

NÚMEROS DE CATALAN Y TRAYECTORIAS EN LA RETÍCULA ENTERA

Peter Hilton y Jean Pedersen

Introducción

Dos rasgos característicos hacen que la combinatoria sea un tema matemático particularmente apropiado para los niveles de secundaria y de licenciatura. En primer lugar, reúne un número importante de conceptos aparentemente diferentes y, por lo tanto ilustra la unidad básica de las matemáticas. En segundo lugar, no hace necesarias técnicas matemáticas excesivamente sofisticadas, sino más bien aquellas que se adquieren en los niveles anteriores al estudio del cálculo.

Los números de Catalan, que deben su nombre al matemático belga Eugène Charles Catalan (1814-1894), pero, que de hecho, se remontan como mínimo a Euler en el siglo XVIII, son particularmente interesantes por su multiplicidad de interpretaciones. En este artículo damos tres interpretaciones que pueden ser consideradas como primarias en tanto que están relacionadas con ideas básicas de teoría de grafos, computación y geometría. A su vez, damos una cuarta interpretación que los relaciona con la trama entera del plano de coordenadas y por lo tanto nos permite introducir su estudio en un rico dominio del álgebra clásica.

Hemos escrito otras veces sobre este tema (ver [HP 1, 2,]), ya sea para proporcionar información básica, o para - tal como esperamos - ofrecer un artículo atractivo para matemáticos profesionales con intereses particulares distintos. Nuestro propósito ahora es otro, queremos proporcionar a los profesores de secundaria - y a los profesores de los futuros profesores de secundaria - lo que nosotros

creemos que es un ejemplo excelente de una fuente de ideas y de motivaciones convincentes para el desarrollo de técnicas e intuiciones matemáticas.

Naturalmente, nuestra exposición presenta una argumentación debida al matemático francés del siglo XIX Désiré André que, a nuestro parecer, trae consigo una de las intuiciones matemáticas más estimulantes y emocionantes que puede ser plenamente apreciada a un nivel de secundaria. Este argumento fue desarrollado, de hecho, por André para dar solución al llamado **Problema de la votación**, pero resulta ser un instrumento de vital importancia para el estudio de los números de Catalan en su cuarta interpretación, tal como mostraremos a continuación. La última sección de este artículo la dedicamos al estudio del Problema de la votación.

Quisieramos agradecer a nuestro colega y amigo Pere Mumbrú, de la Universidad de Barcelona, su invitación para dar una serie de conferencias de las que se deriva este artículo.

Árboles, expresiones bien construidas y polígonos convexos

Empezamos presentando tres conceptos naturales de combinatoria, que aparecen en contextos bastante diferentes, pero que resultan ser matemáticamente equivalentes.

Sea p un entero fijado ≥ 2 . Definimos tres sucesiones de enteros positivos, que dependen de p , del modo siguiente:

a_k ; ${}_p a_0 = 1$, ${}_p a_k =$ número de árboles con bifurcaciones de p ramas y k vértices fuente, para $k \geq 1$.

b_k ; ${}_p b_0 = 1$, ${}_p b_k =$ número de maneras de asociar k aplicaciones de una operación de p elementos, para $k \geq 1$.

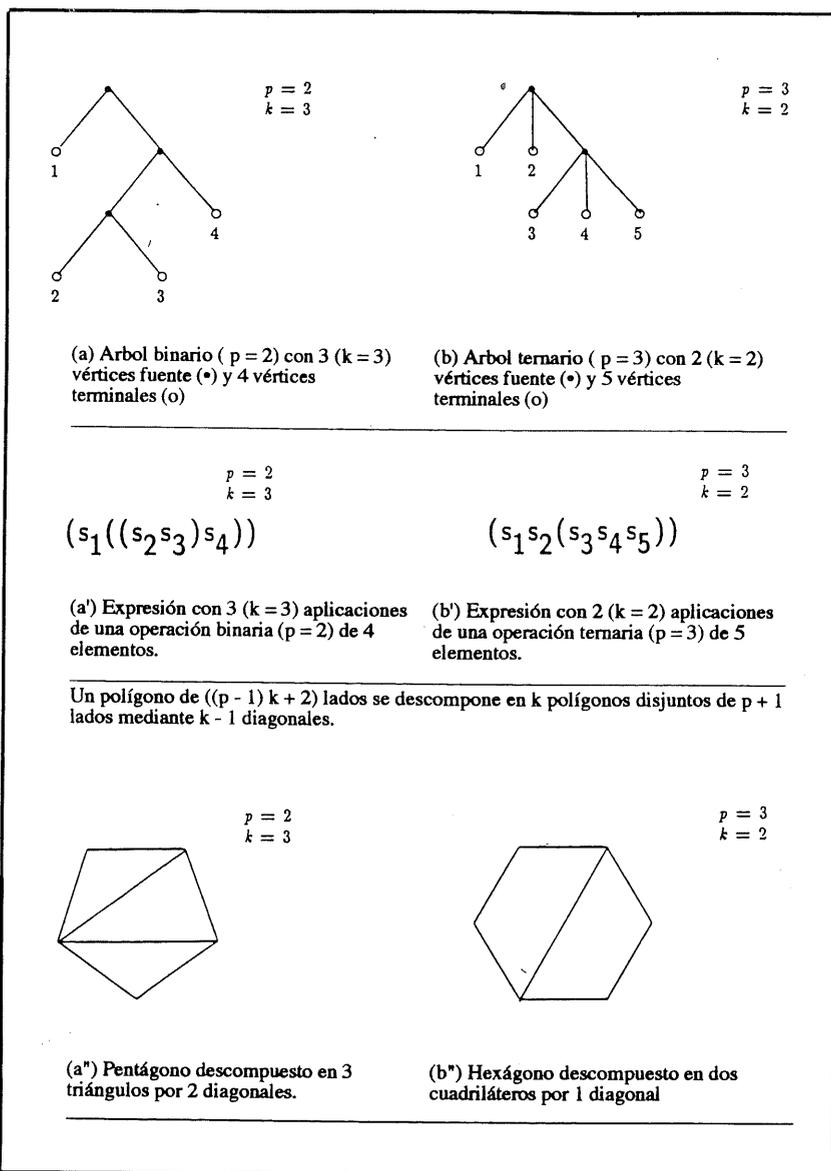
c_k ; ${}_p c_0 = 1$, ${}_p c_k =$ número de maneras de diseccionar un polígono convexo en k polígonos disjuntos de $p+1$ lados mediante diagonales que no se corten, para $k \geq 1$.

Observamos que, si $k \geq 1$,

(i) un árbol con bifurcaciones de p ramas y k vértices fuente tiene $(p-1)k+1$ vértices terminales y $pk+1$ vértices en total (Figura 1 (a,b));

(ii) las k aplicaciones de una operación dada de p elementos actúan sobre una sucesión de $(p-1)k+1$ símbolos (Figura 1(a', b'));

(iii) el polígono tiene $(p-1)k+2$ lados y se descompone en k polígonos disjuntos de $(p+1)$ lados mediante $(k-1)$ diagonales (Figura 1 (a'', b'')).



