VALOR MATEMÁTICO ELEMENTAL DE LOS FRACTALES

Fernando Fernández Rodríguez
José Miguel Pacheco Castelao

Introducción

Desde que la productora cinematográfica Lucasfilm, gracias al empleo de técnicas fractales, se ha puesto a la cabeza de la obtención de espectaculares imágenes sintéticas, simulando decorados, paisajes naturales, vuelos de aeronaves y toda suerte de Zooms y Travellings cinematográficos, los objetos fractales han dejado de ser una pura entelequia matemática para exquisitos, para pasar a formar parte significativa de la cultura de finales del siglo XX.

Los Fractales han saltado a las páginas de los periódicos y se han convertido en asiduos habitantes de los dominicales de los mejores medios informativos del mundo. El conjunto de Mandelbrot ha ocupado las portadas de todas las revistas de divulgación científica para terminar siendo calificado como una «combinación suprema entre el arte y la técnica».

El éxito de las teorías matemáticas finiseculares ha conseguido acaparar la atención del gran público, atención que no descansaba en las matemáticas desde la época dorada del nacimiento de la Mecánica Celeste (No está de más recordar aquí que uno de los orígenes de la teoría de los fenómenos caóticos es precisamente la Mecánica Celeste). El Caos y los Fractales compiten hoy día con la ingeniería genética, la teoría de la relatividad, la energía nuclear y la gestión ambiental.

Desde la mera perspectiva de la enseñanza de las matemáticas, sería interesante utilizar la tremenda curiosidad e inquietud que han despertado en el público los objetos fractales.

Al margen de las consecuencias científicas de estas teorías, existe dentro de los fractales un valor matemático elemental que, quizás por el carácter novísimo de su configuración definitiva como teoría y su vinculación con la tecnología del ordenador, es muy acorde con los nuevos valores y destrezas buscadas actualmente en la enseñanza de las matemáticas:

Geometría de exploración y teselaciones.
Recursividad y algoritmos en ambiente geométrico.
Matemáticas del crecimiento (progresiones y fracciones continuas).
Aproximaciones al infinito.
El concepto de límite a través de la geometría.
Logaritmos y escalas logarítmicas.
El concepto y papel de la escala.

Los objetos fractales

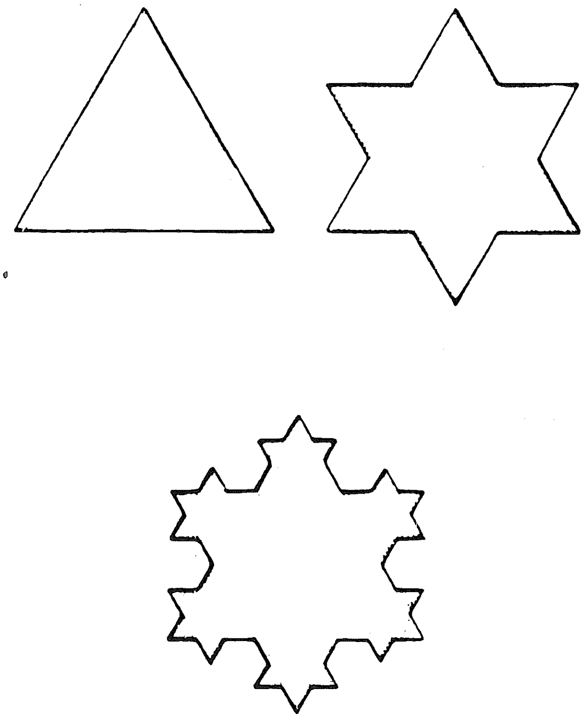
Un fractal es una figura que presenta similaridad entre el todo y sus pequeñas partes. Puede construirse recursivamente iterando un conjunto sencillo de instrucciones, que a pesar de su complejidad origina formas muy complejas desde el punto de vista de la geometría euclídea. Objetos de este tipo se han construido a lo largo de los últimos cien años como fuente de contraejemplos en diversas teorías. La intención de Mandelbrot al sistematizarlos fue buscar una nueva geometría capaz de simular la forma que tienen los objetos reales como los ríos, las costas, los cráteres lunares o la caprichosa distribución de la materia en el universo. Como señalaba jocosamente su redescubridor, parece como si la naturaleza hubiese gastado una broma a los matemáticos. El modelo euclídeo, puntos, rectas o planos, es una idealización que raras veces aparece en los objetos reales. El hecho de abstraer de un hilo el concepto de recta y de un velo el de plano son simplificaciones que en ocasiones se revelan extraordinariamente burdas.

