suma+ 78
Artículos
Marzo 2015
pp. 9-21

Matemáticas y competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (y 2)

Manuel Feito Guzmán
Carlos J. Sandoval Ruiz

En esta Parte 2, a través de Plimpton 322, analizamos el tratamiento de todas las competencias básicas de la Educación Secundaria Obligatoria en el sistema educativo español, destinada para estudiantes de 12 a 16 años. Dedicamos especial atención a la competencia matemática, proponiendo actividades de clase concretas estructuradas por etapas, niveles y edad del alumnado.

Palabras clave: Historia de las matemáticas, Teoría de números, Trigonometría, Competencias básicas, Actividades de aula.

Mathematics and Basic Competences from the Plimpton 322 Tablet (Part 2)

In this Part 2, using Plimpton 322, we analyze the treatment of all the basic skills of the Secondary School in Spain, designed for students aged 12 to 16 years. We give special attention to the mathematical skill, proposing specific classroom activities structured in stages, levels and ages of the students.

*Key words:*History of Mathematics, Number Theory, Trigonometry, Basic Competences, Classroom Activities.

La competencia matemática en Plimpton 322. Actividades de clase

La competencia matemática consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad (MEC, 2006). Esta competencia implica el conocimiento y manejo de los elementos matemáticos básicos (distintos tipos de números, medidas, símbolos, elementos geométricos, etc.) en situaciones reales o simuladas de la vida cotidiana, y la puesta en práctica de procesos de razonamiento que llevan a la solución de los problemas o a la obtención de información.

La materia de Matemáticas es, evidentemente, la materia prioritaria para desarrollar esta competencia y para ello debemos trabajar distintos bloques en los que se estructura el currículo: aritmética; álgebra; geometría; funciones y gráficas; y estadística y probabilidad. Las actividades de enseñanza-aprendizaje que aquí presentamos abarcan todos estos bloques vertebradores de las matemáticas en la ESO, tomando como referencia el estudio de la tablilla

Artículo recibido en *Suma* en junio de 2013 y aceptado en mayo de 2014

Plimpton 322. Las hemos clasificado por etapas de ESO de acuerdo a los contenidos del currículo tratados (ver tabla 1). En cualquier caso, la elección de unas u otras actividades en el aula dependerá de las características del grupo-clase y del nivel de profundización que se quiera alcanzar (actividades de motivación, de desarrollo, de refuerzo o de ampliación/investigación). Las actividades 1, 2, 3 y 4 deben hacerse en ese orden. Lo mismo ocurre para las actividades 11, 12 y 13, y para las actividades 15 y 16. La tabla que se genera en la actividad 4 (tabla 3, *Suma* 77, sin la última columna) será el punto de partida para las siguientes actividades. Por lo tanto, ha de realizarse la actividad 4 previamente a las siguientes o, en su defecto, se ha de facilitar la tabla 3 (*Suma* 77) a los estudiantes.

Presentamos a continuación una propuesta de actividades de clase y discutimos algunos aspectos metodológicos referidos a las mismas.

Actividad 1. El sistema numérico sexagesimal utilizado en la antigua civilización de Babilonia hacia el año 1800 a.C. se basaba en dos únicos signos: (clavo), que representaba la unidad (o cualquier potencia de base 60 con exponente entero) y (cuña), que representaba el número 10. Además, un hueco en blanco entre dos símbolos podía representar el número 0 o la coma decimal (según el contexto de la situación cotidiana en donde aparecían).

Actividad	*Bloque*	*Ciclo*	*Edad de estudiantes en años*
1	Aritmética	1.° y 2.°	12-16
2	Aritmética	1.°	12-14
3	Aritmética	1.°	12-14
4	Aritmética / Álgebra	1.° y 2.°	12-16
5	Álgebra	1.° y 2.°	12-16
6	Aritmética	1.°	12-14
7	Álgebra / Geometría	2.°	14-16
8	Geometría	1.° y 2.°	12-16
9	Geometría	1.°	12-14
10	Geometría	1.° y 2.°	12-16
11	Geometría / Funciones	2.°	14-16
12	Geometría / Funciones	2.°	14-16
13	Funciones	1.° y 2.°	12-16
14	Estadística y probabilidad	1.° y 2.°	12-16
15	Estadística y probabilidad	2.°	14-16
16	Estadística y probabilidad	2.°	14-16
17	Estadística y probabilidad	2.°	14-16
18	Todos	2.°	14-16

Tabla 1. Relación entre las actividades de enseñanza-aprendizaje de la Sección 3, los bloques de la materia de Matemáticas, los ciclos de ESO y la edad del alumnado, de acuerdo a los elementos del currículo tratados

a) Expresa los siguientes números babilónicos en nuestro actual sistema de numeración decimal, suponiendo que representan números naturales menores que 60.

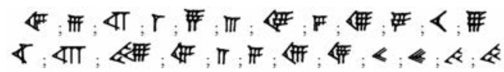

Figura 1. Números en escritura cuneiforme utilizados en la actividad 1*a*

b) Expresa los siguientes números babilónicos en nuestros actuales sistemas de numeración sexagesimal y decimal, suponiendo que representan números naturales entre 60 y 10000.

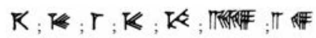

Figura 2. Números en escritura cuneiforme utilizados en la actividad 1*b*

En el apartado 1*a* de esta actividad se practica la transcripción de números en escritura cuneiforme a nuestros guarismos modernos de forma directa: cambiando el clavo por 1 y la cuña por 10. Al suponer que todos ellos corresponden a números naturales menores de 60 no hay que hacer ninguna conversión entre sistema sexagesimal y sistema decimal. Se obtienen así, respectivamente, los números: 14, 6, 12, 1, 8, 3, 17, 4, 19, 7, 10, 9, 11, 13, 59, 15, 2, 5, 16, 18, 20, 30, 40 y 50. Conviene resaltar durante la corrección de la actividad la importancia del ahorro del espacio en la escritura cuneiforme, que se consigue superponiendo clavos y cuñas en varias filas cuando aparecen más de tres.

