia en el Club; haber apreciado las representaciones gráficas originales empleadas por dos de sus compañeros. Estas afirmaciones se pueden corroborar con los protocolos de resolución. Además, los estudiantes han prestado especial atención a los siguientes procedimientos: salirse del cuadro (físico o mental) delimitado por el problema; descomponer y recomponer la situación y dinamizar un problema planteado de forma estática, aunque no todos los hayan interiorizado de la misma forma.

Por último la evolución de los estudiantes ha sido más claramente positiva en los de tendencia "geométrica" que en los de tendencia "analítica", según la clasificación de los espíritus matemáticos hecha por Krutetskii.

Mª Luz Callejo. *Profesora de Didáctica de las Matemáticas del I.P.E.S. de Madrid.*



RESEÑAS

LES AVENTURES D'ANSELME LANTURLU

Jean Pierre Petit

El material de divulgación científica es siempre un recurso didáctico a tener en cuenta por la comunidad docente, más aún si se trata de comics y estos reúnen la calidad de los publicados por esta editorial francesa. No es frecuente que un libro de divulgación reúna a autores que dominen los campos del comic y de la ciencia, como tampoco es fácil que se puedan presentar los problemas, de cada rama tratada, con actividades originales, intuitivas y comprensibles para alumnos de enseñanzas medias. Tal como señalan los autores en la presentación de la colección, *«.. un curso o un texto de vulgarización es una satisfacción....¡¡¡para el autor!!!. ¡El comic científico, al contrario, representa el triunfo del lector!»*. El lector se identifica con los personajes, experimenta y vive los más altos descubrimientos de la ciencia a medida que la descubre. Por todo ello, la colección que aquí se presenta resulta especialmente atractiva, tanto para el uso de alumnos como de profesores, con lo que tiene ganado un lugar en la biblioteca científica de los centros de enseñanza, tanto como en los Seminarios y Departamentos de dichos centros o en la biblioteca particular de los amantes de la divulgación científica.

La colección reúne textos de diversos autores, entre los que comentamos la serie dedicada al personaje *Anselme Lanturlu*, cuyos títulos son tan sugerentes como :**«El Geometricon»**, **«El Topologicon»**, **«La informática»**, entre los dedicados a las matemáticas, así como **«Todo es relativo»**, **«El agujero negro»**, **«Big Bang»**, **«Mil billones de soles»**, **«Energéticamente vuestro»**, **«Cosmic Story»**, etc, dedicados a otras ciencias.

En cada uno de los libros, el personaje, Anselme Lanturlu, realiza un viaje recorriendo países/problemas prácticos de los campos científicos tratados. La resolución manipulativa de los problemas le permitirá llegar a conflictos cognitivos que debe superar con la ayuda de expertos. Así, en *«Todo es relativo»*, será el *Sr. Albert*, dueño del tiovivo más rápido del mundo, en el que surgen los problemas de la teoría relativista, quien le ayude a desvelar estos problemas; en *«El Geometricon»*, la *«Casa Euclides»* envía por correspondencia, material para: trazar geodésicas, calcular áreas (baldosas) y perímetros (cerca metálica) y suministra ayuda en caso de dificultad, sin que esta ayuda dé por sí sola la solución a los conflictos planteados.

La trama así tejida, junto con la riqueza plástica que permite la técnica del comic, nos va introduciendo en los razonamientos realizados por el personaje, mostrando de forma verosímil las contradicciones entre estos razonamientos y la realidad apreciada. De esta forma, vamos enriqueciendo nuestra mirada científica a la vez que sentimos la necesidad de profundizar en la reflexión teórica. El final de la aventura puede ser tan rico que nos haga necesaria la actuación de Sophie, compañera de aventuras de Anselmo, quien, ante el desmayo sufrido por éste frente a una cinta de Moebius, proclama: *«¿Hay un matemático en la sala?.*

Pese a que los libros están editados en francés, el lenguaje utilizado por el autor y la riqueza de las situaciones presentadas le confieren una calidad didáctica que merece el esfuerzo.

El autor, *Jean Pierre Petit*, es Doctor en ciencias, investigador del CNRS (Centre National de la Recherche Scientifique). Profesor en una escuela de Bellas Artes y dibujante (ha editado comics en la serie Spirou y Fantasio).

CÓMO ENSEÑAR LAS MAGNITUDES, LA MEDIDA Y LA PROPORCIONALIDAD

Mª Dolores de Prada
Ed. Ágora, Málaga (1990)

La autora es una especialista reconocida en el campo de la Didáctica de las Matemáticas; esto queda probado por sus numerosas publicaciones en esta materia, su formación universitaria en matemáticas y pedagogía (es Licenciada en Matemáticas y en Pedagogía), y finalmente por su prolongada actividad como conferenciante y directora de cursos por todo el territorio nacional.

La obra -obrita u opúsculo por su extensión- toca un tema muy interesante por estar especialmente "maltratado" en numerosos textos escolares de EGB. La Matemática o las matemáticas es junto con la Física la ciencia de la magnitud por excelencia, es razonable esperar que en un estadio temprano del aprendizaje de la matemáticas deba tratarse el tema de las magnitudes y los intimamente relacionados con ellas, a saber: las medidas de las mismas y las proporcionalidades existentes.

El profesor que se enfrenta con el problema de tener que enseñar estos temas debe hacer una primera elección en materia de rigor y en definitiva de lenguaje. La opción consiste en limitarse a dar ejemplos de magnitudes y ejercitar levemente a sus alumnos en el manejo de las mismas, pero obviando la propia definición de magnitud, o por el contrario aprovechar los conocimientos de la Teoria Intuitiva de Conjuntos (concepto de conjunto cociente, operaciones con clases de equivalencia, relaciones de orden, aplicaciones biyectivas...), y presentar una de las estructuras algebraicas más simples: la de semigrupo.