La existencia de funciones continuas no derivables no constituyen una sutileza ajena a la naturaleza. Las curvas que no admiten tangentes son la regla. Las curvas «regulares», aunque sean objetos interesantísimos mucho más fáciles de manejar con las heramientas habituales del cálculo diferencial, constituyen la excepción, por lo cual la geometría de las formas naturales está mal representada por el orden perfecto que reina en las formas usuales de Euclides o del cálculo diferencial.

La verdadera geometría de la naturaleza parece evocar más bien la complicación de extrañas teorías matemáticas, creadas a principios de siglo, caídas en desuso durante casi cincuenta años debido a la ausencia de elementos potentes de cálculo y al giro formalizador que sufrieron las matemáticas en esa época.

Helge von Koch ideó en 1904 una curva donde una longitud infinita encierra un área finita:

Es un estimulante ejercicio de progresiones geométricas el comprobar como en cada etapa de construcción de la curva de von Koch, su longitud aumenta en un factor de 4/3, teniendo por tanto límite infinito. La distancia entre dos cualesquiera de sus puntos es también infinita. Matemáticamente hablando, este objeto pertenece a la clase de curvas continuas no derivables en ningún punto y con arcos no rectificables, que comenzaron por escandalizar a Weierstrass, Bolzano, Cantor y Dedekind a finales del siglo pasado, poniéndoles de manifiesto lo escurridizo que puede llegar a ser el concepto de longitud de un arco.



Costas

A comienzos de los años sesenta Benoit Mandelbrot planteó la siguiente pregunta:

¿Cual es la longitud de la costa de Bretaña?

¡Una costa puede ser un elocuente ejemplo de lo que es un fractal!

Cuando una bahía o una península, representadas en un mapa a escala 1/100.000, se examinan de nuevo en un mapa 1/10.000, se observa que sus contornos están formados por innumerabes sub-bahías y sub-penínsulas. En un mapa escala 1/1.000, se ven aparecer también sub-sub-bahías y sub-sub-penínsulas y así sucesivamente. Los pequeños detalles son por tanto similares a los grandes.

Las fronteras que separan los países se adaptan también a la forma fractal. El científico inglés Lewis F. Richardson, conocido por sus investigaciones sobre la predicción del tiempo y los primeros modelos matemáticos del desarrollo de las guerras, intrigado por lo retorcido del trazado de las fronteras nacionales, consultó en diversas enciclopedias las longitudes de las fronteras entre España y Portugal y entre Bélgica y Holanda. Richardson encontró discrepancias de ¡hasta un 20%!en las longitudes calculadas.

Richardson observó también que al reducir la escala de medición, la longitud de las costas y fronteras aumenta prácticamente sin límites.

Es fácil idear un procedimiento para obtener la longitud de una costa en función de la escala elegida previamente en el mapa:

La idea consiste en pasear un compás de abertura μ, comenzando cada paso donde termina el anterior. El valor μ multiplicado por el número de pasos nos dará la longitud aproximada de la costa. Si se repite la operación reduciendo sucesivamente la abertura del compás, se encuentra que $L(\mu)$ tiende a aumentar sin límite. La escala μ y por tanto la extensión longitudinal geográfica es ciertamente una elección antropológica: un ratón, una mosca, las piedras grandes o el hombre adulto.