En el apartado 1*b,* entra en juego el carácter sexagesimal de los números babilónicos, que deben leerse, respectivamente, de la siguiente forma:

$01\ \ 10 = 1 \cdot 60 + 10 = 70,$

$01\ \ 30 = 1 \cdot 60 + 30 = 90,$

$01\ \ 00 = 1 \cdot 60 = 60,$

$01\ \ 20 = 1 \cdot 60 + 20 = 80,$

$01\ \ 40 = 1 \cdot 60 + 40 = 100,$

$02\ \ 31\ \ 49 = 2 \cdot 60^2 + 31 \cdot 60 + 49 = 9109,$

$02\ \ 00\ \ 49 = 2 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 49 = 7249.$

En este punto, debemos hacer notar la necesidad de suponer en qué rango van a estar esos números (entre 60 y 10 000, de acuerdo con el enunciado de la actividad), pues de lo contrario admitirían otras interpretaciones. Por ejemplo, el tercer número de la figura 6 podría leerse como 1 unidad (en lugar de como 60) o el sexto número de la figura 6 podría interpretarse como $02\ \ 31\ \ 49 = 2 \cdot 60^{-1} + 31 \cdot 60^{-2} + 49 \cdot \cdot 60^{-3} = 0{,}42171$, como de hecho debe hacerse en la transcripción del mismo cuando aparece en la tablilla Plimpton 322.

> *Actividad 2.* Observa la imagen de la tablilla Plimpton 322 que se te proporciona. ¿Serías capaz tú de descifrar los números en escritura cuneiforme tallados en arcilla hace casi 4000 años? Completa la tabla que se te facilita, transcribiendo los números de las posiciones II-5, III-5, III-14 y I-6 con la ayuda de la equivalencia entre los signos babilónicos y nuestros números.

Para esta actividad se partirá de la figura 2 (ver *Suma* 77), que cada estudiante tendrá en una fotocopia y que además se proyectará en la clase para su discusión. Las tres primeras posiciones escogidas (II-5, III-5, III-14) son relativamente sencillas de resolver a partir de la figura 2 (ver parte 1), mientras que la última (I-6) tiene una mayor dificultad (soluciones en tabla 1 de *Suma* 77). Se les dará a los estudiantes una fotocopia de la tabla 2 (ver *Suma* 77) con los huecos en las posiciones señaladas para que los completen con sus resultados. Nótese que las posiciones escogidas no están afectadas de error y, por tanto, la tabla que quedará una vez completada por los estudiantes será una transcripción sin errores numéricos con la que trabajarán en algunas de las actividades siguientes.

> *Actividad 3.* Partiendo de la tabla que has completado en la actividad anterior, pasa al sistema decimal los números de las posiciones II-6, III-2, III-4 y I-11 (en este último caso ten en cuenta que el uno en la columna I debe interpretarse como la cifra de las unidades), rellenando la nueva tabla que se te proporciona.

En esta actividad los estudiantes dispondrán de una copia de la tabla 3 de *Suma* 77 (sin las columnas V y VI) con huecos en las posiciones II-6, III-2, III-4 y I-11 para que los vayan rellenando. La selección de los números a transformar es de dificultad creciente. Se trabaja así el sistema sexagesimal, el cálculo de las potencias y las operaciones combinadas (sumas, multiplicaciones y potencias); para los cálculos del número de I-11 se practica, además, el uso de las fracciones y de las divisiones con decimales.

> *Actividad 4.* Usando los valores de las columnas I y III de la tabla que has completado en la actividad anterior obtén una fórmula para hallar los valores del lado. Aplica dicha fórmula para calcular los valores correspondientes y escríbelos en una nueva columna V al final de la tabla.

Encontrar una fórmula que relacione las columnas I, III y V (a saber que) es un ejercicio de álgebra complicado que puede dejarse para los cursos 3.º y 4.º de segundo ciclo de ESO (destinado para estudiantes de 14 a 16 años). En cualquier caso el docente puede proponer la fórmula y justificarla de forma razonada. En este ejercicio se trata fundamentalmente de que los estudiantes utilicen la calculadora para practicar esas operaciones. Es un buen momento para abordar las ventajas de las calculadoras científicas sobre las tradicionales y para introducir el uso de algunas teclas (inversa, raíz cuadrada). También conviene resaltar la comodidad de las calculadoras científicas de pantalla de escritura directa e incluso de las programables, que simplificarían al máximo la realización de la actividad. Aquí practicamos también el redondeo de números decimales, pues el resultado de las operaciones debe aproximarse al número entero más próximo para corregir algunos errores numéricos mínimos de cálculo. Al finalizar esta actividad cada alumno habrá construido una tabla idéntica a la tabla 3 de *Suma* 77 (sin la columna VI).

> Actividad 5: Lo que distingue a la tablilla Plimpton 322 de otros documentos de la época es la relación que hay entre sus columnas. Aunque en un principio se pensaba que los números que contenían eran precios de productos o un registro de pagos, en realidad los números *a, b* y *c* de la tabla tienen una relación matemática entre ellos importantísima: son *ternas pitagóricas.* Esto quiere decir que en cada fila se cumple la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Elige cuatro filas de la tabla que has completado en la actividad anterior y

comprueba tú mismo que efectivamente se cumple esa igualdad.

Podemos plantear esta actividad como un ejercicio de álgebra en el que abordamos el significado de la solución de una ecuación. Para comprobar que cada terna es solución de la ecuación habrá que hallar el valor numérico de cada uno de los miembros de la ecuación. Se repasa así el valor numérico de una expresión algebraica.

Actividad 6. Se dice que dos o más números son *primos entre sí* si el único divisor positivo común que tienen es el 1. Por ejemplo, los números 8, 9 y 35 son *primos entre sí* (sin embargo, date cuenta de que en este ejemplo ninguno de los números es primo). De las 15 ternas pitagóricas de la tabla que has completado en la actividad 4, todas menos dos están formadas por números primos entre sí (se llaman *ternas primitivas*). ¿Podrías encontrar de un vistazo rápido en qué líneas se encuentran las dos ternas que no son primitivas?

En este ejercicio el docente comenzará recordando los criterios de divisibilidad por 2, por 3, por 5,... Es fácil ver a simple vista que la terna $(a,b,c)=(75,60,45)$ (ver línea 11 en la tabla 3 de *Suma* 77) no es primitiva al ser los tres números divisibles por 3 y por 5. Lo mismo ocurre con la terna $(a,b,c)=(106,90,56)$ (ver línea 15 en la tabla 3 de *Suma* 77), pues los tres números son divisibles por 2. Adicionalmente, se pueden elegir algunas de las otras ternas para que los estudiantes, tras descomponer en factores primos, demuestren que sí son ternas primitivas.

