SOBRE LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES CON CALCULADORAS GRÁFICAS

Francisco González Maján

Resumen

En el presente trabajo se estudia cómo utilizar calculadoras gráficas (modelo CASIO) para encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones, y cómo puede continuarse el proceso iniciado hasta obtener soluciones con cualquier grado de precisión.

El artículo termina con el enunciado, y ejemplos de aplicación, de una regla general para resolver cierta clase de ecuaciones trigonométricas.

Es conocido que las calculadoras con pantalla gráfica permiten resolver fácilmente y con cualquier grado de precisión (dentro de sus límites internos) la mayoría de las ecuaciones que plantean combinando funciones elementales (e^x, x^n, $\sqrt{x}$, *senx*, etc...)

Denotamos pro $f(x) = 0$ la ecuación a resolver. Además, para que se puedan seguir los ejemplos, advertimos que usamos la calculadora gráfica más sencilla que conocemos, la CASIO FX-7000G.

El proceso para obtener en primera aproximación las soluciones de la ecuación suele constar, básicamente, de tres etapas.

PRIMERA ETAPA: *Consiste en establecer intervalos adecuados (o rangos) de las variables* X *e* Y.

Llamaremos a esos intervalos $[X_{min}, X_{max}]$ y $[Y_{min}, Y_{max}]$.
Como interesa hallar los puntos donde la curva $Y = f(x)$ corta al eje horizontal, Y_{min} e Y_{max} deben elegirse de forma que entre ellos se halle el 0. Por ejemplo, puede adoptarse la costumbre de elegir $Y_{min} = -1$ e $Y_{max} = 1$.
(Ambos intervalos se eligen mediante la tecla **Range**)

SEGUNDA ETAPA: *Consiste en dibujar la gráfica* $Y = f(x)$

Para ello, se pulsa la tecla **Graph** y, a continuación, se escribe la expresión f (x) y se pulsa la tecla **EXE**.
Sea, por ejemplo, la ecuación $x^2 + \text{sen}(x) = 0$, a la cual nos referiremos después. Para dibujar la función, pulsaríamos

Graph	Alpha	+	x²	+	sin	Alpha	+	EXE

TERCERA ETAPA: *Consiste en recorrer la curva desde su izquierda hasta el último punto de corte con el eje horizontal (última solución).*

Para ello, se pulsan las teclas **Shift** y **Graph** (función **Trace**). Se verá un valor de X, y un *punto parpadeante* en la parte izquierda de la curva. Entonces, pulsando la tecla *cursor-derecho* $\boxed{\Rightarrow}$ se podrá llevar ese punto sobre las distintas soluciones; en cada una, veremos el valor de X y ya tendremos una primera aproximación de la misma.

Normalmente, la etapa difícil es la primera y, más concretamente, elegir los valores extremos X_{min} y X_{max}. Generalmente, se intentará que ambos estén suficientemente separados como para que entre ellos queden situados todas las soluciones de la ecuación, o, al menos, todas las que nos puedan interesar. Pero eso, además de requerir un análisis previo de la fórmula a representar, muchas veces no es posible debido a las limitaciones físicas de la pantalla y ese inconveniente puede comportar serias dificultades.

Como ejemplo, resolveremos la ecuación mencionada antes:

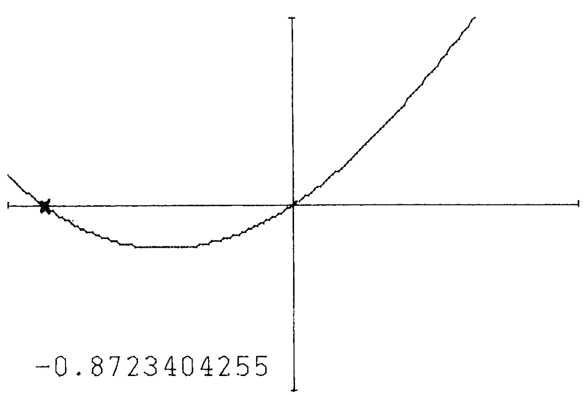
$$x^2 + \text{sen}(x) = 0$$

PRIMERA ETAPA

(En primer lugar, debe elegirse el radian como unidad angular, para lo cual basta pulsar las teclas $\boxed{\textbf{Mode}}\boxed{\textbf{5}}$)
Como sen(x) tiene sus valores entre -1 y 1, la expresión x^2 + sen(x) nunca dará 0 si x^2 supera 1. Por tanto, podemos elegir X_{min} = -1 y X_{max} = 1. Concretamente, pulsando la tecla **Range**, podemos elegir los siguientes valores:

Xmin	:	-1
max	:	1
scl	:	1
Ymin	:	-1
max	:	1
scl	:	1

Después, tras dibujar la curva Y = x^2 + sen(x) como ya dijimos (**SEGUNDA ETAPA**), veremos que hay dos soluciones (puntos de corte con el eje OX). Lógicamente, una es 0.