La autora propone el segundo camino y acompaña su exposición de una buena cantidad de observaciones sobre la Historia de las Matemáticas que aligeran aún más una lectura que ya resulta agradable de por si.

El libro tiene 4 capitulos, una introducción y un apéndice. Los capitulos impares son los "científicos" (en el 1º, se define el concepto de magnitud, se presentan los tipos de magnitudes y se describen algunas magnitudes de especial importancia en la matemática elemental -longitud, amplitud, superficie- finalizando con el estudio sobre la medida de una magnitud escalar. El 3º, trata de la proporcionalidad entre magnitudes, incluyendo un estudio muy oportuno sobre la proporcionalidad simple y compuesta, utilizando el teorema de Thales y las configuraciones de Desargues y Pappus y terminando con la aplicación al importante tema de la semejanza de triángulos).

Los capitulos pares son los "pedagógicos" que completan de una forma muy importante los llamados científicos. En estos dos capitulos se ponen ejemplos de actividades (dándose soluciones a algunas de las mismas), se sugieren pautas para realizar las evaluaciones -no hay que olvidar que la evaluación condiciona para bien o para mal todo el aprendizaje- y se hacen reflexiones sobre la psicologia del aprendizaje (motivación, capacidad evolutiva...).

El apéndice es una información sobre una visita a un banco. Uno se pregunta si era necesario o beneficioso leer toda la obra antes de girar la visita a un banco, pero la pregunta no está bien formulada, la respuesta a otra pregunta que el lector, o el futuro lector, de la obra puede hacerse sería "Si, es bueno que al final de un esfuerzo teórico en el que se ha necesitado papel, lápiz y diversos instrumentos -como la escuadra y el cartabón- se complete con una actividad práctica que tenga alguna relación con lo ya hecho... ¿y no es algo relacionado con la proporcionalidad el que los bancos presten **más** al que **más** tiene?". Este apéndice, junto con otros detalles, hace ver que la autora ha comprendido el espiritu de la Reforma recién aprobada por la LOGSE, no se trata de echar al fuego los viejos teoremas o las formulaciones teóricas (incluso las de corte conjuntista), sino de presentarlas impregnadas en las actividades y provocar que el alumno aprenda algo más del entorno en el que está.

Consecuencia de todo lo dicho es que el libro debe ser incluido en la lista de los libros que el aula de matemáticas de la secundaria obligatoria debe tener; y puede ser de utilidad a asesores de los CEPs, profesores de matemáticas y alumnos acostumbrados a leer por su cuenta, es decir, a aquellos que han dejado de ser analfabetos.

Antonio Luis Rodríguez López-Cañizares
Inspector de Matemáticas en Granada

REVISTA EDUCÂÇAO E MATEMÁTICA

El I CIBEM ha propiciado un mayor acercamiento a los movimientos de Didáctica de las Matemáticas en Portugal. Como consecuencia de estos contactos hemos podido conocer materiales y publicaciones portuguesas en este campo de investigación.

Una de estas publicaciones es la revista que nos ocupa, editada por la **ASSOCIAÇÃO DE PROFESORES DE MATEMÁTICA** en Lisboa, con periodicidad trimestral, y una tirada de 2.000 ejemplares. Con una cuidada edición, en sus aproximadamente cuarenta páginas a dos tintas, y con abundante apoyo gráfico, diferentes colaboradores presentan artículos variados, que abarcan desde sugerencias de secuencias para la enseñanza de las matemáticas, hasta análisis didácticos de conceptos de la matemática elemental. El encuadre de los autores de los artículos es amplio, incluyendo procedencias universitarias de ramas psicológica, pedagógica y matemática, así como profesores de los niveles primario y secundario de la educación portuguesa. Aparece también alguna colaboración de especialistas de otras nacionalidades.

Revista da Associação de Professores de Matemática

En el Consejo de Redacción de la revista encontramos nombres de ponentes que tuvimos ocasión de conocer en el I CIBEM y otros congresos hispanoportugueses, como Eduardo Veloso, Henrique Guimaraes y Paulo Abrantes, colaborando con artículos profesores como Joao F. Matos, Lourdes Serrazina, y otros ponentes y panelistas ya familiares en el medio de la Didáctica de las Matemáticas.

La revista está organizada en dos partes, la primera formada por colaboraciones diversas, y la segunda por secciones fijas como **Vamos a jogar**, **Problema do trimestre**, **Materiais para a aula de matemática**. El editorial hace una introducción al motivo general de cada número, constituyéndose en algunas ocasiones en núcleo temático definidor de los artículos y secciones del número correspondiente. Por ejemplo, el número 13, del primer trimestre de 1990, está dedicado a los materiales en la enseñanza de las matemáticas, completando los artículos con un sucinto inventario, realizado por el Consejo de Redacción, de los materiales más significativos, presentados en orden alfabético.

El predominio de experiencias de tipo práctico en el aula, así como la utilidad para el profesor de los análisis realizados, nos hace considerar la lectura interesante para los centros escolares y equipos de apoyo de enseñanza primaria, preferentemente. Los interesados pueden dirigirse a:

Revista **Educação e Matemática**
a/c de Leonor MOREIRA
R. Prof. Francisco Gentil, 38 - 6º Esqu.
1600 LISBOA