Actividad 7. Las ternas pitagóricas de la tabla que has completado en la actividad 4 pueden interpretarse como las tres longitudes de los lados de triángulos rectángulos, que son los que cumplen el llamado teorema de Pitágoras; ya sabes: *el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.* Lo curioso es que en la tablilla Plimpton 322 ya aparece el teorema de Pitágoras ¡y esto fue un milenio antes de que naciera el matemático griego Pitágoras! Es decir, los babilonios sabían encontrar tres longitudes a, b y c que dieran triángulos rectángulos. Una forma de generar estas medidas es mediante las fórmulas: $a=m\cdot(u^2+v^2)$, $b=2muv$, $c=m\cdot(u^2-v^2)$, donde u y v son números naturales de distinta paridad con $u>v$, y $m>0$ es un número natural. Por ejemplo, si elegimos $u=12$, $v=5$ y $m=1$ obtenemos el triángulo rectángulo de medidas $(a,b,c)=(169,120,119)$, que es el de la línea 1 de la tabla. Tomando $m=1$, ¿sabrías qué valores de u y v corresponden a los otros triángulos? Ayuda: Resuelve el sistema de ecuaciones no lineales formado por las ecuaciones primera y tercera anteriores, donde u y v son ahora las incógnitas (Nota: el procedimiento anterior con $m=1$ no es aplicable a la línea 11, pero sí lo es a la línea 15, aunque ambas contienen ternas no primitivas).

Tomando $m=1$, para obtener $u(v)$ basta sumar (restar) las dos ecuaciones y despejar. Se obtiene así $u=\sqrt{(a+c)/2}$ y $v=\sqrt{(a-c)/2}$.

En la tabla 2 se muestran las ternas pitagóricas (a,b,c) y los correspondientes valores u, v y m utilizados para obtener cada terna. El docente proyectará en clase dicha tabla para corregir el ejercicio. Esta actividad es un buen ejercicio para estudiantes de 14 a 16 años de segundo ciclo de ESO. También puede adaptarse para primer ciclo de ESO (estudiantes de 12 a 14 años) dando directamente las expresiones algebraicas y pidiendo al alumnado que sustituya los valores oportunos en dichas expresiones para trabajar el valor numérico de una expresión algebraica.

La elaboración de Plimpton 322 a partir de este procedimiento ha sido defendida por Neugebauer y Sachs (1945) y Joyce (1995), pues hay exactamente 16 triángulos rectángulos (figura 4 de *Suma* 77) que se generan a partir de los valores u y v

Valores predeterminados			Terna pitagórica		
u	v	*m*	*a*	b	*c*
12	5	1	169	120	119
64	27	1	4825	3456	3367
75	32	1	6649	4800	4601
125	54	1	18541	13500	12709
9	4	1	97	72	65
20	9	1	481	360	319
54	25	1	3541	2700	2291
32	15	1	1249	960	799
25	12	1	769	600	481
81	40	1	8161	6480	4961
2	1	15	75	60	45
48	25	1	2929	2400	1679
15	8	1	289	240	161
50	27	1	3229	2700	1771
9	5	1	106	90	56

Tabla 2. Generación de las ternas pitagóricas en Plimpton 322 a partir de los valores u, v y m predeterminados

con $125 \geq u > v$, esto es, sólo falta uno de ellos en la tablilla, el correspondiente a los valores $u = 125$, $v = 64$ y $m = 1$ que da $(a, b, c) = (19\,721, 6\,000, 11\,529)$.

Actividad 8. ¿Podrías encontrar un triángulo semejante al de la línea 5 de la tabla que has construido: $(a, b, c) = (97, 72, 65)$? ¿Cuál es la razón de proporcionalidad entre ambos? ¿Puedes asegurar que se trata también de un triángulo rectángulo? Si has sabido resolver estas preguntas seguro que también eres capaz de escribir la longitud de los lados del triángulo semejante al de la línea 11 de menor área y que tenga sus lados de valores enteros. Haz lo mismo para la línea 15.

Nótese que existen infinitos triángulos semejantes a otro dado y, por tanto, se trata aquí de una actividad abierta en la que los estudiantes pueden encontrar diferentes respuestas. Por el contrario, si añadimos la condición de que el área sea mínima, como hemos planteado para la línea 11, sólo existe una solución de valores enteros que lo cumpla: $(a, b, c) = (5, 4, 3)$, que de hecho es la terna pitagórica más sencilla. Lo mismo ocurre para la línea 15, la única solución que cumple la condición es $(a, b, c) = (53, 45, 28)$. En esta actividad se repasan conceptos de proporcionalidad geométrica presentes en el currículo tanto de primer como de segundo ciclo de ESO.

Actividad 9. Escribe la fórmula del área de un triángulo y utilízala para calcular el área del triángulo de la línea 15 (supón que las medidas de los lados están dadas en centímetros).

Esta actividad presenta más dificultades de las que aparenta. La fórmula del área del triángulo, $\text{Área} = (\text{base} \cdot \text{altura})/2$, suele escribirse como $A = b \cdot a / 2$. Sin embargo, en este caso debe quedar claro que, en la notación de la tabla 3 (*Suma* 77), «*a*» no es la altura sino la longitud de la hipotenusa. Por lo tanto, el área se debe calcular como:

$$\text{Área} = (\text{base} \cdot \text{altura})/2 = b \cdot c / 2 = \\ 45 \cdot 28 / 2 = 630\,\text{cm}^2$$

De esta forma abordamos el error común de sustituir en las fórmulas de las áreas directamente los datos del problema, en lugar de calcular previamente los valores correctos para las variables de dichas fórmulas.

Actividad 10. Si se hubiera borrado el número 240 de la línea 13, ¿sabrías calcular ahora el área para ese triángulo? Supón que las medidas de los lados están en centímetros. Expresa el resultado final en metros cuadrados.

Este ejercicio de cálculo de áreas desconociendo algunos datos es un ejemplo típico de aplicación del teorema del Pitágoras. Primero obtendrán el cateto b como $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ (evidentemente $b = 240$ cm) para después hallar el área como:

$$\text{Área} = (\text{base} \cdot \text{altura})/2 = b \cdot c / 2 = \\ 240 \cdot 161 / 2 = 19\,320\,\text{cm}^2 = 1{,}9320\,\text{m}^2$$

En esta actividad también se practica la transformación entre unidades de superficie y se debe valorar el uso de las unidades más adecuadas para interpretar de forma intuitiva la solución (en este caso 1,932 m^2, casi 2 m^2 de área, que es un valor mucho más claro que 19320 cm^2).

Actividad 11. Resolver un triángulo es determinar cuánto miden sus tres lados y sus tres ángulos a partir de sólo tres de estos seis datos. Resuelve el triángulo de la línea 1 de la tabla, es decir, halla los ángulos que faltan. Para ello tendrás que usar las funciones trigonométricas inversas que encontrarás en tu calculadora científica.

