

# TESIS DOCTORAL

**M<sup>a</sup> Luz Callejo**

En la comunidad matemática estamos de enhorabuena, el pasado mes de Enero, M<sup>a</sup>. Luz Callejo de la Vega leyó su tesis doctoral en la Universidad Paris VII, dirigida por la profesora Dra. Josette Adda de la Universidad Lumière (Lyon II). El título de la tesis es "*Les représentations graphiques dans la résolution de problèmes de type Olympiades: Une expérience de Club mathématique*" [Las representaciones gráficas en la resolución de problemas de tipo Olimpiadas: Una experiencia de Club matemático], y la propia autora nos hace un comentario-resumen del contenido de la misma.

## Resumen de la Tesis

Este trabajo de investigación supone un esfuerzo por comprender mejor el papel que las representaciones gráficas pueden jugar en la resolución de problemas matemáticos y se ha centrado en el estudio sistemático de los aspectos siguientes:

- los elementos que determinan la elección, la interpretación y las modificaciones de las representaciones gráficas en los comportamientos de resolución de problemas;

- las consecuencias de un entrenamiento en resolución de problemas en la utilización de representaciones gráficas.

Dicho estudio ha estado motivado por la constatación del deterioro sufrido por la educación matemática, y en particular por la resolución de "verdaderos problemas" en España en las últimas décadas, y también por el declive del aspecto visual de las matemáticas en beneficio de los aspectos simbólicos, verbales y analíticos.

Las **hipótesis de partida** planteadas al comienzo de este estudio son las siguientes:

**Primera hipótesis:** La forma en que está redactado el texto de un problema influye en la elección y en la interpretación de la primera representación gráfica.

La elección de esta representación gráfica va a influir en la elección de la estrategia de resolución. De la misma forma, si se elige primero la estrategia de resolución, ésta influirá en la elección de la primera representación gráfica.

La sucesión de representaciones gráficas dibujadas en la resolución de un problema está influenciada por la primera representación.

La confirmación de esta hipótesis significaría que en el proceso de resolución de un problema es necesario saber cambiar de representación, a fin de encontrar la buena estrategia de resolución. Por tanto hace falta preparar a los estudiantes con objeto de que empleen las representaciones gráficas de forma fluida y flexible. Se formula pues así la **Segunda Hipótesis:**

Si se hace reflexionar a los estudiantes sobre la forma en que eligen las representaciones gráficas, se puede favorecer en ellos flexibilidad para que cambien de representación gráfica y cierta fluidez para que consideren varias representaciones gráficas. La flexibilidad y la fluidez les ayudarán a encontrar la buena estrategia de resolución. Es pues necesario entrenar a los estudiantes para favorecerles una actitud reflexiva, crítica y abierta ante la resolución de problemas.

Para hacer este estudio se contó con las hojas de resolución de problemas de los participantes en algunas de las fases finales de las Olimpiadas Matemáticas Españolas (OME). El estudio de este material permitía una aproximación interesante pero limitada al tema de investigación. Por ello se organizó un Club matemático con estudiantes de bachillerato, que condujo la autora del trabajo, para explorar las formas de pensamiento de sus componentes y arrojar así más luz sobre el empleo de representaciones gráficas en el proceso de resolución de problemas. Los problemas seleccionados se propusieron también en dos clases de COU de Ciencias.

El entrenamiento de los estudiantes del Club matemático trataba, como hemos dicho, de desarrollar una actitud reflexiva, crítica y abierta para resolver verdaderos problemas y se ha fundado: en la reflexión sobre el comportamiento seguido; en la explicación de este comportamiento, y en el trabajo y discusión en grupo. Tras la reflexión sobre dicho comportamiento, los estudiantes debían exponer al grupo el proceso de resolución. Esto dió lugar a una discusión moderada por la autora del trabajo, en el curso de la cual se explicitaban los procedimientos que habían contemplado los estudiantes. Así se trató de comprender por qué ciertos caminos no conducían a la solución, y se intentó profundizar hasta el final. En último lugar se consideró el papel que las representaciones gráficas habían jugado en el proceso de resolución.

La recogida de datos acerca de los comportamientos de los estudiantes en la resolución de problemas se hizo a partir de las hojas de resolución (borrador, semiborrador y hojas de limpio) de los participantes en las OME y de los alumnos de COU, de los protocolos de los componentes del Club matemático y de entrevistas individuales a estos últimos.

El análisis de datos de las hojas y de los protocolos de resolución tuvo en cuenta los siguientes aspectos: en primer lugar la elección o no de una representación gráfica; en segundo lugar la interpretación de la representación gráfica y el papel que juega ésta en la aplicación de una estrategia de resolución y en tercer lugar las modificaciones de

las representaciones gráficas a lo largo del proceso de resolución.

En el análisis de la evolución de los estudiantes entrenados en el Club matemático, se tomó como punto de referencia sus comportamientos durante las primeras sesiones en el Club y se estudió en detalle: el comportamiento general de resolución (familiarización con el problema, búsqueda de varias estrategias, elección de una estrategia y desarrollo de la misma, revisión del proceso), las diferentes ideas puestas en juego y la capacidad para adaptarlas a las nuevas situaciones y el conocimiento que cada estudiante tiene de sí mismo.

