SUMA

Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

nº 8

PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R., SNPM «Tornamira», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SNPM «Tornamira», C.P. «M.ª Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

Portada: Fernando Hernández Rojo

Recursos para el aula

Información

Miscelánea

Edita:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Jacinto Quevedo Sarmiento
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Charo Nomdedeu
C/ Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas
Presidente: Javier Brihuega
Apartado 14610. 28080-Madrid

Sociedad de Profesores de Matemáticas de Alicante
Presidente: Teresa Vázquez
Apartado 1009. 03080-Alicante

Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper"
Apartado 536. 06080-Mérida

Depósito legal: Gr. 708 - 91
I.S.S.N.: 84 - 87387 - 26 - 8
Fotocomposición e Impresión:
Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1304. 21080 (Huelva)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envió)

Editorial

... Y ocho. Sí, hemos llegado al número 8 de SUMA. Mi último número como director. Aunque la gestación de una idea y su posterior puesta en marcha lleva tiempo y esfuerzo, en el caso de SUMA fue fácil contagiar entusiasmo entre quienes la deberían apoyar en su primera y frágil andadura. Todos los que nos movíamos alrededor de la Educación Matemática en España nos volcamos decidídamente aportando ideas, trabajos para su publicación y, sin escatimar esfuerzos, pudimos, entre todos, hacer lo que era necesario: SUMA.

Siempre he dicho que lo importante de una revista no es sacar uno, dos, ..., ocho números. Lo decisivo es que salgan los mil primeros y ¡en eso estamos!.

Si tuviese que señalar una sola cosa positiva de SUMA, diría sin lugar a dudas que **ha quedado de manifiesto que podemos abordar una tarea común.** Este es el camino que puede llevar lejos a la Educación Matemática en España.

Ahora SUMA va ha ser gestionada por otro equipo que, desde Huelva, va a dirigir Sixto Romero. Para mí será un honor colaborar con él, y os pido a todos los que colaborásteis conmigo que lo sigais haciendo.

Dando los gracias a todos los que habeis ayudado en la etapa que con este número se cierra, quedo a vuestra entera disposición.

Rafael Pérez Gómez

NUEVA DIRECCIÓN PARA LA CORRESPONDENCIA CON SUMA

Apdo. de Correos 1304

21080 - HUELVA

Problemas multiplicativos de conversión

Carlos Maza Gómez

Introducción

Desde que, en los años setenta, se planteó la necesaria presencia de la resolución de problemas como eje vertebrador del currículum de Matemáticas, se han dado decisivos avances en este terreno. En lo concerniente a la resolución de problemas aritméticos en la Enseñanza Primaria, se ha trabajado «grosso modo» en tres aspectos fundamentales:

1) En primer lugar, las posibilidades que ofrecen los distintos conceptos y operaciones aritméticas de desarrollarse a través de la resolución de problemas.

2) En segundo lugar, las estrategias empleadas por los niños al resolver problemas, con especial énfasis en la llamada «artimética informal», es decir, las estrategias infantiles no influídas por la escolarización.

3) Por último, la aplicación de todo lo anterior en la instrucción escolar, sea por medio del currículum, sea por formas concretas de enseñanza en el aula. Este es el aspecto más reciente y el que orientará, probablemente, el más próximo futuro en la investigación sobre resolución de problemas.

Fruto de estos esfuerzos han surgido trabajos consistentes sobre los dos primeros aspectos para la suma y la resta [Carpenter, Moser y Romberg 1982], así como resultados menos completos en la multiplicación, división, fracciones, etc.

Parece razonable suponer que la bien establecida clasificación de distintos tipos de problemas de suma y resta [Puig y Cerdán 1988, Maza 1989] irá introduciéndose paulatinamente y de modo sistemático en el currículum español. Lo mismo sucede desde hace tiempo, aunque sólo de forma intuitiva, respecto a los problemas de multiplicación y división. Dado que el aprendizaje infantil, dentro de una misma operación, varía sustancialmente según los tipos de problemas considerados, se puede afirmar que la no consideración por el profesor de estas clasificaciones comportaría:

a) Que se transgrediera el principio de una progresiva complejidad en el aprendizaje, planteandose problemas complicados antes que otros más sencillos.

b) Olvidar tipos de problemas en beneficio de otros, más clásicos. Tal sería el caso de presentar sólo problemas de multiplicación resolubles por suma reiterada, olvidando los de combinación propios del producto cartesiano o los que se presentan en este artículo, de conversión.

A la vista de todo ello, este artículo pretende hacer conocer al profesorado la clasificación de problemas de multiplicación y división, difundiendo, al mismo tiempo, las posibilidades que encierran los llamados problemas de conversión.

Clasificación de problemas de multiplicación y división

Hay cierto acuerdo entre los investigadores en Educación Matemática en la existencia de tres tipos generales de problemas para estas dos operaciones [Schwartz 1976, Vergnaud 1983, Quintero 1986, Nesher 1988].

Para la multiplicación, e incluyendo un ejemplo breve de cada caso, serían los siguientes:

1) Problemas de razón

Compras 2 paquetes de caramelos. Cada paquete tiene 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos compraste?.

2) Problemas de comparación

Tienes 6 pesetas. Un amigo tiene dos veces las pesetas que tú tienes. ¿Cuántas pesetas tiene tu amigo?.

3) Problemas de combinación (o de producto cartesiano)

Tienes 6 camisas y 2 pantalones. Si te pones una camisa y un pantalón cada vez, ¿de cuántas formas distintas puedes vestirte?.

Todos los problemas planteados se resuelven con la operación 2 x 6 pero, sin embargo, plantean dificultades diferentes. Parece claro que los problemas de combinación (que implican la combinación de los elementos en juego a través de un producto cartesiano) son más difíciles que los dos tipos anteriores, resolubles por una suma reiterada [Hart 1981, Quintero 1985].

Si bien se está conforme con esta clasificación, no hay tanto acuerdo en determinar aquella variable que distingue a unos problemas de otros. Aquí presentaremos, exclusivamente, la interpretación dada por Schwartz [1976, 1986] que supone un análisis de los tipos de cantidades empleados.

Así, se distinguen las cantidades «extensivas» del tipo 6 caramelos o 2 pantalones, de las cantidades «intensivas», que señalan la presencia de una cantidad en otro. Este sería el caso de 6 caramelos por paquete. Al objeto de simplificar este análisis, Schwartz [1986] propone que las cantidades del tipo «dos veces más» sean consideradas como intensivas, bajo el razonamiento de que, en el problema de comparación expuesto, ese «dos veces más» podría entenderse como las pesetas de tu amigo respecto de las tuyas.

Esta reducción se propone exclusivamente para simplificar el análisis teórico. En su vertiente práctica se siguen considerando distintas la razón del primer problema (6 caramelos/paquete) y el cuantificador del segundo (2 veces más).

De esta forma, los problemas de razón y de comparación tendrían la estructura de cantidades E x I (cantidad extensiva por cantidad intensiva), mientras que el problema de combinación respondería a la estructura E x E.

Esta clasificación supone que para los dos primeros tipos, inicialmente, la operación de multiplicar no es conmutativa. Uno de los números corresponde a la cantidad que se repite (I en el primero, E en el segundo) y el otro a la cantidad de veces que se repite el anterior. Ello tiene como consecuencia inmediata que los problemas de división correspondientes han de tener en cuenta que la incógnita sea una u otra cantidad, lo que da lugar a dos problemas de división para cada uno de los dos primeros casos contemplados anteriormente. Serían los siguientes:

1) Problemas de razón

a) Paricipación-razón: Compras 2 paquetes de caramelos, lo que hacen un total de 12 caramelos. ¿Cuántos hay en cada paquete?.

b) Agrupamiento-Razón: Compras 12 caramelos en paquetes de a 6 caramelos. ¿Cuántos paquetes compraste?.

2) Problemas de comparación

a) Participación-Cuantificador: Tu amigo tiene 12 pesetas, 2 veces lo que tú tienes. ¿Cuántas pesetas tienes?.

b) Agrupamiento-cuantificador: Tienes 6 pesetas y tu amigo 12. ¿Cuántas veces más que tú tiene tu amigo?.

3) Problemas de combinación

Tienes 6 camisas y varios pantalones. Si te pones una camisa y un pantalón cada vez, puedes vestirte de 12 maneras diferentes. ¿Cuántos pantalones tienes?.

Las denominaciones «partición» y «agrupamiento» (que también recibe el nombre de cuotición) corresponden a las dos acciones fundamentales de resolución de estos problemas: Repartir los elementos dados observando los que corresponden al final o formar grupos de los mismos elementos alcanzando un número de grupos determinado.

Los problemas de conversión en la multiplicación

En el análisis de los problemas multiplicativos se han mencionado las posibilidades E x I y E x E. Una simple extensión de las mismas conduce a considerar la posibilidad I x I.

Este tipo de problemas ha sido, en general, considerado como poco usual o inaplicable en la Enseñanza Primaria [Puig y Cerdán 1988, Nesher 1988], por lo cual ha merecido poca atención. La única aplicación que se aduce para ellos es la conversión de medidas que se desarrolla en cursos superiores. Sin embargo, un análisis sencillo puede descubrir no sólo su aplicabilidad en las aulas de Primaria sino, además, su posible conveniencia.

Respecto a los problemas de multiplicación, la estructura IxI ofrece tres posibilidades, según se considere por cantidad intensiva una razón (R) o un cuantificador (C). Estas son:

1) Problemas R X R

En cada bolsa de un cumpleaños hay 5 paquetes de chicle. Cada paquete tiene 3 chicles. ¿Cuántos chicles hay en cada bolsa?.

2) Problemas R X C

Hay 5 chicles en un paquete pequeño. Un paquete grande tiene 3 veces los chicles del paquete pequeño. ¿Cuántos chicles tiene el paquete grande?.

3) Problemas C X C

Pablo tiene un dinero. Enrique tiene 3 veces el dinero de Pablo. Guillermo tiene 4 veces el dinero de Enrique. ¿Cuántas veces tiene Guillermo el dinero de Pablo?.

Como una simple muestra de las posibilidades de resolución que pueden tener estos problemas, se le plantearon a Guillermo, un niño de 8 años y 2 meses. Cursaba el segundo curso de EGB, en el cual había encontrado, por primera vez, distintos problemas multiplicativos y algunos ejemplos no sistemáticos de división. Se le recomendó, durante la entrevista, que dibujara los elementos del problema antes de resolverlos, al objeto de observar la expresión gráfica de su procedimiento y ello diera una pista de la posible representación del problema que hubiera construído.

Los problemas RxR y RxC fueron bien resueltos y, como se puede apreciar por sus dibujos (Figura 1), a través de una suma reiterada. Tal parece que el procedimiento de solución consistía en considerar la primera razón dada como el multiplicando y el otro número (razón o cuantificador) como el multiplicador. Con ello, en realidad, se reducía el problema RxR a un problema de razón y el RxC a un problema de comparación.

De ahí surgen dos interrogantes: Esta estrategia de suma reiterada ¿es la más aplicable, en general, a este tipo de problemas?. Además, ¿estos problemas de conversión conllevan mayor dificultad que los de razón y comparación, o suponen una dificultad de aprendizaje similar?. Lo que sí parece probable es que, si la estrategia de resolución fuera la suma reiterada, los problemas de conversión serían posibles de resolver incluso a los 8 años.

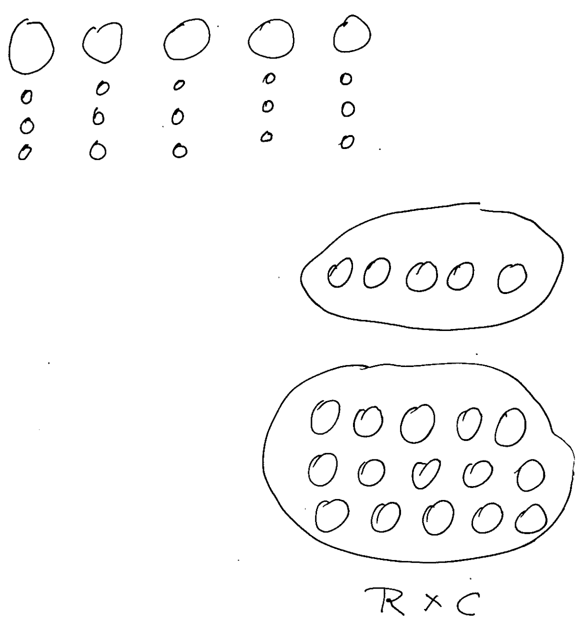


Figura 1

El problema CxC acarreó, sin embargo, una gran dificultad. El entrevistado parecía necesitar un referente concreto sobre el que trabajarpor lo que consideraba para Pablo un dinero hipotético (5 pesetas). Además, era incapaz de emplear más de un cuantificador, de manera que aplicaba el último pronunciado (4 veces) para dar la solución errónea de 20.

Este tipo de problemas supone la inclusión jerarquizada de tres conjuntos: El dinero de Pablo está incluído en el de Enrique (3 veces) que, a su vez, está incluído en el de Guillermo (4 veces). Se le suministró, entonces, un diagrama de Venn donde aparecían los tres conjuntos relacionados de esta manera, pero no dió resultado alguno.

Para confirmar la hipótesis de que la inclusión jerarquizada era un ostáculo en este tipo de problemas, se le planteó otro del mismo tipo:

La tienda «Roja» vende 3 veces más que la «Azul» y la «Azul» vende el doble que la «Verde». ¿Cuál vende más: La tienda «Roja» o la «Verde»? ¿Cuántas veces más?.

La respuesta a la primera pregunta fué acertada (lo cual ni confirmó ni desmintió la hipótesis). Habiéndole instado a dibujar la situación fué incapaz de hacerlo, aferrándose a la respuesta de la segunda pregunta. Esta consistió en el siguiente diálogo:

Pregunta:	*¿Cuántas veces más?*
Respuesta:	*Una.*
Pregunta:	*Una vez. Entonces ¿vende el doble?*
Respuesta:	*No. De 3 la verde es el doble ¿no?. Luego es 3 menos el doble, una vez más.*
Pregunta:	*¡Ah! Lo que haces es 3 menos 2.*
Respuesta:	*Si, éso. Una vez más.*

Tal parece que la secuencia «Verde incluída en Azul incluída en Roja» es transformada en «Azul incluída en Verde incluída en Roja», de manera que lo que se compara son las veces que la Azul estaría incluída en ambas. En una estaría incluída 2 veces y en la otra 3. Así que la pregunta del problema se transforma en: *¿Cuántas veces más incluye la Roja que la Verde a la Azul?.*

De todo ello, se puede conjeturar que existirían tres acciones en la resolución de este tipo de problemas:

a) Admitir la presencia hipotética de una cantidad (el dinero de Pablo, la mercancía vendida por la tienda Verde). Ello parece plantear dificultades en el primer problema.

b) Considerar una adecuada relación de inclusión entre las tres cantidades en juego, lo que se muestra como difícil en el segundo problema, así como en el primero.

c) Realizar una operación multiplicativa entre cuantificadores apoyada en las dos primeras acciones. Ello resulta insalvable si alguna de las anteriores acciones fracasa.

Los problemas de conversión en la división

Se puede sostener que las multiplicaciones del tipo IxI no son conmutativas, lo que daría lugar a dos clases de división para cada una de las categorías presentadas [Puig y Cerdán 1988]. Dimensionalmente, se puede sostener también lo contrario, que es lo que haremos aquí. En efecto, en el problema RxR de multiplicación, la solución viene dada por

5 paquetes/bolsa x 3 chicles/paquete

y también por

3 chicles/paquete x 5 paquetes/bolsa

Esta solución es, en ambos casos, de 15 chicles/bolsa.

Si se toma, entonces, la multiplicación como conmutativa, los posibles problemas de división que surgen paralelamente a los anteriores, son los siguientes:

1) Problemas R X R

Un paquete tiene 4 caramelos. Hay 12 caramelos en una bolsa. ¿Cuántos paquetes entran en una bolsa?.

2) Problemas R X C

Los niños de una familia comen 14 galletas en cada desayuno, el doble de lo que comen los niños de otra familia. ¿Cuántas galletas comen en cada desayuno los niños de la segunda familia?.

3) Problemas C X C

Pablo tiene un dinero. Guillermo tiene 10 veces el dinero de Pablo y el doble del dinero de Enrique. ¿Cuántas veces tiene Enrique el dinero de Pablo?.

Es interesante observar que Guillermo, el niño entrevistado, presenta un comportamiento estable tanto para los problemas de multiplicación como de división. Así, resuelve con facilidad los dos primeros y falla en el segundo.

El problema RxR muestra además, en su resolución, un adecuado establecimiento de las relaciones de inclusión entre los tres conjuntos presentes, los de caramelos, paquetes y bolsas. Su representación gráfica así lo muestra (Figura 2).

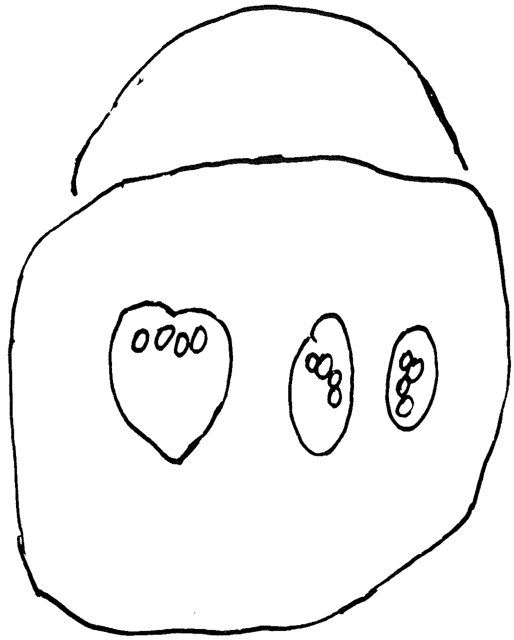


Figura 2

Dicha representación no reproduce el esquema de acciones tal como se presentan en el problema, sino que comienza dibujando la bolsa para continuar con los paquetes uno a uno, incluyendo en cada paso los caramelos correspondientes y dando la respuesta final adecuada. Algo similar sucede en el problema RxC.