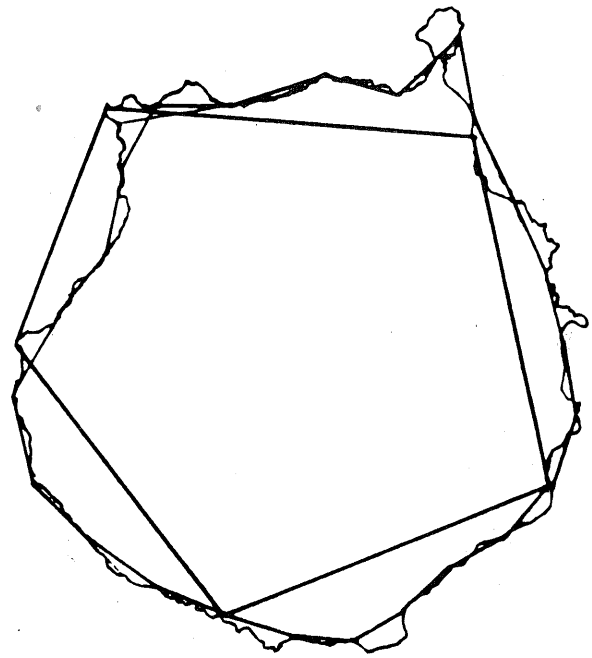
La variación de la longitud aproximada $L(\mu)$ es proporcional a $\mu^{-\alpha}$ donde α depende de la costa elegida, y distintos tramos de la misma costa, considerados separadamente, dan a menudo distintos valores de α.

Tomando escalas logarítmicas en la representación obtendríamos:

$$L(\mu) = K\,\mu^{-\alpha} \;\; ; \;\; \log L(\mu) = -\alpha \log \mu + \log K$$

pudiendo calcular así, de forma empírica, el valor característico α de una costa.

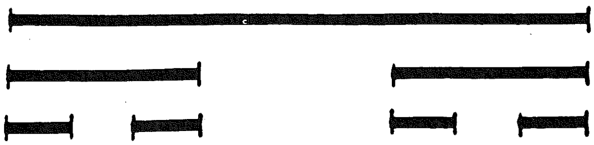
Un interesante ejercicio para realizar dentro de una clase, es llevar adelante todos estos cálculos sobre una costa de contorno familiar para los alumnos; introduciéndoles en este terreno fascinante del paso al límite, los alumnos podrán comprobar finalmente que una costa, al igual que la curva de Koch puede tener longitud infinita.



Otros fractales

A finales del pasado siglo Georg Cantor, llevado al estudio de los fundamentos de las matemáticas por sus trabajos en la teoría de las series trigonométricas, había encontrado un misterioso conjunto de puntos, que sería durante el desarrollo sucesivo de las matemáticas fuente de inspiración de importantes estudios realizados a principios de siglo sobre topología y teoría de la medida.

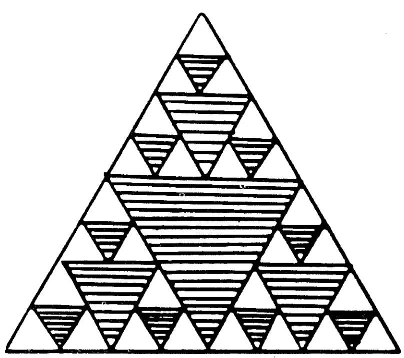
Su construcción es la siguiente:

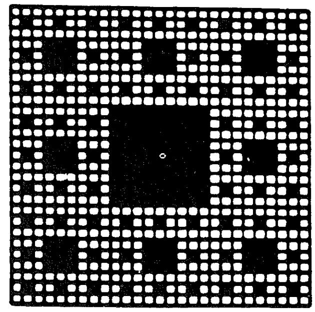


Al intervalo cerrado [0,1] le quitamos el tercio central abierto (1/3, 2/3). A continuación, a cada uno de los tercios que quedan, se les quita su propio tercio central abierto y se procede de este modo indefinidamente. el resultado final de esta interpolación es un «polvo» tenue que goza de la insólita propiedad de que cada punto es de acumulación. Entre las sucesiones que pueden ser construidas a costa del discontinuo de Cantor destacamos el número de segmentos 2^n en que quedará dividido tras n pasos, y $1/3^n$ como longitud de cada uno de esos segmentos.