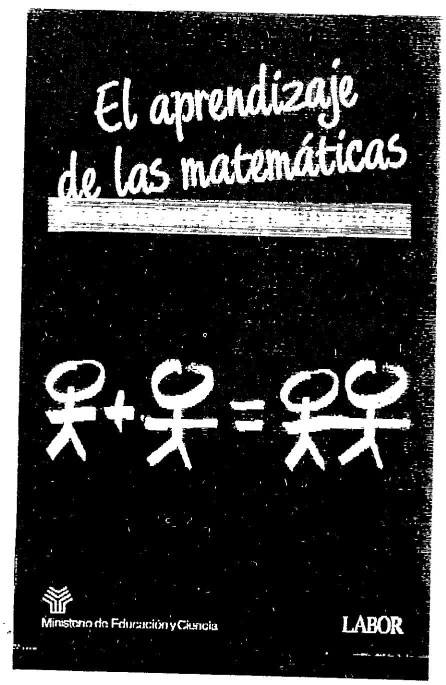
Pablo Flores Martínez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Dickson, L.; Brown, M. y Gibson, O. (1991)
MEC-LABOR: Barcelona

En este libro los autores proporcionan una información sobre alumnos de 5 a 16 años en materias de pensamiento espacial, medida, número y lenguaje. Es el fruto de un proyecto de recuperación de los alumnos rezagados en matemáticas y dan noticia a los docentes del estado actual de conocimientos relativos a los procesos cognitivos en matemáticas.

A lo largo de 399 páginas desarrollan los cuatro bloques de contenidos, comenzando por el de Pensamiento espacial, citando los hemisferos cerebrales, pasando por la teoría de Piaget y de Van Hiele, los trabajos de Fielker, Kerslake, Fisher, etc... Después la representación bidimensional del espacio tridimensional, el desarrollo de sistemas de referencia y la geometría de transformaciones.



El segundo bloque dedicado a Medida comprende desde la naturaleza aproximativa de la medida al desarrollo de longitud y área, a la medición de ángulos, a la noción de masa, peso y su medición. Destacan los autores la dificultad que entraña para los niños distinguir entre peso y volumen; entre volumen interno (capacidad) y volumen externo (volumen del espacio ocupado); entre volumen liquido y capacidad; entre noción de tiempo y decir la hora que es; entre área y perimetro, etc...

En el tercer bloque dedicado al Número exponen los autores los estadios de Schaeffer, los estadios de Piaget, los estadios iniciales de desarrollo de la capacidad de sumar y de restar, de la estimación, aproximación, etc... para terminar con el estudio de las fracciones y las operaciones con decimales.

El cuarto bloque dedicado al Lenguaje es dedicado a examinar la relación existente entre lenguaje y pensamiento y los autores siguen la clasificación de Newman para presentar los errores más comunes cometidos en lenguaje. Terminan este bloque con las dificultades especificas que experimentan los niños con el lenguaje de las matemáticas.

El libro de Dickson, Brown y Gibson es un libro bien documentado con una aportación de trabajos relativos a los temas que trata bastante extensa, con una bibliografia abundante y con un estilo claro y ameno que permite a todo lector adentrarse en su contenido y seguir leyendo porque todo lo que en él se dice es útil y provechoso para el docente de matemáticas, sea cual fuere el nivel en donde imparta sus clases. En suma un trabajo que debe ser leido y releido por aquellos que estén interesados en conocer las corrientes actuales en el aprendizaje de las Matemáticas.

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia

LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS

Resnick, L. B. y Ford, W. W. (1990):
Paidós-MEC: Barcelona

El libro que nos ofrece Paidós-MEC sigue la linea de otras recientes publicaciones como "**El desarrollo del pensamiento conceptual en la Escuela Primaria**" de Peter Langford o "**El niño y la aritmética**" de Vicente Bermejo, ya que a lo largo de más de 300 páginas ofrece al lector interesado en temas de matemáticas un compendio de fundamentos psicológicos de la enseñanza de las matemáticas.

Los autores comienzan analizando la teoria de Thorndike sobre la formación de vínculos establecidos entre los estímulos y las respuestas aplicadas a la aritmética junto con la critica formulada por Brownell de no tener en cuenta las diferencias cualitativas. Después las jerarquias de aprendizaje para la suma, el conteo, etc..., aludiendo a Gagné y Resnick, proponiendo los estudios de escalo-namiento y entrenamiento. Terminan este primer bloque tratando el análisis de la ejecución de las tareas de cálculo y para ello analizan los procesos de solución de ecuaciones sencillas acudiendo a la simulación por ordenador para determinar los pasos que sigue el estudiante cuando se plantea un problema y trata de resolverlo.

Las matemáticas como comprensión conceptual y como resolución de problemas es el segundo bloque de contenidos que presentan los autores de este libro, comenzando con la exposición de la teoria de Bruner y de los materiales manipulativos de Dienes. Después en la Resolución de Problemas destacan la dicotomía existente entre el procesamiento que funciona "de arriba abajo" y de "abajo arriba" aludiendo a la "comprensión súbita" y a las estrategias de resolución de problemas con la presentación de los trabajos de Polya.

No podia quedar fuera del estudio de los autores de este libro las alusiones a Piaget y a las estructuras cognitivas junto con las críticas que se hacen a su teoria, centrándose en tres aspectos, los que cuestionan la relación entre los datos y las conclusiones y los que cuestionan la programación biológica.

Se preguntan Resnick y Ford cómo se almacena todo lo que sabe el individuo y para ello dedican un capítulo al análisis de la comprensión desde la perspectiva del procesamiento de la información explicando como realizan las personas deducciones.

Concluyen los autores diciendo "lo que hemos hecho a lo largo de este libro ha sido revisar e interpretar un sector importante de una naciente psicologia de la instrucción" y estamos seguros que su trabajo será analizado tanto por psicólogos como por pedagogos como por matemáticos y de su interpretación y aplicación se beneficiará la Didáctica de las Matemáticas.

Andrés Nortes Checa
Universidad de Murcia


Máquina de hacer perrerías
matemáticas o Función.
y = f (x)
El ingenuo
dependiente
El ingenuo
dependiente.