Nuevamente, es el problema CxC el que le causa dificultades. Dibuja un conjunto de seis elementos (que manifiesta ser el dinero de Pablo) y, a continuación, otro conjunto de seis más seis elementos (que afirma ser el dinero de Enrique). Así pues, necesita nuevamente tomar un conjunto de referencia sobre el que operar y la operación que ejecuta es la aplicación del último cuantificador dado (el doble).

Con un tratamiento semejante al caso de la multiplicación, se le planteó un nuevo problema menos propicio a serle asignadas cantidades hipotéticas iniciales:

La tienda «Roja» vende 8 veces más que la tienda «Azul» y 4 veces más que la tienda «Verde». ¿Quién vende más, la tienda «Verde» o la «Azul»?. ¿Cuántas veces más?.

La primera pregunta fué, nuevamente, acertada. La segunda supuso un comentario similar al caso de la multiplicación:

Pregunta:	*¿Cuántas veces más?*
Respuesta:	*Cuatro.*
Pregunta:	*¿Por qué?*
Respuesta:	*Porque 4 más 4 son 8.*

Una vez más, la pregunta parece haberse transformado en ¿Cuántas veces más vende la Roja que la Verde respecto de la Azul?. Parece, pues, que es posible realizar la inclusión de los tres conjuntos (tal como en el problema RxR) así como prescindir de la cantidad inicial (aquí no hace hipótesis alguna al respecto), pero no consigue operar multiplicativamente las tres relaciones simultáneas de inclusión que hay que considerar: la Roja incluye a la Azul, la Verde incluye a la Azul y la Verde incluye a la Azul.

No obstante, existe un dato significativo que permite sostener otro tipo de hipótesis sobre el origen del error detectado. Surge del diagrama que se le mostró en torno al problema de división CxC del dinero de los tres niños (Figura 3).

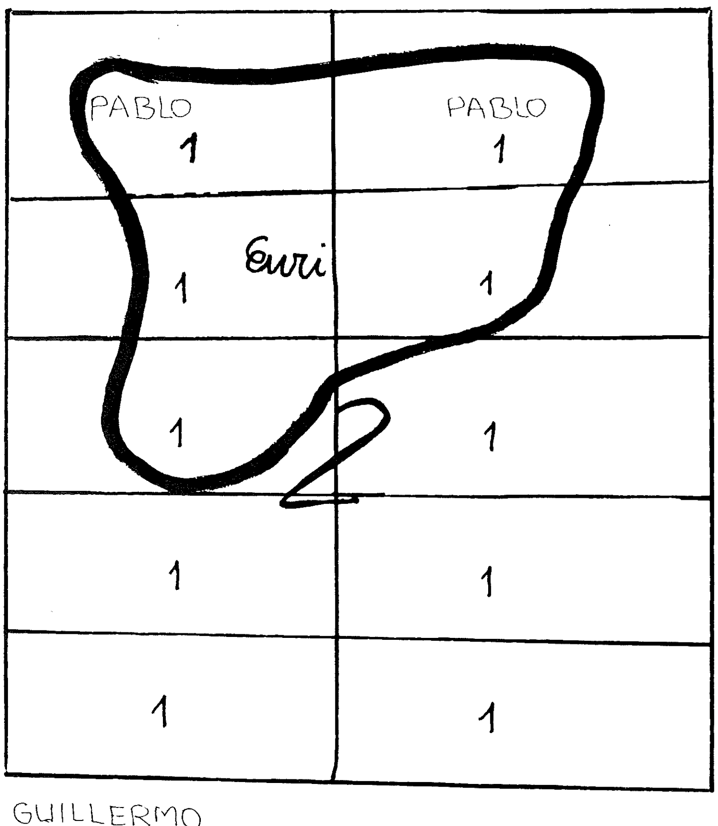


Figura 3

Este diagrama mostraba la relación de inclusión entre la cantidad menor (el dinero de Pablo) y la mayor (el de Guillermo). Se le pedía que determinase la relación entre el conjunto intermedio (el dinero de Enrique) y el mayor. Reduciendo el problema a un agrupamiento, la respuesta fué correcta como se muestra por la forma en que lo completó (en trazo grueso) y el diálogo que siguió:

Pregunta: *¿Cuántas veces tiene Enrique el dinero de Pablo?*
Respuesta: *Cinco, cinco veces.*
Pregunta: *¿Por qué?*
Respuesta: *El doble de 5 son 10.*

Ante esta realización, podría sostenerse que el hecho de hacer perceptiva la cantidad inicial de Pablo (representada por un rectángulo) pudo motivar el acierto. Ello estaría conforme por esa necesidad planteada de considerar una cantidad hipotética inicial.

No obstante, parece más probable que el establecimiento de una de las inclusiones a través del diagrama le ayude a centrar su atención en sólo dos inclusiones (el dinero de Enrique respecto de Pablo y respecto de Guillermo). La reducción de tres inclusiones simultáneas a dos podría ser la clave del mayor acierto.

Conclusiones

Este trabajo así expuesto no permite sacar conclusiones definitivas, como tampoco lo pretendía. Su objetivo ha sido el de abrir a la observación un reducido campo de problemas normalmente no tratados en la escuela. Se han mostrado algunas de las posibilidades que ofrece en el desarrollo infantil de la comprensión y aplicación de estas operaciones aritméticas, así como en el terreno de la instrucción, sea por el planteamiento de una diversidad de situaciones resolubles con una misma operación, sea por la aplicabilidad de las representaciones gráficas para facilitar el razonamiento infantil en resolución de problemas.

Algunos de los interrogantes que plantea este tipo de problemas ya han sido mencionados de manera explícita. Otros pueden irse formulando más adelante. En todo caso, se puede sostener que los problemas de conversión están llamados a ejercer un papel tan importante como los restantes tipos de problemas y, por ello, me permito invitar a profesores e investigadores a seguir profundizando en las estrategias infantiles que los resuelven, en la comparación entre este tipo de problemas y los demás y en la viabilidad de su aplicación en el aula.

Referencias Bibliográficas

CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M. y ROMBERG, T.A.: «Addition and subtraction: A Cognitive perspective». Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey. 1982.

HART, K.M.: «Children's understanding of Mathematics». Ed. J. Murray. Londres. 1981.

MAZA, C.: «Sumar y restar». Ed. Visor. Madrid. 1989.

NESHER, P.: «Multiplicative School word problems: Theoretical approaches and empirical findings». En Hiebert, J. y Behr, M.: «Number concepts and operations in the middle grades». Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey. 1988.

PUIG, L. y CERDAN, F.: «Problemas aritméticos escolares». Ed. Síntesis. Madrid. 1988.

QUINTERO, A.H.: «Conceptual understanding of multiplication: Problems involving combination». Arithmetic Teacher. Vol. 33, n 3, 34-37. 1985.

QUINTERO, A.H.: «Children's conceptual understanding of Situations involving multiplication». Arithmetic Teacher. Vol. 33, n 5, 34-37. 1986.

SCHWARTZ, J.L.: «Semantic aspects of quantity». M.I.T. Cambridge, Massachusets. Manuscrito. 1976.

SCHWARTZ, J.L.: «Intensive quentity and Referent transforming Arithmetic Operations». M.I.T. Cambridge, Massachusets. Manuscrito. 1986.

VERGNAUD, G. : «Multiplicative structures». En Lesh,R. y Landau,M.: «Adquisition of mathematical concepts and processes». Academic Press. New York. 1983.

La mitad de un cuadrado

José Antonio Mora Sánchez

Introducción

La realización de trabajos de investigación es uno de los métodos de enseñanza que más se resisten a entrar en las clases de matemáticas. El que sean los estudiantes los que tomen decisiones y determinen el camino de su trabajo plantea muchas incógnitas.

Este artículo intenta poner el énfasis en varios aspectos de los trabajos de investigación:

1. La situación planteada no tiene por qué ser difícil, todo lo contrario, ha de ser accesible a los estudiantes. La complejidad la determinan ellos con sus propias decisiones.

2. La duración de la investigación no se puede predeterminar, vendrá dada por el interés de los estudiantes.

3. El trabajo en grupos es una forma adecuada de organizar la clase para abordar este tipo de trabajos por provocar un intercambio de ideas que induce a aceptar la relatividad o parcialidad de los propios planteamientos y a situarse en perspectivas ajenas.

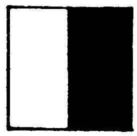
4. La intervención del profesor es fundamental en el transcurso de la investigación:

- Diagnostica el nivel inicial de los estudiantes y las posibles dificultades.
- Promueve, impulsa y agiliza el trabajo de los grupos.
- Hace observaciones.
- Pide justificaciones de las conjeturas realizadas.
- Hace notar contradicciones e incoherencias.
- Hace reflexionar sobre los resultados obtenidos.
- Reta y anima a explorar nuevas ideas.
- Cuando los estudiantes están atascados, les hace sugerencias sin dar la solución.
- Organiza debates para estudiar los resultados obtenidos por los grupos.
- Somete a discusión tanto las buenas soluciones como las erróneas y aprovecha los errores como fuente de aprendizaje.
- Contribuye a que en la clase se dá un ambiente relajado en el que cualquier aportación es valorada positivamente, analizada y debatida.

Enunciado del problema

La mitad

Dado el cuadrado de la figura, una forma de conseguir un polígono cuya rea sea la mitad es: «tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con una línea recta».



(1)

Busca otros procedimientos.

Antecedentes

Ecncontró por primera vez este problema en un artículo de Juan Antonio García Cruz (1986). Me pareció un enunciado abierto y sugerente que, si se dejaba tiempo suficiente a los estudiantes, podía llevar a diversidad de soluciones y, lo que es más importante, darles la posibilidad de hacer matemáticas: adentrarse en conceptos geométricos, como el área o la simetría y en procedimientos como la generalización, la particularización o la demostración.

Lo propuse a los estudiantes de primer curso de reforma en el I.F.P. Verge del Remei de Alicante como una investigación a la que íbamos a dedicar el tiempo que fuera necesario dentro de un apartado de Geometría titulado «Construcciones Geométricas». Posteriormente propuse este mismo enunciado desde una perspectiva algebraica para reforzar la utilización y manipulación de expresiones algebraicas.

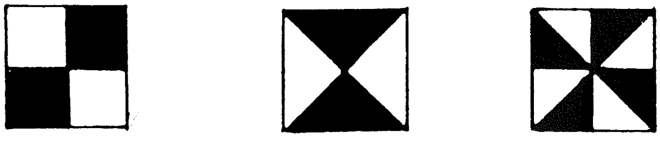
Las notas que siguen son producto del trabajo con los estudiantes en clase y de las discusiones con otros profesores que han trabajado esta investigación ellos mismos o lo han propuesto en sus clases. Una primera redacción apareció en Mora y Pérez (1987).

Los primeros tanteos

Un enunciado abierto provoca que, nada más comenzar, los alumnos planteen preguntas para clarificar el enunciado:

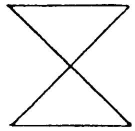
- ¿Hay que dividir el cuadrado en dos partes iguales?.
- ¿Hay que utilizar siempre una línea recta?.
- ¿Una sola línea?.
- ¿Puede ser curva?.
- ¿Hemos de obtener siempre dos polígonos iguales?. -¿Únicamente dos polígonos?.

Es importante dejarles que tomen sus propias decisiones, que examinen las consecuencias de su elección y si ésta responde a las condiciones establecidas por el enunciado. Por ejemplo, suelen surgir soluciones del tipo:



(2)

que lleva a plantearse la pregunta: ¿es esto:



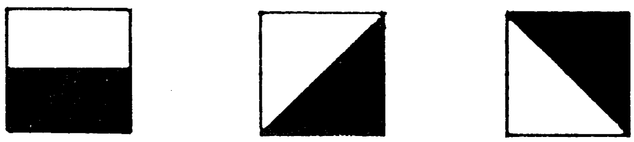
(3)

un cuadrilátero?. D. Crawfort (1988) relata un interesante desarrollo de esta situación en una clase en la que los estudiantes examinan las consecuencias de admitir o rechazar este tipo de figuras como cuadriláteros.

El proceso de generalización

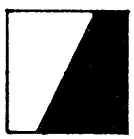
El trabajo se organiza en grupos de cuatro-cinco alumnos. Al principio es necesario organizar frecuentes debates para centrar los objetivos del trabajo y abrir las vías de la investigación. Más adelante cada grupo ir delimitando su tarea en la medida que identifique nuevos problemas e intente su resolución.

Las primeras soluciones son variaciones de la presentada en el enunciado:



(4)

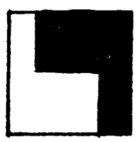
Ante ellas, la intervención del profesor: ¿No habrá una forma más general de dividir el cuadrado, de forma que las cuatro obtenidas sean casos particulares?. Tras un rato de trabajo sale algún alumno a dibujar en la pizarra:



(5)

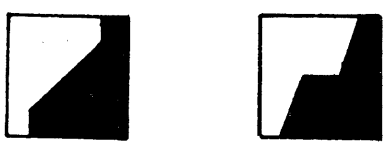
con esto ya tenemos infinitas soluciones al variar la inclinación de la línea, manteniendo que pase por el centro del cuadrado.

El proceso de generalización puede acabar aquí, o ir más lejos. De nuevo la pregunta: ¿No habrá una forma más general, de modo que los resultados ya obtenidos puedan considerarse nuevamente casos particulares de la nueva solución?, e inducir así a modificar la línea. Hay ideas como:



(6)

que abren necesariamente nuevas vías al modificar la inclinación:

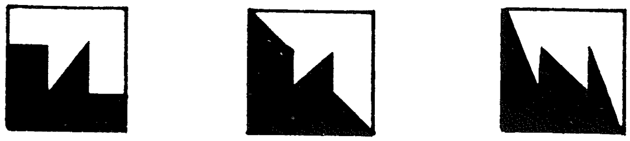


(7)

el número de segmentos:

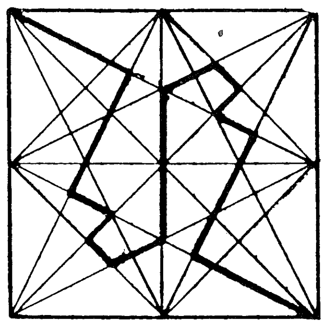
(8)

o introducir nuevas variaciones:



(9)

e incluso fantasías:



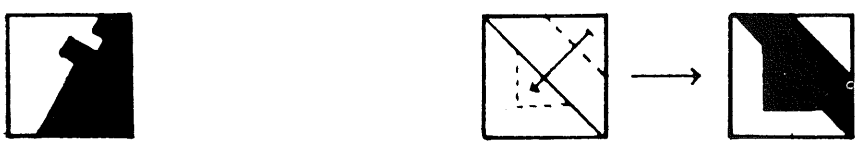
(10)

no es raro que se anuncien como soluciones:

(11)

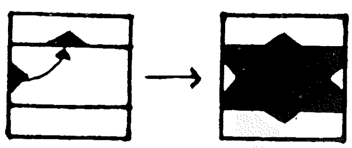
que llevan a revisar el enunciado y examinar si la figura obtenida es realmente un polígono.

Más tarde aparecen nuevas soluciones que son variaciones de las encontradas hasta ahora y que consisten en añadir y quitar una región:



(12)

y surgen polígonos que podemos encontrar en la Alhambra:



(13)

Hablar de matemáticas

En algún momento de este proceso, las intervenciones del profesor han de ir encaminadas a una descripción lo más precisa posible de la línea con la que dividimos el cuadrado. Esta precisión depender fundamentalmente del grado de desarrollo de los estudiantes.

La pregunta en cuestión puede tomar la forma de: ¿Cómo podrías comunicar por teléfono a un interlocutor cada una de las soluciones que has encontrado hasta ahora, de forma que la pueda reproducir tal y como la tienes?.

Es difícil para el profesor tomar la posición de moderador sin dar sus propias soluciones, una de las opciones sería provocar que los estudiantes reflexionen sobre las consecuencias de las definiciones de sus compañeros. Para ello, se propone a la clase que cuando un compañero emita un procedimiento, intenten seguirlo al pié de la letra y vean si pueden conseguir que el polígono obtenido no cumpla las condiciones del problema. Algunas definiciones para el caso del trapecio (5) son:

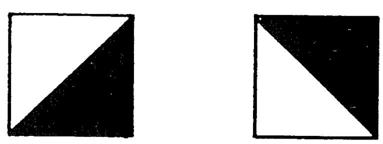
- "Tomar los extremos de dos lados opuestos un poco inclinadas y trazar una línea que los una".
- "Tomar un punto, a una distancia determinada del vértice y otro en el lado opuesto, a la misma distancia y unirlos con una recta".
- "Cualquier línea que salga de un lado hacia el lado opuesto pasando por el centro".

Todas ellas contienen incorrecciones, pero revelan que los estudiantes se estén inmersos en el problema y realizan un verdadero esfuerzo por hacerse entender y expresarse con corrección. Como se apuntó en el Simposio de Valencia (1987): «Para que se desarrolle la capacidad de expresarse con claridad es necesario valorar más la expresión de los intentos titubeantes y los procedimientos incorrectos en lugar de acallarlos en favor de los caminos seguros y las respuestas correctas».

Podemos introducir un elemento de concisión si planteamos: «Pensad ahora que lo vais a comunicar ahora a alguien que está lejos y la conferencia es cara».