El discontinuo de Cantor es por añadidura un conjunto de medida de Lebesgue nula pese a su no numerabilidad. Este resultado puede demostrarse sin más dificultad que la de comprobar que puede ser recubierto por una sucesión de intervalos cuya longitud tiende a cero (obsérvese como la longitud de cada uno de los poros, tras n pasos es de la forma $(2/3)^n$, y que tal serie geométrica tiene por suma 1).

Los fractales planos más habituales en la literatura son la «curva de cabezas de flecha» y la «alfombra de Sierpinski»: En el primer caso quitamos a cada uno de los triángulos el triángulo central abierto que se forma en su interior: Esta configuración es conocida en la cultura aborigen canaria; existen estos gráficos, llamados «pintaderas» en los vestigios conservados hasta nosotros. En el segundo sustraemos el cuadrado central abierto.

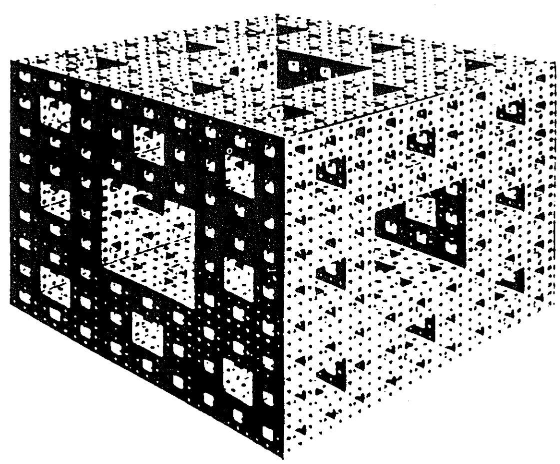




La figura límite que se forma en ambos casos es una curva extremadamente intrincada que tiene longitud infinita.

Dejamos al lector que descubra por sí mismo la rica fauna de sucesiones a que tales figuras dan lugar.

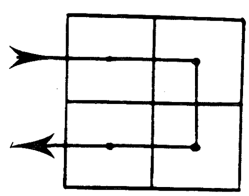
Por último citaremos la «esponja de Sierpinski», curva fractal en el espacio que goza de extraordinarias propiedades universales como objeto topológico.

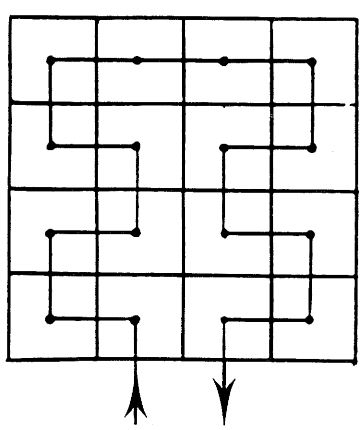


La forma de este objeto nos recuerda, no por casualidad, aquellos paisajes a través de los que se perseguían las naves del Imperio y la Federación. La base de muchos de los efectos especiales, exhibidos por Spielberg en «La guerra de las galaxias» tienen su base en la simulación de imágenes por medio de la geometría fractal.