MISCELÁNEA

LOS TRES PIES DEL GATO

Fernando Corbalán

El punto de partida

Desde hace algún tiempo, el periódico **Heraldo de Aragón**, que se edita en Zaragoza y se difunde sobre todo en Aragón, donde tiene una sólida implantación, publica un suplemento semanal titulado **Heraldo Escolar**, que aparece los miércoles, con actividades para las aulas. Desde su aparición, y financiado por una Caja de Ahorros, se reparte gratuitamente en todos los centros educativos de la región, en un número suficiente para que haya al menos un ejemplar por aula.

A partir de una reestructuración del periódico, con una nueva diagramación y formato, en el curso 88/89 comenzó a aparecer en el suplemento una sección de matemáticas, titulada ***Para resolver***, realizada conjuntamente por el que suscribe y José Mª Gairín[1]. En ella aparecían actividades matemáticas de las que se suelen encuadrar como matemáticas recreativas: problemas, investigaciones, juegos matemáticos,... Al comienzo del pasado curso 89/90, por parte de la coordinadora del **Heraldo Escolar** se propone un nuevo enfoque de la sección, en la perspectiva del manejo por parte de los escolares del periódico y la búsqueda de aspectos matemáticos en él: puesto que el periódico de los miércoles es accesible para todos los alumnos, se trataría de que en cada uno de los números apareciera una actividad relativa a algún artículo perteneciente al Heraldo del miércoles anterior.

Ese es el reto a afrontar, además en solitario. Y lo hago con una cierta prevención, por no llamarla miedo. En la escasa bibliografía sobre prensa y matemáticas que yo conocía no había ideas suficientes como para llenar un curso. Y además, aunque algunas fueran aprovechables, existía el peligro de que no aparecieran artículos apropiados en el número del periódico que había que utilizar. Pero la propuesta era interesante, y, con la reserva mental de que si se acababa el "rollo" en algún momento del curso se pasaría a un diseño más "clásico" de la sección, comienza la andadura. Estamos en septiembre de 1989 y acaba de nacer: ***Los tres pies del gato***.

En lo que sigue trataremos de recapitular los temas que han ido apareciendo a lo largo del curso, como ejemplo de las posibilidades de encontrar matemáticas en los periódicos y de distintas manera de realizar actividades a partir de ellas. Unas han sido más brillantes que otras, las ha habido con buena y mala respuesta por parte de los lectores. Pero en todo caso, hemos visto un caudal de actividades realizables con las matemáticas y con la prensa diaria. Y ello con las limitaciones ya expuestas de no poder hacer seguimiento de noticias a lo largo del tiempo, sino utilizando ejemplares concretos.

Los temas aparecidos

En cada una de las entregas de «Los tres pies del gato», desde septiembre a junio, salvo los periodos de vacaciones escolares, han aparecido normalmente dos actividades. Una de ellas era del género típico de matemáticas recreativas (problemas, investigaciones, juegos,...) que no trataremos aquí.

La otra es la que hacía referencia a un artículo (o varios, ocasionalmente) del Heraldo de la semana anterior. Además, cada cierto tiempo (seis-ocho semanas), aparecían soluciones a las actividades propuestas enviadas por escolares. En ningún momento (salvo en el caso de los problemas propuestos en la II Olimpiada Matemáticas en EGB) se aportaron soluciones por parte del que suscribe. En las soluciones se hacía especial hincapié en los procedimientos utilizados para obtenerlas.

Haremos un agrupamiento por temas matemáticos de las actividades, dando una ligera idea del artículo periodístico al que se refería. Algunas de las actividades contienen varios tópicos.

Porcentajes

Pensamos que tendrían que dedicarse más (y/o mejores) esfuerzos en la escuela al manejo de los porcentajes, porque la realidad (fácilmente constatable en cualquier nivel educativo) es que se dominan con dificultad. En la sección que comentamos aparecieron en las siguientes ocasiones: *Inversiones y porcentajes* (4/10), en que se trata del volumen de inversiones públicas en Aragón, utilizando pesetas constantes. En *El precio del suelo* (18/10), se opera con las variaciones del precio del suelo edificable en Zaragoza y su incidencia en el precio final de las viviendas. Y en *Victor d'Hont y su regla electoral* (25/10) se utilizaba la regla para asignar diputados con unos hipotéticos resultados y se estudiaba cómo influía la concentración o dispersión de votos. *Un modelo de coche* (1/11) trataba de las variaciones en el precio de las distintas versiones de un mismo modelo de coche, así como la incidencia en él del equipamiento. Por fin, *Los autobuses y el tráfico* (17/1) estudiaba los porcentajes de ahorro con la utilización del bonobus, antes y después de la bajada de los precios del transporte urbano de Zaragoza, así como el tanto por ciento de descenso.

Representaciones gráficas y escalas

Consideramos que constituyen otro aspecto fundamental de la cultura que habría que asegurar en el sistema educativo. Y no suele ocurrir así. Por el contrario, incluso son frecuentes representaciones gráficas no muy acordes con la realidad en los medios de comunicación. Justamente dos de las actividades propuestas trataban de dos malas gráficas aparecidas en el Heraldo (*Dinero del deporte*, el 24/1, sobre el dinero destinado a actividades deportivas por la Diputación General de Aragón en distintos años, y *Las nuevas monedas* (14/3), en que se examinaba un gráfico con distintas características de las nuevas monedas que iban a aparecer en el sistema monetario español).

Además en otros casos se trataba de planos o mapas y los elementos necesarios para saber la escala o la obtención de datos numéricos que aparecían en ellos (*Cambio de las direcciones de tráfico de Zaragoza* (28/2), respecto a una información sobre una reestructuración de los sentidos de circulación en una zona de la ciudad, o *La Vuelta ciclista a España en Zaragoza* (16/5) con el recorrido de una etapa contra reloj en nuestra ciudad).