Este ejercicio está diseñado para último curso de ESO (estudiantes de 15 o 16 años) donde se estudian las funciones trigonométricas y sus inversas. Con ayuda de la calculadora científica (probablemente el elemento de las tecnologías de la información y comunicación más importante) los estudiantes encontrarán los valores:

$$\hat{B} = \text{arctg}(b/c) = \text{arctg}(120/119) = 45{,}24^\circ$$
$$\hat{C} = \text{arctg}(c/b) = \text{arctg}(119/120) = 44{,}76^\circ$$

Nótese que pueden usarse las funciones arcsen y arccos para llegar al mismo resultado:

$$\hat{B} = \text{arcsen}(b/a) = \text{arccos}(c/a) = 45{,}24^\circ$$
$$\hat{C} = \text{arcsen}(c/a) = \text{arccos}(b/a) = 44{,}76^\circ$$

También se puede usar la propiedad de que la suma de los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90^o ($\hat{B} = 90^o - \hat{C} = 90^o - 44{,}76^o = 45{,}24^o$). Se trata, pues, de una actividad abierta a diferentes métodos de resolución y que, tras una puesta en común, puede servir para repasar distintos conceptos.

> Actividad 12: Una vez que ya sabes cómo sacar el ángulo $\hat{C}$ (actividad 11), seguro que con ayuda de la calculadora no tardas nada en calcular ese ángulo para cada uno de los 15 triángulos. Escribe el resultado añadiendo una nueva columna VI a tu tabla. ¿Qué observas?

El resultado es realmente sorprendente, pues ahora aparece ante nosotros el orden oculto bajo los triángulos de Plimpton 322: están ordenados en valores decrecientes para el ángulo $\hat{C}$ comprendidos entre 45º y 30º (véase columna VI en la tabla 3 de *Suma* 77).

> *Actividad 13.* Haz una gráfica representando en unos ejes de coordenadas los valores de la columna I frente a los de la columna VI.

Con esta actividad tratamos contenidos importantes del bloque de funciones y gráficas. Se prestará especial atención a que se indique bien lo que se representa en cada eje y a que la escala sea adecuada. Sobre esta gráfica, el docente irá planteando cuestiones relativas a este bloque como, por ejemplo, identificar la variable independiente (ángulo $\hat{C}$) y estudiar las características de la gráfica (dominio, recorrido, monotonía, extremos relativos y absolutos…). Para el alumnado de 14 a 16 años de segundo ciclo de ESO se puede discutir la relación entre la curva representada y la función secante (nótese que se ha representado la secante al cuadrado para valores entre 30º y 45º aproximadamente). La gráfica de la figura 3 se proyectará en la pizarra para la corrección de la actividad.

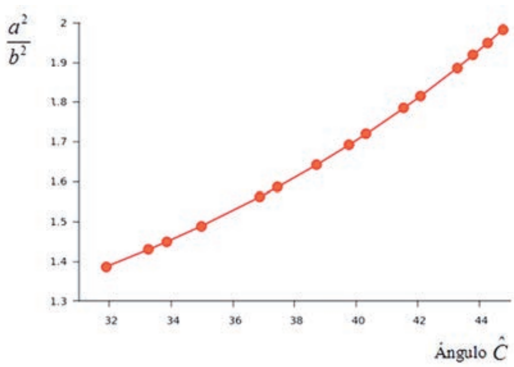

Figura 3. Gráfica correspondiente a la actividad 13. Se ha añadido una línea uniendo los puntos para resaltar el carácter continuo de la función representada

> *Actividad 14.* Como bien sabes la hipotenusa es el lado mayor de un triángulo rectángulo, así que la medida de la hipotenusa puede ser un buen parámetro para saber cómo de *largo* es un triángulo rectángulo. Calcula el valor medio de la hipotenusa para los 15 triángulos de la tabla. Considera que las medidas están expresadas en centímetros.

En esta actividad los estudiantes usarán la calculadora para realizar las sumas y obtener finalmente el valor medio de $3\,407{,}33\,\text{cm} = 34{,}0733\,\text{m}$ (34 m aprox.). Debe hacerse énfasis en las unidades para poder interpretar la media correctamente.

> *Actividad 15.* Introduce en tu calculadora científica los valores de la hipotenusa de los 15 triángulos de la tabla. ¿Cuál es la media, mediana, varianza, desviación típica y el coeficiente de variación de Pearson de las hipotenusas de esos triángulos? Considera que las medidas están expresadas en centímetros. Expresa los resultados finales en unidades del sistema internacional, aproximando a las unidades.

Se trata de que los alumnos y alumnas se familiaricen con el modo de estadística de su calculadora científica. Con esta actividad se repasan los principales parámetros estadísticos. Hay que recordar que la calculadora sólo proporciona la media y la desviación típica, por lo que los estudiantes deben conocer la relación entre unos y otros parámetros. También deben reconocer las unidades, en su caso, de cada uno de estos parámetros.

Si a_i son los valores de las hipotenusas, con $i = 1, 2, \ldots, 15$; las fórmulas para calcular los parámetros estadísticos son:

$$\text{media} = \left(\sum_{i=1}^{15} a_i \right) / 15$$

mediana = valor central de las 15 hipotenusas ordenadas de menor a mayor

$$\text{varianza} = s^2 = \left(\sum_{i=1}^{15} a_i^2 \right) / 15 - \text{media}^2$$

$$\text{desviación típica} = s = \sqrt{s^2}$$

coeficiente de variación de Pearson = media / s.

Solución: media = 3 407,33 cm (34 m aprox.); mediana = 1 249 cm (12 m aprox.); varianza = 22 518 457,29 cm^2 (2 252 m^2 aprox.); desviación típica = 4 745,36 cm (47 m aprox.); coeficiente de variación de Pearson = 0,7180 (72 % aprox.).

Actividad 16. Realiza un histograma con las medidas de la hipotenusa de los triángulos de la tabla. Divide las medidas en 8 intervalos equidistantes, indicando la marca de clase de cada uno de ellos. A partir del histograma, calcula la media y desviación típica de la distribución. Compara los resultados con los de la actividad 15, discutiendo el error absoluto y relativo cometido.