A continuación (**TERCERA ETAPA**) activaremos la función **Trace** y veremos a la izquierda el *punto parpadeante*. Llevándolo hasta el eje X, veremos el valor X = -0.8723404255. Pues bien, este valor es una primera aproximación de la solución.

En resumen.

> *Una solución de la ecuación* x^2 + sen(x) = 0 *es, aproximadamente,* X = -0.8723404255.

Pero, obviamente, el dar un resultado aproximado no sirve de nada si sabemos responder a las preguntas siguientes:

¿Cuál es el error máximo cometido en esa aproximación?

¿Cómo podemos obtener aproximaciones mejores, incluso hasta alcanzar cualquier grado de precisión prefijado?

Enseguida, lo veremos.

Error máximo de una solución aproximada

Volvamos sobre nuestra ecuación-ejemplo: x^2 + sen(x) = 0

El error máximo en la aproximación X = -0.8723404255, podemos obtenerlo anotando los valores de X que corresponden al *último punto encontrado por encima de la horizontal y al primero encontrado por debajo de ella*. Llamaremos a esos valores *anterior* y *posterior* respectivamente, y los denotaremos por X_a y X_p.

En nuestro ejemplo, se verá que:

X_a = -0.8936170213 X_p= -0.8510638298

De momento, sólo estaremos seguros de que la solución está entre X_a y X_p, luego podemos decir que:

> *Una solución aproximada es* X = -0.8723404255, y el *error es menor que* X_p-X_a = 0.0425531915

Cómo obtener aproximaciones mejores

Una forma de mejorar esa aproximación consiste en dibujar de nuevo la función, pero cambiando adecuadamente los rangos de la X y la Y. Concretamente, podemos tomar $X_{min} = X_a$, $X_{max} = X_p$, y elegir para Y_{min} e Y_{max} los valores correspondientes a X_a y X_b (los cuales podrán verse en la pantalla utilizando la tecla $\boxed{X \leftrightarrow Y}$).

Otras formas, quizá en algún caso menos eficientes, pero a nuestro juicio más cómodas, se basan en el uso de la función **Factor**, o el del **factor instantáneo**. Personalmente, nos inclinamos por esta última, pues, aunque el proceso puede ser más lento, es más fácil, cómodo, y no requiere cálculos, ni anotaciones.

Veamos cómo mejorar considerablemente nuestra solución aproximada utilizando repetidamente la función **factor instantáneo**.

PRIMERO: Situar de nuevo el *punto parpadeante* en el eje horizontal (hasta ver nuestra aproximación X = -0.8723404255)

SEGUNDO: **Repetir**
la pulsación de las teclas $\boxed{\textbf{Shift}}$ $\boxed{x}$ (es el *factor instantáneo* de ampliación *doble*)

hasta que desaparezca el punto de corte con el eje horizontal (o **hasta que** la diferencia X_{max}-Y_{min} sea inferior al límite de error que deseemos).

(Si tal punto no desapareciera nunca de la pantalla, estaríamos ante la solución exacta, porque cada pulsación de aquellas teclas parte en dos el intervalo $[X_{min}, X_{max}]$, luego la longitud de éste tiende a cero).

TERCERO: En cuanto desaparezca el punto de corte con el eje 0X (*solución gráfica*), pulsemos las teclas $\boxed{\textbf{Shift}}$ $\boxed{\div}$ y volveremos a ver la *solución gráfica*. Mediante la función **Trace**, llevemos el *punto parpadeante* al eje horizontal y veremos una aproximación mejor que la primera.

Concretamente, en nuestro ejemplo, obtenemos:

Nueva aproximación: X = -0.8766622385

X_a=-0.8769946853 X_p=-0.8764960151

Error < X_p-X_a = 0.0004986702

Es obvio que hemos logrado mejorar considerablemente la precisión, pues el error máximo es mucho menor.

