

MOVIMIENTOS EN EL PLANO Y MOSAICOS

Juan Aurelio Montero Sánchez

Resumen

Con esta experiencia se pretende familiarizar al alumno con los Movimientos del Plano.

Para ello, tomando como base un mosaico, se buscarán aquellas traslaciones, giros y simetrías que dejan invariante el mosaico. La gracia está en tener varias muestras de mosaicos en los que aparezcan unos movimientos de un tipo o de otro.

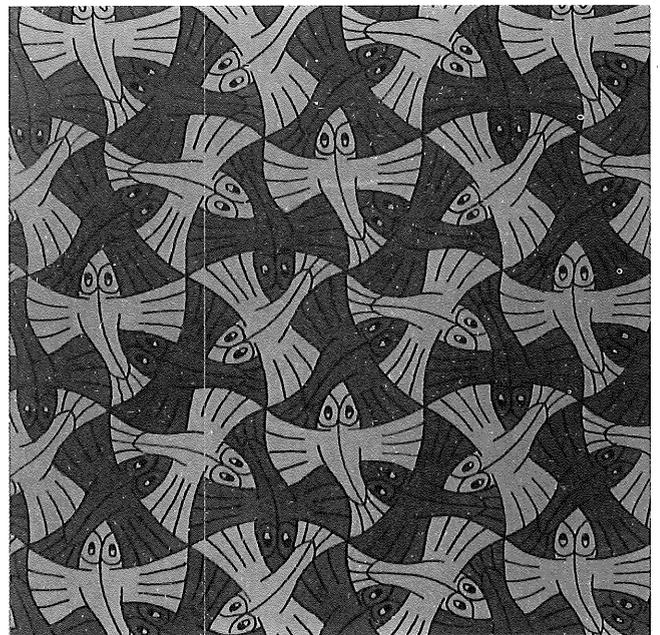
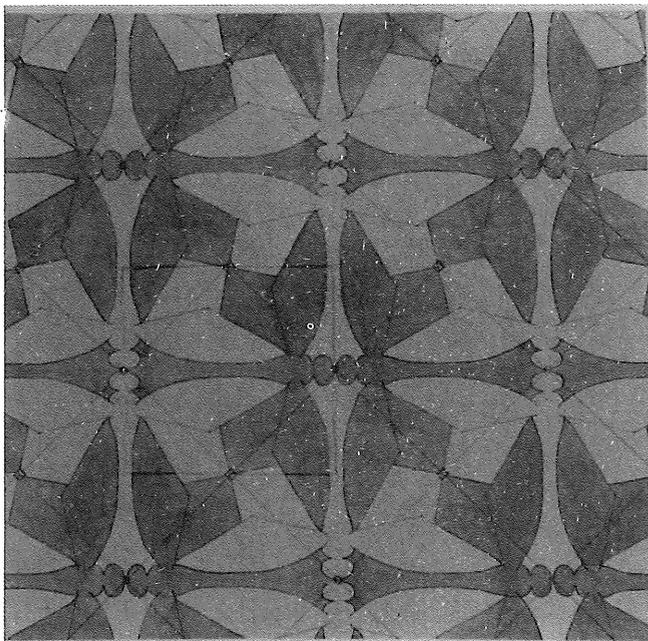
Estudiadas las propiedades básicas de estos movimientos, los alumnos los definirán sobre un plano

en general, sin necesidad del mosaico soporte.

Las ventajas más importantes son desde el punto de vista de la motivación y de la metodología. En éste último sobre todo ya que el alumno llega a sus conclusiones al manipular el material entregado.

Pueden utilizarse los mosaicos para estudiar otros temas como:

- División regular del plano.
- Redes y mallas en el plano.
- Etc.