Se proyectará la gráfica de la figura 4 para la corrección del histograma. Se mostrará también la tabla 3 a partir de la cual se calculan los parámetros estadísticos pedidos:

$$\text{media} = \left(\sum_{i=1}^{8} x_i \cdot f_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{8} f_i\right) =$$
$$= 3845 \text{ cm (38 m aprox.)}$$

$$\text{varianza} = s^2 = \left(\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \cdot f_i\right) / \left(\sum_{i=1}^{8} f_i\right) - media^2 =$$
$$= 17666232 \text{ cm}^2 \text{ (1767 m}^2 \text{ aprox.)}$$

$$\text{desviación típica} = s = \sqrt{s^2} =$$
$$= 4\,203{,}12 \text{ (42 m aprox.)}$$

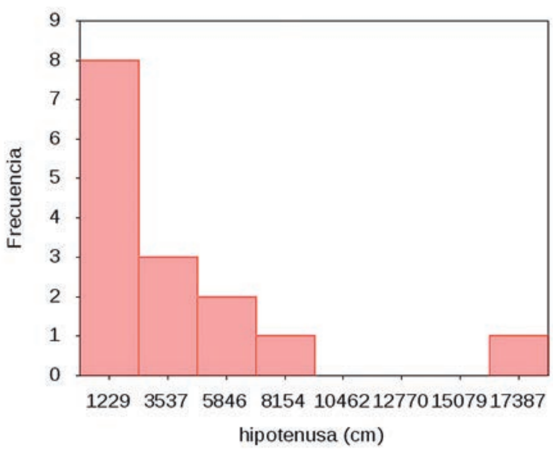

Figura 8. Histograma correspondiente a la actividad 16

Intervalo	*Marca de clase:* x_i	*Frecuencia:* f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[75; 2383,25)	1229	8	9832	12083528
[2383,25; 4691,5)	3537	3	10611	37531107
[4691,5; 6999,75)	5846	2	11692	68351432
[6999,75; 9308)	8154	1	8154	66487716
[9308; 11616,25)	10462	0	0	0
[11616,25; 13924,5)	12770	0	0	0
[13924,5, 16232,75)	15079	0	0	0
[16232,75; 18541]	17387	1	17387	302307769
	Sumas:	15	57676	486761552

Tabla 3. Tabla para la realización de la actividad 16. Las marcas de clase se han aproximado al valor entero

La agrupación de los datos en intervalos introduce un error que es significativo por los pocos datos de que disponemos. En concreto, si comparamos estos resultados con los correctos de la actividad 15 encontramos para la media un error absoluto de 4 m (error relativo del 12 % aprox.) y para la desviación típica un error absoluto de 5 m (error relativo del 11 % aprox.).

Actividad 17: ¿Tienes claro los conceptos estudiados en el tema de probabilidad? ¡Demuéstralo contestando a las siguientes preguntas! ¿Cuál es la probabilidad de que cogiendo al azar una de las 15 líneas de la tabla que has construido obtengas un triángulo con $a < 1\,000$? ¿Cuál es la probabilidad de que tu compañero haya escogido un triángulo con $a < 1\,000$ sabiendo que el suyo pertenece a una fila de número impar (ver columna IV)? Supón que ahora se eligen tres triángulos a la vez, ¿cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos tengan $a < 1\,000$?

Con esta actividad se repasan diferentes conceptos del tema de probabilidad. La primera pregunta sirve para recordar y aplicar la ley de Laplace (sol.: 7/15):

P(obtener triángulo con $a < 1\,000$) =
núm. triángulos con $a < 1\,000$/ núm. total
de triángulos = 7/15.

En la segunda entra en juego el concepto de probabilidad condicionada (sol.: 3/4):

P(obtener triángulo con $a < 1\,000$ |
triángulo en fila impar) = P(obtener triángulo
en fila impar con) / P(triángulo en fila impar) =
(6/15)/(8/15) = 3/4.

Finalmente, la tercera cuestión puede plantearse como un experimento compuesto y resolverse bien mediante técnicas de combinatoria, bien mediante un diagrama de árbol o usando el teorema de la probabilidad total (sol.: 29/65):

$$P(\text{al menos 2 de 3 triángulos tengan } a < 1000) =$$
$$= \left[\binom{7}{2} \cdot \binom{8}{1} + \binom{7}{3} \cdot \binom{8}{0} \right] \Big/ \binom{15}{3} = {}^{29}\!\!/_{65}$$

Actividad 18. El teorema de Pitágoras ha ocupado a matemáticos de todos los tiempos, desde los antiguos pensadores de civilizaciones prehelénicas hasta los investigadores de nuestros días. Aplicaciones del teorema a la geometría, demostraciones bellísimas o complejas generalizaciones no han dejado de sucederse durante miles de años. Busca información y realiza un trabajo de investigación sobre la historia del teorema de Pitágoras.

En esta cuestión abierta puede proponerse a los estudiantes que elaboren una línea temporal con los principales hitos en relación al teorema de Pitágoras, desde Plimpton al teorema de Fermat (como generalización del teorema de Pitágoras), o pueden buscar información sobre las distintas demostraciones del teorema, señalando y ordenando aquellas más relevantes. Es, en cualquier caso, una actividad que se presta a la realización en grupo y a la exposición de los trabajos resultantes.

Contribución de Plimpton 322 al tratamiento de las competencias básicas

Una competencia es la capacidad para aplicar conocimientos, habilidades y actitudes en diferentes contextos. La Unión Europea propone la vertebración de los aprendizajes y saberes en torno a las competencias básicas, creando así una estructura de conocimiento sólida y estable, pero a la vez suficientemente flexible como para permitir la aplicación de lo aprendido a la práctica diaria incluso desde un contexto pluridisciplinar. Esta idea queda recogida en la actual Ley Orgánica de Educación (LOE) del sistema educativo español a través de la definición de ocho competencias básicas: (i) aprender a aprender; (ii) comunicación lingüística; (iii) autonomía e iniciativa personal; (iv) conocimiento e interacción con el mundo físico; (v) cultural y artística; (vi) matemática; (vii) social y ciudadana; y (viii) tratamiento de la información y competencia digital.

A la adquisición de estas competencias básicas se debe contribuir desde cada una de las materias que componen el currículo de la ESO. Por lo tanto, surge la necesidad de diseñar actividades de aula que nos permitan, también desde la materia de Matemáticas, desarrollar dichas competencias. El nuevo enfoque didáctico a Plimpton 322 que aquí proponemos va encaminado a este objetivo.

A continuación discutimos el tratamiento de cada una de las competencias básicas definidas en la LOE (MEC, 2006).

