

EXPLORAR LAS MATEMÁTICAS CON LA HOJA DE CÁLCULO

Luis M. Botella López

Resumen

Las hojas de cálculo son programas comerciales bien conocidos en el ámbito de gestión, pero desgraciadamente, quizá no tanto en el educativo, a pesar de su gran utilidad como medio de exploración para las asignaturas experimentales. Se trata en las siguientes líneas de dar una primera aproximación que pueda despertar el interés de los profesores de distintas materias, y en especial de matemáticas, por este recurso didáctico tan versátil e interesante en las clases.

Introducción

Los paquetes integrados se componen de una hoja de cálculo, un procesador de textos y una base de datos, que interaccionan entre sí (como Open Access, Framework, Works, etc.); encontramos también hojas de cálculo como PcCalc, Multiplan, Lotus 1-2-3, etc.; todo lo que sigue se puede llevar a cabo con cualquiera de ellas, con quizás, pequeñas modificaciones, habiéndose utilizado para los ejemplos la Lotus 1-2-3.

La hoja de cálculo

Al mirar el monitor, vemos una hoja en blanco, que nos podemos imaginar como un papel cuadrado, pero en el que no se ven las líneas. Cada casilla se designa mediante una letra que indica la columna, y un número para la fila; en nuestro caso, disponemos de 256 columnas (A, B, C, ..., AA, ..., IV) y 8.192 filas, lo que hace un total de 2.097.152

casillas. El monitor es una especie de ventana en la que se ve un trozo de la hoja (fig. 1).

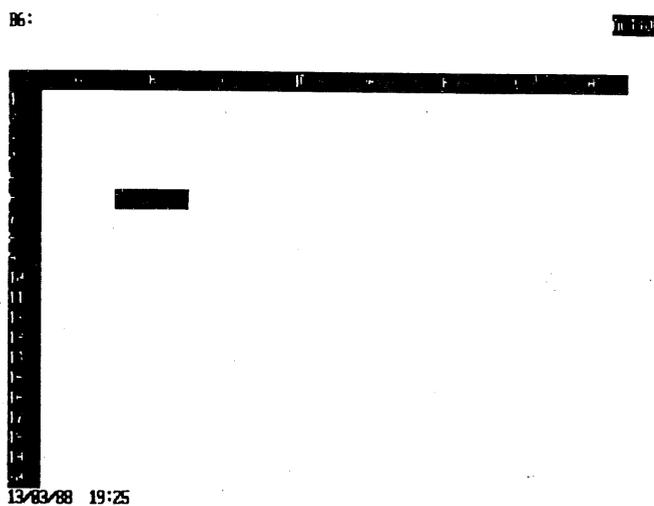


Figura 1

En cada una de las casillas se puede introducir uno de los tres tipos distintos de datos: alfanuméricos, numéricos o fórmulas. Las fórmulas se refieren siempre a los datos numéricos o resultados de calcular las fórmulas de otras o, incluso, de la misma casilla en que está la fórmula (en este caso se dice que hay una referencia circular, dando lugar a posibles definiciones recursivas), teniendo en cuenta que dichas referencias pueden ser absolutas o relativas. Cada fórmula se recalcula cada vez que se cambia algún dato de la hoja (salvo que indiquemos recálculo manual, lo que permite cam-

biar varios datos y recalcular después). Las referencias relativas evitan el tener que escribir varias veces una misma fórmula, bastando con copiarla.

Por ejemplo, supongamos que en A1 está el número 2 y en A2 la fórmula + A1 + 3; en pantalla aparecería un 5. Si en B1 escribimos la fórmula +A1*2, la pantalla mostrará un 4; si se copia la fórmula de B1 en B2, en ésta tendremos +A2*2, apareciendo un 10. Si en A1 se escribe un 4, inmediatamente aparecerá un 7 en A2, un 8 en B1 y un 14 en B2. Sin embargo, si en B1 se hubiera escrito +\$A\$1*2, al copiar, en B2 también se tendría +\$A\$1*2.

	A	B	A	B
1	2	+A1*3	2	4
2	+A1+3	+A2*2	5	10

Tenemos así el potencial de una multitud de calculadoras que interaccionan entre sí y recalculan cada vez que uno de los datos cambia pudiendo, además, definir distintos tipos de gráficas con los datos existentes en cada momento. Si dichos datos se alteran, también se modificará la gráfica.