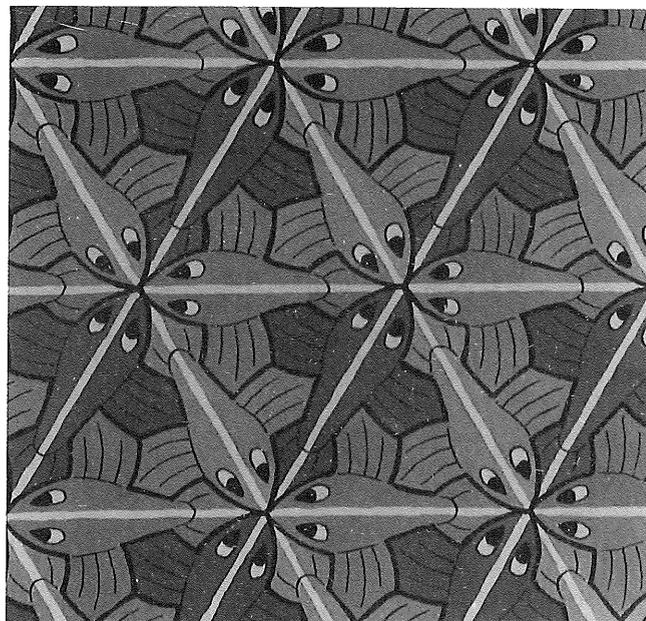
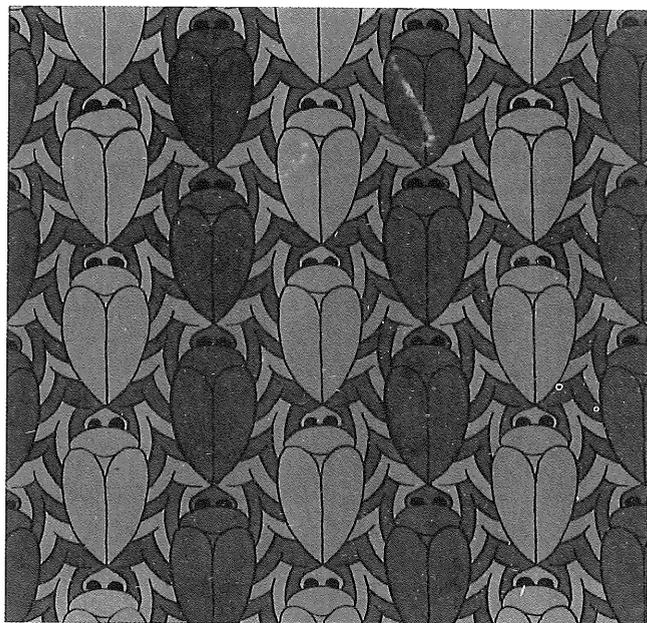
Introducción

La idea fundamental de este artículo nace a partir de la asistencia del autor al Congreso de Arte y Matemáticas. "M.C. Escher: Entre la Geometría y el Arte". Granada 1990. En dicho encuentro a parte de poder contemplar la magnífica exposición pictórica de Escher que es un desafío para los sentidos y un estímulo para la razón, pudimos constatar a partir de los ponencias y conferencias la estrecha relación entre la obra de Escher y diversos conceptos matemáticos. Pensé cómo acercar todo esto a mis alumnos. Fundamentalmente por dos razones que pasaré a explicar: en el programa de 2º de FP II de matemáticas hay unos temas sobre traslaciones, giros y simetrías que me ha costado mucho explicar por lo abstracto y poco en contacto con la realidad (al menos eso creía yo) que tienen y que siempre he postergado para el final del temario. Mi primera razón es para motivación del profesor, es más agradable y creo que se comprende mejor hablar de una traslación sobre un mosaico que sobre un plano en general. La segunda razón es obvia, así el

alumno ve que todo ese estudio de transformaciones en el plano tiene una aplicación, o mejor al revés, el alumno descubre y construye de una forma natural toda una serie de movimientos que más tarde estudiará con rigor. Para un estudio de traslaciones y giros en el plano no es necesario hablar de mosaicos y menos aún de Escher, pero no he querido dejar pasar la oportunidad que brinda este tema para mostrar los estupendos trabajos de Escher. Como a este nivel los alumnos están familiarizados con el uso de vectores, y conocen bastante a fondo la trigonometría no me entretendré más y pasaré a describir cómo realizo esta experiencia.