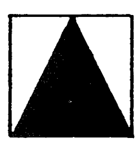
Los polígonos como punto de partida

En este momento parece que la investigación va llegando a su fin, pero el profesor puede introducir nuevos modos de enfocar el problema que hagan despertar de nuevo el interés de los estudiantes. Por ejemplo, «Hemos encontrado dos (o cuatro) triángulos:



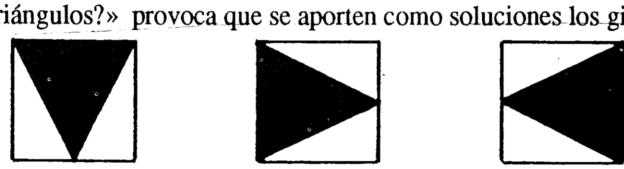
(14)

¿No habrá otros triángulos distintos a estos dentro del cuadrado y cuya área sea la mitad?». No tarda en salir alguien con:



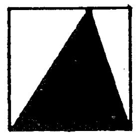
(15)

La pregunta: «¿No habrá más triángulos?» provoca que se aporten como soluciones los giros del anterior



(16)

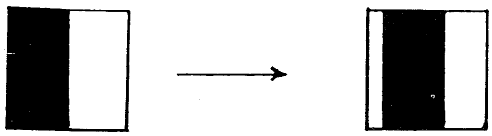
hasta que alguien se da cuenta de que el vértice no ha de estar necesariamente en el centro del lado:



(17)

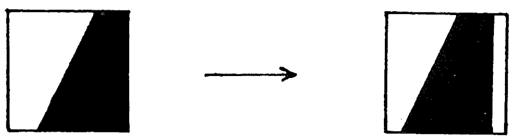
Más adelante se discutirá la conveniencia y la necesidad de probar que el área del triángulo obtenido es la mitad de la del cuadrado. Es interesante señalar que este momento suele ser uno de los más apropiados para que los estudiantes justifiquen por qué ese triángulo tiene por área la mitad del cuadrado y, más adelante hacer una revisión desde esta nueva óptica de las soluciones obtenidas hasta ahora.

Al igual que se ha planteado con triángulos podemos hacerlo con rectángulos: ¿Habrá otros?. Unos alumnos los encuentran al desplazar el del enunciado hacia el interior del cuadrado. A otros les basta con que el rectángulo tenga dos lados en el cuadrado que midan la mitad de su lado.



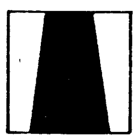
(18)

En los trapecios ocurre algo parecido con los desplazamientos.



(19)

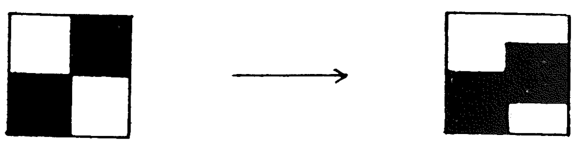
pero es la solucion de los rectángulos que tenía en cuenta la medida de las bases, la que puede dar alguna indicación para trapecios del tipo:



(20)

en los que las condiciones para las bases son mucho más difíciles de expresar.

La idea de trasladar un polígono abre la posibilidad de revisar el trabajo realizado y aparecen soluciones a partir de procedimientos rechazados anteriormente:

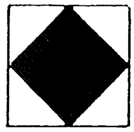


(21)

Hasta ahora hemos trabajado a partir de las figuras que ya teníamos. Si seguimos la estrategia que D. Fielker (1987) llama «actitud abierta», podemos encontrar nuevas preguntas que hagan modificar la forma de los polígonos considerados o el número de lados como:

- "¿No habrá cuadrados de área la mitad dentro del inicial?".
- "¿Y paralelogramos?".
- "¿Y rombos?". "¿Cometas?"
- "¿Otros cuadriláteros distintos a los mencionados?".
- "¿Exágonos?". "¿Pentágonos?". ...
- ...

La figura:

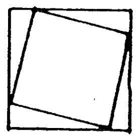


(22)

surge inicialmente como un rombo y no es fácil que vean en ella un cuadrado. A veces se llega a acaloradas discusiones entre los que «saben» que ahí hay un cuadrado y los que «se niegan a admitir» que esa figura pueda ser algo distinto a un rombo. Es una nueva oportunidad de volver a los principios y ver la necesidad de definir con precisión los conceptos de cuadrado y rombo.

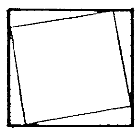
La prueba la realizan considerando que hay cuatro triángulos dentro y cuatro fuera y que todos son iguales.

Esta solución lleva a otra que en principio es aceptada como buena:



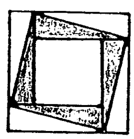
(23)

un método para refutarla es llevarla a casos extremos (cerca del límite):



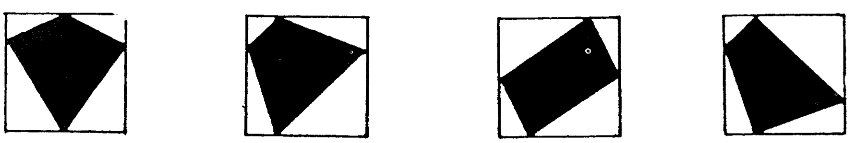
(24)

o estudiando los rectángulos:



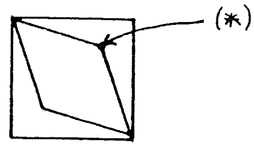
(25)

A partir de (18) pueden surgir variaciones que pueden encaminarse hacia la cometa, el trapecio isósceles, el paralelogramo y otros cuadriláteros:



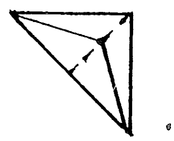
(26)

Cuando buscan rombos puede aparecer:



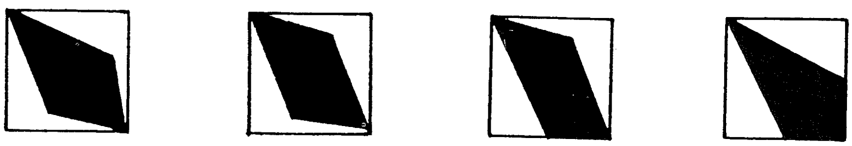
(27)

La dificultad reside en encontrar el punto (*). Una forma de situarlo, es darse cuenta de que el cuadrado inicial está formado por dos triángulos cuyas bases son una de las diagonales del cuadrado, a partir de aquí se puede ver que ha de estar situado sobre la otra a 1/4 (de la longitud de la diagonal) del vértice.



(28)

No es necesario que los puntos (*) se mantengan fijos. Los podemos desplazar sobre las líneas paralelas a la diagonal que pasan por los puntos obtenidos, en el mismo sentido o en sentidos opuestos.

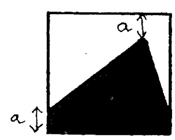


(29)

La búsqueda de pentágonos y exágonos se ve oscurecida por la imagen mental que tienen los estudiantes, cosa que ya ocurría con los rombos que son o no son cuadrados. Parece como si no hubiera pentágonos ni exágonos distintos a los regulares, y esto es producto de que rara vez los libros presentan alguno que no sea regular. Así, aunque ya tienen algunos en su colección de soluciones, no los reconocen como tales:

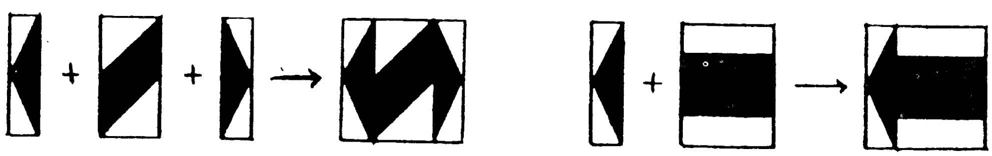
(30)

Un caso especial de pentágono surge al revisar la solución del triángulo:



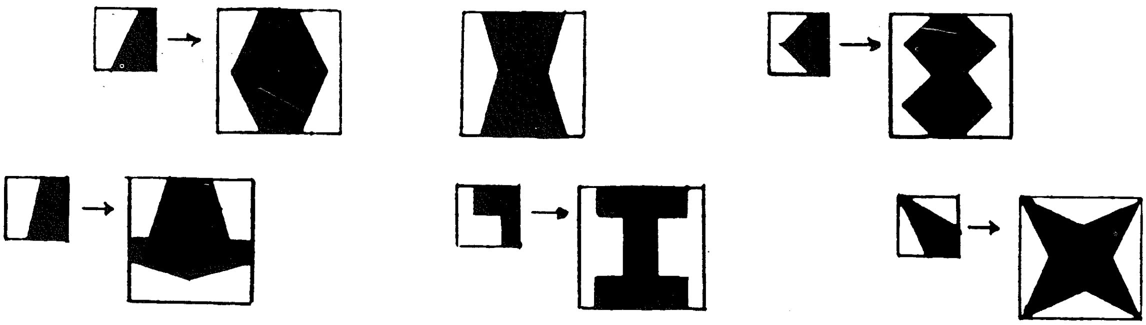
(31)

Hay nuevas soluciones que provienen de dividir el cuadrado en dos o más rectángulos de igual o distinta rea, y aplicar en cada uno de ellos uno de los métodos ya encontrados con cuidado de que la figura resultante sea un polígono.



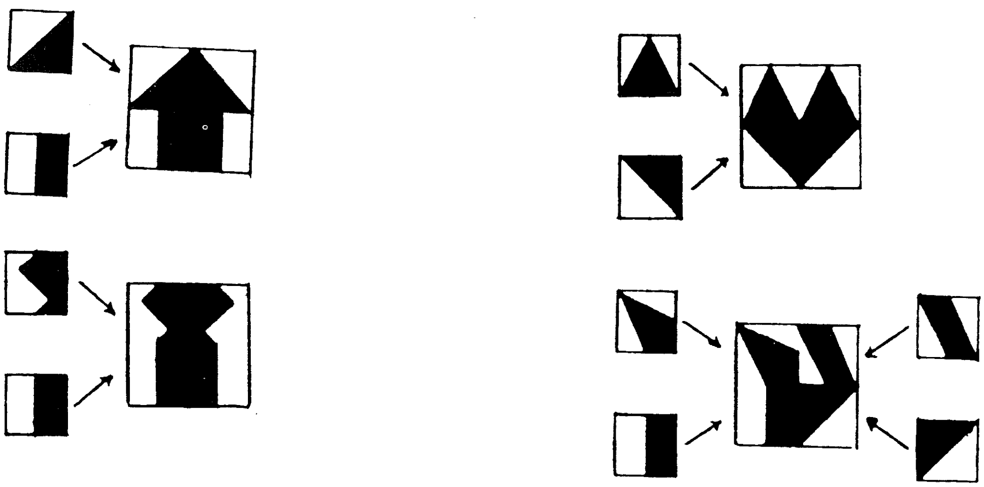
(32)

Las soluciones que provienen de dividir el cuadrado en 4 más pequeños y en todos ellos aplicar un método pueden llegar a ser especialmente elegantes:



(33)

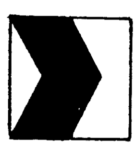
No es necesario aplicar siempre el mismo procedimiento, podemos combinar dos o más con resultados como:



(34)

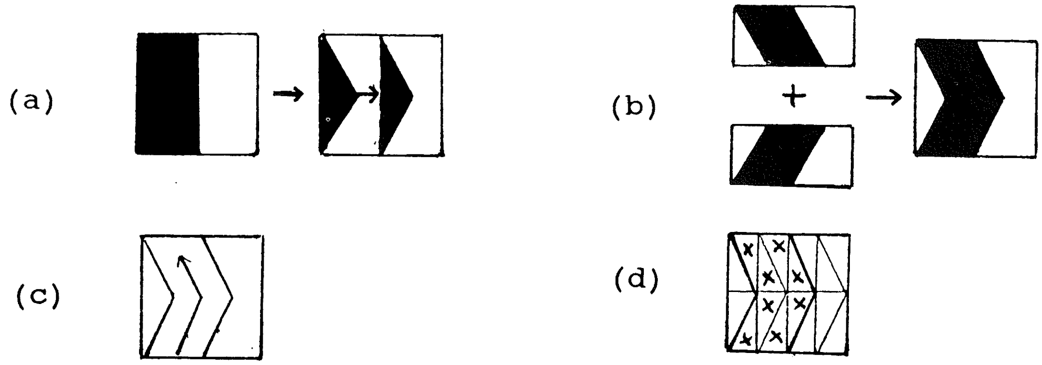
Resulta sorprendente ver cómo varios procedimientos diferentes pueden dar lugar a una misma figura. Es el caso de:

(35)



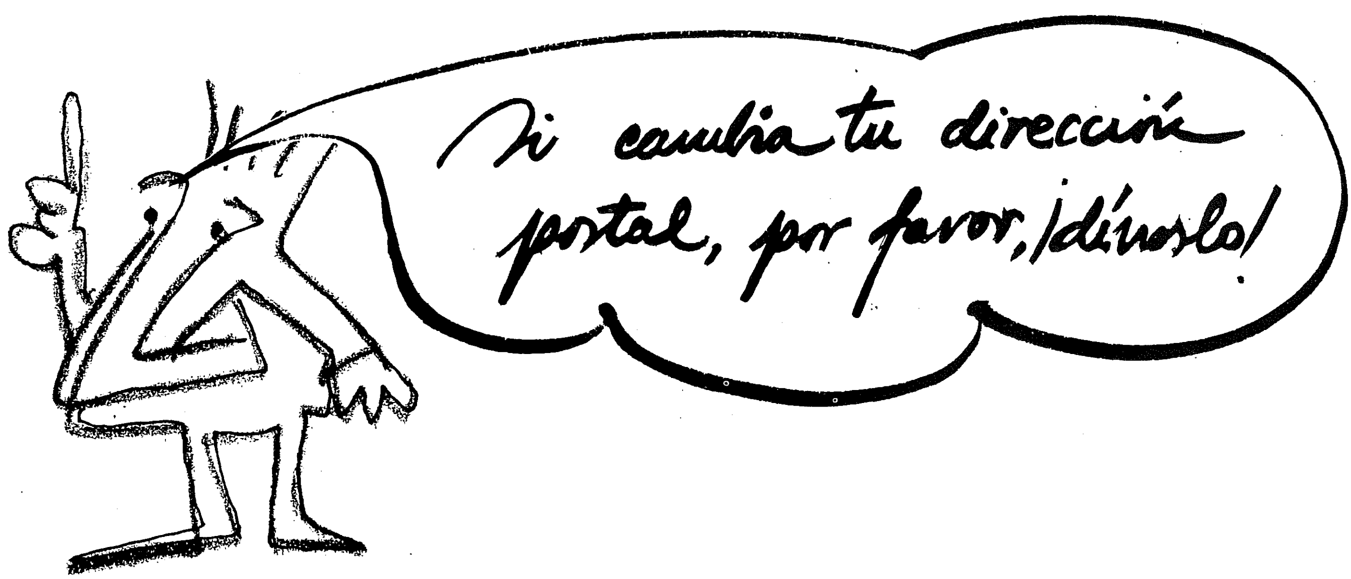
que puede obtenerse por varias vías:

(a) A partir del rectángulo, trasladar un triángulo.
(b) Considerar el cuadrado como dos rectángulos iguales y obtener en cada uno de ellos un paralelogramo.
(c) La región barrida al desplazar un segmento de longitud la mitad del lado del cuadrado.
(d) Dividir el cuadrado en 16 triángulos iguales y tomar 8.

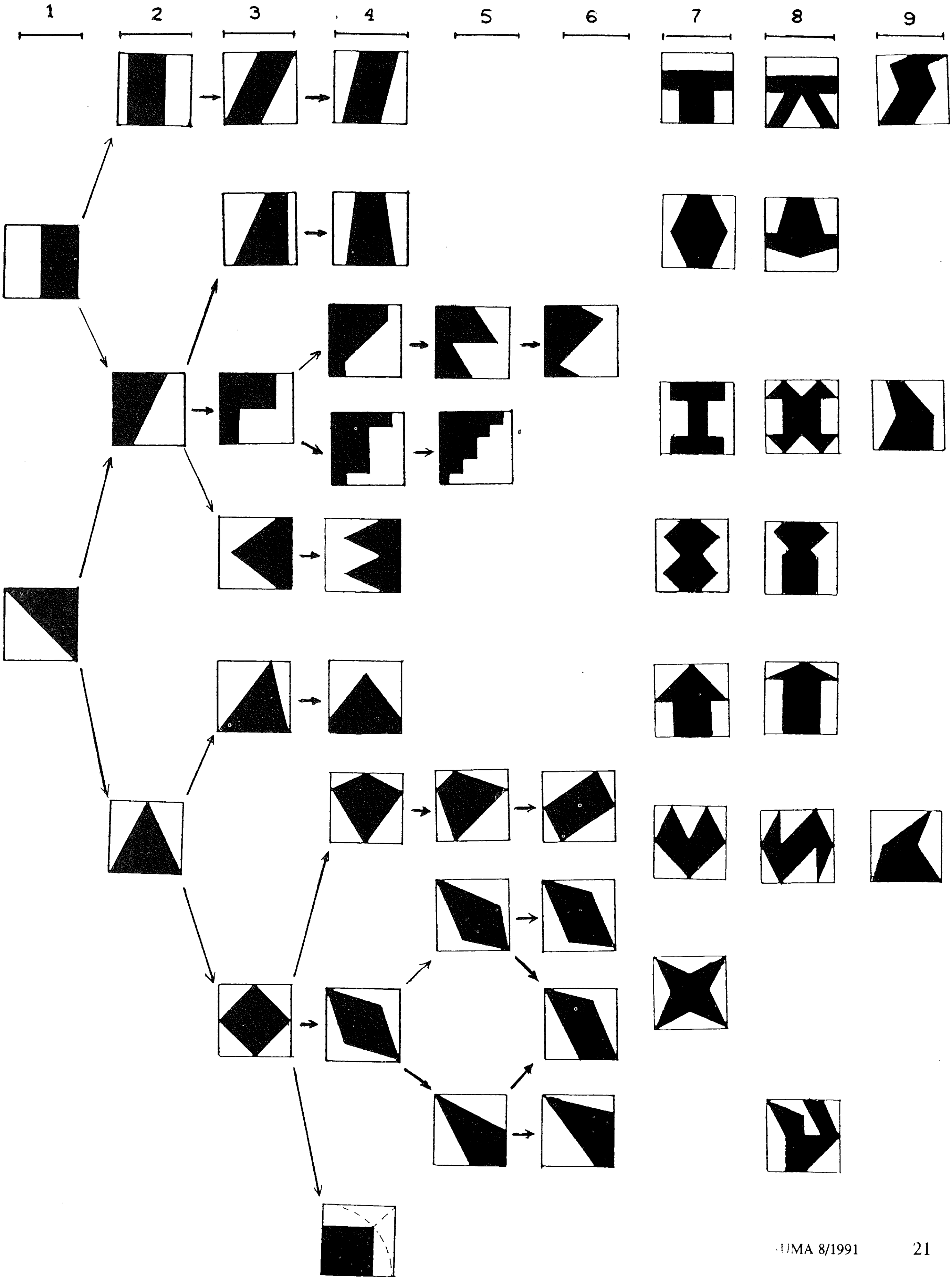


(36)

Para finalizar este apartado, he intentado construir un mapa de las soluciones en el que se pretende reflejar las direcciones del pensamiento a partir de la observación de estudiantes y compañeros enfrentados a esta investigación. Las flechas de los niveles 1 a 6 vienen a indicar que, a partir de lo aprendido al encontrar una solución, los individuos tienen cierta «predisposición» a encontrar la siguiente. Los niveles 7 y 8 corresponden a combinaciones de dos o más procedimientos. Aún hay un 9º nivel que se expone en el apartado siguiente.