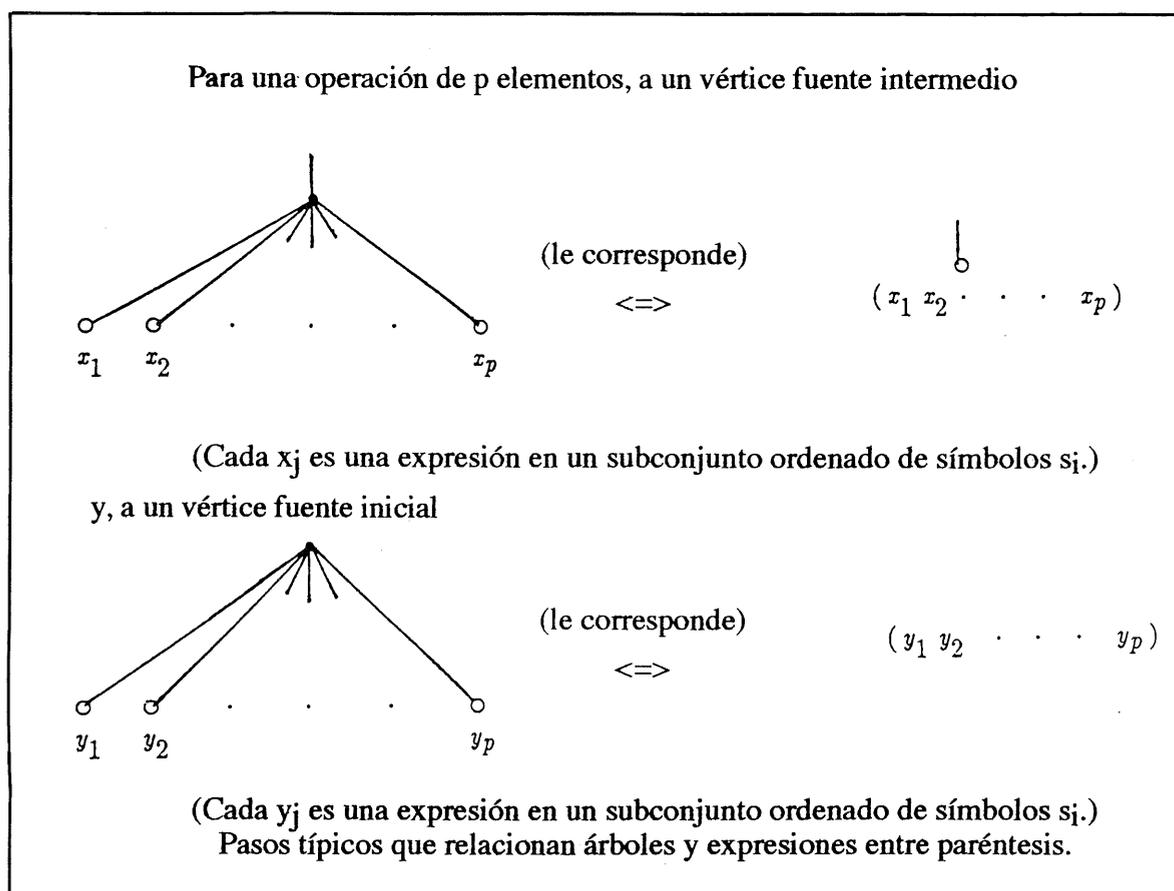
Un resultado bien conocido y que puede ser demostrado con facilidad (véase Sloane [S] para el caso $p=2$) es el siguiente:

TEOREMA 1.1

$${}_p a_k = {}_p b_k = {}_p c_k.$$

Los árboles de la Figura 1 (a,b) pueden convertirse en las expresiones correspondientes de la Figura 1 (a',b') aplicando una sucesión de las correspondencias indicadas en la Figura 2. Para convertir un árbol particular con bifurcaciones de p ramas en su correspondiente expresión, primero se numeran los vértices terminales del árbol de una manera que podemos designar toscamente como "de izquierda a derecha" y que creemos está sufi-

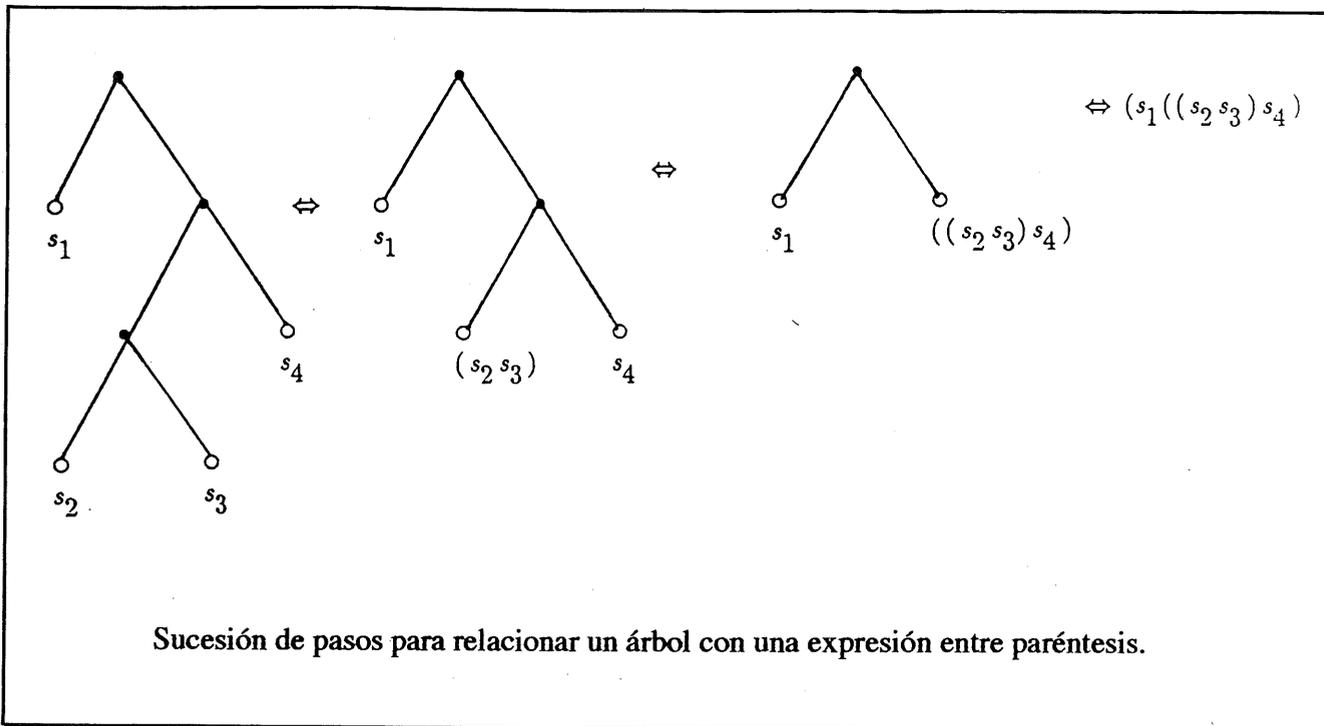
cientemente explicitada a partir de los ejemplos de la Figura 1 (a,b). Después se asocia el símbolo s_i a cada número i . Ahora consideramos cualquier colección de ramas terminales, en las que existe un conjunto completo de p símbolos y aplicamos la correspondencia de la Figura 2 para un vértice fuente intermedio (1). Repetimos este proceso, en todos los vértices fuente intermedios (en un caso especial este podría haber sido el punto de partida del proceso), hasta alcanzar el vértice fuente inicial; entonces aplicamos la correspondencia al vértice fuente inicial (eliminando toda evidencia del árbol) para obtener la expresión deseada. La Figura 3 ofrece un ejemplo de la aplicación paso a paso del proceso. Para obtener el árbol a partir de una expresión simbólica, es suficiente invertir el proceso.