Material a utilizar

- * Mosaicos (fig. 4)
- * Acetatos o papel transparente (vegetal u otro tipo)
- * Regla, compás y medidor de ángulos
- * Rotuladores o lápices de colores
- * Chinchetas o alfileres
- * Espejos y/o libro de espejos



Desarrollo de la experiencia

Cada grupo parte del mosaico nº 1 y efectúa las siguientes actividades:

- 1.- Calcar exactamente el mosaico propuesto.
- 2.- ¿Qué “movimientos” o “deslizamientos” de la copia mantienen el mosaico invariante? A estas operaciones las llamaremos movimientos.
- 3.- Si realizamos consecutivamente dos movimientos, ¿Obtenemos un movimiento?, ¿Por qué? Busca ejemplos.
- 4.- ¿Se puede una vez hecho un movimiento volver a la posición inicial?

En este punto deben de aparecer de forma natural, la traslación respecto a un vector dado y el giro. Obviamente la respuesta a las preguntas tercera y cuarta lleva aparejada la idea de grupo. (Seguimos con las actividades).

5.- El alumno una vez que ha asimilado el concepto de “traslación” debe distinguir cuáles son los vectores que “generan” todas las traslaciones posibles que dejan invariante el mosaico. Aparece aquí la idea de “generadores de un grupo”. ¿Son únicos?, ¿Hay algo en ellos que permanece invariante? Piénsalo.

6.- Cuando el alumno ha visto que el giro también es un movimiento debe describir los “elementos característicos” de estos giros. (Aparece el centro de giro y el ángulo de giro).

7.- Buscar una parte del mosaico que mediante las traslaciones o giros genere todo el mosaico. (Baldosa básica).

8.- Efectuar un resumen. En este punto debe de hacerse un esquema con los “descubrimientos” más importantes (fig. 1).

Una vez finalizado el estudio de un mosaico hacemos lo propio con los restantes.

Puesta en común

	Mosaico 1		Observac.
Tipo de movimiento	Traslación	Giro	
Elementos característicos	Vectores	Angulo Centro	
Baldosa básica			

(Los elementos que aparecen en esta tabla deben estar señalados, a ser posible en colores distintos, en la copia que cada grupo hace del mosaico).

Figura 1

Hasta ahora no hemos dicho nada de simetrías en el plano. El momento óptimo para introducirlas puede ser cuando algún alumno pregunte: ¿Vale levantar el papel y “darle la vuelta”? (Cambiar la cara de la copia que apoya sobre el original); o también al observar la loseta básica, alguien piense (incluyendo al profesor) que se puede generar toda esa baldosa sólo con la mitad, ya que la otra mitad se “genera” a partir de la primera.

Pues bien, esa línea que divide a la loseta en la mitad o que permanece “invariante” al levantar el papel y “darle la vuelta”, la llamaremos eje de simetría.

Si doblamos el papel por el eje de simetría, los dibujos de ambas partes encajarán perfectamente.

Al poner un espejo perpendicularmente al mosaico y sobre el eje de simetría (o de reflexión) se visualizará todo el mosaico.

Debemos de completar nuestro cuadro anterior introduciendo también las simetrías y sus elementos característicos. ¿Cuáles son?

¿Por qué hemos estudiado las simetrías aparte?

¿Qué ocurre cuando ponemos un texto frente a un espejo?

¿Qué ocurre cuando una figura dibujada en un cristal la miramos por detrás?

¿Se produce el mismo efecto?

Matemáticamente hablando estamos invirtiendo la orientación ya que, sin meternos mucho en profundidades, hemos cambiado la derecha del dibujo por su izquierda y viceversa. La simetría es por tanto un movimiento inverso, mientras que la traslación y el giro son directos (no cambian la orientación).

Hay otra cuestión que los diferencia: en los movimientos directos la copia se mueve en el mismo plano que el original, mientras que en los inversos necesitamos la componente espacial, bien para "dar la vuelta" a la copia, bien para "doblarla" por el eje o bien para colocar el espejo perpendicularmente al plano del mosaico.

Una vez buscadas las simetrías y señalados sus ejes en los distintos mosaicos, resaltamos en una tabla las propiedades específicas de cada uno de ellos y en otra tabla las propiedades comunes. (Fig. 2)

TABLA DE PROPIEDADES ESPECÍFICAS

	Elementos generad.	baldosa mínima
MOSAICO 1	Traslaciones Giros Simetrías	
MOSAICO 2		

Figura 2

Las tablas obtenidas por los alumnos, por grupos, serán parecidas a éstas (fig. 3).