Líneas de pensamiento



El concepto de área

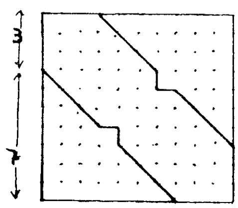
Cuando los estudiantes trabajan con papel cuadriculado, pronto encuentran soluciones que provienen de formar un polígono que contenga exactamente la mitad de los cuadraditos:

(37)

Con este método surgen infinidad de soluciones, algunas estéticamente atractivas como:

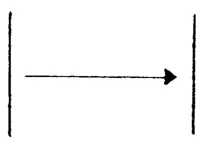
(38)

Y otras que requieren de ciertos refinamientos:

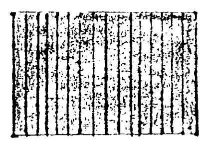


(39)

Lo más interesante es que el método lleva implícito la manipulación del concepto de área desde una perspectiva estética, y que es posible contrastar este enfoque con otro dinámico como el que ofrece Parker (1988) que considera el rea como la cantidad de plano atravesado por un segmento de recta móvil que ha permanecido siempre paralelo al original. Así:



habrá «barrido»



(40)

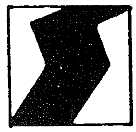
en nuestro caso, el desplazamiento de un segmento que mida la mitad del lado en una dirección perpendicular a sí mismo, nos lleva a la solución del enunciado.

(41)

Si el segmento se mueve en una dirección no perpendicular, sino formando un ángulo agudo consigo mismo mientras permanece paralelo a su posición original, debe atravesar la misma área; y tenemos el paralelogramo:

(42)

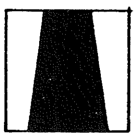
Lo sorprendente de esta visión en el problema que nos ocupa es que aporta nuevas soluciones, ya que si el camino que describe el segmento no influye en la cantidad de superficie barrida, lo podremos hacer cambiar de dirección tantas veces como deseemos, siempre y cuando se mantenga paralelo a su posición original:

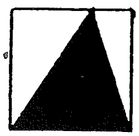


(43)

Parker aún va más lejos ya que, si el segmento se acorta en proporción constante a medida que se desplaza, generar un trapecio. El área será la longitud media del segmento por la distancia que atraviesa. Para obtener una solución lo único que habrá de preocuparnos es que esa media sea exactamente la mitad del lado del cuadrado. En el límite tendremos el triángulo.

$$S = \frac{B+b}{2} \cdot 1$$

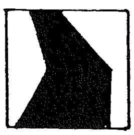


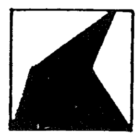


$$S = \frac{B+0}{2} \cdot 1$$

(44)

Para acabar, podemos modificar estas últimas soluciones si hacemos variar la dirección del segmento que decrece:





(45)

La demostración

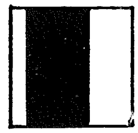
En muchos momentos del proceso relatado surge la necesidad de demostrar que el polígono obtenido tiene por rea la mitad del cuadrado. Si demostrar es convencer con argumentos lógicos, es necesario tener en cuenta quién tiene que producir esos argumentos y a quién van dirigidos, en ambos casos son los estudiantes. El tipo de razonamientos que son plausibles para alumnos de estas edades y que podemos esperar de ellos es muy distinto del que maneja un matemático.

En muchos casos es conveniente dar por válidas justificaciones a veces incompletas o ambiguas ya que el objetivo que se persigue es iniciar a los estudiantes en la conveniencia y el proceso de la demostración y que den sus primeros pasos en este sentido.

Por otra parte, un requisito imprescindible es que en la clase secree una atmósfera de indagación para que los estudiantes sientan la necesidad de probar o refutar sus conjeturas cuando encuentran soluciones al problema.

Las argumentaciones que se dan son de dos tipos: unas utilizan razonamientos de corte geométrico: equivalencia de reas, movimientos, etc.; otras, se basan en procedimientos algebraicos: utilización y manipulación de fórmulas para el cálculo del rea de los polígonos.

La solución del rectángulo planteado en el enunciado es evidentepara los alumnos ya que «se ha dividido el cuadrado en dos partes iguales». Cuando el rectángulo se dibuja en el interior del cuadrado, proponen un desplazamiento hacia uno de los lados.

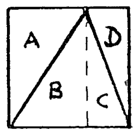


(46)

La demostración algebraica tiene en cuenta que el rectángulo tiene por altura el lado del cuadrado y por base la mitad.

Cuando se propuso la demostración para el triángulo, la congruencia de triángulos hizo que resultara sencillo.

$$S_A = S_B \text{ y } S_C = S_D \text{ luego } S_{B+C} = S_{A+D}$$

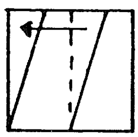


(47)

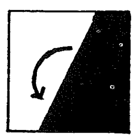
Aquí, la base y la altura del triángulo son iguales a los lados del cuadrado.

Para el paralelogramo se vió que una traslación del triángulo hacia la izquierda lo convierte en un rectángulo

(48)



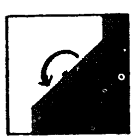
Para el trapecio, los alumnos propusieron realizar un giro de180º alrededor del centro del cuadrado con lo que los dos trapecios se superponen. La demostración algebraica que toma en cuenta que la suma de las bases es igual al lado del cuadrado, tuvo la ventaja de ser útil para otros trapecios obtenidos, con la geométrica hubo que cambiar el procedimiento, dar cortes realizar desplazamientos.



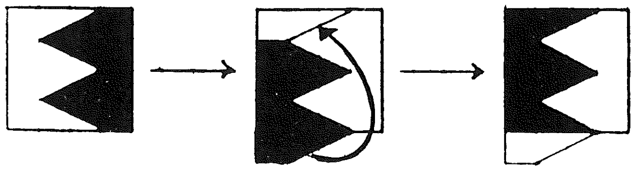
(49)

En cambio la demostracin geométrica sirvió más tarde para lospolígonos con una línea con centro de rotación de orden 2.

(50)

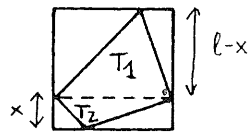


Un caso especial lo realizó una alumna que, ante el polígono dela figura, realizó el siguiente proceso (recortando y desplazando):



(51)

Hay un resultado interesante cuando tenemos un cuadrilátero convexo inscrito en un cuadrado (es válido también cuando está inscrito en un rectángulo) con una diagonal paralela a uno de sus lados

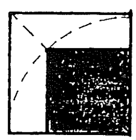


(52)

$$S_{T1} = \frac{l(l-x)}{2} \; ; \; S_{T2} = \frac{lx}{2}$$

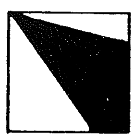
$$S_{T1} + S_{T2} = \frac{l(l-x)+lx}{2} = \frac{l^2-lx+lx}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{S_C}{2}$$

Avanzado ya el trabajo de manipulación algebraica les propuse el siguiente problema: «Demostrar que, según se hace la construcción del cuadrado pequeño de la figura, su rea ser la mitad degrande»



(53)

Aún estudiamos algunos otros cuadriláteros como:



(54)

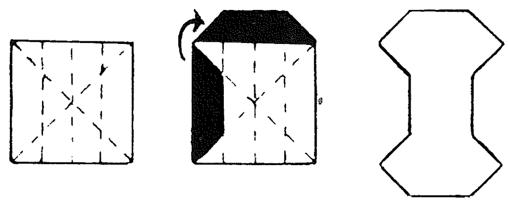
Mosaicos

En este tipo de trabajos, no son los estudiantes los únicos quese plantean preguntas e intentan responderlas. También adquiere relevancia el papel del profesor como investigador en una doble vertiente: por una parte, la investigación didáctica a través de la cual busca estrategias para favorecer el aprendizaje de los estudiantes; por otra, la misma situación matemática planteada supone un reto para él. Ha de situarse en la perspectiva del resolutor para introducirse en la tarea propuesta como uno más.

A veces, podemos encontrar alicientes para retomar temas que teníamos «aparcados» y volver a profundizar en ellos. Durante una época en la que intentaba poner orden a las ideas de este trabajo, una visita a la Alhambra y sus mosaicos, me ofreció nuevas sugerencias.

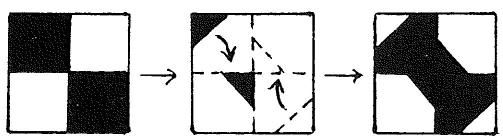
La chispa inicial surgió de una de las figuras que más me llaman la atención: el hueso. La técnica de construcción parte también del cuadrado. Ver Ruiz y Pérez (1987).

La búsqueda de nuevos procedimientos para la mitad del cuadrado me llevó al planteamiento siguiente: «Si el hueso surge de desplazar regiones del cuadrado hacia el exterior:



(55)

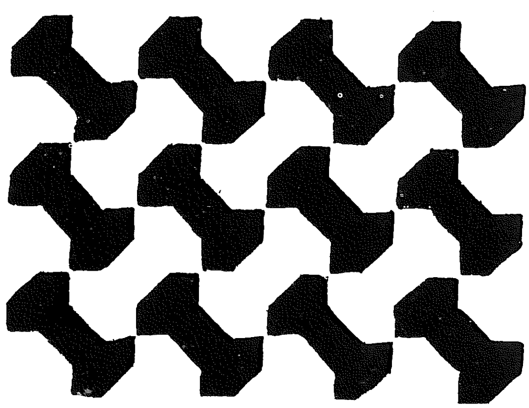
¿Podré conseguir algo parecido sin salirme del cuadrado?». En el contexto de la investigación, la cuestión iba tomando una nueva forma: «¿Podré encontrar el hueso dentro del cuadrado, con un área igual a la mitad?». Tras varias tentativas conseguí una vía a partir de la división del cuadrado en cuatro más pequeños y considerando dos opuestos:



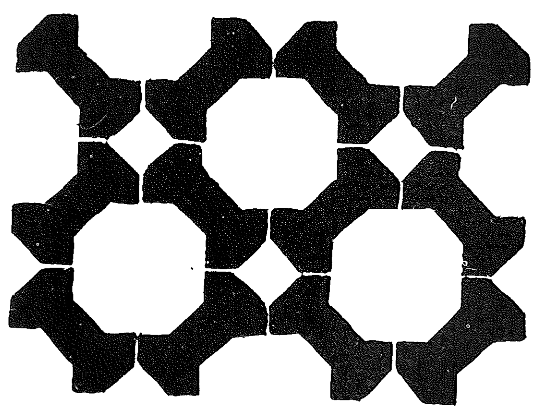
(56)

Dos de los mosaicos que podemos generar con el hueso:

(57)



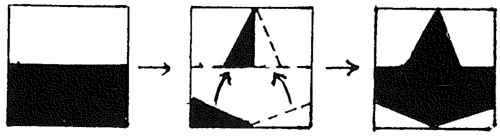
Traslaciones



Simetrías

Ya que estamos en la Alhambra, ¿por qué no intentarlo con otros diseños?.

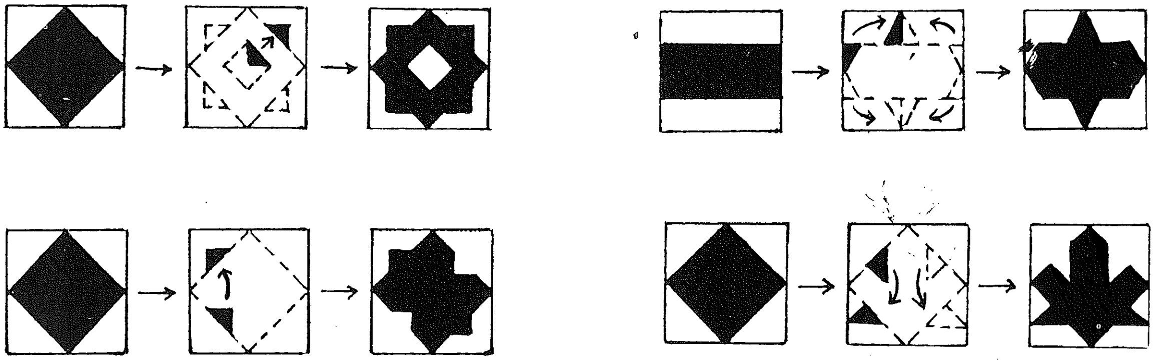
Una vez obtenido el hueso, no fué difícil conseguir el avión:



(58)

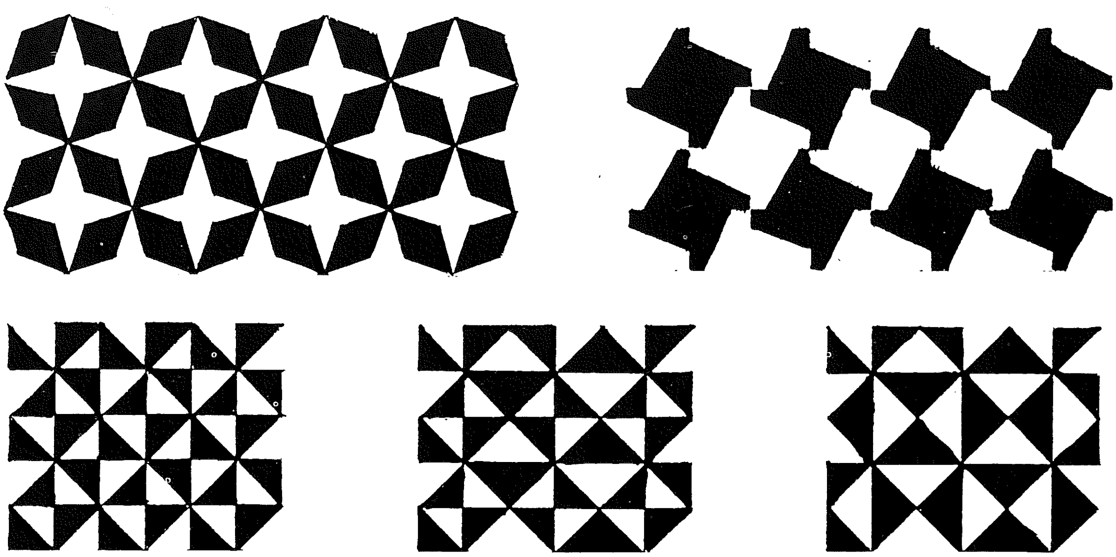
La creación de módulos resultó ser un campo fructífero que da lugar a diversas formas utilizadas por los árabes. Una pequeña muestra:

(59)



Los mosaicos generados por algunas figuras obtenidas en los apartados anteriores como el rombo, el trapecio o el triángulo también nos recuerdan los de la Alhambra:

(60)



Aquí se vislumbran algunos trazos de lo que podría ser el inicio de una nueva investigación.

Ampliaciones

Algunas ampliaciones al problema cuando los alumnos están interesados o para algunos que deseen ir más lejos.

Obtener una polígono de área equivalente a la mitad de un triángulo equilátero o un triángulo isósceles.

Construir polígonos cuya área sea la mitad del cuadrado con piezas del tangram chino.

Obtener una figura de área la mitad de un exágono o un círculo.

El paso del plano al espacio: obtener un poliedro cuyo volumen sea la mitad del cubo. Estudio de las secciones modulares del cubo.

Obtener un polígono que tenga por rea la cuarta parte de la del cuadrado.

Creación de mosaicos con algunas de las figuras obtenidas.

Conclusiones

Una investigación de este tipo puede plantear dificultades al profesor: «Todo esto está muy bien, pero yo tengo un programa que cumplir y no puedo perder tanto tiempo». Podemos responder a esta pregunta si analizamos cuáles son los conocimientos matemáticos implicados en el proceso relatado. Los alumnos:

Han utilizado la terminología geométrica y han enriquecido su vocabulario en la descripción de formas y figuras.
Han profundizado en conceptos como el de polígono, área o los movimientos (traslaciones, giros y simetrías) y los han relacionado.
Han estimado, medido y calculado longitudes y superficies.
Han consolidado destrezas como la utilización de fórmulas y la manipulación algebraica.
Han realizado construcciones geométricas.
Han utilizado propiedades geométricas como el teorema de Pitágoras.

Por otra parte, también hay que considerar como conocimientos a los procedimientos y estrategias que se utilizan para hacer matemáticas:

La búsqueda sistemática a la vez que imaginativa de soluciones a un problema.
La generalización a partir de casos particulares y la particularización al darse cuenta de que una solución engloba a muchas otras.
La realización de conjeturas, la búsqueda de contraejemplos para refutarlas.
La demostración utilizando argumentos geométricos y algebraicos.