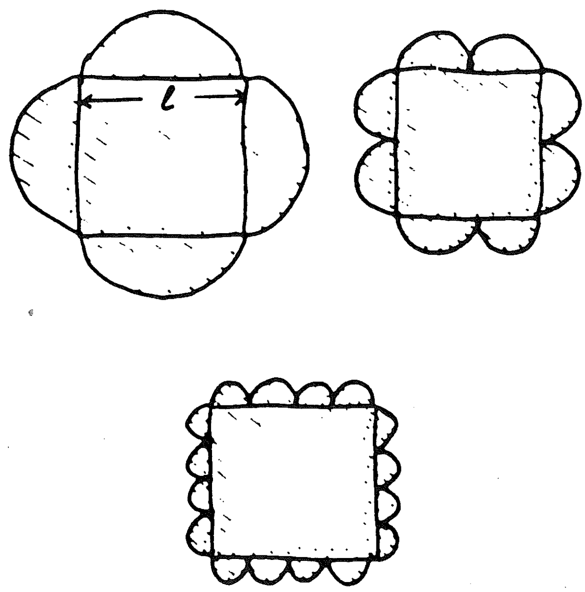
Otras aproximaciones a los fractales

Los fractales planos construidos más arriba tienen gran parentesco con unas asombrosas construcciones de principios de siglo llamadas curvas de Peano. Tales objetos son curvas, en el sentido de aplicaciones $\Phi: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, capaces de pasar por todos los puntos de un recinto plano. La que se expone a continuación, al igual que los fractales, constituye un algoritmo gráfico de recursividad perfecta para construir una curva que pasa por cada punto del plano una y sólo una vez:

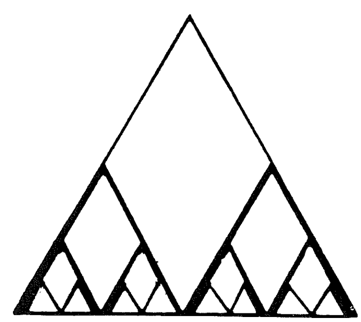


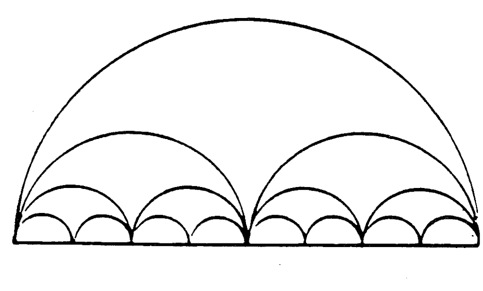


El Grupo Cero es uno de los pioneros en nuestro país en la utilización de construcciones geométricas para ilustrar el estudio de las progresiones. En unos de sus libros de Bachillerato de comienzos de los setenta aparece la siguiente sucesión de figuras de perímetro constante cuyo límite es un cuadrado:

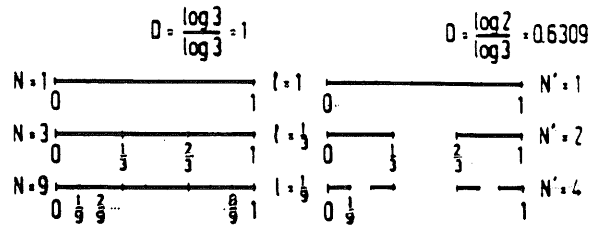


Son también clásicas el siguiente par de sucesiones de perímetro constante, cuyas áreas tienden a cero:





Ninguna de las tres construcciones señaladas anteriormente son propiamente fractales. La definición precisa y matemáticamente rigurosa de tales objetos requiere conceptos más refinados que una idea tan ingénua como la de autosimilitud. No obstante estas figuras de perímetro constante son muestra de un estilo a la hora de explorar el infinito, un estilo que puede continuarse con el uso de los fractales.



La dimensión fractal

Hausdorff ya había encontrado en 1919 un concepto de dimensión capaz de distinguir todos aquellos objetos raros que los matemáticos habían creado como contraejemplos. La idea era introducir dimensiones no enteras que describiesen la «porosidad» de determinados objetos.

Una costa al ser un objeto «más macizo» que una línea ordinaria, pero «más deshilachado» que una superficie, sería lógico que poseyese una dimensión comprendida entre uno y dos.

La teoría de la dimensión no entera de Hausdorff-Besicovitch, llamada otras veces dimensión logarítmica o dimensión fractal, puede formularse para un objeto con total independencia de que posea o no autosimilaridad interna. La idea capital es la siguiente (note el curioso lector el parentesco con la definición de compacto):

Consideremos un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^d$. Sea $N(\varepsilon)$ el número de esferas d-dimensionales de diámetro ε necesarias para cubrir tal conjunto.
Si $N(\varepsilon)$ varía con ε de la forma $N(\varepsilon) = cte\ \varepsilon^{-D}$ cuando $\varepsilon \to 0$, llamaremos a D dimensión de Hausdorff del conjunto.
Esta fórmula permite dar una dimensión entre 0 y 1 al conjunto de Cantor:

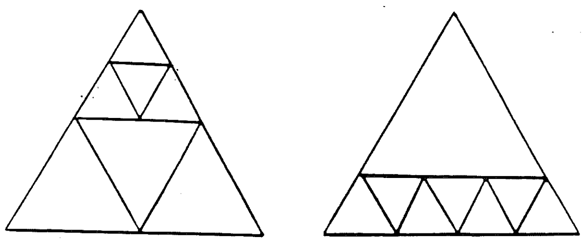
$$D=0'6309... = \frac{\log 2}{\log 3}$$

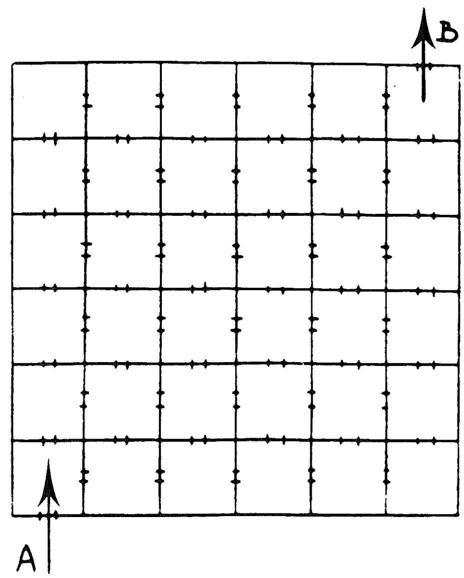
Las curvas de Peano no son sino curvas planas cuya dimensión de Hausdorff es dos. Puede resultar un agradable y sencillo ejercicio para los alumnos el comprobar que la dimensión logaritmica de la curva de von Koch es
$D= \frac{\log 4}{\log 3} = 1,2618...$ y calcular las dimensiones de los restantes fractales.

Epílogo

Para finalizar, desearíamos hacer referencia a una conversación mantenida con Claudi Alsina hace pocos meses en la que defendíamos, de forma muy parecida a como se hace en este artículo, la utilidad de los fractales en la enseñanza matemática elemental. Después de escuchar detenidamente nuestro discurso, planteó dos problemas, de reciente aparición y de índole muy parecida a los que le exponíamos, pero que tienen la cualidad de romper esa atmósfera, en ocasiones excesivamente rígida, que rodea a los fractales:

¿Es posible recubrir todo triángulo con un número cualquiera de triángulos semejantes a él?. En el siguiente dibujo exponemos algunas soluciones parciales.





Problema del ruso: por un recinto de treinta y seis habitaciones, cada una comunicada con la contigua mediante una puerta en la que acecha un funcionario, un ruso debe pasar obteniendo un visado de cada uno de los funcionarios, pero de modo que sólo podrá traspasar cada una de las puertas una y sólo una vez. ¿Conseguirá el dedichado ciudadano entrar por la punto A y salir por el B?.

Pista: A efectos de que el problema tenga sentido se supone que estos funcionarios no salen a desayunar nunca, claro está.

Fernando Fernández Rodríguez
Departamento de Economía Aplicada
Universidad de Las Palmas

José Miguel Pacheco Castelao
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas

Bibliografía

[1] BARNSLEY M. (1988) «**Fractals Everywhere**» Academic Press. Boston.

[2] BARNSLEY M. (1989) «**The Desktop Fractal Design Handbook**» Academic Press. Boston.

[3] FALCONER K. (1990) «**Fractal Geometry**» John Wiley. Chichester.

[4] GLEICK J. (1988) «**Caos. La creación de una ciencia**» Seix Barral. Barna.

[5] KLEIN F. (1926) «**Die Entuicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert**» Springer Verlag. Berlin.

[6] KLEIN F. (S.F.) «**Las Matemáticas Elementales desde un punto de vista superior**». CSIC.

[7] MANDELBROT B. (1987) «**Los Objetos Fractales**» Ed. Tusquets. Barcelona.