NOTA: En el ejemplo, la *elección de rangos* ha sido fácil. Pero, no suele serlo, ni aún cuando la ecuación parezca sencilla. Y si no, pruébese con $X^4 - 1000.001X^2 + 1 = 0$, donde el análisis previo no es muy difícil (la ecuación tiene cuatro soluciones), pero "difícilmente" conseguiría el lector verlas en la pantalla. Ello prueba que *no hay normas para elegir el rango aplicables a todo tipo de ecuaciones.* No obstante, podemos dar algunas para ciertos tipos de ecuaciones.

Resolución de ecuaciones trigonométricas

Llamaremos trigonométrica a una ecuación en la que la incógnita X figure sólo como parte del argumento de las funciones seno, coseno o tangente. Por ejemplo, no consideramos trigonométrica la ecuación del ejemplo anterior, y sí las cinco siguientes:

1. $\text{sen}(2x) + 2\cos^2 x - 2 = 0$

2. $\text{sen}(x/3) + 2\cos X - 1 = 0$

3. $\text{sen}(6x) + \text{sen}(4x) - 1 = 0$

4. $\text{tg}(3x) - \text{tg}(2x) + 1 = 0$

5. $\sqrt{1-\text{sen}(x/6)} - \cos(x/4) = 0$

Utilizando el carácter periódico de las funciones *sen, cos, tan*, podemos dar una regla general para cubrir la etapa de *elección de rangos* al resolver ciertas ecuaciones *trigonométricas*.

REGLA: *Si en la ecuación los ángulos son de la forma* kX, o de la forma kX+r, donde k se supone entero, como en los casos **1**, **3** y **4**, *puede elegirse el rango así:*

a) Xmin= 0 y Xmax= $2\pi/d$, *siendo* d *el máximo común divisor de los coeficientes* k *de la variable* X.

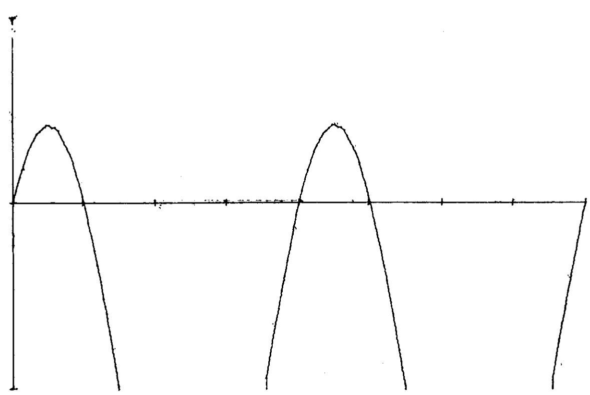
b) Si sólo aparece la función tangente, conviene más elegir Xmin= 0 *y* Xmax= π/d, *siendo* d *el mismo número del apartado anterior.*

Apliquémosla a los ejemplos anteriores.

1. ECUACIÓN: $\text{sen}(2x) + 2\cos^2 x - 2 = 0$

RANGOS:

Xmin: 0
max: 6.283185307 (pues d = m.c. d(2,1) = 1)
scl: 0.785398163 (o sea, $\pi/4$)
Ymin: -1
max: 1
scl: 1



Dibujo obtenido:

Se ven *cuatro* soluciones en el intervalo elegido (La quinta es 2π y puede considerarse equivalente a la solución 0). Con la función **Trace** se encontrarán las primeras aproximaciones:

0, 0.802, π, 3.943

Las demás soluciones resultarán sumando múltiplos enteros de 2π a las cuatro anteriores.

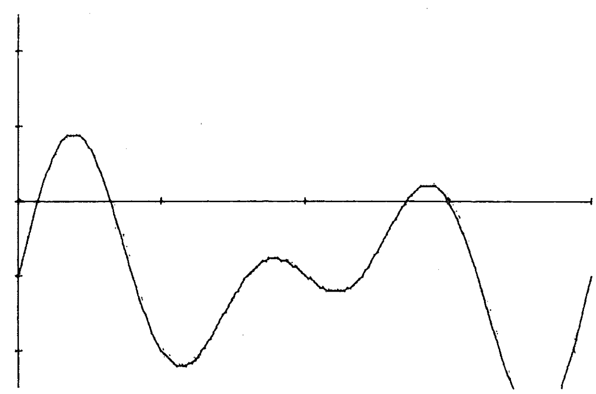
2. ECUACIÓN: $\text{sen}(x/3) + 2\cos x - 1 = 0$

Con el cambio $X/3 = X'$, resulta $\text{sen}(x') + 2\cos(3x') - 1 = 0$ y ésta se resolverá gráficamente como en el caso anterior.