Tras esta forma de proceder en el aula, el mejor logro ha residido en la actitud típicamente matemática con que el estudiante ha interpretado esta experiencia:

Han descrito y definido figuras obtenidas con sus propias palabras.
Han defendido sus soluciones ante sus compañeros.
Han tomado decisiones en el curso de su trabajo y han examinado las consecuencias de su elección.
Han tomado una vía de trabajo que han seguido hasta que ha dejado de ser interesante. En algunos casos han ideado un método, por ejemplo el de cuadriculación, y pronto lo han abandonado por resultar demasiado sencillo encaminándose

hacia otros procedimientos más interesantes y satisfactorios.
Han tenido la oportunidad de apreciar la simetría y la regularidad de las formas creadas.

Para acabar, una pregunta: ¿Puede ser esto una muestra (como habrá muchas otras) de aprendizaje significativo?.

Referencias Bibliográficas

ALONSO, F. y otros. (1987). Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90. Simposio de Valencia. (Mestral:Valencia).

CRAWFORT, D.. ¿Qué es un cuadrilátero?. En WALTER, M. (1988). pp. 9-12. (M.E.C.:Madrid)

FIELKER, D. (1987). Rompiendo las cadenas de Euclides. (M.E.C.: Madrid).

GARCIA CRUZ, J.A. (1986). Actividades de Geometría. En Apuntes de Educación. Naturaleza y Matemáticas. num. 20 pp 12-13 (Anaya: Madrid)

MORA, J. A. y PEREZ, P. (1987). Geometría. En Propuesta de D.C. de matemáticas en la Comunidad Valenciana. (Generalitat Valenciana).

PARKER, J.. Revisión del concepto de rea. En WALTER, M. (1988). pp. 23-31. (M.E.C.:Madrid)

RUIZ GARRIDO y PEREZ GOMEZ. (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. En revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra. pp 51-59.

SCHOENFELD, A.M. (1983). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En La Enseñanza de la Matemática a Debate. (M.E.C.: Madrid).

WALTER, M. (1988). Geometría. (M.E.C. Colección «Documentos y Propuestas de trabajo»: Madrid)

WALTERS, C. (1981). Matematicians at large. (A.T.M.)

Juan E. Doreste, 1 - Apartado, 442
Teléfono: 31 40 00 - Telefax: 31 43 00
35001 LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

5 junio 91 ("Dia del Medio Ambiente")

Estimados amigos y colegas:

quiero haceros una consulta técnica, para ver si, a través de la revista, alguno más experto aporta algunaluz sobre el problema.

Se trata de que hago en algunas clases un "concurso" de Cesta y puntos, por equipos y no sé si acierrto con la fórmula para pasar los puntos obtenidos a una nota. Al ser un problema de estadística o de cálculo de probabilidades, es más complejo. Hasta ahora, suponiendo que fuesen 6 equipos en la clase de 6-7 alumnos promedio, dábamos 6 vueltas, con preguntas hechas por los propios alumnos que eran mezcladas en una urna. Es decir, cada equipo tenía 6 preguntas directas, que eran valoradas a 10 puntos. Si falla, los rebotes irían decreciendo, desde 9 hasta 5 puntos si era el último equipo el acertante.

Y la fórmula empleada era:

$$\frac{\text{Puntos directos}}{6} \times \left[1 + \frac{\text{Puntos rebote}}{100}\right]$$

No os echeis las manos a la cabeza ni llameis a Bol, pues a veces, con aportaciones de los propios interesados hemos hecho algunas correcciones a la maldita fórmula. Pero me gustaría que se hablase de este problema, a ver si hay más atinadas soluciones.

Muchas gracias por vuestra colaboración,

José Ant. Morillas

Jose Antonio Morillas Brandy

Aplicaciones didácticas de la localización de errores matemáticos*

Mª Isabel Goicoechea
Esteban Induráin
Esperanza Minguillón

Resumen:

Planteamos este artículo con ánimo didáctico: Analizamos una serie de ejemplos en los cuáles un error matemático ha sido deliberadamente incluido. El alumno que intente detectar dónde está el error se ve forzado a revisar aquéllos conceptos ya aprendidos, pero quizá no consolidados. Creemos que está técnica de descubrimiento de errores servirá para elevar el nivel de rigor matemático del alumno.

1. Introduccion

Un conocido aforismo del juego del ajedrez, debido al gran maestro Tartakower, dice que «en ajedrez sólo se aprende de los errores» (véase [V-P]). De hecho, hay libros de "didáctica del ajedrez" que consisten en la contemplación de partidas en las cuales se han cometido errores, que, al ser puestos en evidencia al lector de un tal libro, ayudan al mejor conocimiento del juego por parte de éste, adquiriendo un mayor nivel.

Pues bien, creemos que esta misma idea didáctica es aplicable a la enseñanza universitaria de las matemáticas (a todos los niveles), en base a la inclusión (por ejemplo, en problemas de exámenes) de razonamientos matemáticos en los que un error ha sido cometido deliberadamente, y que el alumno debe localizar. La conclusión de un tal razonamiento puede ser absurda (por ejemplo, en las típicas «convincentes» demostraciones del hecho "2 = 1" a través de algún razonamiento matemático cuya falsedad no sea obvia). Quizá, la presentación de estas situaciones absurdas o paradójicas hacen que el alumno se vea más motivado a repasar los conceptos matemáticos que ha ido aprendiendo, ayudando a consolidarlos a un nivel mayor de precisión, rigor, y detalle. Nuestro objetivo es, por tanto, precisamente ése: la consolidación de conceptos clave, en todo su detalle, por parte del alumno.

2. Sobre errores típicos

Entre los errores típicos que suelen cometerse en los razonamientos matemáticos cabe distinguir entre los *errores "de operación"* y los *errores "de concepto"*. A los del primer tipo no se les suele dar, en principio, excesiva importancia, pensando que "todo matemático se equivoca alguna vez en las operaciones más sencillas". Los errores del segundo tipo son los que intervienen directamente en la adquisición de los conceptos matemáticos. Un error de concepto significa que algo no se ha captado del todo, o se ha captado mal.

Cabe señalar, no obstante, que errores que a primera vista se considerarían "de operaciones" acaban siendo errores de concepto en muchos

*Parte del contenido de este artículo fue expuesto en el Congreso "XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas", (Puerto de la Cruz, Tenerife, Junio 1989), en la sección correspondiente a "Didáctica e Historia de las matemáticas".

casos. Así se apunta en **[CIP]** , donde vemos el siguiente ejemplo .

EJEMPLO 1: Supongamos que un alumno tiene que derivar el cociente de dos funciones. En ese momento duda si "la fórmula" es "denominador por derivada de numerador , menos numerador por derivada de denominador, dividido todo por cuadrado de denominador", o bien es "numerador por derivada de dedominador , menos denominador por derivada de numerador , ... ". El alumno piensa : "¡No importa, todo lo más me equivoco en un signo, no creo que me bajen mucho la nota por eso !". Al razonar así, nuestro alumno olvida la interpretación del signo de la derivada (derivada positiva se corresponde con función creciente). Si aplica mal la regla de derivación a una función como $1/x$, obteniendo, por ese error, que su derivada es $+(1/x^2)$, no sólo ha cometido un error de operaciones, sino también de concepto, ya que la función $1/x$ es siempre decreciente, luego no puede tener derivada positiva.

Otro ejemplo típico en esta línea puede ser el "*despiste*" (que el alumno casi nunca considera "grave") consistente en dejarse de sumar la "constante de integración" en el cálculo de la primitiva de una función. Veamos cómo un tal error puede conducir a situaciones totalmente absurdas :

EJEMPLO 2 : (Véase **[NOR]**) Se desea calcular una integral tan inocente como $\int(dx/x)$. razonamos así : Por un lado, si pensamos que el numerador "dx" es la diferencial del denominador "x", la integral será el logaritmo del denominador "logx". Pero, si en la integral multiplicamos por 2 a numerador y denominador, tendremos $\int(2dx/2x)$, y $2dx = d(2x)$ sigue siendo la diferencial del denominador (en este caso "2x") con lo que nuestra integral será, también, log(2x).

Así, de la igualdad $\log x = \log(2x)$ se sigue $x = 2x$, y de aquí se sigue "1 = 2".

Otro tipo frecuente de error se produce cuando se razona "por analogía", pero dejándose llevar en exceso por la intuición, sin basar el razonamiento en algún hecho matemático bien conocido y consolidado. Veamos algún ejemplo :

EJEMPLO 3 : Nos disponemos a calcular $\int_{[0,1]} \cos x \, dx$. Razonamos así :
No importa qué valor tenga x : Por ejemplo, si x vale 1 , 2, , 3 , ... al ser cos 1 , cos2, cos 3 , ... sendas constantes, salen fuera de la integral. Así, la integral en [0, 1] de cos 1 vale cos 1 , la de cos2 vale cos2 , la de cos3 vale cos3 , ... Luego, por analogía, la integral pedida debe valer cos x.

EJEMPLO 4 : Observemos que $2^2 = 2 + 2$ (se suma dos veces). también $3^2 = 3 + 3 + 3$ (se suma tres veces) , y $4^2 = 4 + 4 + 4 + 4$ (se suma cuatro veces).
En general $x^2 = x + x + ... + x$ (se suma x veces) , luego derivando miembro a miembro en la anterior expresión tenemos que $2x = 1 + 1 + ... + 1$ (y aparecen "x" unos) . Así que $2x = x$, y , por tanto, $2 = 1$.

EJEMPLO 5 : (Este ejemplo lo tuvieron que "sufrir" alumnos de la Universidad de Zaragoza en un examen (23-enero-82) de la asignatura "Análisis Matemático V (Análisis Complejo)", entonces a cargo del Dr. D. José Garay de Pablo).

"Vamos a ver que los únicos números que existen son el cero y el uno, razonando con lo mucho que sabemos sobre números complejos : Sea z un número complejo no nulo, y sea w = Log z. Entonces se verifica $z = e^w = e^{2\pi i(w/2\pi i)} = (e^{2\pi i})^{w/2\pi i} = 1^{w/2\pi i} = 1$.

En consecuencia de lo que antecede afirmamos que todo número complejo no nulo es igual a la unidad. Luego dado un número complejo, o es

Cabe decir, en defensa del hecho de «olvidarse de alguna condición» , que, cuando se hace deliberadamente , a conciencia, puede dar fruto en la investigación matemática. Pensemos que un método muy usual consiste , en esencia, en relajar («olvidar») una condición de un teorema, para intentar obtener la misma conclusión (pero en condiciones más generales). Si este resultado más general no es ya cierto, se obtendrá un contraejemplo.

cero, o es uno, y así, no hay ningun número complejo (y por tanto, tampoco real) distinto de cero o de uno".

Otro tipo de error mucho más sutil, es todo aquél que aparezca en un razonamiento que parte de hipótesis válidas y llega a conclusiones válidas (pero por un camino falso) . Evidentemente, como todo parece correcto, el error es mucho más difícil de descubrir. Veamos un ejemplo, que también hubieron de «sufrir» alumnos de la Universidad de Zaragoza en un examen (5-feb-77) de la asignatura "Geometría I", entonces a cargo de D. Javier Otal Cinca :

EJEMPLO 6 : La desigualdad de Schwarz dice : "Si v y w son vectores libres, se tiene que $|vw| \leq |v|\ |w|$" . A continuación damos una demostración de este hecho: "Basta ver que $(vw)^2 \leq v^2 w^2$. Si v ó w son nulos, el resultado es evidente . Supongamos, pues, que ni v ni w son nulos. entonces v^2 , y w^2 son números reales positivos y existen sus raíces cuadradas $\sqrt{(v^2)}$ y $\sqrt{(w^2)}$. Para todo par s,t de números reales se tiene : $0 \leq (tv-sw)^2 = t^2v^2 + s^2w^2 -2tsvw$, luego $2tsvw \leq t^2v^2 + s^2w^2$. Tomando $t = \sqrt{(v^2)}$, $s = \sqrt{(w^2)}$ obtenemos que $2\sqrt{(v^2)}\sqrt{(w^2)}vw \leq 2v^2w^2$. Por tanto, simplificando, $vw \leq \sqrt{(v^2)}\sqrt{(w^2)}$, y así $(vw)^2 \leq v^2w^2$ La demostración es falsa. Localícese algún error.

(Digamos que hay un error, claro, en el último paso: No es cierto, en general, que al elevar dos cantidades al cuadrado se mantenga una desigualdad: por ejemplo, $-7 < 5$, pero $49 > 25$).

Otro tipo de error frecuente se produce al no ser cuidadoso con una notación que, según los casos, puede significar cosas distintas. Un ejemplo aparece en **[M-T]** , problema 41, pág. 186.

EJEMPLO 7: ¿Cuál es el fallo del siguiente razonamiento ?

"Supongamos que $w = f(x,y)$, y que $y = x^2$. Por la regla de la cadena $\partial w/\partial x = \partial w/\partial x \cdot \partial x/\partial x + \partial w/\partial y \cdot \partial y/\partial x = \partial w/\partial x + 2x\,\partial w/\partial y$. Así $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, luego $\partial w/\partial y = 0$. Pero, si por ejemplo es $w = f(x,y) = x + y$, resulta $dw/\partial y = 1$, así que $0 = 1$".

(Nótense los dos significados de $\partial w/\partial x$, antes y después de la sustitución $y = x^2$) .

Otro tipo de error frecuente aparece cuando el alumno *razona mecánicamente*, empleando "recetas" o "fórmulas" que son la panacea a la hora de resolver un problema o tipo de problemas concreto.

En una tal circunstancia, el alumno no quiere tener en cuenta que una fórmula por sí sola no sirve para nada, no dice nada, no es más que una sucesión de símbolos, igual que pudiera ser un galimatías como: "rguhFFS□B, IOEWio□ß\†□¥^□°dkgflk". *Las fórmulas sólo sirven cuando actúan sobre conceptos* para obtener y producir resultados.

Además, "*cada fórmula tiene su radio de acción*", esto es : ha de darse respuesta a cuándo y cómo la tal fórmula puede ser utilizada, dependiendo esto del contexto en el que estemos trabajando. No podemos "sacarnos una fórmula de la manga", cuando nos venga en gana, porque eso puede incluso no tener sentido. Veamos dos ejemplos a este respecto (el primero de los cuáles dedicamos a nuestros alumnos de Ciencias Económicas y Empresariales) y que consisten en "mezclar" dos "ingredientes" (o "fórmulas") cuyos radios de acción son "conjuntos disjuntos" (por ejemplo : capitalización a interés simple versus a interés compuesto ; movimiento uniforme versus uniformemente acelerado) .

EJEMPLO 8: "Teorema : Ninguna entidad bancaria nos paga jamás ningun interés".

"*Demostración*": El banco trabajará con interés simple y/o interés compuesto.

Sea C_0 el capital inicial que nosotros colocamos en el banco. Sea i el tanto unitario de interés. Sea Cn el capital que tendremos al cabo de n años. Veamos que, o bien i es cero (con lo que no nos pagan intereses) o bien $C_0 = C_n$ (con lo que, si al cabo de n años tenemos lo mismo que al empezar, tampoco nos han pagado intereses). En efecto : Apliquemos que $C_{n+1} = C_n + i\,C_0$ ("fórmula" del interés simple) y que $C_{n+1} = C_n + i\,C_n$ ("fórmula" del interés compuesto). Igualando resulta $i\,C_0 = iC_n$. Por tanto i es cero, o bien $C_0 = C_n$.

Por si el alumno no está aún convencido, todavía cabe proponerle otra "demostración" alternativa : Aplicamos ahora que $C_n = C_0\,(1 + ni)$ (interés simple), y también que $C_n = C_0(1+i)^n$ (interés compuesto). Igualando resulta que $C_0\,(1 + ni) = C_0(1+i)^n$.

Así, o bien $C_0 = 0$ (con lo que, seguro, no nos pagarán interés , pues significa que no pusimos dinero alguno en el banco), o bien $1 + ni = (1+i)^n$. Particularizando esto último para n=2 resulta que $(1+i)^2 = 1 + 2i$. Desarrollando el cuadrado obtendremos que $1 + 2i + i^2 = 1 + 2i$. Así, simplificando términos, es $i^2 = 0$, luego $i = 0$.

EJEMPLO 9: Un móvil cae libremente desde una altura h. Sea t el tiempo que tarda en caer. Como espacio es velocidad por tiempo, llamando v a la velocidad será $h = vt$. Además velocidad es aceleración por tiempo, luego $v = at$ (siendo "a" la aceleración gravitatoria), y así $h = a\,t^2$.

Por otra parte espacio es velocidad inicial (en nuestro caso cero) por tiempo, más la mitad de la aceleración por el cuadrado del tiempo. Así, resultará $h = (a/2)t^2$. Ahora, resulta un juego de niños concluir, igualando las dos expresiones de "h", que "2 = 1".

3. Comentarios sobre la literatura existente

No hemos encontrado suficiente literatura al respecto del aprovechamiento de errores para la enseñanza de las matemáticas. Un estudio pedagógico aparece en **[CIP]** , donde aparecen ideas interesantes, que rozan aspectos psicológicos del razonamiento de un alumno ante un problema. Los ejemplos de este texto son, tal vez, demasiado elementales.

Un excelente libro, con recopilación más que suficiente de ejemplos , en niveles que van desde el más sencillo hasta la más completa "paradoja en alta matemática" es **[NOR]** .

Dos buenos libros, pero quizá pensados a un nivel lúdico, propio de una matemática "recreativa", diseñada tal vez para aumentar el "equipaje" matemático de cualquier persona "curiosa" , son **[GAR]** , y **[BUN]**. Este último libro trabaja también con la filosofía de la lógica y el razonamiento matemáticos.

Un interesante libro sobre "contraejemplos", si bien a un nivel propio ya del profesor universitario, más que del alumno, es **[HAU]**.

Por último, digamos que en buenas colecciones de problemas resueltos de algun área de las matemáticas aparece siempre algun problema de "localizar el error". En este sentido, hemos observado que , en lo que respecta al Análisis Matemático, se juega en demasía con las "*paradojas del infinito*" (falacias provenientes de series divergentes u oscilantes, que se manejan, alegremente, como si fuesen "números" (o como si fuesen convergentes)). Quizá sería conveniente la búsqueda de ejemplos en otras áreas, no sólo en series. En este sentido, son interesantes libros como **[BUT]** (véase problema 4, pág. 200, o problema 16, pág. 207, sobre integrales impropias), o **[M-T]** (además del Ejemplo 5, véase la página 328 que da un "contraejemplo" (por supuesto, falso) al teorema de Fubini para integrales dobles, en base a la utilización de una función construída mediante una serie doble).