(1) Si hay más de un lugar donde pueda hacerse el proceso indicado, entonces todas las correspondencias pueden realizarse simultáneamente de una sola vez.

El proceso que relaciona los árboles de la Figura 1 (a, b) - o las expresiones de la Figura 1 (a', b') - con los correspondientes polígonos descompuestos de la Figura 1 (a'', b'') es más sutil (y la indicación dada en [S], para el caso $p = 2$, es un poco críptica). Por lo tanto describiremos explícitamente el modo de establecer la correspondencia que nos permite asegurar que $b_k = c_k$. Supongamos pues que conocemos el modo de asociar k aplicaciones de una operación de p elementos a una serie de $(p-1)k+1$ símbolos $s_1, s_2, \dots, s_{(p-1)k+1}$ para producir una expresión bien construida. Comenzamos con un polígono convexo de $(p-1)k+2$ lados y, comenzando por el lado superior, numeramos los demás lados (siguiendo la dirección de las agujas del reloj) desde 1 hasta $(p-1)k+1$, como se ilustra en la Figura 4. Tomamos el primer lugar en la expresión (empezando por la izquierda) en el que una sucesión de p símbolos está encerrada entre paréntesis. Si los subíndices de dichos símbolos van de $j+1$ a $j+p$,

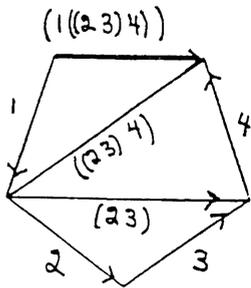
trazamos una diagonal desde el vértice inicial del lado $j+1$ hasta el vértice final del lado $j+p$, y la etiquetamos como $(j+1, \dots, j+p)$. Esta diagonal descompone el polígono en un polígono de $p+1$ lados, tal como queremos, y en otro polígono con un número de lados menor que el del polígono original. Por otra parte, si sustituimos la parte $(j+1, \dots, j+p)$ de nuestra expresión por un único símbolo (llamémosle, Z), habremos reducido dicha expresión a una que contiene tan solo $k-1$ aplicaciones de la operación. Por lo tanto podemos actuar de modo inductivo hasta completar el proceso de introducción de las diagonales. Naturalmente, si substituímos los números i de los lados del polígono por los símbolos s_i , entonces el último lado nos permite obtener la expresión original. La Figura 5 (a, b) ilustra la designación de las disecciones del pentágono y el exágono determinados por las correspondientes expresiones de la Figura 1 (a', b').



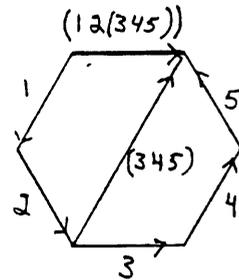


$(s_{j+1} s_{j+2} \dots s_{j+p})$ aparece en la expresión Trazado de una diagonal y su etiquetado.

Primer paso en la conversión de una expresión en un polígono descompuesto.



(a) Polígono para $(s_1 ((s_2 s_3) s_4))$
 $p = 2, k = 3.$



(b) Polígono para $(s_1 s_2 (s_3 s_4 s_5))$
 $p = 3, k = 2.$

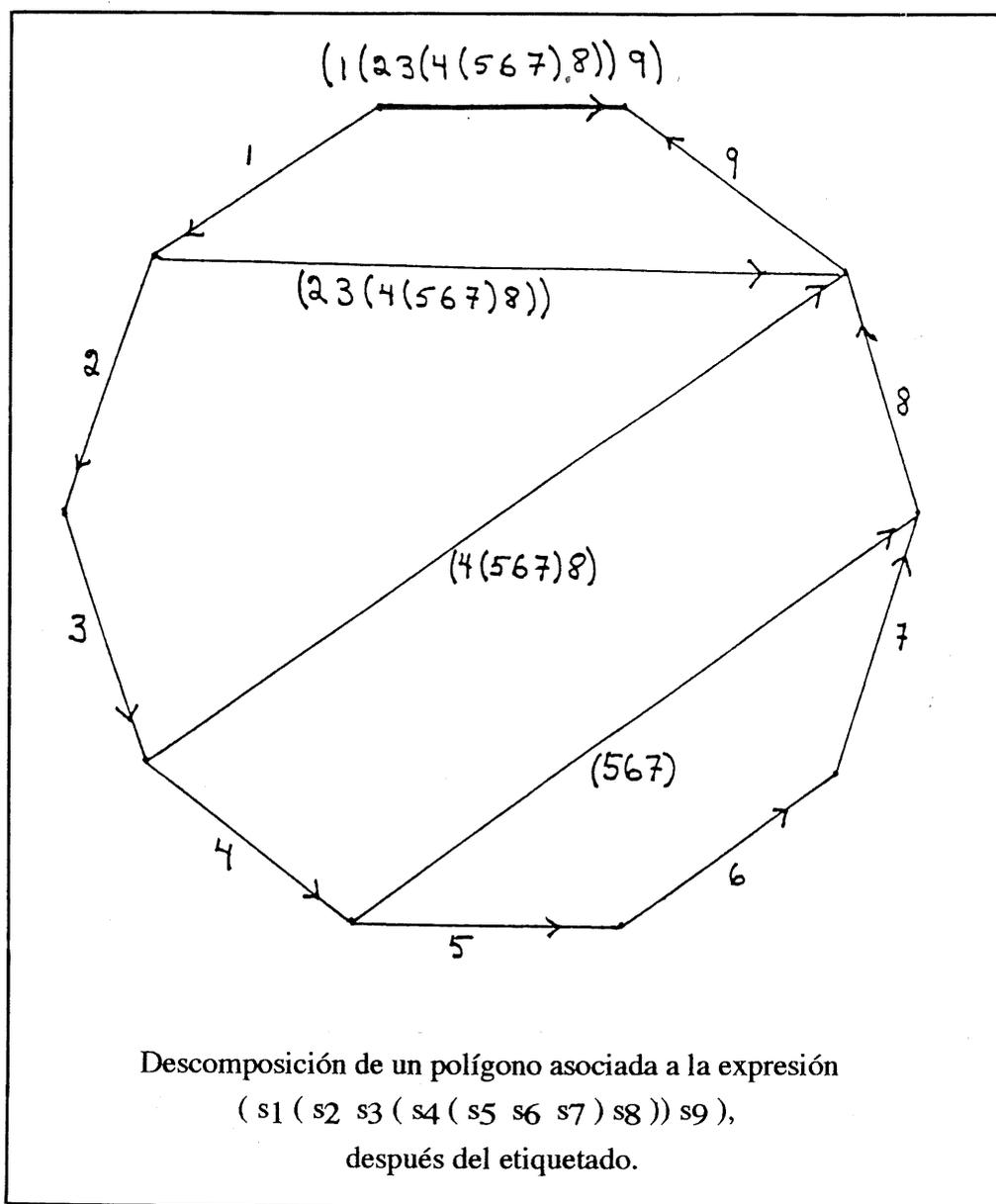
Polígonos descompuestos y sus correspondientes expresiones.