Otro aspecto importante que ha aparecido en esta sección ha sido la presentación de datos en forma gráfica. Así pasaba, por ejemplo, en *Las centrales nucleares* (5/12), sobre los gastos de construcción y/o reparación de centrales atómicas, a partir del accidente de la de Vandellós, o con *Las empresas públicas* (21/3) con las cuentas de resultados de distintas empresas del INI.

Manejo de magnitudes

No suele ser muy frecuente la elección acertada por los alumnos, y futuros ciudadanos, de las mejores unidades de las distintas magnitudes de longitud, superficie, peso, volumen,..., para tratar los problemas. Y tampoco lo es que se hagan presentaciones atractivas de relaciones farragosas de números o de cuadros numéricos.

En ***Los tres pies del gato*** han aparecido estos temas en distintas ocasiones. En *Sequía e inundaciones* (22/11) se trataba, en base a las inundaciones ocurridas en Málaga, del peso y el volumen del agua caída, así como de las maneras de medir la cantidad de precipitaciones. En *Medida de terrenos* (29/11) se estudiaba cómo repartir una determinada superficie para obtener el máximo de canchas de baloncesto, o de tenis, o para parcelar en huertos. Se preguntaba sobre la variación de las magnitudes de superficie y volumen al cambiar la escala en *Planos y maquetas* (28/2) y en *Coches fabricados en Aragón* (23/5) se intentaba ver cuánto ocupaban, en longitud y en volumen, los coches fabricados en un determinado período de tiempo en la fábrica de la General Motors, cercana a Zaragoza. Y se trataba del significado de la pendiente de los puertos a cuenta de la Vuelta Ciclista (16/5).

Lectura de tablas numéricas y obtención de relaciones entre magnitudes

Con cierta frecuencia la información se nos da en forma de tablas numéricas, en las que quizás no aparecen exactamente los datos que buscamos, pero a partir de los cuales se pueden deducir. Asimismo se pueden obtener relaciones (funcionales o de otro tipo) entre las distintas variables que en ellas aparecen.

Esos temas han aparecido en *Cálculos húngaros* (21/2) en que a partir de una tabla con algunos datos sobre Hungría se pide deducir otros. También en *La Final Four* (25/4) sobre la fase final de la Copa de Europa de baloncesto celebrada en nuestra ciudad, donde se trata de organizar los múltiples datos estadísticos de los partidos celebrados y cómo decidir cúales fueron los mejores jugadores en ellos. Asimismo en *Incentivos regionales* (30/5) en que se buscan relaciones a partir de una tabla de financiaciones de la Comunidad Europea de distintas comunidades autónomas.

Estimaciones

Como señala el punto 78 del Informe Cockroft [2] "la industria y el comercio dependen en gran parte de la capacidad de estimar". A pesar de lo cual no se suele practicar demasiado.

En nuestra sección aparecieron con cierta frecuencia actividades en las que había que realizar estimaciones. En particular en *Los folios del Heraldo* (20/9) donde había que hacer hipótesis para deducir el número de folios que es necesario escribir para 'llenar' un ejemplar del periódico. O en *Las letras más frecuentes* (27/9) donde se trataba de inferir las letras más utilizadas en castellano a partir del conteo de las que aparecen en artículos del periódico.

Manejo de grandes cantidades

En las informaciones que nos llegan aparecen muchas veces cantidades enormes (cientos de millones o billones de pesetas; cantidades de ejemplares fabricados en un determinado lapso de tiempo-coches, televisores, casas,...-, número de declaraciones de impuestos,...). Y a partir de un determinado umbral, si no se utilizan reconversiones o formas imaginativas de presentación, es muy difícil hacerse idea del orden de magnitud que suponen. Por ejemplo, los gastos en armamento de un Estado se entienden mucho mejor si se expresan por día en vez de anualmente, o si se divide por el número de habitantes, es decir, si se halla el 'gasto per cápita en armas'.

A lo largo del año ha habido múltiples cuestiones relativas a estos temas. Por ejemplo en *Grandes cantidades de dinero* (8/11) se trataba del tiempo que se tardaría en contar todo el dinero que se recauda en las Declaraciones de la Renta (lo cual presuponía una estimación también), así como el volumen que ocuparían los impresos y lo que pesarían. O en *Gastos de armamento* (7/2) distintas maneras de estimar lo que significan en el conflicto del Oriente Medio, y ello como parte del Día Escolar por la Paz.

Otros temas

Además de todo lo anterior, que apareció con asiduidad, hubo otros temas que aparecieron ocasionalmente. Entre ellos, las distintas teorías astronómicas, cuando el lanzamiento del telescopio espacial Hubble o el tamaño de la Tierra contado por el número de coches necesario para hacer una fila tan larga como un meridiano o un paralelo. También los números primos y compuestos, con motivo de *Un nuevo año* (31/1) o la cinta de Möbius en *Número de caras* (30/5).

Algunas consideraciones sobre la aceptación de la sección

Siempre es difícil saber la aceptación que tiene en los lectores una sección concreta de un periódico. En nuestro caso, además del contacto personal con profesores de los distintos niveles, teníamos un método indirecto de saberlo: el número de cartas que escribían los alumnos/lectores (bien es verdad que estaban incentivadas por el hecho de que a todos los comunicantes se les ofrecía un regalo, consistente en un libro de problemas de matemáticas 'recreativas').

El flujo del correo ha sido muy irregular, dependiendo de vacaciones, épocas de exámenes, etc. Lo normal era un número de cartas del orden de 5 por semana, muchas de ellas correspondientes a colectivos de clase (todo un grupo de alumnos o buena parte), aunque hubo semanas que llegaron a unas 15. Los comunicantes eran en su mayoría alumnos de ambos sexos del Ciclo Superior de EGB. También había bastantes de Ciclo Medio, y eran ocasionales los que cursaban Enseñanzas Medias. Como anécdota, hubo una comunicante un poco madura para ser estudiante: nos confesó tener 78 años (y lo corroboraba la caligrafía y los sobres utilizados) y durante algunos meses nos escribió con regularidad.