Modos de utilización

Una hoja de cálculo es un instrumento que permite el desarrollo de unas clases en que se puede esperar un mayor o menor grado de creatividad por parte del alumno según el planteamiento previo por parte del profesor.

a) - El alumno como usuario

Los chicos utilizan el ordenador de una forma dirigida; muestra una serie de resultados en función de unos parámetros que pueden ser modificados, obteniendo como conclusiones la influencia de los mismos sobre los resultados.

i. Macros

Dado que es posible crear "macros" (presionando una sola tecla, se realiza una serie de operaciones, como copiar, redefinir rangos, etc.), es posible utilizar la hoja como un programa dirigido (caja

negra), que permita al alumno cambiar una serie de parámetros y utilizar unas macros realizadas por el profesor para ver resultados. Desde este punto de vista, un programa específico suele ser más cómodo que uno que, como éste, es de empleo general.

ii. Plantillas

El profesor crea una "plantilla", es decir, una hoja con las fórmulas para realizar los cálculos necesarios para un cierto proceso. El alumno, al cambiar los parámetros, observa los cambios producidos a lo largo de todo el proceso.

b) - El alumno como conocedor de algoritmos

Se espera que los chavales conozcan el algoritmo para resolver un cierto problema y lo apliquen. La hoja de cálculo es un medio auxiliar que sustituye con ventaja a la calculadora, lápiz, papel y/o papel milimetrado.

c) - El alumno como investigador

Se plantea una cierta cuestión y el alumno, que conoce cómo moverse en una hoja de cálculo, debe diseñar sus propias técnicas de investigación y resolución de problemas.

El comienzo

Salvo que se desee emplear la hoja solamente como "caja negra", es necesario introducir a los alumnos en el manejo de una hoja de cálculo. Ello se debe hacer mediante una serie de problemas prácticos en los que vayan surgiendo dificultades estructuradas de una forma progresiva y que impliquen la necesidad de explotar los distintos recursos disponibles (copiar, mover, variar el ancho de las columnas, necesidad de visualizar más o menos decimales, definición de gráficos, etc.), para lo que son necesarios tres o cuatro periodos lectivos. Veamos algunos ejemplos; algunas soluciones propuestas por los alumnos se pueden encontrar en el apartado de soluciones propuestas.

a) - El comerciante

Diseña una hoja que permita a un comerciante conocer sus ingresos al cabo del día según el número de unidades vendidas de cada artículo y el precio unitario.

b) - Más comercio

Modifica la anterior para que pueda conocer sus ganancias del día. Considera los impuestos que debe pagar.

c) - Un concurso

Entre un grupo de compañeros vais a organizar un concurso de fotografía. Considerad los distintos gastos que ello supone, así como los ingresos y subvenciones; se trata de decidir cuál es la cuota que cobraréis a cada participante para asegurar, dentro de lo posible, el no tener pérdidas.

Hoja de cálculo y Matemáticas

Lo que sigue son algunos ejemplos de utilización de la hoja de cálculo en las clases de Matemáticas. En el siguiente apartado se presentan algunas soluciones, varias de ellas propuestas por los alumnos.

a) - Gráficas

Se presenta a los alumnos la hoja de la figura 2.

i. Representa las gráficas de funciones del tipo:

$$f(x) = ax + b$$

¿Qué influencia tienen los valores de a y b en la gráfica?

ii. Lo mismo para funciones del tipo:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

(Insisto en el hecho de que un programa diseñado para el dibujo de gráficas de funciones es más útil que la hoja de cálculo).

b) - Más gráficas

Es posible, sin embargo otro enfoque del mismo problema: "Diseña una hoja de cálculo para representar la gráfica de una cierta función".

c) - Introducción a la noción de límite

Se ha introducido a los alumnos en el campo de las sucesiones numéricas mediante diversas situaciones previas (paradojas de Zenón, Fibonacci, rectángulos áureos, análisis de "Square Limit" - Escher-), y han buscado el término general de algunas sucesiones. "Diseña una hoja para intentar ver si una determinada sucesión se acerca cada vez más a algún número".

i. "Utiliza la plantilla (fig. 3), para probar con distintas sucesiones".