La *competencia para aprender a aprender* implica la conciencia, gestión y control de las propias capacidades y conocimientos desde un sentimiento de competencia o eficacia personal, e incluye tanto el pensamiento estratégico, como la capacidad de cooperar, de autoevaluarse, y el manejo eficiente de un conjunto de recursos y técnicas de trabajo intelectual, todo lo cual se desarrolla a través de experiencias de aprendizaje conscientes y gratificantes, tanto individuales como colectivas. El alumno debe aprender a buscar un aprendizaje de tipo significativo (Sánchez, 2004) y la experiencia con Plimpton 322 apunta hacia esa dirección. En primer lugar porque parte de algo real y no abstracto (en este caso una tablilla de arcilla), lo que siempre supone un elemento motivador sobre las clases de tiza-pizarra o lápiz-papel tradicionales. En segundo lugar por el carácter dinámico que confiere el ir descifrando, paso a paso, los misterios de Plimpton 322 en la línea de un aprendizaje por descubrimiento guiado. Y en tercer lugar porque el estudio de la historia de Plimpton 322 hace consciente al alumnado de la complejidad del aprendizaje, de que siempre surgen nuevas preguntas y de que aprender es un proceso continuo.

Baste aquí mencionar que desde la adquisición por G. A. Plimpton de la tablilla hasta el descubrimiento de que encerraba ternas pitagóricas, y no simples registros comerciales, tuvieron que pasar varias décadas (Neugebauer y Sachs, 1945), y que desde entonces las interpretaciones de cómo poder generar la tabla no han dejado de sorprendernos (véase, por ejemplo, Buck, 1980; Robson, 2001; Abdulaziz, 2010; Britton y otros, 2011).

La *competencia en comunicación lingüista* está referida a la utilización del lenguaje como instrumento de comunicación oral y escrita; de representación, interpretación y comprensión de la realidad; de construcción y comunicación del conocimiento; y de organización y autorregulación del pensamiento. El análisis de Plimpton 322 nos permite aproximarnos a las raíces del lenguaje escrito, es decir, la escritura cuneiforme, y particularmente, a un lenguaje de numeración de tipo sexagesimal distinto al que los estudiantes suelen utilizar en Matemáticas, pero del que todavía hoy somos herederos (medidas de tiempo y ángulos en base 60). Las actividades propuestas de traducción de las muescas de la tablilla a nuestra escritura habitual contribuyen al conocimiento de formas de lenguaje diferentes a las del día a día. Pero además, la competencia lingüística significa el acercamiento a las lenguas extranjeras para favorecer el acceso a más y diversas fuentes de información, comunicación y aprendizaje. En este sentido, las inscripciones en acadio y sumerio que aparecen encima de cada una de las columnas de Plimpton 322 fueron un elemento clave para descifrar el significado de todos aquellos números aparentemente arbitrarios (ver Neugebauer y Sachs, 1945; Robson, 2001; y Britton y otros, 2011). En concreto, la primera columna por la derecha lleva escrito encima las palabras «su nombre», siendo efectivamente su contenido nada más que el nombre de cada fila, es decir, la numeración de cada línea de la tablilla del 1 al 15. Las palabras sobre las otras dos columnas siguientes (y en la notación de la tabla 1 de *Suma* 77) podrían traducirse como algo del estilo «el resultado de la diagonal» y «el resultado de la anchura» (ver Robson, 2001, 2002; y Muñoz y otros, 2008) lo que ayuda a entender el significado de Plimpton 322. Hacer partícipe al alumnado de estos detalles nos permite aproximarnos desde otro flanco a la competencia lingüística y al reconocimiento de su utilidad.

> Una competencia es la capacidad para aplicar conocimientos, habilidades y actitudes en diferentes contextos

La *autonomía e iniciativa personal* tiene que ver con la adquisición de la conciencia y aplicación de valores como la responsabilidad, la perseverancia, la capacidad de afrontar problemas, y de aprender de los errores. También remite a la capacidad de elegir con criterio propio, de imaginar proyectos, y de llevar adelante las acciones necesarias para desarrollar las opciones y planes personales (en el marco de proyectos individuales o colectivos) responsabilizándose de ellos, tanto en el ámbito personal, como social y laboral. Las actividades de aula que aquí se proponen en relación a Plimpton 322 pueden entenderse como pequeños proyectos, en los que, bien de forma individual o bien en grupo, los alumnos y alumnas irán trabajando bajo la supervisión y guía del docente. En ese sentido se favorece la autonomía e iniciativa personal, ofreciendo una actividad diametralmente opuesta a la clase magistral. Por otra parte, la discusión de los diferentes errores que aparecen en Plimton 322 supone un elemento positivo para el alumnado que, de forma más o menos autónoma, es capaz de corregir con espíritu crítico dichos errores. La historia de Plimpton 322 nos demuestra que el contenido de la tablilla es, en sí mismo, un gran problema y que sólo a través de la perseverancia y del aprendizaje de los errores se ha podido descifrar su significado, al menos parcialmente, pues no en vano son los propios errores registrados en Plimpton 322 los que nos han permitido entender un poco mejor cómo se generó dicha tablilla (véase Abdulaziz, 2010).

El *conocimiento e interacción con el mundo físico* supone el desarrollo y aplicación del pensamiento científico-técnico para interpretar la información que se recibe y para predecir y tomar decisiones en un mundo en el que los avances que se van produciendo en los ámbitos científico y tecnológico tienen una influencia decisiva en la vida personal, la sociedad y el mundo natural. Es también la habilidad para interpretar el mundo, lo que exige la aplicación de los conceptos y principios básicos que permiten el análisis de los fenómenos desde los diferentes campos de conocimiento científico involucrados. Este conocimiento científico-técnico es el que nos ha llevado a la compresión de Plimpton 322 con las profundas implicaciones históricas que conlleva. En las sesiones de aula con los alumnos y alumnas debemos hacerles partícipes de estas ideas. Debemos valorar, en primer lugar, las labores de excavación de arqueólogos que han permitido desenterrar piezas maravillosas como Plimpton 322. Asimismo, hay que resaltar los avances científicos en la datación de elementos de otras épocas con asombrosa exactitud y cómo la interrelación de las diferentes ramas científicas y del saber (arqueología, matemáticas, historia de las civilizaciones antiguas, lenguas antiguas, avances tecnológicos, etc.) nos conduce a una comprensión del mundo que nos rodea. Todo este carácter pluridisciplinar se encuentra presente en Plimpton 322. Por otra parte, la propia dinámica de trabajo en el aula implica la ejercitación en esta competencia básica a través de algunos de los puntos que la definen: el estudio sistemático; la observación directa; la formulación de preguntas e hipótesis; y el análisis del marco interpretativo en el que nos encontramos. Pero además la competencia de interactuar con el espacio físico lleva implícito ser consciente de la influencia que tiene la presencia de las personas en el espacio, su asentamiento, su actividad y las modificaciones que introducen. Y justo aquí, una vez más, Plimpton 322 vuelve a enseñarnos una valiosa lección. En efecto, los análisis técnicos realizados sobre la tablilla muestran la presencia de restos de pegamento moderno que confirman que la tablilla debía continuar con más columnas de números por la parte de la izquierda (Neugebauer, 1969) y que en algún momento estos trozos pudieron estar pegados con posterioridad a su excavación. Sin embargo, la parte de la izquierda debió despegarse en alguno de los traslados posteriores de Plimpton 322, probablemente por falta de cuidado: un ejemplo de cómo las modificaciones introducidas por cada uno de nosotros en el medio ambiente pueden tener grandes repercusiones. Si hoy pudiéramos contar con esa parte que falta, muchas de las dudas pendientes sobre Plimpton 322 estarían ya despejadas.