En cuanto a los temas que mayor éxito tuvieron fueron los titulados *Grandes cantidades de dinero*, *Sequía e inundaciones*, *Los autobuses y el tráfico*, *Un nuevo año* y *La Final Four*. Las razones no son demasiado evidentes, aunque creemos que tienen mucho que ver con el contexto en que se desarrollan, algo frecuentemente olvidado en nuestras aulas.

Por el contrario la correspondencia fue escasa (y en algunos casos nula) en los temas referidos a Estimaciones, Relaciones entre magnitudes y Lectura de Tablas. En esta caso parece que habría que mirar a los temarios que se desarrollan en los centros para encontrar las razones.

Y ya para acabar, animar a todos los profesores a acercar, aunque solo sea un poco, las matemáticas y la realidad. Un buen método para ello creemos que lo constituye la prensa y, más en general, todos los medios de comunicación. Si hemos contribuído a ello, siquiera mínimamente, con nuestro trabajo a lo largo del año en *Los tres pies del gato* y ahora con este artículo, nos sentiremos ampliamente recompensados. Y señalar que, a pesar del miedo inicial, el curso, con sus muchas semanas, se ha acabado y no ha faltado en ningún momento el artículo del cual extraer matemáticas.

Incluso, y no hay que tomarlo como bravata, se puede seguir durante bastante tiempo la "producción" sin riesgo de caer en la repetición. Ahora estoy convencido que se puede coger el ejemplar de un día cualquiera del periódico que se tenga más a mano y encontrar materiales suficientes como para trabajar matemáticas en distintos niveles durante bastante tiempo, con gusto, aprovechamiento y además apegadas a la realidad (o al menos a la realidad que aparece en los medios de comunicación).

Si tenemos en cuenta el atractivo que suponen los medios de comunicación (sobre todo la televisión) para nuestros alumnos, creo que hay todo un filón de 'buenas vibraciones' para hacer las matemáticas más atractivas.

Fernando Corbalán.
CEP. Zaragoza

Bibliografía

[1] Ver al respecto la Ficha nº 24 del Extra Popularización de Suma, nº 4, Otoño 1989, pgs. 108-109.

[2] INFORME COCKROFT. **Las matemáticas sí cuentan**. Servicio de Publicaciones del MEC, Madrid, 1985.

hoja para fotocopiar y enviar

Nombre y Apellidos: ______________________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C.P.: __________

Provincia/País: ______________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ______________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

☐ Renovación (Nº de suscriptor __________ Firma:

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número __________ inclusive, al precio de: 3.000 ptas. particulares y 3.500 Centros. Europa $35 U.S.A. y $45 U.S.A. resto, cuyo importe haré efectivo mediante:

☐ Cheque bancario adjunto

☐ Domiciliación bancaria

☐ Giro Postal Nº________ Fecha __________

Domiciliación Bancaria

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________

Agencia: ______________________ Nº C/C: __________

Calle: ______________________

Población: ______________________ C. Postal: __________

Provincia: ______________________

Titular: ______________________

Firmado: ______________________ Fecha: __________

Firma:

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1304, 21080 Huelva (España)**. A esta dirección se pueden solicitar, también, **los números atrasados, al precio de 1.200 ptas. más gastos de envío**. La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja. Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

RECOMENDACIONES

1. De carácter general:

1.1. Los artículos se remitirán por triplicado, mecanografiados a doble espacio, por una sola cara y en formato DIN A-4.

1.2. Adjunto al artículo se redactará un resumen (Abstract) de cinco líneas como máximo, que no necesariamente tiene que coincidir con la introducción. Debe ir escrito en hoja aparte.

1.3. Si el/los autor/es ha/n utilizado un procesador de textos, recomendables Wordstar y Wordperfect 5.1, es conveniente enviar un diskette para facilitar el trabajo de edición y posibles erratas.

1.4. Se identificará el autor o los autores debidamente al final del artículo. Deberá aparecer el nombre completo, lugar de trabajo (si procede) y dirección completa; en el caso de ser varios autores, los datos de al menos uno de ellos y para todos un número de teléfono de contacto.

2. Normas específicas.

2.1. Es aconsejable no rebasar las quince páginas de extensión.

2.2. Los símbolos y unidades empleadas no deben dar lugar a equívocos en su interpretacion.

2.3. Las referencias bibliográficas deben ir numeradas entre corchetes y listadas al final del artículo claramente identificadas.

2.4. Las notas a pie de página deben in correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. Los listados de ordenador deben ser rigurosamente originales.

2.6. Las ilustraciones y fotografías (preferentemente en hojas aparte e identificadas), deben estar hechas en blanco y negro, en el texto debe figurar el lugar donde deben ser colocadas; de igual forma si tiene que llevar un pie de ilustración, este se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.

La mejor forma de presentar las ilustraciones es a tinta china sobre papel vegetal, en el caso de estar hechas con impresora, que sean originales.

3. Envíos.

Revista SUMA. Aptdo. 13.4/21080 HUELVA. España.

Excepcionalmente se puede enviar a cualquiera de los miembros del Consejo de Redacción.