Referencias Bibliográficas

[BUN] BUNCH, B.H. : «Matemática Insólita». Reverté. Barcelona. 1987.
[BUT] BUTUZOV, B.F. (editor) : «Mathematical Analysis in questions and problems». Mir. Moscow. 1988.
[CIP] CIPRA, B. : «Erreures». Inter Editions. Paris. 1985.
[GAR] GARDNER, M. : «Paradojas». Labor. barcelona. 1986.
[HAU] HAUCHECORNE, B.: «Les contre-examples en mathématiques». Ellipses. Paris. 1988.
[M-T] MARSDEN, J.E. - TROMBA, A.J. : «Vector calculus». Freeman. New York. 1988.
[NOR] NORTHROP, E. : «Riddles in mathematics». Penguin books. Harmondsworth. Middlesex, U.K. 1963.
[V-P] VORONKOV, B. - PERSITS, B. : «Errores típicos». Colección Escaques. Martínez Roca. Barcelona. 1976.

La operación de sumar: el caso de los problemas verbales

Vicente Bermejo
Purificación Rodríguez

Resumen

El presente trabajo revisa algunos de los hallazgos más recientes en el ámbito de la resolución de los problemas verbales aditivos. A este respecto, se recoge una clasificación de los tipos de problemas y se analizan las variables explicativas de los diferentes niveles de ejecución; asimismo se presentan las principales estrategias de resolución y los errores más característicos. Por último, se hace mención de los modelos de simulación que se han desarrollado en este ámbito.

Introducción

La representación de los problemas verbales bajo forma de símbolos matemáticos constituye una meta central en el curriculum de las matemáticas. Sin embargo, los profesores constatan frecuentemente que los niños solucionan correctamente las tareas aditivas cuando se presentan bajo la forma de algoritmos, fracasando, no obstante, en esas mismas tareas cuando se formulan como problemas verbales. La explicación de estos hechos representa una de las mayores preocupaciones de la investigación actual, que pretende establecer los cimientos pertinentes de la aritmética elemental, a fin de facilitar la labor instructiva del profesorado y evitar en lo posible el alto porcentaje del fracaso escolar existente en este ámbito.

Desde esta perspectiva, los esfuerzos de los especialistas han seguido principalmente dos líneas de trabajo estrechamente relacionadas entre sí. Por una parte, se ha intentado dar respuesta al hecho de que los escolares resuelvan con mayor facilidad unos tipos de problemas aditivos con respecto a otros, analizando los diferentes factores que de un modo u otro podrían incrementar o disminuir el grado de dificultad de los mismos: sintaxis, nivel de vocabulario, número de palabras, etc. Por otra, se está prestando cada vez más interés al estudio de los procesos cognitivos que se originan durante la resolución de estos problemas verbales aditivos. Los resultados de estos esfuerzos se traducen en una gran cantidad de trabajos, sobre todo en Estados Unidos, que podríamos agrupar en dos grandes bloques temáticos: cuestiones relativas al análisis de los niveles de dificultad de los problemas verbales, estrategias de solución y naturaleza de los errores, y muy vinculados con estos temas, la elaboración de modelos de simulación.

En las breves páginas que siguen intentaremos ofrecer una panorámica global de los aspectos mencionados, centrándonos principalmente en torno al primer grupo temático, ya que la complejidad de los modelos de simulación requeriría un espacio físico más amplio, a fin de poder presentar una visión mínimamente satisfactoria. Para una mayor profundización sobre estas cuestiones, y sobre todas las aportadas en este artículo, remitimos al lector a nuestro libro (Bermejo, 1990).

1. Tipos de problemas verbales aditivos

Un primer paso, previo al intento de explicación del nivel de dificultad de los distintos problemas es su clasificación y tipificación. Atendiendo a las relaciones semánticas subyacentes a los problemas verbales, los autores suelen proponer cuatro categorías generales: problemas de cambio, de combinación, de comparación y de igualación (ver Riley, Greeno y Heller, 1983 para una revisión). Los problemas de cambio se caracterizan por la presencia de una condición inicial, sobre la que se efectua una acción implícita o explícita, produciéndose como resultado un incremento o decremento de esa situación inicial. Por su parte, tanto los problemas de combinación como los de comparación suponen relaciones estáticas. En los primeros se presentan dos conjuntos disjuntos, que pueden ser considerados aisladamente o como partes de un todo, sin que medie ningún tipo de acción. Los de comparación suponen igualmente la relación de dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. Por otra parte, tanto los problemas de cambio, como los de combinación y comparación se pueden distinguir tres subtipos en función de la ubicación de la incógnita: en uno de los sumandos o en el resultado. Por último, los problemas de igualación constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, puesto que hay una comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de esos subconjuntos para hacerlo igual al otro. En la Tabla 1 se encuentran ejemplos de cada tipo de problema.

Tabla 1: Ejemplos de cada una de las categorías de problemas verbales.

PROBLEMAS DE CAMBIO

1. Juan tiene 7 cromos. Carlos le da 5 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene ahora Juan?.
2. Juan tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos necesita para tener 16 3n total?.
3. Juan tenía algunos cromos. Carlos le da 6 cromos más. Ahora tiene 16 en total. ¿Cuántos tenía al principio?.

PROBLEMAS DE COMBINACION

1. Juan tiene 8 cromos y Carlos 4. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?.
2. Juan tiene 7 cromos. Carlos tiene también algunos cromos. Entre los dos tienen 14. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?.
3. Juan tiene algunos cromos y Carlos tiene 4. Entre los dos tienen 12 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan?.

PROBLEMAS DE COMPARACION

1. Juan tiene 7 cromos y Carlos tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan más que Carlos?.
2. Juan tiene 6 cromos. Carlos tiene 8 cromos más que Juan. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?.
3. Juan tiene 12 cromos. Tiene 5 cromos más que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?.

PROBLEMAS DE IGUALACION

1. Juan tiene 12 cromos, Carlos tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos le tienen que dar a Carlos para tener los mismos que Juan?.
2. Juan tiene 4 cromos. Si le dan 7 cromos tendrá los mismos que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?.
3. Juan tiene 13 cromos. Si a Carlos le dan 4 cromos tendrá los mismos que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?.

Por otro lado, el nivel de ejecución de los niños varía sistemáticamente dependiendo del tipo de problema planteado y dichas variaciones se explican generalmente en función de una serie de variables, que sumariamente mencionamos a continuación:

1) La estructura semántica: la mayoría de los trabajos (Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Bermejo y Rodríguez, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; etc.), coinciden en señalar que los problemas de cambio son los más fáciles seguidos de los de combinación y finalmente los de comparación. Además, una investigación realizada por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1987a) con niños de 2º de preescolar y 1º de EGB sobre problemas de combinación e igualación, encontramos que el nivel de ejecución era notoriamente inferior, sobre todo entre los preescolares, en los problemas de igualación, mientras que el porcentaje de éxito en los problemas de combinación era muy elevado en ambos grupos.

2) El lugar ocupado por la incógnita: se ha comprobado que en general el nivel de dificultad de los problemas aumenta cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Pero, la dificultad se incrementa aún más cuando la incógnita se sitúa en el conjunto de partida. Por último, no se observan diferencias importantes entre los problemas cuando ésta se halla en el resultado. Así, por ejemplo, el nivel de dificultad de los problemas de comparación aumenta considerablemente cuando la incógnita aparece en el conjunto de partida, según los resultados obtenidos en nuestra investigación con problemas de comparación (Bermejo y Rodríguez, 1990) en niños de 2º y 3º de EGB.

3) La formulación verbal del problema: esto es, el orden de presentación de la información en el problema así como el grado de explicitación de las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, pueden influir en los procesos de resolución de los niños.

Además de los factores señalados, existen otros que podrían igualmente facilitar o dificultar la correcta ejecución de estas tareas sobre todo en el caso de los niños pequeños. Nos referimos a *la presencia de ayudas* y la *magnitud de los sumandos* (Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987a). El ajustado control de todos estos parámetros en la programación curricular y en la enseñanza en el aula no sólo incidiría positivamente en la disminución de las altas tasas de fracaso escolar, sino que ayudaría a cambiar la actitud frecuentemente negativa de los niños hacia esta materia.

2. Estrategias de solución y errores infantiles

La observación detenida de las respuestas dadas por los niños ante los problemas verbales de adición nos permite diferenciar, entre otras, las siguientes estrategias propuestas por Carpenter y Moser (1983, 1984):

1) Estrategias de modelado directo: consisten en representar ambos conjuntos o cantidades propuestas en el problema mediante objetos físicos (o los dedos) y recontar después dichos objetos. Constituye un tipo de estrategias muy simple que los niños utilizan incluso antes de recibir instrucción formal (Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez 1987a, 1987b; Carpenter y Moser, 1984).

2) Estrategias de conteo: son las estrategias de contar sin modelos (objetos físicos). Son similares a las estrategias del apartado anterior, pero se diferencian de ellas en que el niño no usa objetos o dedos para respresentar los sumandos. Aunque no precisa representar previamente los conjuntos, sí necesita utilizar algún procedimiento que le permita registrar el número de pasos efectuados al final del conteo, como por ejemplo los dedos (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987b; Fuson, 1988) o bien cuando el conteo se produce mentalmente ciertos ritmos físicos, como movimientos de cabeza. Dentro de este grupo se incluyen también las estrategias de contar a partir del primer sumando y contar a partir del sumando mayor.

3) Estrategias de hechos numéricos: incluyen la memorización y las reglas. En la primera, el hecho numérico se recupera inmediatamente de la memoria a largo plazo sin conteo aparente. Las reglas se refieren a procedimientos en los que el niño compone y descompone los números para hallar la suma total o resultado del problema.

Además de los tipos de estrategias recogidos, los autores prestan cada vez más atención a otros tres aspectos fundamentales relacionados con ellos: su evolución con la edad, los mecanismos de transición entre ellas y los procesos implicados en la elección del tipo de estrategia. Para una revisión más detallada remitimos al lector al volumen antes citado (Bermejo, 1990).

En cuanto a los *Errores*, se suelen presentar dos tipos: de *ejecución* y de *representación*. Los primeros se originan cuando el niño elige correctamente la operación aritmética correspondiente, pero fracasa a la hora de ejecutarla. Los segundos surgen a causa de una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (De Corte y Verschaffel, 1985). Suelen presentarse en tres categorías fundamentales: repetir una de las cantidades propuestas en el problema, seleccionar una operación inadecuada e inventar la respuesta. Respecto al primer tipo, puede observarse con frecuencia en todas las categorías de problemas. Un ejemplo de ello lo tenemos en los problemas de cambio cuando los niños se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y de cambio separadamente, cometiendo los consiguientes errores (Riley et al., 1983). En relación con la selección de una operación inadecuada aparece cuando el niño aplica la forma canónica A + B = ? a problemas cuya incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Este error puede tener tres causas: 1) dificultad para concebir el significado de la indefinición de uno de los sumandos ("algunos"); 2) que los niños no tomen en consideración la información temporal contenida en el texto; y 3) que no comprendan la proposición comparativa que determina el otro sumando (Bermejo y Rodríguez, 1990). Por último, en algunas ocasiones los niños inventan la respuesta, como ocurre frecuentemente cuando están cansados o no comprenden en absoluto el problema planteado.

3. Modelos de simulación

Los modelos teóricos intentan ofrecer hipótesis plausibles sobre las estructuras cognitivas subyacentes en la resolución de los problemas verbales (Briars y Larkin, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985; Riley et al., 1983). Todos ellos insisten en que las dificultades que presentan los niños se deben a la construcción inadecuada de la representación inicial del problema planteado (Bermejo y Lago, 1987). Así, los modelos de Riley et al. (1983) y Briars y Larkin (1984) asumen que la solución de los problemas verbales depende del conocimiento conceptual que conduce a la selección apropiada de un esquema de acción para la solución. Por otro lado, aportan datos sobre la dificultad de las diferentes clases de problemas y proporciona hipótesis acerca de los procesos de representación que los niños construyen cuando solucionan problemas verbales, así como las inferencias que hacen de las operaciones que ejecutan sobre los conjuntos.

De Corte y Verschaffel (1985) proponen un modelo en el que se insiste en la importancia del procesamiento semántico. Consta de cinco fases: (1) representación global del problema; (2) selección de una operación aritmética formal o una estrategia informal de conteo para encontrar el elemento desconocido; (3) ejecución de la operación o de la estrategia informal; (4) reactivación de la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento desconocido por el resultado de su ejecución; y (5) verificación de la solución. En la primera fase dos esquemas cumplen un papel esencial: los semánticos que representan el conocimiento del niño sobre las relaciones subyacentes en los problemas verbales; y el «esquema de las palabras del problema» (Wordd Problem Schema, WIPS), que hace referencia a su conocimiento sobre la estructura, el papel, y la intención del problema. Los distintos modelos son sólo aproximaciones teóricas sobre los procesos cognitivos subyacentes en la resolución de los problemas.

4. Conclusiones

A pesar de la concisión seguida a lo largo de este artículo, resulta evidente la existencia de un gran cúmulo de trabajos y hallazgos (algunos realizados con poblaciones de nuestro país) sobre los procesos, procedimientos y demás circunstancias que rodean e inciden en la comprensión de la operación de sumar. Parece obvio, que las implicaciones de tales trabajos deben tener una clara repercusión en las prácticas cotidianas de enseñar la adición. Por lo tanto, es una tarea necesaria y urgente tratar de acercar el ámbito de la investigación a la programación, así como a la gestación de materiales y procedimientos educativos que faciliten el aprendizaje de los contenidos matemáticos en el aula. Desde esta óptica, hemos señalado los principales factores que inciden de un modo u otro en la dificultad de los problemas verbales aditivos. Igualmente hemos analizado tanto las estrategias que los niños utilizan habitualmente para solucionar estas tareas en función de la edad y el tipo de problema planteado, como los tipos de errores más frecuentes que suelen cometer los niños. Por último, hemos revisado brevemente algunos de los modelos teóricos más significativos, que pueden ser de gran ayuda para el educador ya que sugieren los procesos cognitivos que el aprendiz pone en marcha cuando soluciona este tipo de problemas.

Referencias Bibliográficas

Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for singledigit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 141-157.

Baroody, A. J. y Ginsburg, H. (1986). The relationships betweeninital meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knoledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas.* Barcelona: Paidós.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1987). El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. *Psicólogos. Papeles del Colegio*, 6, 35-47.

Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988). La adquisición de la adición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos. En A. Alvarez (Comp.), *Psicología y educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica* (pp. 321-329). Madrid: MEC y Visor.

Bermejo, V. y Rodriguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. *Psiquis*, 3, 21-30.

Bermejo, V. y Rodriguez, P. (1988). La genèse de l'opération d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education, Número Special*, 75-76.

Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas, 8*, 23-40.

Briars, D. y Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction, 1*, 245-296.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.

Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*, 179-202.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1984). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 4*, 3-21.

De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. Journal for Research in Mathematics Education, 18, 363-381.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number.* Nueva York: Springer-Verlag.

Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.

Riley, M. S.; Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 135-196). Nueva York: Academic Press.

Contribución

Francisco Hernán

Era el día 3 de mayo; justamente ayer había comenzado el plazo para la declaración de la renta, cuando por correo me llega una carta del Ayuntamiento en la que se me comunica el importe de la contribución urbana. La carta dice así:

"El importe del recibo, así como los datos de su domiciliación son:
IMPORTE: 24.249 PTS
ENTIDAD: Caja de Ahorros...
SUCURSAL: Urbana...
NUM. CUENTA: 11...
La cantidad que deberá pagar es la misma que en 1990 actualizada en un cinco por cien según indica la Ley de Presupuestos Generales del Estado para 1991".

Al leerla dos veces me percaté de que lo que me pedían que pagase era del año actual, el 91. Pero la declaración de la renta que tengo que hacer ahora es la del año anterior, el 90. Bueno, me dije, por lo menos no tengo que buscar el papel del año pasado; puedo calcular fácilmente la cantidad correspondiente.

Pero una carta como esta la ha enviado el Ayuntamiento a todos mis convecinos, ¿qué harán los que no encuentren el papel del año anterior? Ya está, mañana se lo propondré a mis alumnos.

Y así lo hice, se lo pregunté a dos grupos de alumnos de 2º y a un grupo de alumnos de COU de ciencias.

Como siempre estamos con la mosca detrás de la oreja, hice una apuesta mental conmigo mismo sobre el probable número de éxitos y sobre cuántos dirían que lo que tuve que pagar el año anterior fueron 23.036,55 pesetas.

Pues bien, aproximadamente el diez por ciento de los alumnos de 2º y el 37% de los alumnos de COU atinaron con la respuesta correcta.

Aquí acaba la historia... y empiezan las preguntas: ¿Es lícito concluir que en las clases de segundo se trabajó mal este asunto cuando se trató con bastante detalle hace cuatro meses? ¿Es que sólo hay en mis clases de segundo un diez por ciento de alumnos competentes? ¿Hay en mi clase de COU un 37% de alumnos competentes? ¿Es acertado suponer que los alumnos mejoran con el mero paso del tiempo? ¿O es más acertado pensar que la mejora se debe a una buena enseñanza? ¿Es económico hacer complicados exámenes de acceso a la Universidad cuando un problemilla de porcentajes autoriza a suspender en unos pocos minutos a más de la mitad de los futuros universitarios? ¿Se puede concluir que quienes no sepan resolver el problema en cuestión no vale la pena que vayan a la Universidad?

Ahora que ya ha terminado el curso, confieso (aunque no sé si debo, ni qué consecuencias pueda tener esta confesión para mi carrera profesional) que el número de alumnos que ha aprobado las matemáticas en junio ha sido el 80% del total en segundo, y dos tercios del total en COU.