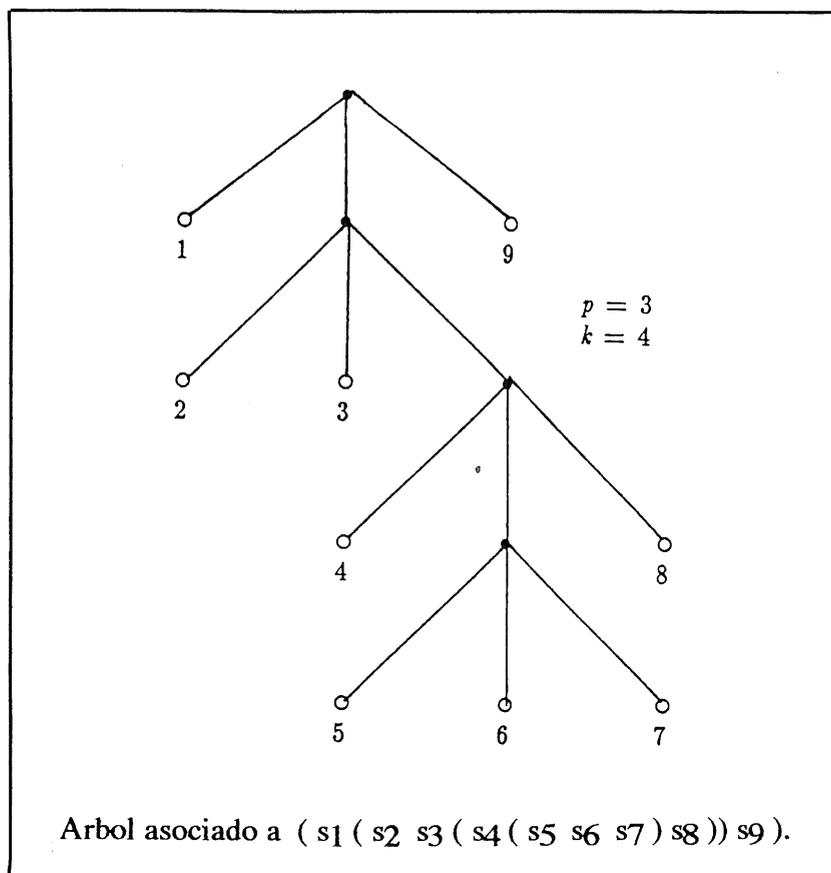
Obviamente podemos reproducir el proceso en sentido inverso. Es decir, dado a un polígono de $(p-1)k+2$ lados que ha sido descompuesto en k polígonos disjuntos de $p+1$ lados por $k-1$ diagonales, podemos obtener la correspondiente expresión y, por lo tanto el árbol correspondiente. Vamos a mostrar brevemente cómo se puede asociar de modo directo un árbol con un polígono descompuesto. Ilustraremos cómo establecer estas correspondencias en el caso un poco más complicado del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1.1. Tomemos $p=3, k=4$ y consideremos la expresión:

$$(s_1 (s_2 s_3 (s_4 (s_5 s_6 s_7) s_8)) s_9).$$

La correspondiente descomposición de un polígono convexo de 10 lados en cuatro cuadriláteros mediante 3 diagonales, con las designaciones apropiadas, se muestra en la Figura 6. El correspondiente árbol ternario se muestra en la Figura 7.





En primer lugar, vamos a tratar como se deduce del polígono descompuesto (sin designaciones) la correspondiente expresión asociada. El hecho de que el polígono esté descompuesto en cuadriláteros nos dice que la expresión está formada mediante una operación ternaria. Comenzando por el lado superior del decágono original, numeramos los demás lados, empezando por el lado contiguo por la izquierda (siguiendo la dirección contraria a las agujas del reloj) tal como se ilustra en la Figura 6. Al mismo tiempo escribimos la 'expresión' preliminar $s_1 s_2 s_3 s_4 s_5 s_6 s_7 s_8 s_9$. Ahora el objetivo consiste en designar el lado superior del decágono original de modo que podamos determinar la expresión asociada a partir de dicha designación. Empezamos buscando un lugar (o lugares) en la frontera del polígono en el cual 3 lados sucesivos estén conectados por una diagonal formando un cuadrilátero. Donde esto ocurra (en nuestro caso para los lados 5, 6 y 7) designamos la diagonal mediante los números de los lados (en este caso (5 6 7)) y ésta se