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A.
SCPM "Puig Adam", Madrid.
Arias Vílchez, J.
SAEM "Thales". I.B. "Auringis", Jaén.
Arrieta Gallastegui, J.
Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P.
EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L.
SCPM "Isaac Newton". La Laguna.
Bou García, L.
I.B. "Zalaeta", La Coruña.
Benítez Trujillo, F.
SAEM "Thales", E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C.
Escola de Mestres " S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J.
EUPGB, Melilla.
Cancio León, Mª P.
SCPM "Isaac Newton", Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. Mª
EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A.
Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo "Manuel Sacristán"
Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J.
I.B. "Colmenar Viejo", Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Poveda", Guadix (Granada).
Díaz Godino, J.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Fernández Sucasas, J.
EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. Mª
Escola de Mestres "S. Cugat", Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M.
SAEM "Thales", I.B. "Averroes", Córdoba.
García Arribas, C.
SAEM "Thales", I.B. "Padre Suárez", Granada.
García Cruz, J. A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
García González, E.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
García Cuesta, S.
Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M.
SAEM "Thales", Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F.
SAEM "Thales", EUPEGB, Almería.
Giménez, J.
EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL
ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA
EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO
Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS
ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO
Escola de Mestres "S. Cugat", Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de
Facultad de Matemáticas, Univ. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F.
SCPM "Isaac Newton", Las Palmas.
López Gómez, J.
SAEM "Thales", I.B. "Luis Cernuda", Sevilla.
Luelmo Verdú, Mª J.
SMPM, I.B. "San Mateo", Madrid.
Llinares Ciscar, S.
SAEM "Thales", EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A.
SAEM "Thales", EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G.
Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A.
Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P.
Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J.
Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A.
EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R.
SNPM "Tornamira", EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L.
SAEM "Thales", I.B. "Emilio Prados", Málaga.
Pérez Fernández, J.
SAEM "Thales", IFP "Las Salinas", San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R.
SAPM "P. S. Ciruelo", I.B. "Miguel Servet", Zaragoza.
Pérez Jiménez, A.
SAEM "Thales", I.B. "Nervión", Sevilla.
Petri Etxeberria, A.
SNPM "Tornamira", C.P. "Mª Ana Sanz", Pamplona.
Puig Espinosa, L.
EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Granada.
Ruiz Garrido, C.
SAEM "Thales", Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L.
SAEM "Thales", EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A.
I.B. "San Mateo", Madrid.
Sánchez Cobos, F. T.
SAEM "Thales", C.P. "Virgen del Rosario", Jaén.
Santos Hernández, A.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA
(M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M.
SCPM "Isaac Newton", La Laguna.
Soto Iborra, F.
EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A.
SAEM "Thales", C.E. "Blanco White", Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A.
SAEM "Thales", I.B. "Trafalgar", Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F.
SCPM "Isaac Newton", Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L.
SAEM "Thales", Facultad de Matemática, Sevilla.

PARA COLECCIONAR SUMA Nº 1

En esta nueva etapa de la revista comienza esta nueva sección con unas características especiales. En primer lugar, es una sección extraible, para que sea más fácil de manejar, y en segundo lugar el contenido que va a ir apareciendo en ella, hará referencia a temas eminentemente prácticos o especialmente útiles, pero heterogéneos. Desde fichas de materiales a colecciones de problemas irán pasando por estas páginas, que con el paso del tiempo se convertirán en un banco de datos interesantes y esperamos que aprovechables para el enseñante.

El primer número lo compone un índice general de la revista SUMA, son ya nueve números y consideramos interesante ofrecer esta ayuda para la localización rápida de los artículos que han ido apareciendo.

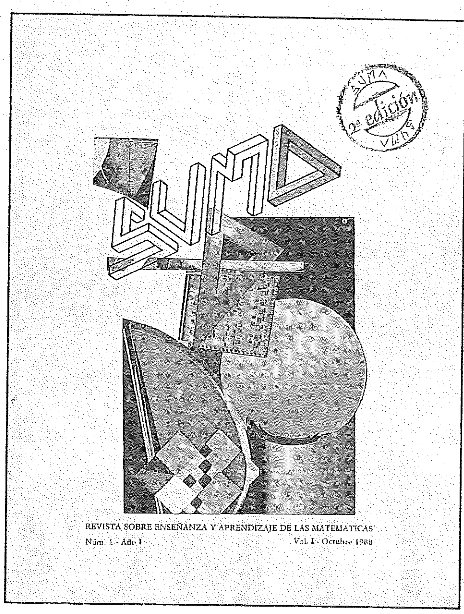
Por supuesto también admitimos sugerencias para sucesivos números de PARA COLECCIONAR. ¡Ya sabéis, a colaborar!

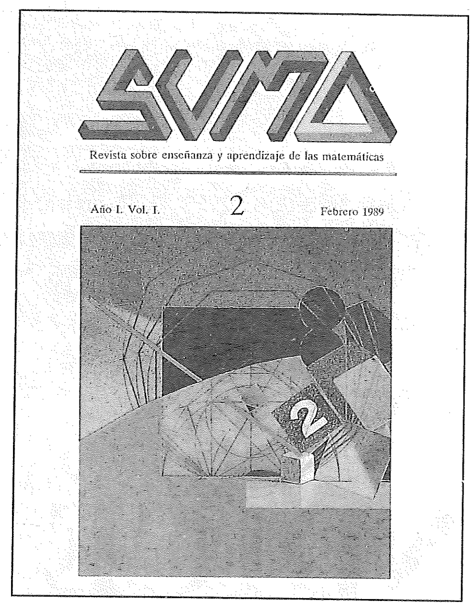
ÍNDICE ANALÍTICO

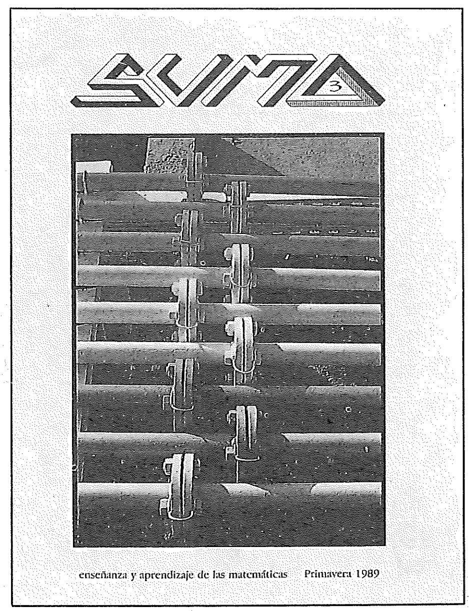
PARA COLECCIONAR SUMA Nº 1

CLAVE: Nº donde aparece / TÍTULO / Autor-es, (grupo al que pertenece), [traductor-es] / localización.