Patrones de razonamiento proporcional en la resolución de tareas de ciencias

José Antonio Acevedo Díaz

Resumen

En este artículo se propone una tipología de patrones de razonamiento proporcional con aplicación general a tareas matemáticas y científicas. También se describen algunos ejemplos de las estrategias y procedimientos seguidos por los estudiantes en una tarea de proporcionalidad de Química. Asimismo, se hace una discusión de los principales resultados obtenidos a partir del análisis de diversos problemas de proporciones resueltos por estudiantes de Enseñanza Secundaria (1º y 2º de BUP, 14-17 años de edad). Finalmente, se sugieren brevemente ciertas implicaciones para la enseñanza de la noción de proporcionalidad.

El concepto de proporcionalidad

La compresión tardía de la noción de proporcionalidad ha sido explicada por Inhelder y Piaget (1955), considerando que, con anterioridad al dominio de las relaciones métricas cuantitativas y precisas que este concepto requiere, es necesaria una etapa de aproximaciones cualitativas en forma de compensaciones. Según Piaget, la compensación es más accesible que la proporcionalidad, ya que aquella se basa en relaciones cualitativas y lógicas mientras que las proporciones sólo adquieren un significado verificable experimentalmente a través de su cuantificación numérica. Así pues, el proceso evolutivo supone siempre una anticipación lógica de la proporcionalidad antes de llegar a establecerse métricamente, lo que ha sido confirmado por otros investigadores (Karplus et al., 1980; Noelting, 1980 a,b).

Ante un problema de razón simple con dos variables linealmente interdependientes, después de la aproximación más elemental que supone la estrategia cualitativa, el siguiente paso de la secuencia evolutiva es también consecuencia de lo anterior. En efecto, como las compensaciones pueden ser tanto aditivas como multiplicadas, no es de extrañar que los escolares tiendan a buscar una solución utilizando un patrón de razonamiento aditivo-sustractivo en vez de multiplicativo, es decir, a partir de la igualdad de diferencias aditivas.

Finalmente, antes de alcanzarse la estrategia multiplicativa, esto es, el producto cruzado entre razones equivalente ("regla de tres"), o bien el producto/cociente por un factor de equivalencia, todavía existe una aproximación que permite alcanzar algunos éxitos: la correspondencia mediante relaciones doble-mitad, procedimiento que presenta un cierto carácter iterativo. En resumen, de modo general podemos establecer cuatro estrategias básicas, las cuales constituyen una secuencia evolutiva de **patrones de razonamiento proporcional (PRP)** que, de menor a mayor nivel de elaboración, son los siguientes:

1. **Cualitativo**
2. **Aditivo-sustractivo**
3. **Doble-mitad**
4. **Multiplicativo**

Para concluir esta introducción señalaremos que el estudio del razonamiento proporcional ha tenido siempre una notable repercusión fuera de España en investigaciones sobre Psicología del aprendizaje, Epistemología genética y Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales. Los artículos son tan numerosos que es imposible dar aquí una referencia de los más importantes. No obstante, indicaremos que Tourniaire y Pulos (1985) han realizado una interesante revisión de la literatura sobre el tema que cubre hasta 1984, aunque centrada casi exclusivamente en publicaciones de los EE.UU., mientras que Vergnaud (1983), presenta una muestra de la tradición francesa. En nuestro país los trabajos son mucho más escasos y se han venido centrando preferentemente en las estrategias de comparación de proporciones y su aprendizaje escolar (Corral, 1986 y 1987; Pérez Echevarría, 1987; Pérez Echevarría et al., 1986). Nuestra contribución al tema (Acevedo, 1988 y 1989; Acevedo et al., 1987 a, b, 1988 a, b), se ha encaminado a establecer una tipología general aplicable a diferentes problemas de proporcionalidad, al conocimiento de la evolución de los PRP en el Bachillerato y al desarrollo de estrategias para su aprendizaje en dominios de la Física y la Química.

En este trabajo la finalidad principal es hacer reflexionar al profesorado sobre la complejidad conceptual de la noción de proporcionalidad, mostrándole ejemplos de cómo la tipología PRP propuesta anteriormente aparece en la resulución de tareas con diferentes contextos y características, haciendo hincapié en su incidencia en la Enseñanza Secundaria (1º y 2º BUP).

Metodología seguida

Para la investigación se seleccionaron 100 estudiantes que cursaban 1º BUP y otros 100 de 2º BUP, con igual número de alumnos y alumnas en cada curso, todos escolarizados en un Instituto de Bachillerato de Huelva. La muestra era representativa, en diversas características académicas y socioeconómicas, de una población mucho más amplia, de alrededor de un millar de estudiantes de EE.MM. de diversos Institutos onubenses, los cuales habían realizado una de las tareas: **"Alto-Corto"** (AC). Los/as 200 alumnos/as hicieron además otra tarea: **"Agua Salada"** (AS), con contenidos relacionados con la Química, mientras que aquellos/as de 2º BUP resolvieron también la tarea de la **"Balanza"** (BA), dentro de sus actividades normales de aula, con el objetivo de encontrar una ley general para el equilibrio mecánico de dicho instrumento físico. Las características principales de las dos primeras pruebas, ambas de proporcionalidad directa, se detallan más adelante por ser a las que nos referiremos preferentemente en este trabajo. También pueden encontrarse referencias a la tarea BA en otro lugar (Acevedo 1988).

El análisis cualitativo de las formas de resolver los distintos problemas y las explicaciones verbales y simbólicas permitió clasificar las respuestas según los PRP ya señalados, tabulándose después las frecuencias de los mismos para poder hacer comparaciones y establecer las conclusiones oportunas en base a los resultados obtenidos. Con tal fin se ha realizado un completo análisis estadístico mediante pruebas no-paramétricas **"Ji-cuadrado"** (χ^2) de distribución de frecuencias en tablas de contigencias, admitiendo como significativas solamente aquellas diferencias que no puedan ser atribuidas al azar con una probabilidad máxima de error del 5%, esto es, exigiendo como nivel mínimo de significación el 95% ($p \leq 0.05$).

Breve descripción de las tareas

1. La tarea "Alto-Corto"

Una de las proporciones matemáticas de interés viene dada por la métrica representada por la igualdad de dos razones numéricas. En tal caso puede plantearse el problema de hallar el cuarto componente de la equivalencia. La tarea AC (Karplus et al., 1977), cuya versión castellana en uno de sus modos de presentación ha sido publicada por Aguirre de Cárcer (1981 y 1985), es adecuada para estudiar los PRP. Esta tarea ha sido analizada en EE.UU., incluyendo el efecto que puede producir el método utilizado y el formato de presentación de la misma en las respuestas de los sujetos. Staver y Pascarella (1984), concluyeron que ninguno de los factores citados influye significativamente en los resultados encontrados, lo que garantiza una cierta validez.

Nosotros hemos utilizado la tarea, como en otras ocasiones (Acevedo et al., 1987 b y 1988 b), en forma de prueba de ensayo de papel y lápiz, con respuesta y explicación abierta, presentándola con un formato ilustrado, de manera que pueda ser administrada colectivamente en condiciones habituales de aula. En la misma, los escolares tienen que medir con clips encadenados, para lo que se les facilitó una cadenita con siete de ellos, la altura de un muñeco dibujado: **el señor Corto** (4 clips), cuyo valor es conocido en otra unidad (6 botones). Luego tienen que predecir en clips la altura de otra figura semejante: **el señor Largo**, que no está dibujado, sabiendo que mide 9 botones de altura.

2. La tarea "Agua Salada"

Como puede verse en el anexo, la tarea AS consiste en un conjunto de problemas sencillos de proporcionalidad lineal de primer grado, formalmente equivalentes al de la tarea AC. Se trata de averiguar los gramos de sal o el volumen de agua, según los casos, que hay que poner en un recipiente donde hay una determinada cantidad de agua/sal, respectivamente, con el objetivo de obtener una disolución salina de la misma concentración que otra cuyos datos se especifican en un dibujo. En la tarea se han combinado dos grupos de cuestiones del mismo tipo excepto por el hecho de que los volúmenes de líquido vengan dados por números pequeños o más grandes, por si este factor pudiera influir en la respuesta. Además en la primera de las situaciones planteadas, el problema 11, se han puesto los mismos números que en la tarea AC para poder confrontar los resultados directamente.

Ejemplos de respuestas

La inmensa mayoría de las respuestas dadas por los/as alumnos/as a las tareas de proporcionalidad citadas encajan perfectamente en la tipología PRP. Para ilustrar las estrategias utilizadas hemos seleccionado algunos ejemplos con las explicaciones y justificaciones que aportan los escolares.

En el caso del **patrón cualitativo** las estimaciones se hacen de forma intuitiva, a veces sin dar un resultado numérico. Por ejemplo, en el problema 12 de la tarea AS una respuesta de este tipo puede ser:

- "Algo menos de agua hasta conseguir la misma concentración".

En la cuestión 21 de la misma tarea recibimos otra, esta vez con un valor numérico:

- "Un poco más de sal, creo que 4 g., para que estén igual de saladas".

El **patrón aditivo-sustractivo** es muy típico entre las estrategias erróneas.
Así, para la cuestión 12, encontramos:

- "5 cl, ya que si hay 1g. menos de sal en C que en A y ponemos también 1 cl. menos de agua en C la concentración será la misma en los dos vasos".

O en el problema 21:

- "5 g. Porque el tubo E tiene 2 ml. más de agua, luego por lógica hay que poner 2 g. más de sal que en D para que la proporción sea la misma".

Conviene destacar el hecho de que en ambas respuestas se hacen sumas/diferencias indistintamente con unidades homogéneas y heterogéneas, pasando esta incongruencia totalmente inadvertida en este modo de razonamiento.

La **correspondencia doble-mitad** es otro de los patrones identificados, que podemos considerar como de transición, tanto por su carácter iterativo como porque no siempre permite llegar a un resultado correcto, según puede observarse en las dos siguientes explicaciones correspondientes a la cuestión 12:

- "En C hay 1g. menos de sal. Como en A hay 6 cl. cada 4 g., en C tengo la mitad de sal más la mitad de esta cantidad. Entonces habrá que poner de agua 3cl. + 1.5 cl. = 4.5 cl.".
- "4 cl. En C hay la mitad de la sal de A más uno, luego tengo que poner la mitad de agua que en A más uno".

Mientras que el primer razonamiento conduce a una solución correcta y está bastante próximo a la proporcionalidad multiplicativa, salvo por su carácter iterativo, en el segundo aparece mezclada la correspondencia doble-mital con las características erróneas del patrón aditivo. Podría parecer gratuito, entonces, incluir ambos ejemplos en el mismo PRP, pero hemos comprobado frecuentemente cómo el uso de este tipo de estrategia conlleva al mismo sujeto a dar un resultado correcto o a equivocarse, según el problema con el que se enfrente.

Por último, el **patrón multiplicativo** incluye aquellas estrategias generales de cálculo que permiten resolver correctamente las tareas propuestas, tales como el producto cruzado entre razones equivalentes, conocida popularmente como "regla de tres", o bien la determinación de un factor de equivalencia entre dos de las variables, o de las unidades, por el que multiplicar/dividir el otro dato del problema. Así, en la cuestión 21 encontramos las siguientes justificaciones:

- "En D hay 4 ml. por cada gramo de sal. Si divido los 14 ml. de agua por 4 me saldrán los gramos de sal que tiene que haber en E para que esté igual de salado. La respuesta es 3.5 g.".
- "Para que tengan la misma concentración ambas disoluciones tiene que haber 0.25 g. de sal por cada ml. de agua en cada uno de los tubos. Multiplicando el volumen de agua de E (14 ml.) por esa cantidad obtengo 3.5 g. que es la solución".

Resultados y análisis estadístico de los datos

Tanto en la descripción de los resultados que sigue, como en el posterior resumen del análisis estadístico efectuado, nos referimos, siempre que no se indique lo contrario, a los datos obtenidos respecto al total de respuestas a los cinco problemas de proporcionalidad directa, el de la tarea AC y los cuatro de la tarea AS.

Aunque en las respuestas analizadas hemos podido observar todos los PRP de la tipología, como se deduce de las tablas de datos, dos de ellos son, sin duda, los más frecuentes: el **multiplicativo** y el **aditivo-sustractivo**. Con referencia a ellos podemos indicar que:

- Dos de cada tres procedimientos se ajustan al patrón multiplicativo. En el caso de 2º BUP son casi cuatro de cada cinco, mientras que en 1º BUP se supera ampliamente la mitad.
- Una de cada seis estrategias corresponden al patrón aditivo-sustractivo, lo que supone casi los dos tercios de los procesos que conducen a resultados erróneos. Ente patrón se revela así como el modo de razonamiento inadecuado más importante en todos y cada uno de los problemas de proporcionalidad, tanto en 1º BUP, con una frecuencia que llega a cerca de la cuarta parte de las respuestas dadas, como en 2º BUP, donde aún aparece en algo más de la décima parte de los procedimientos puestos en juego.

Sería muy prolijo exponer aquí todos los resultados derivados del exhaustivo análisis estadístico realizado, por lo que nos limitaremos a reflejar lo más importante que se colige del mismo.

Por otra parte, al considerar conjuntamente los cinco problemas de observan diferencias significativas ($p < 0.02$), entre los mismos, que deben ser precisadas mediante confrontaciones entre cada dos cuestiones por separado. En tal caso, el problema de la tarea AC resulta más fácil que las cuestiones 21 y 22 de AS (en cada comparación $p < 0.01$), pero nohay diferencias relevantes con los problemas 11 y 12 de la misma tarea. Tampoco se encuentran diferencias estadísticamente significativas al cotejar entre sí los distintos problemas de la tarea AS, con excepción de la comparación entre las cuestiones 11 y 21, apareciendo la primera como más sencilla que la segunda ($p < 0.01$).

Por otra parte, la confrontación por cursos de los procedimientos de resolución utilizados globalmente revela una importante diferencia ($p < 0.001$), en los PRP favorable a los estudiantes de 2º BUP frente a los de 1º BUP. Un análisis pormenorizado permite comprobar que las diferencias se dan con la significación indicada ($p < 0.001$), en cada una de las cuestiones de la tarea AS, excepto en la 11, donde la probabilidad de error es algo mayor, pero significativa aún ($p < 0.05$).
En cambio, para el problema de la tarea AC, aunque los resultados parecen algo mejores en 2º BUP, la diferencia no es estadísticamente significativa ($p > 0.10$).

Finalmente, merece mención aparte la comparación de los resultados entre las tareas de proporcionalidad directa y la de proporcionalidad inversa (BA). Según se desprende de las frecuencias mostradas en la tabla 1, las diferencias son tan grandes que no es precisa ninguna prueba estadística. En la tarea BA llama la atención, además del escaso porcentaje del patrón multiplicativo, alrededor de uno de cada diez, el enorme uso de la estrategia aditiva, que cubre más de los tres quintos de todos los procedimientos de resolución, así como la importancia de la cualitativa, que supone más de la quinta parte de los PRP.

- **Tabla 1**. Frecuencias relativas porcentuales, distribuidas por cursos, de los PRP en las tareas "Alto-Corto" (AC), "Agua Salada" (AS) y "Balanza" (BA).

PATRONES RP	1º (AC)	1º (AS)	2º (AC)	2º (AS)	2º (BA)
Multiplicativo	66	53	78	78	9
Doble-mitad	11	12	7	3	2
Aditivo-sustractivo	17	24	13	10	63
Cualitativo	4	6	2	6	22
Otros/Sin respuesta	2	5	0	3	4

- **Tabla 2**. Frecuencias relativas porcentuales de los PRP correspondientes a los problemas de las tareas "Alto-Corto" (AC) y "Agua Salada" (11, 12, 21 y 22). Se añade el promedio total (PT).

PATRONES RP	(AC)	(11)	(12)	(21)	(22)	(PT)
Multiplicativo	72	67	68	65	61	66.7
Doble-mitad	9	12	6	4	8	7.8
Aditivo-sustractivo	15	15	17	19	18	16.8
Cualitativo	3	4	5	6	8	5.1
Otros/Sin respuesta	1	2	4	6	5	3.6

Algunas conclusiones para la reflexión

Se ha señalado repetidas veces que no resulta fácil la generalización de la noción de proporcionalidad a situaciones con distintos contextos y características diversas (Tourniaire y Pulos, 1985). En este trabajo no hemos encontrado diferencias notables al confrontar las dos tareas de proporcionalidad directa cuando las cantidades puestas en juego son las mismas. Tampoco ha resultado muy clara la influencia de números mayores o menores en los datos del problema si no varía el contenido del mismo. En cambio, la interacción de los dos factores, contexto y cantidades, produce una cierta regresión en los procedimientos hacia los PRP menos evolucionados.

Indiscutiblemente, las diferencias más acusadas se revelan entre los PRP usados en las tareas de proporcionalidad directa y en la de proporcionalidad inversa. Parece claro que la resolución de problemas de proporcionalidad inversa es más difícil, pero es bastante probable que también intervenga de una manera decisiva el contenido de la tarea BA, así como las expectativas inducidas en el desarrollo de la misma (Acevedo, 1988; Acevedo et al., 1988 a). De cualquier manera, la comparación de respuestas permite comprobar cómo los sujetos utilizan preferentemente los PRP más simples al enfrentarse a situaciones más complejas, aún cuando ante otras cuestiones menos complicadas hubieran empleado mayoritariamente estrategias más elaboradas, que son adecuadaas para una correcta resolución de las tareas.

La influencia del contexto del problema se hace notar también cuando advertimos una diferencia significativa a favor de los estudiantes de 2º BUP sobre los de 1º BUP, precisamente al confrontar entre ambos cursos los resultados obtenidos al resolver las cuestiones con un contenido químico, aunque éste sea tan poco especializado como el de la tarea AS. Así pues, si bien disponemos de una tipología evolutiva PRP que puede aplicarse de una manera bastante general a muy diferentes ámbitos, podemos indicar que existen tres factores, al menos, que pueden influir en la utilización de unos procedimientos u otros al abordar problemas de proporcionalidad: el que ésta sea direxta o inversa, el contenido de la tarea y, en menor medida, las cantidades que hay que manejar en las razones correspondientes. Además, los efectos parecen ser más acusados cuando se combinan algunas/todas las variables anteriores.