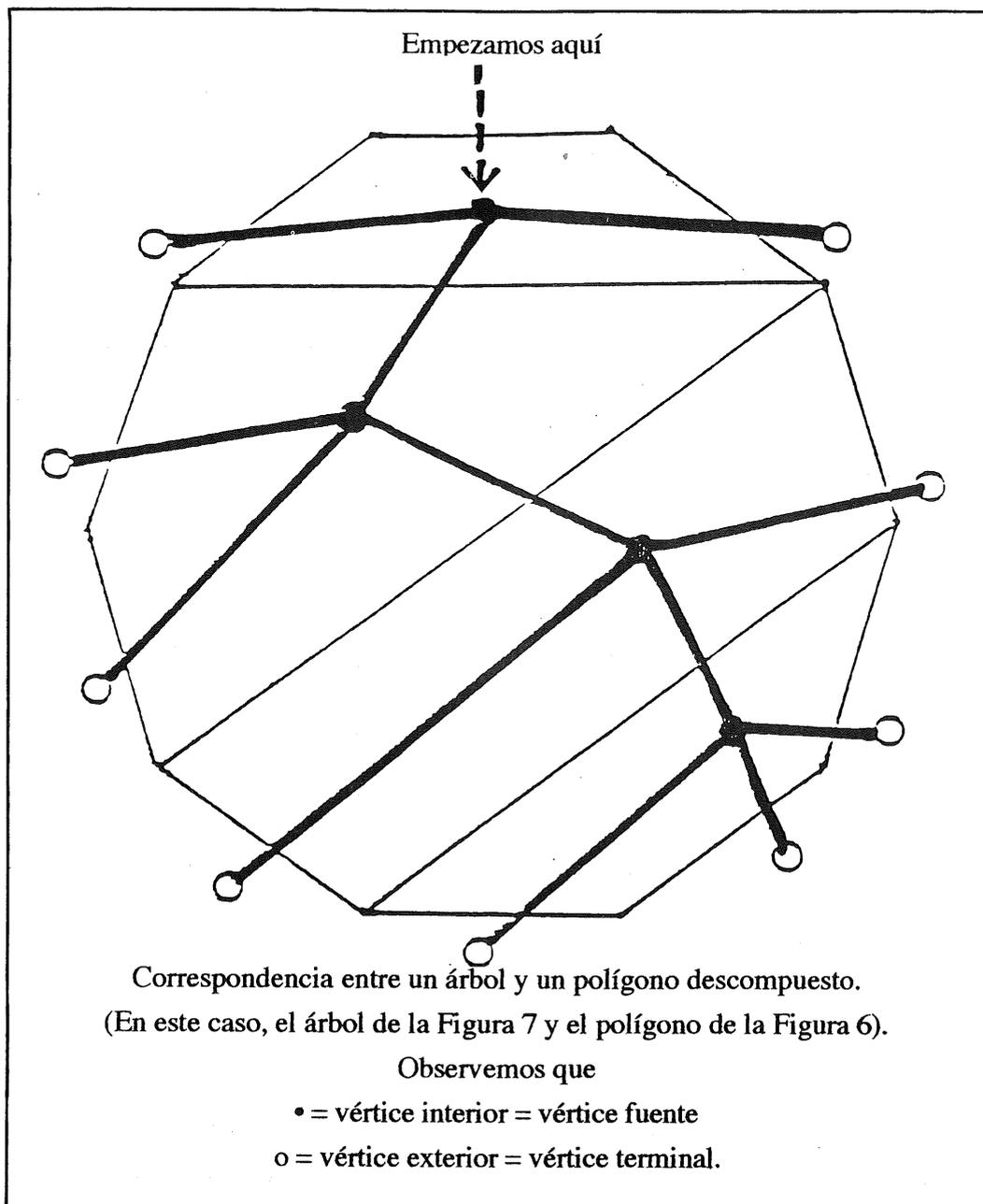
convierte en el lado de un polígono con dos lados menos que el original. Al mismo tiempo encerramos entre paréntesis los símbolos s_5 , s_6 y s_7 . Consideramos el nuevo polígono en el que (5 6 7) es una designación de uno de los lados y nuestra 'expresión' es la expresión preliminar, siendo $(s_5 s_6 s_7)$ un símbolo como los demás.

Por lo tanto estamos en disposición de repetir el proceso que acabamos de describir. Continuamos de este modo hasta conseguir que el lado superior tenga una designación simbólica y la expresión preliminar posea todos los paréntesis correspondientes. Naturalmente, si reemplazamos cada uno de los símbolos i del lado superior por símbolos s_i obtendremos la expresión deseada.

Vamos a ver ahora cómo podemos obtener el diagrama en árbol directamente a partir del polígono descompuesto. La Figura 8 proporciona un buen

ejemplo para ilustrar el proceso. En primer lugar elegimos el cuadrilátero de la descomposición que contenga el lado superior del polígono. En él dibujamos un vértice inicial del árbol y observamos que podemos dibujar ramas que, partiendo de este vértice, pasen a través de cada uno de los otros 3 lados del cuadrilátero. Si una rama sale del cuadrilátero sale de él a través de un lado del polígono

original, entonces su extremo será un vértice terminal del árbol (y perderemos todo interés en esta parte del árbol). Pero, si una rama sale del cuadrilátero a través de una diagonal interior del polígono, nos introduciremos en un nuevo cuadrilátero de la descomposición y, entonces, su extremo será un nuevo vértice a partir del cual podemos dibujar nuevas ramas; y así sucesivamente...



En el caso $p=2$, cualquiera de los valores a_k , b_k , o c_k , puede considerarse como la definición del k -ésimo número de Catalan. Por lo tanto podemos considerar cualquiera de los ${}_p a_k$, ${}_p b_k$ o ${}_p c_k$ como la definición del k -ésimo número de Catalan generalizado.

TEOREMA 1.2.

$${}_p a_k = \frac{1}{k} \binom{pk}{k-1} = \frac{1}{(p-1)k+1} \binom{pk}{k}, \quad k \geq 1.$$

La demostración usual de este resultado (ver [K]) es bastante sofisticada y en ella se utilizan argumentos de análisis complejo. Uno de nuestros objetivos principales ha sido poder ofrecer una demostración elemental del Teorema 1.2. que se base en el álgebra ordinaria. Sin embargo, en este artículo, demostraremos el Teorema 1.2. únicamente en el caso $p=2$; nuestro argumento usará todavía una cuarta interpretación de los números de Catalan generalizados (2). Pondremos un énfasis especial en la flexibilidad de esta cuarta interpretación, que vamos a describir a continuación.

Trayectorias en la retícula entera

En primer lugar definamos lo que es una trayectoria. Una *trayectoria* en la retícula entera del plano de coordenadas es una sucesión de puntos P_0, P_1, \dots, P_m , $m \geq 0$, en \mathbf{R}^2 de manera que cada P_i es un punto de la *retícula* (es decir, tiene coordenadas enteras), y P_{i+1} se obtiene avanzando una unidad hacia el norte o hacia el este desde P_i . Una trayectoria diremos que es una *trayectoria de P a Q* si $P_0 = P$ y $P_m = Q$. Una trayectoria se llama *p-correcta* si se encuentra toda ella en el semiplano inferior de la recta $y=(p-1)x$; en el caso contrario se llama *p-incorrecta*.

Sea $d_k = {}_p d_k$ el número de trayectorias p -correctas de $(0, -1)$ a $(k, (p-1)k-1)$. (considerando $d_0=1$). Vamos a extender el resultado del Teorema 1.1.

TEOREMA 2.1.

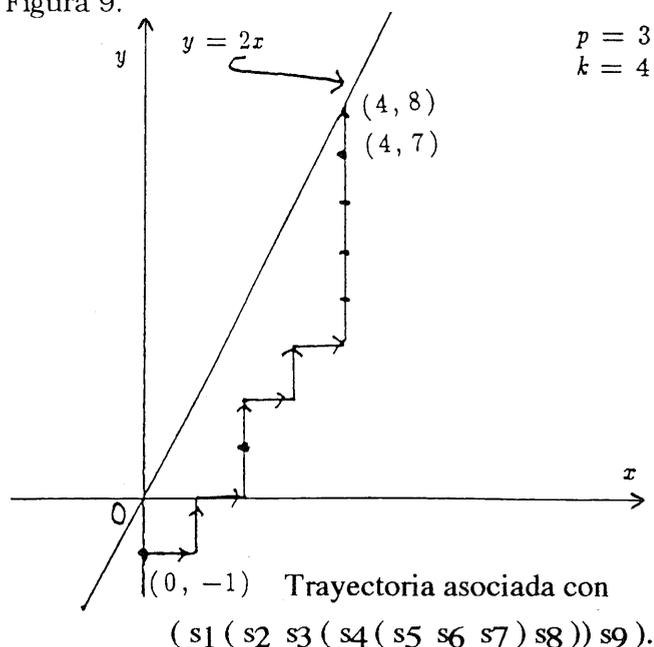
$${}_p a_k = {}_p b_k = {}_p c_k = {}_p d_k.$$