3. ECUACIÓN: $\text{sen}(6x) + \text{sen}(4x) - 1 = 0$

RANGO:

Xmin : 0
max : 3.141592654 (pues d = m. c. d(6,4) = 2)
scl : 0.785398163
Ymin : -2,5 (se ve mejor la gráfica)
max : 2,5
scl : 1



Dibujo obtenido:

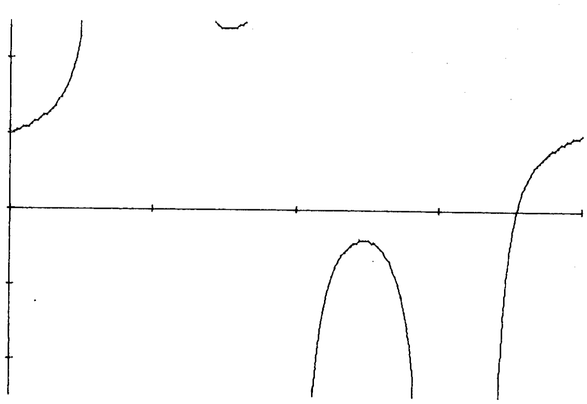
Se ven *cuatro* soluciones, que valen, en primera aproximación, 0.1003, 0.5013, 2.1389, 2.3395.

Para obtener las demás soluciones, habrá que sumar a éstas múltiplos enteros de $2\pi/d = \pi$.

Por cierto, esta última ecuación "no puede resolverse con las fórmulas trigonométricas" que se enseñan en Bachillerato (y, por supuesto, la quinta tampoco). Sin embargo, como acabamos de ver, es muy fácil resolverla si se utiliza una calculadora gráfica, lo que es una clara muestra, a nuestro juicio, de la conveniencia de enseñar su manejo.

4. ECUACIÓN: $tg(3x) - tg(2x) + 1 = 0$

RANGOS:	Xmin	: 0	
	max	: 3.14159265	$(\pi/d = \pi/1)$
	scl	: 0.785398163	$(\pi/4)$
	Ymin	: -2,5	
	max	: 2,5	
	scl	: 1	



Dibujo obtenido:

Hay una sola solución en el intervalo elegido. Con la funcion **Trace**, resulta una primera aproximación: 2.7739. Las demás soluciones resultan sumando a esa un múltiplo de π.

5. ECUACIÓN: $\sqrt{1\text{-sen}(x/6)} - \cos(x/4) = 0$

Con el cambio $X/12 = X'$ resulta $\sqrt{1\text{-sen}(2x')} - \cos(3x') = 0$ y ésta puede resolverse eligiendo $[X_{min}, X_{max}] = [0, 2\pi]$

Conclusiones

Las calculadoras gráficas son herramientas útiles y potentes para resolver ecuaciones que, de otro modo, caerían fuera del nivel del Bachillerato. Con ellas, no sólo se puede hacer que esos alumnos sean capaces de resolver fácilmente muchas más ecuaciones, y más variadas, que las que encontrarán en su libro de Matemáticas, sino que, al mismo tiempo, y como hemos comprobado personalmente, pueden incrementar, y aún renovar, las posibilidades didácticas del Profesor en otros temas.

No nos gustaría que nadie interpretara estas líneas como una sugerencia a abandonar los métodos tradicionales de resolución de ecuaciones trigonométricas, basados en el empleo de fórmulas. Antes al contrario, creemos que tales métodos deben ser mantenidos; pero, también podrían complementarse usando calculadoras gráficas, aunque su utilización se redujera a comprobar, como si de un juego se tratara, si las soluciones obtenidas son correctas. A fin de cuentas, sería un juego que podría desarrollar bastante la intuición, siempre necesaria en Matemáticas, por habituar al alumno a pensar gráficamente ante ciertos problemas algebraicos. Aunque mejor sería para tal fin la pantalla de un ordenador, parece que aún estamos lejos del momento en que dicha pantalla sea tan barata, nos quepa en el bolsillo y tengamos el aula llena de ellas.

Francisco González Maján
I.B. Menéndez Pelayo. Barcelona