La *competencia cultural y artística* suele buscarse en el área de matemáticas a través de figuras geométricas y de funciones más o menos complejas. Con Plimpton 322 tenemos un recurso diferente para aproximarnos a esta competencia de una forma transversal. La tablilla en sí, con su escritura cuneiforme cuidadosamente tallada, constituye una auténtica pieza de museo que nos sumerge de lleno en la cultura de la antigua Babilonia (ver figura 5).

La competencia social y ciudadana entronca con el conocimiento sobre la evolución y organización de las sociedades favoreciendo la comprensión de la realidad histórica y social del mundo, su evolución, sus logros y sus problemas. Significa también entender los rasgos de

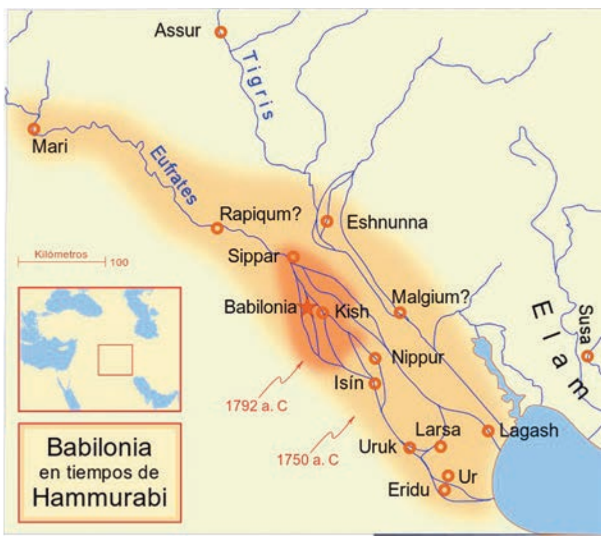

Figura 5. Babilonia en la época de Plimton 322.
La tabilla fue encontrada en la antigua ciudad de Larsa, actual Senkereh, Irak (imagen con licencia libre GNU)

las sociedades actuales, su creciente pluralidad y su carácter evolutivo, además de demostrar comprensión de la aportación que las diferentes culturas han hecho a la evolución y progreso de la humanidad. A través de Plimpton 322 podemos conectar con sociedades ricas culturalmente como las que habitaron en la antigua Mesopotamia y adentrarnos en sus esquemas de pensamiento, diferentes a los nuestros pero a la vez profundamente enriquecedores. La discusión sobre la problemática de la ausencia del cero en el sistema de numeración babilónico, que surge naturalmente del estudio de la tablilla, nos puede servir de punto de partida para hacer un recorrido histórico de los diferentes sistemas de numeración con su marcado carácter evolutivo a lo largo de las civilizaciones (véase, por ejemplo, Boyer, 1994 y Puig, 1999). En otro orden, la competencia social y ciudadana supone el reconocimiento de la igualdad de derechos entre los diferentes colectivos, en particular, entre hombres y mujeres. En este sentido destacamos la figura de la doctora Eleanor Robson, de la Universidad de Cambridge, experta en las Matemáticas de Mesopotamia; sus trabajos han contribuido a entender mejor Plimpton 322 en las últimas décadas (en 2003 fue galardonada con el premio Lester R. Ford de la Asociación Matemática Americana por sus investigaciones sobre Plimpton 322 (MAA, 2003); véase figura 6). Además, podemos resaltar en clase la importancia de los valores éticos, especialmente de aquellas personas de mayor perfil público. En este sentido la doctora Eleanor Robson se convirtió en una de las voces críticas contra el saqueo del Museo Nacional de Irak en 2003 bajo la pasividad de las tropas estadounidenses (El País, 2003 y Time Magazine, 2003) y donó el dinero del premio Lester R. Ford, que ganó por sus investigaciones sobre Plimpton 322, a fundaciones para la reconstrucción del legado cultural de Irak (MAA, 2003).

La introducción de estos temas transversales en el aula no sólo contribuye a la adquisición de las competencias básicas sino que además permite una mayor motivación y fijación del interés del alumnado.

En cuanto al *tratamiento de la información y competencia digital*, debemos reseñar que las actividades sobre Plimpton 322 que hemos propuesto parten del tratamiento de la información contenida en la tablilla y que para su correcto análisis requerimos del dominio de diferentes herramientas de decodificación de dicha información (escritura cuneiforme, lenguaje numérico, contextualización histórica). La propia tablilla de arcilla como soporte físico es, de por sí, relevante como ejemplo de contenedor de información característico de la época, formalmente muy distinta a los modernos soportes (por ejemplo, libros de texto o Internet) pero con una misma finalidad didáctica. La competencia digital estará presente en las sesiones de trabajo en clase. Una adecuada presentación de la actividad por parte del profesor o profesora partirá de proyecciones de imágenes de la tablilla (ver figuras 1 y 2 en *Suma* 77) y de fotografías y mapas (por ejemplo, figura 5) que sitúen al alumnado en contexto. También el alumnado ejer-


Figura 6. Eleanor Robson

citará la competencia digital de forma activa. Algunas de las actividades que hemos propuesto (por ejemplo, el cálculo de ángulos para valores dados de la secante) requieren del uso de la calculadora como recurso tecnológico de la información y comunicación de extraordinario valor. Finalmente, pueden proponerse también actividades de búsqueda y selección de información a través de Internet.

Por último, nos remitimos a la sección anterior para el estudio más detallado de la *competencia matemática*.

Discusión y conclusiones

En este trabajo sobre la tablilla Plimpton 322 hemos abordado un objetivo triple que discutimos a continuación.