Demostración. Podemos suponer que $k \geq 1$ y vamos a probar que ${}_p b_k = {}_p d_k$. Consideramos una expresión obtenida asociando k aplicaciones de una operación de p elementos sobre un conjunto de $(p-1)k+1$ símbolos. Suprimimos todos los paréntesis de cierre (3) en nuestra expresión y obtenemos lo que llamamos una *expresión de trabajo*. Ahora, leyendo de izquierda a derecha, interpretamos un paréntesis abierto como la instrucción 'avanzar un lugar a la derecha' y un símbolo como la instrucción 'avanzar un lugar hacia arriba'. De este modo, si empezamos en el punto $(0, -1)$, cada expresión de trabajo da lugar a una trayectoria de $(0, -1)$ a $(k, (p-1)k)$, puesto que hay k paréntesis abiertos y $(p-1)k+1$ símbolos. Vamos a comprobar:

(i) que el penúltimo punto de la trayectoria es $(k, (p-1)k-1)$, y

(ii) que la subtrayectoria de $(0, -1)$ a $(k, (p-1)k-1)$ es p -correcta.

La trayectoria obtenida aplicando el procedimiento anterior al Ejemplo 1.1 se muestra en la Figura 9.



(2) Los lectores interesados en nuestra demostración del Teorema 1.2. para el caso general pueden consultar [HPI, 2].

(3) Esto convierte nuestra expresión en una 'expresión polaca inversa con significado' ('meaningful reverse Polish expression (MRPE)'); véase [HAG]. Observemos que los paréntesis de cierre son innecesarios para el significado de dicha expresión.

Para demostrar (i) observemos simplemente que nuestra expresión de trabajo no puede terminar con un paréntesis abierto. Para probar (ii), hagamos la hipótesis inductiva (respecto k) de que si en cualquier paso de la expresión, excepto en el último, hemos contado (a partir de la izquierda) u_i paréntesis y v_i símbolos, y por lo tanto hemos alcanzado el punto $(u_i, v_i - 1)$, entonces $(p-1)u_i > v_i$, es decir, el punto alcanzado está por debajo de la línea $y = (p-1)x$. La hipótesis es evidentemente cierta para $k=1$, por lo tanto supongamos $k > 1$. De acuerdo con el argumento utilizado en el Teorema 1.1, encontramos una parte de nuestra expresión que consiste en un paréntesis seguido de p símbolos. Al sustituir esta parte por un único símbolo obtenemos una expresión con $(k-1)$ aplicaciones de la operación.

Consideremos los u'_i y v'_i obtenidos en este caso del mismo modo que los u_i y v_i anteriores. Por las hipótesis de inducción resulta que $(p-1)u'_i > v'_i$, excepto en el último paso. Por lo tanto, para todos los pasos i anteriores a la parte sustituida en la expresión, resultará que $(p-1)u_i > v_i$; en particular $(p-1)u_{i_0} > v_{i_0}$. para el paso i_0 inmediatamente anterior a la parte sustituida. Si ahora insertamos el nuevo símbolo obtendremos $(p-1)u_{i_0} > v_{i_0} + 1$, y si reinsertamos la parte sustituida resultará que, al final de dicha parte, es $u_{i_1} = u_{i_0} + 1$, $v_{i_1} = v_{i_0} + p$, y por lo tanto $(p-1)u_{i_1} > v_{i_1}$. A partir de aquí se satisface $u_i = u'_i + 1$, $v_i = v'_i + p$, y por lo tanto también $(p-1)u_i > v_i$, excepto para el último paso.

En conclusión, omitiendo el último símbolo obtenemos una trayectoria p -correcta de $(0, -1)$ a $(k, (p-1)k-1)$. Dejamos al lector la demostración de que, recíprocamente, toda trayectoria p -correcta produce una expresión de trabajo bien construida. (Análogamente, este hecho requiere un argumento inductivo del mismo tipo).

Como ya hemos dicho, en el caso particular $p=2$ la sucesión de números producida por cada una de las cuatro definiciones es la sucesión C_k de los números de Catalan. Es decir,

$${}_2a_k = {}_2b_k = {}_2c_k = {}_2d_k = C_k.$$

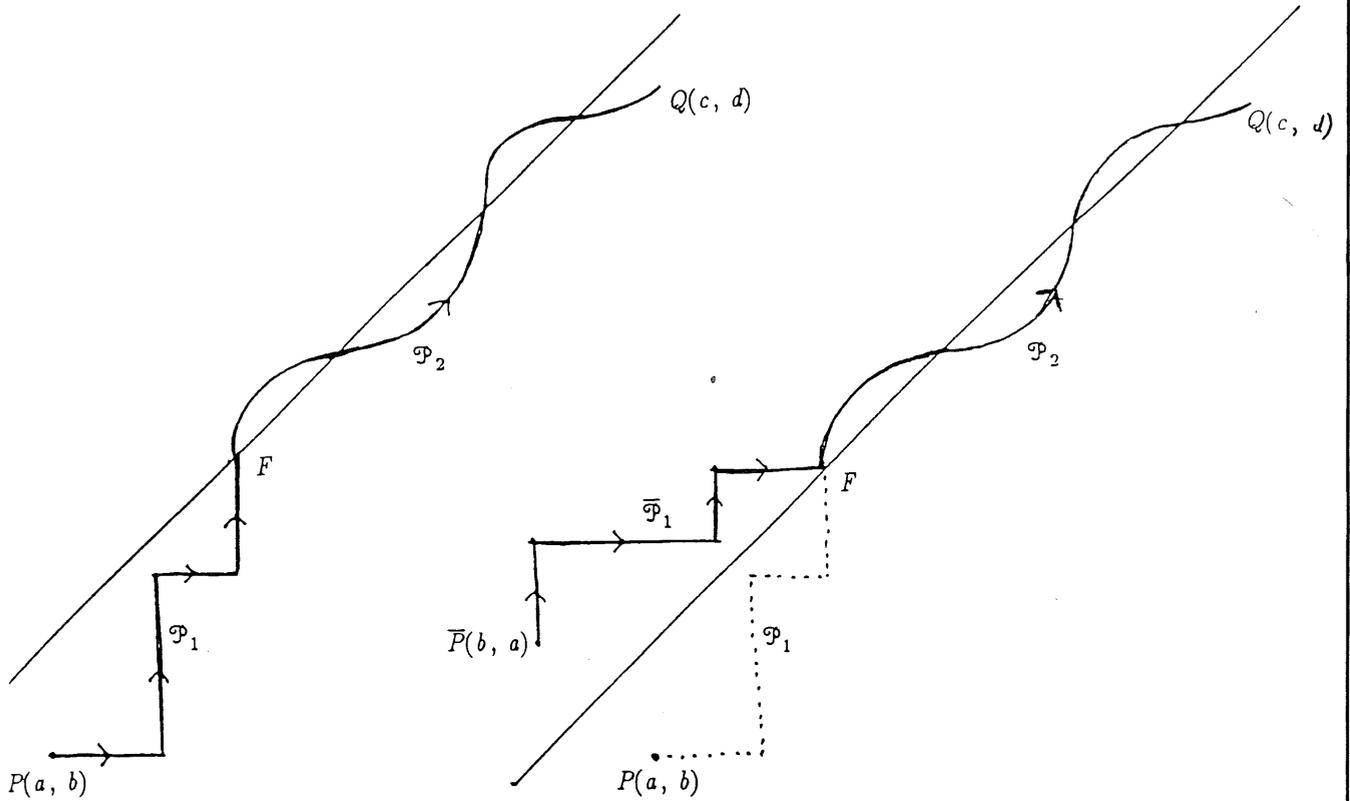
Los números ${}_p a_k (= {}_p b_k = {}_p c_k = {}_p d_k)$ se llaman *números de Catalan generalizados* (ver [HPI, 2]). La siguiente sección está dedicada a encontrar una fórmula explícita para C_k ; es decir, nos restringiremos al caso $p = 2$.