E2: (T)

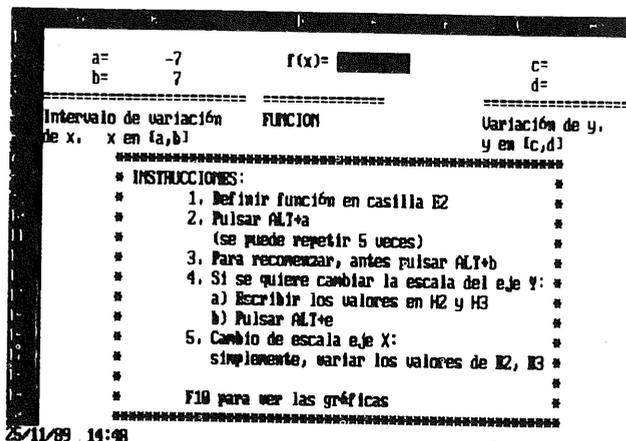


Figura 2

E9: (428)

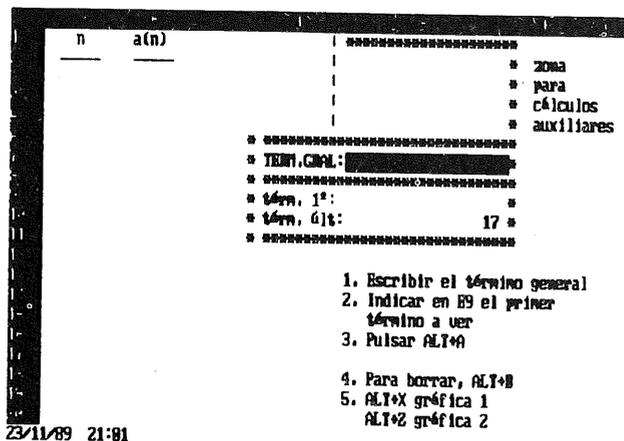


Figura 3

ii. "Diseña una hoja de cálculo para ver si los términos de una sucesión se acercan cada vez más a un cierto número".

d) - Transformaciones geométricas

- i. "Dibuja un polígono utilizando la hoja de cálculo".
- ii. "Utiliza lo anterior para visualizar una traslación".
- iii. "Lo mismo para un giro o una homotecia de centro el origen. Generalízalo para cualquier transformación de la que conozcas la matriz asociada".
- iv. "Diseña una plantilla que resuma los casos anteriores en una misma hoja".

e) - Probabilidad

"¿Cuál es el número de personas que debe haber en una reunión para que la probabilidad de que dos hayan nacido el mismo día sea mayor que 0.5?".
 "Se eligen dos números al azar (a y b), en el intervalo [0,1]. ¿Cuál es la probabilidad de que la longitud del intervalo [a,b] sea mayor que 0.5?".

f) - Números

"Construye una sucesión de Fibonacci. Investiga qué ocurre con la sucesión formada por la razón de cada dos términos consecutivos".
 "Modifica los dos primeros términos para ver qué ocurre".
 "Investiga las sucesiones en que cada término a partir del tercero se obtenga dividiendo entre dos la suma de los dos anteriores".
 "Prueba con distintos números iniciales (incluyendo números negativos). ¿Puedes predecir lo que va a ocurrir?".
 "¿Y si divides entre otros números en lugar de 2?".
 "Intenta encontrar una expresión para la suma $1+3+5+7+\dots+(?)$ ".
 "Calcula

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1+\frac{1}{2}} & \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}} & \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}} \end{array}$$

¿Deduces alguna consecuencia?".

g) - Estadística

Resulta evidente el gran valor de una hoja de cálculo como material auxiliar para el estudio de la estadística descriptiva, con las facilidades que proporciona para la realización de gráficas de barras o de sectores, así como las facilidades de cálculo.

Conclusiones

Espero que estas líneas puedan dar una idea de la gran riqueza de posibilidades que ofrece la hoja de cálculo como material didáctico para nuestras clases, permitiendo a los alumnos observar regularidades y desarrollar su intuición matemática. Os agradecería, amigos lectores, que me comunicáseis vuestras experiencias.

Soluciones propuestas

a) El comerciante: Se muestra la hoja visualizando las fórmulas empleadas.