En primer lugar, hemos ofrecido una exposición divulgativa detallada y completa a modo de trabajo de revisión donde incluimos numerosas referencias a los trabajos de investigación originales. La discusión detallada de los errores de la tablilla con un lenguaje moderno y, en particular, el uso de ecuaciones diofánticas son aportaciones originales.

En segundo lugar, nos hemos centrado en la aplicación de Plimpton 322 al aprendizaje de la materia de Matemáticas, proponiendo actividades de clase concretas para el tratamiento de la competencia matemática. En particular, hemos relacionado las actividades propuestas con los distintos contenidos del currículo de la materia de Matemáticas en la ESO. Cada una de las actividades puede llevarse a cabo en una sola sesión o bien pueden realizarse varias de ellas en una hora lectiva. Aquellas actividades con un carácter más marcado de aprendizaje por descubrimiento pueden plantearse como actividades grupales en pequeño-mediano grupo. En cualquier caso, el papel del docente será de coordinación de las actividades, ofreciendo pautas para la resolución de las mismas. En cuanto al material de apoyo que se utilizará para las clases, proponemos un portátil con cañón de vídeo o una pizarra digital interactiva. De esta forma podrán proyectarse imágenes que se utilizarán para distintos fines. Por un lado, pueden mostrarse fotografías que motiven el estudio de Plimpton 322, como por ejemplo la de la propia tablilla (figura 1 de *Suma* 77). Por otro lado, la proyección de los símbolos en escritura cuneiforme (figuras 2 y 3 de *Suma* 77) servirá para explicar y descifrar la escritura babilónica. Otras imágenes pueden utilizarse para el tratamiento de algunos temas transversales y de las distintas competencias básicas (ver, por ejemplo, figuras 5 y 6, y la discusión correspondiente en la sección 4). Además, la presencia del portátil en el aula puede ser de gran utilidad para hacer uso de las distintas fuentes bibliográficas presentes en Internet: vídeos documentales, artículos de prensa, libros, artículos de investigación, etc. Por último, se proyectarán las tablas con la transcripción de los números de Plimpton 322, así como otras figuras relacionadas con las actividades propuestas (por ejemplo, figuras 2 y 3). La pizarra digital interactiva en el aula puede ser un recurso valioso para mostrar o hacer desaparecer algunos de los números que los estudiantes deben encontrar en la realización de las actividades.

El tercer objetivo del presente trabajo ha sido el de adoptar un enfoque didáctico integrador más allá de la propia materia de Matemáticas, tal y como corresponde al actual marco legislativo de la ESO. Para ello, hemos discutido en profundidad el tratamiento de cada una de las competencias básicas a través del análisis de Plimpton 322 y hemos mostrado cómo podemos afrontar el proceso de enseñanza-aprendizaje desde un punto de vista pluridisciplinar en el que el lenguaje, las matemáticas, la historia o la educación social y ciudadana son distintas caras de una realidad compleja contenida en algo tan aparentemente trivial como un pequeño trozo de arcilla.

Esperamos que las cuestiones y actividades aquí planteadas, que dan un uso didáctico a la tablilla Plimpton 322, sean útiles a profesores, investigadores en educación matemática y estudiantes como recursos que conecten la cultura ancestral con la tecnología y las matemáticas, y que los procedimientos seguidos para su aplicación en el aula sean motivadores para abordar mediante un enfoque competencial la didáctica de la materia de Matemáticas. Hoy, casi cuatro milenios después, podemos desenterrar a Plimpton 322, podemos llevar la tablilla al aula y podemos, en definitiva, convertirla en elemento pedagógico de primer orden en la didáctica del siglo XXI.

Referencias bibliográficas

Abdualziz, A. A. (2010), *The Plimpton 322 tablet and the Babylonian method of generating Pythagorean triples,* University of Balamand, ArXiv: 1005.0025.

Boyer, C. B. (1994), *Historia de la matemática.* Alianza Universidad Textos, Madrid

Britton, J. P., C. Proust y S. Shnider (2011), «Plimpton 322: a review and a different perspective», *Archive for History of Exact Sciences,* n.º 65, 519-566.

Buck, R. C. (1980), «Sherlock Holmes in Babylon», *American Mathematical Monthly*, n.º 87, 335-345.

«El saqueo viola la cuna de la civilización», *El País*, 16 de abril de 2003, obtenido el 17 de mayo de 2014, de
<http://www.elpais.com/articulo/cultura/saqueo/viola/cuna/civilizacion/elpepicul/20030416elpepicul_1/Tes>

Feito, M., y C. J. Sandoval, (2014), «Matemáticas competencias básicas a partir de la tablilla Plimpton 322 (Parte 1)», *Suma,* n.º 77, 31-40.

Joyce, D. E. (1995), *Plimpton 322,* Obtenido el 17 de mayo de 2014, de
<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html>

MAA (2003), *MathFest 2003 Prizes and Awards,* Mathematical Association of America, obtenido el 17 de mayo de 2014, de
<http://www.maa.org/features/080503_writingprize.html>

MEC (2006), *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria,* Ministerio de Educación y Ciencia, BOE 05/01/2007.

Muñoz, M. B., E. Fernández y J. L. Marqués (2004), «Dos notas históricas sobre ternas pitagóricas», *Actas del VIII Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Universidad de la Rioja, 331-345.

Neugebauer, O. (1969), *The exact sciences in antiquity* (2nd edition), Dover Publications, Nueva York.

Neugebauer , O., y A. J. Sachs, (1945), «Mathematical cuneiform texts», *American Oriental Series* n.º 29, 38-41.

Puig, L. (2009), «Protoálgebra en Babilonia (1.ª entrega)», *Suma,* n.º 61, 93-98.

Robson, E. (2001), «Neither Sherlock Holmes nor Babylon: a reassessment of Plimpton 322», *Historia Mathematica,* n.º 28, 167-206.

— (2002), «Words and pictures: new light on Plimpton 322», *American Mathematical Monthly,* n.º 109 (2), 105-120.

Sánchez, P. (2004), *El proceso de enseñanza y aprendizaje,* ICE, Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

«Verbatim: Apr. 28, 2003», *Time Magazine U. S,*. Obtenido el 17 de mayo de 2014, de
<http://www.time.com/time/magazine/article/0,9171,1004743,00.html>

Manuel Feito Guzmán
IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)
<manuel.feito@murciaeduca.es>

Carlos J. Sandoval Ruiz
IES Santa María de los Baños, Fortuna (Murcia)
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Universidad Politécnica de Cartagena (Murcia)
<carlos.sandoval@murciaeduca.es>