En el trabajo se hace una aproximación al tema de dos modos complementarios: un estudio sincrónico acerca de los comportamientos de cada uno de los grupos de población en relación a las representaciones gráficas utilizadas en la resolución de 6 problemas de las fases finales de las OME y de 2 problemas relacionados con éstos; un estudio diacrónico, caso por caso, de la evolución de 10 participantes en el club durante el entrenamiento que han seguido en el mismo.

El estudio sincrónico se estructura en torno a cuatro series de problemas:

- Minimización de caminos: 4 problemas en los que se trata de encontrar la línea poligonal más corta entre dos puntos, imponiéndole algunas condiciones;
- Problemas alrededor de un triángulo equilátero: se proponen 6 versiones de un mismo problema.
- Expresiones algebraicas e interpretaciones geométricas: 2 problemas en los que el transfert del dominio algebraico al dominio geométrico ayuda en su resolución;
- Puntos y flechas, un problema que puede ser ilustrado mediante un grafo.

Al final de esta parte se pueden esbozar algunas conclusiones parciales entre las que destacamos las siguientes:

- 1) En relación a los grupos de población, se constató por un lado que los bloqueos engendrados por las representaciones gráficas, y en particular por la presentación del problema son mayores en los alumnos de las clases de COU que en los otros

grupos de población; por otro lado que los estudiantes del Club y los participantes en las OME determinan mejor el papel que las representaciones gráficas deben jugar en la resolución de modo que les ayude en la misma.

2) En relación al tipo de estrategia elegida, se manifestó una preferencia por las estrategias de tipo analítico sobre las de tipo geométrico. Esta preferencia, junto con la "rigidez geométrica" han determinado la aparición y persistencia de determinadas representaciones gráficas que bloquean al estudiante en el proceso de resolución.

El estudio de los participantes del Club matemático, caso por caso, ha permitido destacar las relaciones entre las representaciones gráficas y las características individuales de los sujetos y enriquecer y matizar las conclusiones anteriores.

De forma breve esbozamos las **conclusiones finales** de este trabajo:

- Respecto a la primera hipótesis según la cual se relacionaba la elección de la primera representación gráfica dibujada en la búsqueda de la solución con la presentación del problema, no sólo se ha confirmado sino que ha aparecido una nueva variable independiente: las habilidades específicas desarrolladas por los estudiantes como los conocimientos de programación de ordenadores o de otras ramas científicas. Respecto a la presentación del problema se distinguieron dos aspectos: la formulación del problema (palabras, signos, gráficos, orden en que se da la información, forma de plantear la cuestión, contexto extramatemático del enunciado) y las condiciones en que el problema ha sido formulado (presupuestos de la comunicación, sobreentendidos, leyes del discurso, pragmática del cuestionamiento escolar). Con relación a la formulación del problema se constató que ésta ha determinado las representaciones gráficas cuyo papel es resumir o ilustrar el enunciado, en particular en el caso de enunciados de problemas geométricos; respecto a las condiciones de enunciación se ha podido comprobar que dichas condiciones han determinado las "representaciones-tipo" asociadas a ciertos problemas.

La primera hipótesis afirmaba también la influencia de la primera representación gráfica sobre las que se dibujarían más tarde. En el conjunto de representaciones dibujadas podemos distinguir una representación que llamaremos generatriz, y en algunos casos varias representaciones generatrices, que se caracterizan porque cada una de las otras puede reducirse a la(s) generatriz(ces) de distintas formas, dependiendo de la familiarización del estudiante con distintas aproximaciones a la realidad (por ejemplo, los conocimientos de programación o de otras ramas científicas).

- La segunda hipótesis esbozaba un tipo de "entrenamiento" que pretendía que los estudiantes no se aferrasen exclusivamente a sus propias representaciones gráficas sino que también contemplaran las que utilizaban sus compañeros, que reflexionasen ante el enunciado de un problema, que lo estudiaran, lo exploraran y fuesen capaces de buscar otras formulaciones en lenguaje natural o gráfico. En las entrevistas individuales, los estudiantes han advertido los hechos siguientes en relación al empleo de representaciones gráficas: haber concebido ciertas representaciones gráficas intentando imitar a sus compañeros; haber descubierto una adecuada utilización de las representaciones gráficas durante su estancia en el Club; haber apreciado las representaciones gráficas originales empleadas por dos de sus compañeros. Estas afirmaciones se pueden corroborar con los protocolos de resolución. Además, los estudiantes han prestado especial atención a los siguientes procedimientos: salirse del cuadro (físico o mental) delimitado por el problema; descomponer y recomponer la situación y dinamizar un problema planteado de forma estática, aunque no todos los hayan interiorizado de la misma forma.

Por último la evolución de los estudiantes ha sido más claramente positiva en los de tendencia "geométrica" que en los de tendencia "analítica", según la clasificación de los espíritus matemáticos hecha por Krutetskii.

**M<sup>a</sup> Luz Callejo.** Profesora  
de Didáctica de las Matemáticas  
del I.P.E.S. de Madrid.