	B	C	D	E
4	Artículo	N. Unidad	P. Unidad	Total por Art.
5				
6	vaqueros	29	4.500	+C6*D6
7	mini-faldas	13	2.400	+C7*D7
8	cazadoras	6	9.000	+C8*D8
9	calcetines	36	550	+C9*D9
10	calzones	9	990	+C10*D10
11	tenis	3	2.500	+C11*D11
12	cinturones	7	855	+C12*D12
13	camisas	16	2.900	+C13*D13
14				
15	TOTAL:			+E6+E7+E8+E9+E10+E11+E12+E13

b) Más comercio

	B	C	D	E	F	G
4	Artículo	N. Unidad	P. Unidad	Total por Art.	Coste	Beneficios
5						
6	vaqueros	29	4.500	+C6*D6	3.750	+(D6-F6)*C6
7	mini-faldas	13	2.400	+C7*D7	1.500	+(D7-F7)*C7
8	cazadoras	6	9.000	+C8*D8	7.500	+(D8-F8)*C8
9	calcetines	36	550	+C9*D9	450	+(D9-F9)*C9
10	calzones	9	990	+C10*D10	870	+(D10-F10)*C10
11	tenis	3	2.500	+C11*D11	2.200	+(D11-F11)*C11
12	cinturones	7	855	+C12*D12	770	+(D12-F12)*C12
13	camisas	16	2.900	+C13*D13	2.000	+(D13-F13)*C13
14	<hr/>					
15		Total:		+E6+E7+E8+E9+E10+E11+E12+E13		
16		Beneficios:		+G6+G7+G8+G9+G10+G11+G12+G13		
17		Impuestos:		+E16-E17		
18						
19		Total ganancias:		+E16-E17		

c) Concurso fotografía: "Al cambiar el número de participantes, se observa cómo cambia el beneficio. Cada concursante debe presentar tres fotos".

	C	D	E	F
1	INGRESOS:		N. UNIDAD	
2	Cuota:	500	20	+D2*E2
3	Folletos:	50	200	+D3*E3
4	Publicidad folleto	1.000	2	+D4*E4
5	Part. escuela:	5.000		+D5
6	Part. APA	2.500		+D6
7	Reventa marcos:	50	+E2*3	+D7*E7
8				
9	TOTAL INGRESOS.....			@SUMA (F2..F7)
10				
11	GASTOS:			
12	Precios marcos:	150	+E2*3	+D12*E12
13	Alquiler local:	2.00	4	+D13*E13
14	Electricidad:	500	4	+D14*E14
15	Imprenta folletos:	20	+E3	+D15*E15
16	Premios:	6.500		+D16
17				
18	TOTAL GASTOS.....			@SUMA (F12..F16)
19				
20	BALANCE FINAL.....			+F9-F18

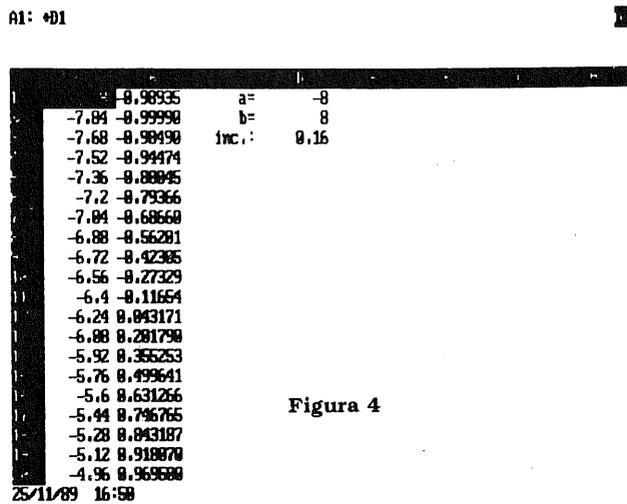
INGRESOS:		Num. unid.	
Cuota:	500	20	10.000
Folletos:	50	200	10.000
Publicidad folleto	1.00	2	2.000
Part. escuela:	5.000		5.000
Part. APA	2.500		2.500
Reventa marcos:	50	60	3.000
TOTAL INGRESOS			32.500
GASTOS:			
Precios marcos:	150	60	9.000
Alquiler local:	2.000	4	8.000
Electricidad:	500	4	2.000
Imprenta folletos:	20	200	4.000
Premios:	6.500	6.500	
TOTAL GASTOS			29.500
BALANCE FINAL			3.000

a) Gráficas

Un grupo de alumnos (2º BUP) propuso la solución de la fig. 4, siendo el contenido de las celdas el siguiente:

- A1 : +D1
- A2 : +A1+\$D\$3 que se copió hacia abajo
- A3 : +A2+\$D\$3
- ... A100 : +A99+\$D\$3
- D3 : +(D2-D1)/100
- B1 : +f (x), en este caso, @SEN (A1)
y se copió hasta B100

Se definió una gráfica de tipo XY, con rango X = A1...A100 y rango A = B1...B100. Cambiando los valores de D1 y D2, se puede estudiar la función en distintos intervalos.



b) **Sucesiones:** Se muestran las fórmulas definidas y resultados:

	A	B	A	B
1	1	$1+1/A1^A1$	1	2
2	A1+1	$(1+1/A2)^A2$	2	2.25
3	A2+1	$(1+1/A3)^A3$	3	2.3703703704
4	A3+1	$(1+1/A4)^A4$	4	2.44140625
5	A4+1	$(1+1/A5)^A5$	5	2.48832
6	A5+1	$(1+1/A6)^A6$	6	2.5216263717
7	A6+1	$(1+1/A7)^A7$	7	2.546499697
...

c) **Transformaciones geométricas:** Para dibujar un polígono a partir de sus coordenadas basta con repetir el primer punto y definir un gráfico de tipo XY.

ii y iii). El contenido de las casillas es (ver fig. 5):

A1: 1

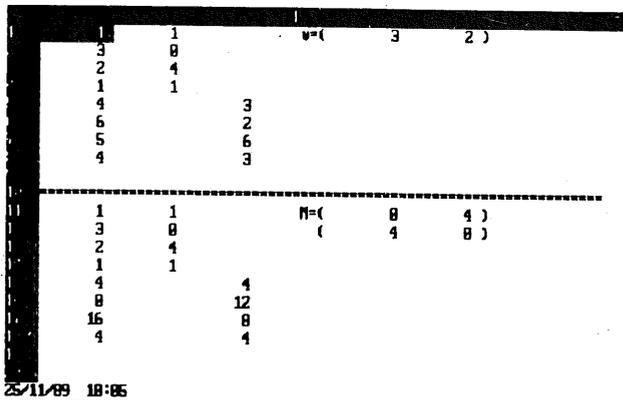


Figura 5

I1: (A2) 1

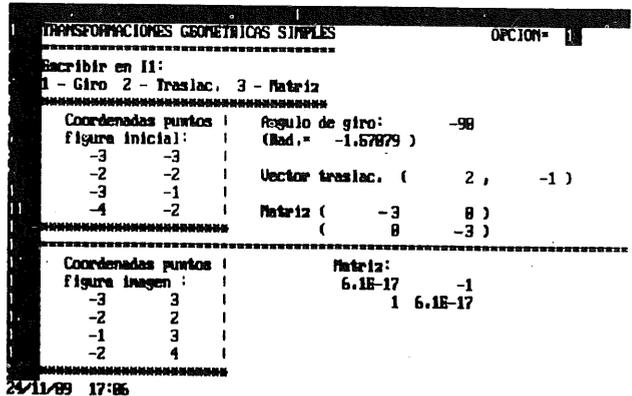


Figura 6

A5 : +A1+E\$1 que se copia a la derecha
(en C5) y abajo tres veces
A15: +A11*\$E\$11+B12*\$F\$11
C15 :
+A11*\$E\$12+B12*\$F\$12

que se copian hacia abajo
tres veces

Para dibujar la traslación, la gráfica es de tipo XY, con rango X = A1...A8, rango A = B1..B8 y rango B = C1..C8. De forma análoga para la parte inferior de la hoja.

iv. La plantilla de la figura 6 parte de los mismos conceptos, añadiendo el hecho de que se debe especificar en I1 la opción de que se trata. Merece la pena señalar el contenido de algunas casillas:

E15: @SI (\$I\$1 = 1, @COS (\$E\$7), E11)
A16: @SI (\$I\$1 = 2, A8+\$F\$9, +A8*\$E\$15+B8*\$F\$15)

lo que permite definir el contenido de una casilla de una forma u otra según una cierta condición. Las coordenadas de la figura inicial están en A21..B25 (A21 = +A8, etc.), las abscisas de la imagen, en A26...A30, y las ordenadas, en C26...C30; de este modo, quedan fuera de la pantalla.

Las figuras 7 y 8 muestran dos ejemplos de gráficos dibujados a partir de dicha plantilla.