TABLA DE PROPIEDADES GENERALES

Tipo de Movimiento	Propiedades generales
Traslación	<ol style="list-style-type: none"> 1.- "La composición de traslaciones vuelve a ser una traslación". ¿Cuál es su vector asociado? 2.- "Hecha una traslación siempre puedo volver al punto de partida". 3.- En una traslación la copia se "mueve" sobre el original, no queda ningún punto fijo, todos se mueven en la misma dirección y sentido. 4.- Si consideramos el no "deslizar" la copia como una traslación, el conjunto de traslaciones tendría estructura de grupo.
Giro	<ol style="list-style-type: none"> 1.- Lleva asociado un centro de giro y un ángulo. 2.- Si dejamos fijo el centro de giro, cumple las propiedades 1, 2 y 4 de las traslaciones (arreglando un poco el enunciado). 3.- Deja un punto fijo, salvo cuando damos "vueltas completas".
Simetría	<ol style="list-style-type: none"> 1.- Lleva asociado un eje que queda fijo al efectuar la simetría. 2.- Son inversas de sí mismas (como los giros de 180°). 3.- ¿Cómo son las rectas que unen un punto y su simétrico?
<p>La composición entre los elementos anteriores es también un movimiento.</p>	

Figura 3

Quedan todavía una serie de preguntas sin responder, que deberán responder los alumnos.

¿Podemos definir movimientos en un plano cualquiera, prescindiendo de mosaico?

¿Cómo se verán afectados sus puntos al efectuar un movimiento?

¿Conservarán las mismas propiedades?

Los alumnos deben de estar capacitados para definir una traslación, giro o simetría en general y prever como actúan sobre un plano.

Conclusión

* Esta experiencia puede ser realizada con alumnos de distinto nivel. Para un primer o segundo curso de bachiller la veo suficiente. Para cursos más elevados veo necesario el considerar (cuando el curso no lo haya preguntado) por parte del profesor de las siguientes cuestiones:

- ¿Qué ocurre con la composición de giros de distinto centro?

- ¿Y con la composición de simetría?

- ¿Es todo movimiento composición de simetría?

En mi opinión, para responder a estas últimas cuestiones, lo más cómodo es partir de movimientos en general (están ya definidos por los mismos alumnos), y comprobar los resultados en nuestros diversos mosaicos, pero sin renunciar a que sean los propios alumnos los que pronostiquen, intuyan e incluso encuentren la solución¹.

* Aparte de la ventaja desde el punto de vista de la motivación creo que de esta forma se hace más

evidente y menos teórico el estudio de los movimientos.

* El alumno cuenta con unos problemas en los que de forma natural y casi por necesidad se encuentra con unos conceptos, en principio, nada fáciles de visualizar como: grupo, generadores de un grupo, composición de movimientos, etc; fuera de un ambiente matemático y que va obteniendo de forma experimental.

* Se consigue una interrelación entre ciencias aparentemente tan distantes como Matemática y Arte. Respecto a esto último dice Servien: *La más elevada voluptuosidad de los hombres es la aprehensión de relaciones matemáticas sencillas bajo la infinita variedad de las cosas. Convertida en sensación es arte; convertida en conceptos, es ciencia...*

Actividades complementarias:

Pueden realizarse las siguientes:

- Confección de puzzles y/o mosaicos a partir de figuras geométricas y no geométricas.

- Estudio de algunos movimientos en el plano inducidos desde el espacio tridimensional:

* La simetría con desplazamiento como caso particular del movimiento helicoidal espacial.

* La simetría en el plano como caso particular del giro en el espacio.

J. Aurelio Montero Sánchez.

P.N. del I.F.P. Baza

Bibliografía

(1) ALSINA, C. - PÉREZ, R. - RUIZ, C. **Simetría dinámica**. Ed. Sintexis. Madrid 1989.

(2) Monográfico sobre la Alhambra, EPSILON, Granada.

(3) ERNST, B., **El espejo mágico de M.C. Escher**, Ed. Taco. Berlín 1989.

¹Encuentro particularmente adecuado el desarrollo del tema que hace el libro **Simetría Dinámica** (1).