1. ARTÍCULOS

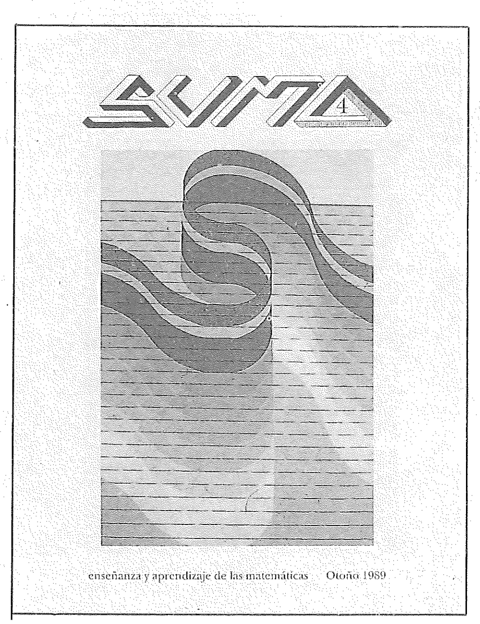




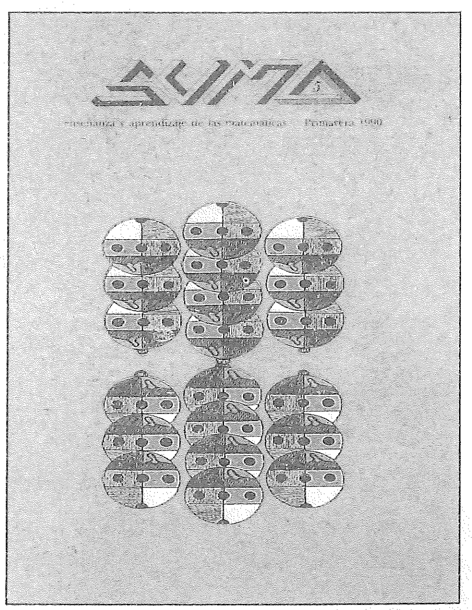

SUMA 3
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Primavera 1989

PARA COLECCIONAR SUMA Nº 1

2. IDEAS PARA LA CLASE



PARA COLECCIONAR Nº1



PARA COLECCIONAR SUMA Nº1

5 / **JORDI DU** / Claudi Alsina.

5 / **LOS MATEMÁTICOS A LA VIOLETA** / Manuel Diaz Castillo / I.B. «Hiponova», Montefrío (Granada).

5 / **¿QUÉ ES LA MATEMÁTICA PARA LA FAMILIA?** / Virginia Thompson.

6 / **EVALUACIOÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA Y SUS DEFECTOS** / Estudio del ICMI.

6 / **ICME - 7**.

6 / **V JAEM**.

7 / **EL SORPRENDENTE NÚMERO ∏** / Jesús Temprano Marañón / I.F.P. de Infiesto, Asturias.

7 / **CRISIS DE FUNDAMENTOS EN LAS MATEMÁTICAS ESPAÑOLAS A FINALES DEL SIGLO XIX** / José Pacheco Castelao / Dpto. de Matemática Aplicada, Fac. de Ciencias del Mar, Las Palmas de Gran Canaria.

7 / **EL ICMI**.

7 / **V CAMPEONATOS DE JUEGOS MATEMÁTICOS**.

7 / **EL UNO Y LOS CEROS: UN CUENTO SATÍRICO EN EL PAÍS DE LAS MATEMÁTICAS** / José Mª Núñez Espallargas/ Dpto. de Didáctica de las ciencias Experimentales y Matemáticas, Universidad de Barcelona.

8 / **LA RAÍZ CUADRADA Y LA MATEMÁTICA CHINA** / Santiago Fernández Fernández / C.P. «Txorierri», Vizcaya.

8 / **MATEMÁTICAS SIN FRONTERAS**.

8 / **ICMI-7**.

8 / **RESEÑA DE RETRATO DE UNA PROFESIÓN IMAGINADA DE F. HERNAN**.

8 / **RESEÑA DE IDEAS Y ACTIVIDADES PARA ENSEÑAR ALGEBRA DEL GRUPO AZARQUIEL**.

8 / **CONTRIBUCIÓN** / Francisco Hernán.

8 / **EL PLACER DE LAS MATEMÁTICAS** / Peter Hilton.

9 / **CIAEM - VIII** (Conferencia Internacional de Educación Matemática / Javier Domínguez García.

9 / **UN MODELO DE CONVIVENCIA EN TORNO A LA MATEMÁTICA: LA OLIMPIADA NACIONAL** / José Romero Sánchez.

9 / **EL ICME - 8 DE 1996 EN SEVILLA** / Gonzalo Sánchez Vázquez.

9 / **ICTMA - 5** / Mª Jesús Luelmo.

9 / **TESIS DOCTORAL** / Mª Luz Callejo.

9 / **LOS TRES PIES DEL GATO** / Fernando Corbalán.

9 / **LES AVENTURES D'ANSELME LANTURLÚ**.

9 / **CÓMO ENSEÑAR LAS MAGNITUDES, LA MEDIDA Y LA PROPORCIONALIDAD** / Mª Dolores de Prada y Antonio Luis Rodríguez.

9 / **REVISTA EDUCAÇÃO E MATEMÁTICA** / Pablo Flores.

9 / **EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS** / Dickson et al. Andrés Nortes Checa.

9 / **LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS Y SUS FUNDAMENTOS PSICOLÓGICOS** / Andrés Nortes Checa.