TRASLACION (2, -1)

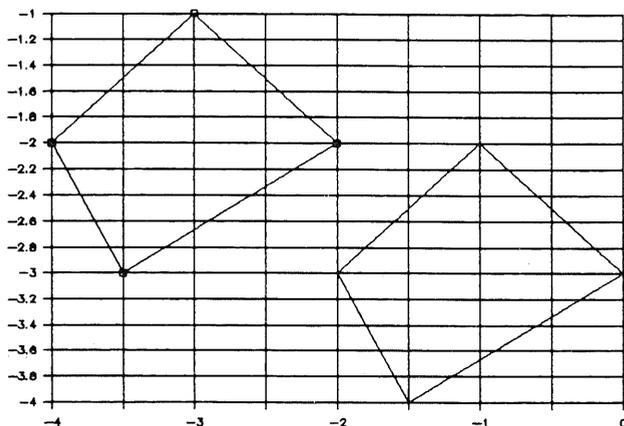


Figura 7

HOMOTECIA (r=-3)

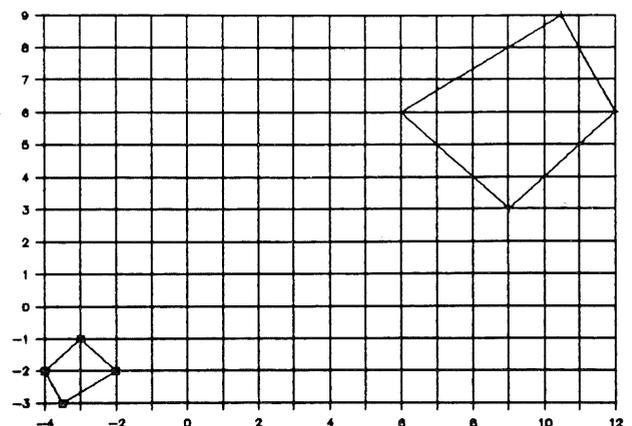


Figura 8

d) **Probabilidad.** Se propone a los alumnos que intenten calcular dicha probabilidad si hay una, dos, tres, ... personas; si es necesario, se les indica que consideren el suceso contrario. Rápidamente se dan cuenta de que el cálculo es recursivo. La hoja permite la definición del cálculo a partir de una fórmula que basta con copiar:

	B	C	D
1	n	P(A')	P(A)
2	-----	-----	-----
3	1	1	1-C3
4	2	+C3*(365-B4+1)/365	1-C4
5	3	+C4*(365-B5+1)/365	1-C5
6	4	+C5*(365-B76+1)/365	1-C6
7	5	+C6*(365-B7+1)/365	1-C7
8	6	+C7*(365-B8+1)/365	1-C8
9	7	+C8*(365-B9+1)/365	1-C9
10	8	+C9*(365-B10+1)/365	1-C10
11	9	+C10*(365-B11+1)/365	1-C11
12	10	+C11*(365-B12+1)/365	1-C12
13	11	+C12*(365-B13+1)/365	1-C13
14	12	+C13*(365-B14+1)/365	1-C14
15	13	+C14*(365-B15+1)/365	1-C15

Una vez realizados los cálculos, la hoja aparecerá como sigue:

	B	C	D
	n	P(A')	P(A)
1	1	1	0
2	2	0.997260274	0.002739
3	3	0.9917958341	0.008204
4	4	0.9836440875	0.016355
5	5	0.9728644263	0.027135
6	6	0.9595375164	0.040462
7	7	0.9437642969	0.056235
8	8	0.9256647076	0.074335
9	9	0.9053761661	0.094623
10	10	0.8830518223	0.116948
11	11	0.8588586217	0.141141
12	12	0.8329752112	0.167024
13	13	0.8055897248	0.194410

Tras la realización de todo este proceso, los alumnos han deducido la expresión de la probabilidad:

$$P_n(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365-n+1}{365}$$

es decir,

$$P_n(\bar{A}) = P_{n-1}(\bar{A}) \cdot \frac{365-n+1}{365} \quad P_1(A) = 1$$

Y, a partir del gráfico generado con los datos (fig. 9), se pueden deducir las conclusiones pedidas.

Luis M^a Botella López.
Escuela Europea, Bruselas I

REUNION DE n PERSONAS

(das hayan nacido el mismo día)