Cálculo de los números de Catalan ($p = 2$); el método de reflexión de André.

Hace poco más de cien años el matemático francés Désiré André publicó una nota breve, titulada "*Solution directe de problème résolu par M. Bertrand*", en la prestigiosa revista francesa "*Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*" [A]. El problema en cuestión es conocido como el problema de la votación y vamos a describirlo y a solucionarlo, utilizando una variación del método de André, en la sección siguiente. Pero antes, vamos a discutir el método utilizado por André para calcular ${}_2d_k$, es decir, para calcular todas las trayectorias 2-correctas de $(0, -1)$ a $(k, k-1)$.

André quería calcular el número de trayectorias 2-correctas de $P(a, b)$ a $Q(c, d)$ en la retícula entera, con $b < a \leq d < c$ (ver Figura 10 (a)). Su solución es preciosa y, todavía hoy, se la considera un recurso modelo en combinatoria (ver, por ejemplo [C]). Vamos a exponerla.

Puesto que siempre consideraremos $p=2$, a lo largo de esta sección no explicitaremos la p en la terminología simbólica.



(a)

(b)

$a \leq c, b \leq d$, existencia de trayectorias,
 $a > b, c > d$, ambos puntos bajo la línea $y = x$, y
 $a \leq d$, existencia de trayectorias incorrectas.

$$\begin{array}{l}
 \text{número total de trayectorias} \\
 \binom{(c+d) - (a+b)}{d-b}
 \end{array}
 -
 \begin{array}{l}
 \text{número de trayectorias incorrectas} \\
 \binom{(c+d) - (b+a)}{d-a}
 \end{array}
 = \text{número de trayectorias correctas.}$$

Método de reflexión de André.

En primer lugar, observemos que el número total de trayectorias, correctas o incorrectas, de $P(a, b)$ a $Q(c, d)$ es precisamente el coeficiente binominal.

$$\binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} \text{ o, de modo equivalente, } \binom{(c+d)-(a+b)}{c-a}$$

Por lo tanto es suficiente calcular las trayectorias incorrectas. Si P es una trayectoria incorrecta, sea F su primer punto de contacto con la línea $y=x$. Denotemos por P_1 y P_2 las subtrayectorias PF y FQ ; de modo que, considerando la composición de trayectorias como su yuxtaposición, se verifica $P = P_1 P_2$. A su vez, denotemos como \bar{P}_1 la trayectoria obtenida a partir de P_1 mediante *reflexión en la línea* $y=x$. Entonces, si $\bar{P} = \bar{P}_1 P_2$, \bar{P} es una trayectoria de $P(a, b)$ a $Q(c, d)$ y, de este modo, la correspondencia $P \rightarrow \bar{P}$ establece una biyección entre el conjunto de trayectorias *incorrectas* de P a Q y el conjunto de *todas* las trayectorias de \bar{P} a Q . Por lo tanto el número total de trayectorias *incorrectas* de P a Q viene dado por el coeficiente binominal.

$$\binom{(c+d)-(b+a)}{c-b} \text{ o, de modo equivalente por, } \binom{(c+d)-(b+a)}{d-a}$$

Así pues, existen al menos cuatro modos aparentemente distintos (pero realmente idénticos) de escribir una expresión explícita para el número de trayectorias correctas de P a Q . Con la intención de que el cálculo posterior de los números de Catalan resulte lo más sencilla posible, elegimos la siguiente expresión:

$$(3.1) \quad \binom{(c+d)-(a+b)}{d-b} - \binom{(c+d)-(b+a)}{d-a}$$

para designar el número de trayectorias correctas de $P(a, b)$ a $Q(c, d)$. La argumentación anterior se

ilustra en la Figura 10. En ella, la subtrayectoria FQ se representa por una línea ondulada para indicar que simplemente es *cierta trayectoria* (con nuestro sentido específico) de F a Q , pero que no estamos interesados en ninguna particularidad suya.

En el caso concreto que nos interesa, a partir de (3.1), resulta que el número C_k de trayectorias correctas de $P(0, -1)$ a $Q(k, k-1)$ viene dado por

$$C_k = \binom{2k}{k} - \binom{2k}{k-1} = \binom{2k}{k-1} \left[\frac{k+1}{k} - 1 \right] = \frac{1}{k} \binom{2k}{k-1}, \quad k \geq 1.$$

En la próxima sección utilizaremos (3.1) y el ingenioso principio de reflexión de André para resolver el famoso problema de la votación.

El problema de la votación

El problema de la votación cautivó a matemáticos y probabilistas a finales del siglo XIX. Supongamos que se realiza una votación para una elección a la que concurren dos candidatos, X e Y ; supongamos además que X recibe a votos y que Y recibe b votos, siendo $a > b$ y, por lo tanto que X es elegido. La cuestión que se plantea es la siguiente: "¿Cuál es la probabilidad "p" de que, durante el recuento de votos (4), X esté siempre por delante de Y ?" Naturalmente esta cuestión se puede traducir en una cuestión sobre trayectorias en la retícula entera del plano de coordenadas. Cada trayectoria de $(0, 0)$ a (a, b) representa una posible evolución del recuento de votos, por esto su número total será:

$$(4.1) \quad \binom{a+b}{a}$$

Llamemos *favorable* a un recuento en el que X siempre esté por delante de Y . Está claro que un recuento favorable corresponde a una trayectoria

(4) Suponemos que una sola persona realiza el escrutinio.

que (excepto en su punto inicial $(0, 0)$) es correcta. Por lo tanto necesitamos saber cuantas trayectorias de este tipo existen.

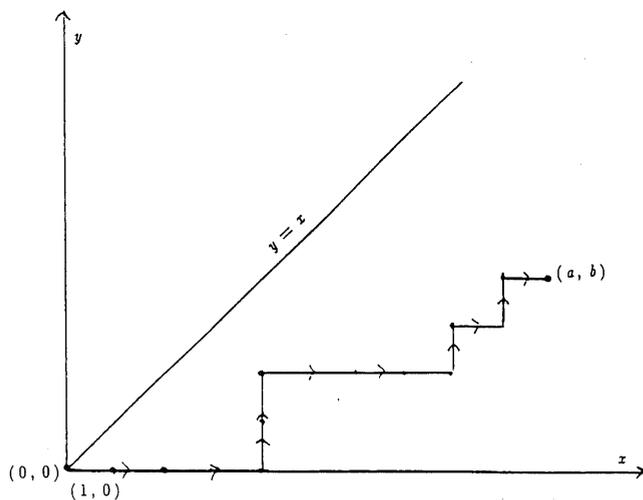
Observemos que, en un recuento favorable, X ha de recibir el primer voto y la trayectoria correspondiente alcanza inmediatamente el punto $(1, 0)$. Por lo tanto nuestro problema consiste en contar el número de buenas trayectorias de $(1, 0)$ a (a, b) . El número de dichas trayectorias, calculado a partir de la expresión (3.1) resulta ser:

$$(4.2) \quad \binom{a+b-1}{b} - \binom{a+b-1}{b-1} = \frac{(a+b-1)!}{a! b!} (a-b)$$

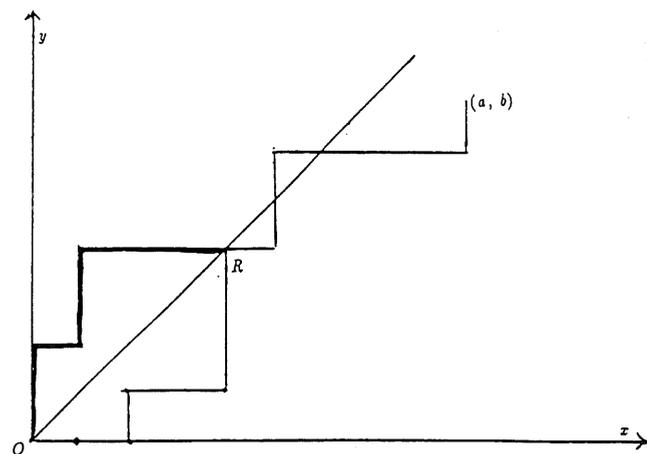
Para obtener el valor de p en el problema de la votación basta con dividir (4.2) por (4.1) y obtenemos:

$$p = \frac{(a+b-1)!}{a! b!} (a-b) \frac{a! b!}{(a+b)!} = \frac{a-b}{a+b}$$

Este resultado sorprendentemente sencillo muestra que, de hecho, la probabilidad " p " depende solo de la razón b/a y no del número total de votos recibidos por los candidatos. Este resultado nos parece algo misterioso y poco intuitivo. Quizás el siguiente argumento alternativo, basado en conceptos probabilísticos combinados con el método de André, nos puede proporcionar una idea más clara del porqué de nuestro resultado. (5)



Trayectoria de un suceso favorable.



Método de reflexión de André para una trayectoria incorrecta.

(5) Agradecemos al profesor James A. Wahab habernos enviado una carta con las ideas básicas de este argumento.

Consideremos una trayectoria producida por una sucesión de votos que satisface el criterio del problema de la votación, tal como se muestra en la Figura 11. Entonces podemos observar fácilmente que, dada una trayectoria de $(0, 0)$ a (a, b) correspondiente a un recuento particular de una votación, la probabilidad p_E de que el *primer paso* vaya en dirección Este es:

$$p_E = \frac{a}{a+b}$$

y la probabilidad p_N de que el *primer paso* vaya en dirección Norte es:

$$p_N = \frac{b}{a+b}$$

Estamos buscando la probabilidad p de que una trayectoria dada se encuentre bajo la línea $y=x$ excepto en el origen. Podemos ver fácilmente que todas las trayectorias que empiezan con un paso hacia el Norte serán trayectorias incorrectas, mientras que las que empiezan con un paso hacia el Este pueden ser correctas o incorrectas. Con un análisis más detallado podemos ver (usando la idea de André) que, de hecho, a cada trayectoria que empieza con un paso hacia el Norte le corresponde otra trayectoria necesariamente incorrecta que empieza con un paso hacia el Este. Esta correspondencia biyectiva entre trayectorias que empiezan con un paso hacia el Norte y trayectorias incorrec-

tas que empiezan hacia el Este, se establece tomando la reflexión de la subtrayectoria OR sobre la línea $y=x$ y manteniendo la parte de la trayectoria original que va de R a (a, b) (tal como se ilustra en la Figura 12). Por esto, la probabilidad de que una trayectoria empiece con un paso hacia el Este y sea incorrecta es exactamente la misma que la probabilidad de que una trayectoria empiece con un paso hacia el Norte. Por lo tanto:

$$p = p_E - p_N = \frac{a}{a+b} - \frac{b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

coincidiendo con (4.3).

De este modo, tal como dijimos, la probabilidad buscada depende sólo de la razón a/b ; por ejemplo, la probabilidad es la misma tanto si X recibe 80 votos e Y recibe 40 como si X recibe 800 votos e Y recibe 400 (en concreto $1/3$). Sin embargo, esto no implica que la probabilidad no se vería afectada si agrupásemos los votos, por ejemplo de 10 en 10, antes del recuento. De hecho, en el caso extremo en que todos los votos se agrupan en un único conjunto antes del recuento, la probabilidad resultaría ser 1!. He aquí otra cuestión interesante.

Peter Hilton. *Department of Mathematical Sciences, State Univ. of New York.*
Jean Pedersen. *Department of Mathematics, Santa Clara University.*

Bibliografía

- [A] D. ANDRÉ. "Solution directe du problème résolu par M. Bertrand", *Comptes Rendus*, 105, 436-437, 1887.
- [C] L. COMTET. **Advanced Combinatorics**. D. Teigel Publishing Co., Netherlands, 1974.
- [HAG] A. P. HILLMAN, G. L. ALEXANDERSON y R.M. GRASSL. **Discrete and Combinatorial Mathematics**. Dellen-Macmillan, 1987.
- [HP1] P. HILTON y J. PEDERSEN. "Catalan numbers and their uses". *Supplement to the Handbook of Applicable Mathematics*. John Wiley and Sons, Chichester, 1990. (93-115).
- [HP2] P. HILTON y J. PEDERSEN. "Catalan numbers, their generalizations and their uses" *Mathematical Intelligencer*. (En prensa).
- [K] D. A. KLARNER. "Correspondences between Plane Trees and Binary Sequences". *J. of Comb. Theory*, 9. 401-411. 1970.
- [S] N. J. A. SLOANE. "A handbook of Integer Sequences". Academic Press, Nueva York, 1973.