Creemos haber mostrado suficientamente que el aprendizaje de la proporcionalidad, cuya importancia ya hemos puesto de manifiesto en otras ocasiones (Acevedo, 1989), no resulta tan simple como quizás podría parecer desde un punto de vista más superficial. También pensamos que si los profesores conocen las estrategias de los estudiantes, así como las dificultades que éstos encuentran para usar los PRP correctos, empezarán a estar en mejores condiciones para intentar potenciar un aprendizaje más significativo, en donde se enseñe a los/as alumnos/as sobretodo a utilizar el concepto de proporcionalidad, además de a saber calcularla.

En resume, aunque la mayoría de los escolares de 1º/2º BUP parecen presentar una competencia inical aceptable en el razonamiento proporcional, se trata de mejorar su actuación, facultando sus habilidades para que puedan transferir su capacidad de resolución a contextos muy diversos. Ahora bien, para lograr ésto es preciso, sin duda, que se produzca previamente una reflexión crítica del profesor, que le permita cuestionar su activadad docente habitual e introducir en ella los cambios necesarios para mejorar la calidad de su enseñanza, facilitando así un buen aprendizaje y el desarrollo cognitivo de sus alumnos y alumnas.

Referencias Bibliográficas

ACEVEDO, J.A. (1988). Patrones de razonamiento proporcional en una tarea de Física. *Actas VI Jornadas de Estudio sobre la Investigación en la Escuela.* (Sevilla, Publicaciones de la Universidad de Sevilla), pp. 11-15.

ACEVEDO, J.A. (1989). Desarrollo cognitivo y Matemáticas. Un ejemplo: la evolución del razonamiento proporcional en BUP. *Epsilon (S.A.E.M. Thales)*, 13. pp. 51-57.

ACEVEDO, J.A. BOLIVAR, J.P., SÁNCHEZ-LAULHE, E. y TRUJILLO, M. (1987 a). Razonamiento proporcional múltiple: la tarea del "ARQUITECTO". *Actas V Jornadas de Estudio sobre la Investigación en la Escuela.* (Sevilla, Publicaciones de la Universidad de Sevilla), pp. 80-83.

ACEVEDO, J.A., BOLIVAR, J.P., SANCHEZ-LAULHE, E. y TRUJILLO, M. (1987 b). Razonamiento proporcional lineal de primer grado: la tarea "ALTO-CORTO". *Actas V Jornadas de Estudio sobre la Investigación en la Escuela.* (Sevilla, Publicaciones de la Universidad de Sevilla). pp. 84-86.

ACEVEDO, J.A., BOLIVAR, J.P., LÓPEZ-MOLINA, E.J. y TRUJILLO, M. (1988 a). ¿Qué hipótesis elaboran los adolescentes? La tarea de la balanza. *Actas I Jornadas sobre experiencias docentes.* (Pamplona, Departamento de Educación del Gobierno de Navarra). pp. 33-40.

ACEVEDO, J.A., BOLIVAR, J.P., LÓPEZ-MOLINA, E.J. y TRUJILLO, M. (1988 b). Tipologías de las respuestas de estudiantes de EE.MM. a dos tareas de razonamiento proporcional. *Revista de Psicología General y Aplicada* (pendiente de publicación).

AGUIRRE DE CARCER, I. (1981). La enseñanza de las ciencias y la teoría de Piaget (1971-1981). Resultados más importantes para el profesorado de BUP y del primer ciclo universitario. *Boletín del ICE de la Universidad Autónoma de Madrid, 4*, pp. 21-37.

AGUIRRE DE CARCER, I. (1985). *Los adolescentes y el aprendizaje de las Ciencias.* (Madrid, Publicaciones del M.E.C.).

CORRAL, A. (1986). La dificultad de enseñar el razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 35-36*, pp. 47-58.

CORRAL, A. (1987). El aprendizaje de la estrategia de comparación de proporciones. *Infancia y Aprendizaje, 37*, pp. 33-43.

INHELDER, B. y PIAGET, J. (1955). *De la logique de l'enfant a la logique de l'adolescent. Essais sur la construction des structures opératoires formalles.* (París, P.U.F.). Traducción castellana de M.T. Cevasco (1972): *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* (Buenos Aires, Paidós).

KARPLUS, R., KARPLUS, E., FORMISANO, M. y PAULSEN, A. (1977). Proportional reasoning and control of variables in seven countries. *Journal of Research in Science Teaching, 14* (5), pp. 411-417.

KARPLUS, R., PULOS, S. y STAGE, E.K. (1980). Early adolescent's structure of proportional reasoning. En R. Karplus (Ed.): *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* (Berkeley, California, Lawrence Hall of Science).

NOELTING, G. (1980 a). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part I: Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11* (2), 217-253.

NOELTING, G. (1980 b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part II: Problem-structural at successive stages; problem solving strategies and the mechanism of adaptative restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11* (3), 331-363.

PEREZ ECHEVARRIA, M.P. (1987). Relación entre estrategias de cálculo y tipo de problemas en la enseñanza de las matemáticas. En A. Alvarez (Comp.): *Actas de las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica.* (Madrid, Visor/M.E.C.), pp. 339-344.

PEREZ ECHEVARRIA, M.P., CARRETERO, M. y POZO, J.I. (1986). Los adolescentes ante las matemáticas. Proporción y probabilidad. *Cuadernos de Pedagogía, 133*, pp. 9-13.

STAVER, J.R. y PASCARELLA, E.T. (1984). The effect of method and format on the responses of subjects to a piagetian reasoning problem. *Journal of Research in Science Teaching, 21* (3), pp. 305-314.

TOURNIAIRE, S. y PULOS, S. (1985). Proportional reasoning a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16*, pp. 181-204.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.): *Acquisition of mathematics concepts and processes.* (New York, Academic Press), pp. 127-174.

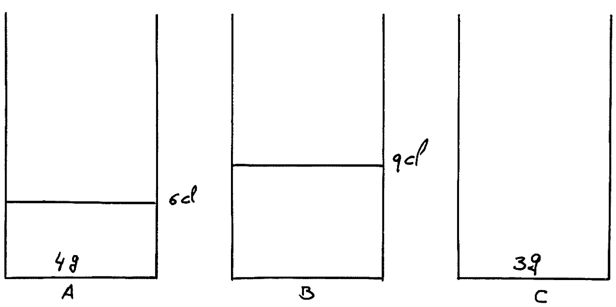
ANEXO

La tarea "Agua Salada"

Resuelve, en la hoja que se te da aparte, las cuestiones que te proponemos a continuación. Por favor, **explica detenidamente** con palabras, cálculos, símbolos o dibujos cómo averiguas la solución de cada problema.

1ª CUESTIÓN

En el dibujo A se representa un vaso que contiene sal completamente disulta en agua. En el dibujo B se muestra un vaso que sólo tiene la cantidad de agua que se indica. En el dibujo C hay un vaso con únicamente sal en la cantidad señalada.

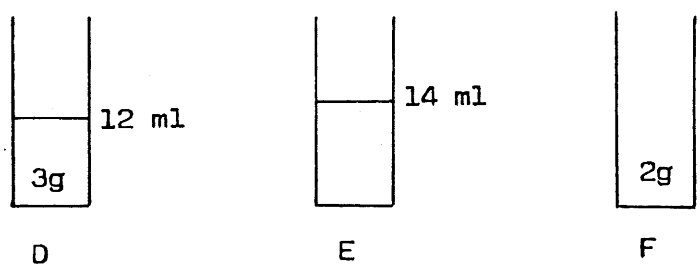


11.- ¿Qué cantidad de sal, en gramos, tienes que disolver en el vaso B para que el agua resulte **igual de salada** que la del recipiente A? Explícalo.

12.- ¿Qué cantidad de agua, en centilitros, tienes que poner para que al disolver la sal del vaso C el agua resulte **igual de salada** que la del recipiente A? Explícalo.

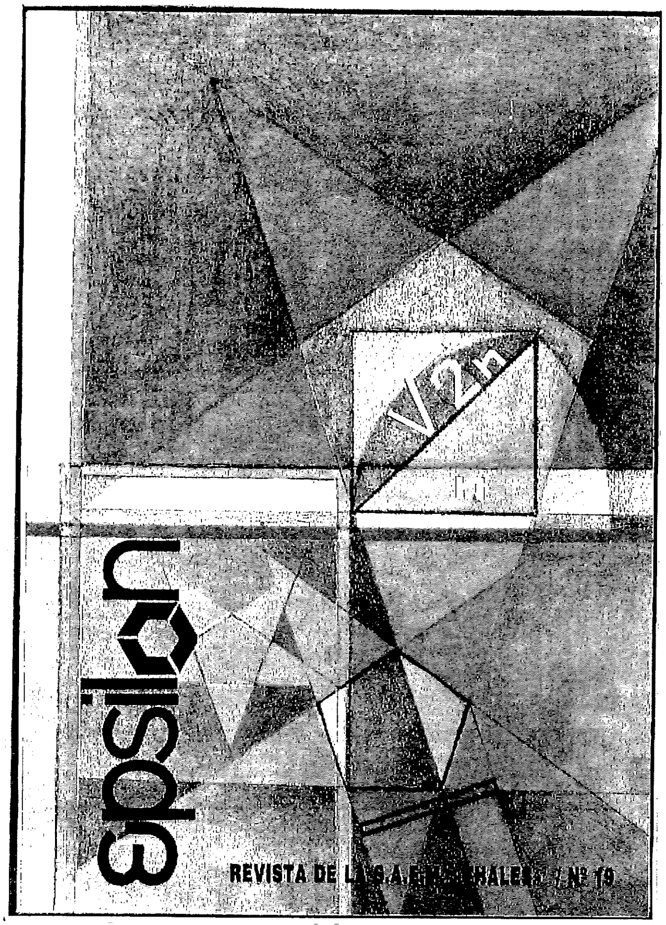
2ª CUESTIÓN

En el dibujo D tienes un tubo que contiene sal completamente disuelta en agua. En el dibujo E se muestra un tubo que únicamente tiene la cantidad de agua que se indica. En el dibujo F se representa un tubo que sólo tiene sal en la cantidad señalada.



21.- ¿Qué cantidad de sal, en gramos, tienes que disolver en el tubo E para que el agua resulte **igual de salada** que la del tubo F? Explícalo.

22.- ¿Qué cantidad de agua, en mililitros, tienes que poner para que al disolver la sal del tubo F el agua resulte igual de salada que la del tubo D? Explícalo.



índice

Una experiencia de evaluación formativa en las operaciones básicas

Pepe González Alba.
Manolo Jiménez Girón.
Paco Briales González
Grupo Albuqueria de Matemáticas

Las cuatro operaciones

Nuestro trabajo como profesores del ciclo superior de E.G.B. nos ha demostrado la existencia de lagunas y dificultades en las cuatro operaciones "básicas" así como que la presión del programa oficial nos lleva a otras operaciones y contenidos más complejos.

Esta situación actuó como detonante para la elaboración de una prueba que de forma sistemática nos acercara a esta problemática en la que alumnos que no tenían construido el concepto de adición trabajaban ecuaciones de segundo grado. La prueba original constó de veintiocho problemas, que luego dejamos reducida a sólo diez. La mayoría de los problemas están extraídos de los libros:

JAULIN-MANNONI, F. *Las cuatro operaciones básicas*. Ed. Visor. Madrid 1985.
MIALARET, G. *Las matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan*. Ed. Visor. Madrid 1984.

La prueba recoge problemas sobre tres de las operaciones básicas (suma, resta, y multiplicación), y cada uno de ellos tiene una dificultad específica.

La prueba

1. Hoy un dólar vale 158 pts. y ayer valía 159. ¿Cuánto ha bajado el dólar?

2. Pongo 500 gr. de mermelada en un tarro que pesa 160 gr. ¿Cuánto pesa en total?

3. Tenía 200 pts. Hay ahora 375 pts. ¿Cuánto se ha añadido?

4. Se ha comprado una camisa por 1.115 pts., que se ha vendido después a 2.335. ¿Cuánto se ha ganado?

5. Un autocar a la salida ha cargado 5 personas, en una primera parada 3 personas, en la segunda parada 6 personas, en la tercera parada 7 personas, en la última parada 2 personas. ¿Cuántas veces se ha parado el autocar?

6. Una granjera va al mercado y vende 3 pares de pollos al precio de 600 pts., el par. Con este dinero compra 2 cacerolas al precio de 170 pts., cada una. Sabiendo que tenía 300 pts., en su monedero al salir y que el viaje le ha costado 120 pts. ¿Con cuánto dinero vuelve a su casa?

7. Me gasto 13 pts., por la mañana y 26 por la tarde. ¿Cuánto he gastado?

8. Inventar un problema cuya pregunta sea: ¿Cuál es el beneficio de los 6 litros de aceite?

9. Una granjera va al mercado con 185 pts., en su bolso. Vende un conejo a 290 pts., un pollo a 310 y un pato. Compra 582 pts., de tela y paga 75 pts., por el billete del tren. Al final le quedan 423 pts. ¿Cuál es el precio del pato?

10. Si se sabe que un libro y un cuaderno cuestan juntos 35 pts. ¿Qué número hay que conocer para calcular el precio del cuaderno?

Las dificultades

Como hemos comentado ya, cada problema tiene una dificultad específica. Veamos cuales:

1. La secuencia temporal en que se dan los datos es la contraria de como han de ponerse para restar. (Hay niños que restarán 158 - 159=)

2. La mermelada y el tarro que la contiene tienen distinto valor psicológico para el niño (sobre todo para los pequeños), de ahí que no se les ocurra sumarlos.

3. El verbo evoca una suma: "añadir", cuando en realidad este problema se resuelve mediante la resta.

4. Se trata de un problema-tipo sobre precio de compra, precio de venta y beneficio.

5. Intenta averiguar en qué medida el niño lee atentamente el problema. Podemos achacar también los errores a la asociación de la idea de problema con números y operaciones, y no con la idea de búsqueda.

6. Es un problema de sumas y restas. La dificultad está en que necesita más de una operación, en lugar de una sóla como los anteriores.

7. El verbo "gastar" evoca una resta, y sin embargo este problema requiere una suma.

8. Se trata de un problema en el que hay que razonar a partir de la pregunta, en lugar de a partir de los datos. Es un planteamiento reversible en cuanto a problemas.

9. Es un problema de operaciones yuxtapuestas, parecido al seis.

10. Es un problema de búsqueda, más que un problema de números.

En las dificultades anteriores hay una serie de conceptos que creemos merecen una aclaración inicial:

- La reversibilidad: Este es un concepto omnipresente en matemáticas, y en todos los niveles educativos, desde Preescolar a la Universidad. Cada vez que ampliamos el campo numérico de naturales a enteros, y sucesivamente racionales, reales, complejos, tenemos que reflexionar sobre la conmutatividad; o con un ejemplo más simple: Una experiencia de reversibilidad para un niño pequeño puede ser descubrir que cinco "piedrecitas" puestas en fila, contadas de derecha a izquierda le da el mismo resultado que contadas de izquierda a derecha. Parece ser que Dienes, decidió ser matemático, el día que descubrió lo anterior.

- Los problemas como búsqueda. Para ilustrar este tema ofrecemos una cita que pensamos, no tiene pérdida:

> "Para muchos niños, la palabra problema está asociada a la idea de números y no a la idea de búsqueda; para ellos, resolverlo no es reflexionar, sino combinar números sin saber cómo ni por qué, tan sólo porque es una costumbre que hay que seguir lo mismo que se ponen mayúsculas en ciertas palabras o que no se escribe en el margen. El adulto pide operaciones: el niño las da, provocando reacciones de aprobación o de desaprobación, cuyas razones pueden serle impenetrables, pero que toma a menudo, la costumbre de prever según sea, la fisonomía del maestro" (1).

La experiencia

Esta prueba la aplicamos en primer lugar en nuestras aulas: C.P. "Huertas Viejas", de Coín, y C.P. "Remedios Rojo", de Monda (Málaga). Después de esta primera experiencia la hemos propuesto a otros compañeros en actividades de formación en las que hemos participado:

- En Marbella y Ojén: Ocho centros de E.G.B.
- En Pizarra: Un centro de E.G.B.
- En Málaga: Cuatro centros de E.G.B. y cuatro de EE.MM. (La mitad de estos últimos eran centros experimentales de Reforma)
- Escuelas rurales, en su mayoría unitarias, de la Comarca del Guadalhorce.

(1) JAULIN MANNONI, F. Las cuatro operaciones básicas. Editorial Visor. Madrid 1985. Página 53.

Estos niveles en los que se ha aplicado la prueba han sido: Ciclo Medio, Ciclo Superior y los dos primeros años de Enseñanzas Medias. La experiencia nos dice que en todo este tramo de edades la prueba se puede poner en marcha, y los resultados son significativos desde el punto de vista de la reflexión profesional.

Algunos resultados

Marbella

Nº del problema / Errores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total niños
3º curso	79	10	76	72	96	100	38	83	100	72	29
4º curso	25	12	27	29	34	93	29	57	90	91	89
5º curso	32	7	16	30	41	79	25	79	83	83	146
6º curso	30	5	7	11	29	63	23	49	71	68	244
7º curso	35	4	4	6	37	46	14	62	69	43	157
8º curso	14	3	5	5	18	36	5	33	43	11	174

Málaga

Nº del problema / Errores	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total niños
6º curso	6	0	3	0	6	54	3	30	60	42	
7º curso	13	0	13	33	42	36	17	54	83	70	
7º curso	3	3	15	24	27	69	9	48	69	30	
8º curso	0	9	0	10	43	32	10	40	56	22	
1º BUP	8	0	0	0	8	54	0	23	54	15	
1º BUP	0	0	0	7	21	71	0	43	43	43	
1º BUP	6	0	0	12	0	31	6	25	56	44	
1º BUPRE	6	6	0	6	44	29	0	46	37	19	
2º BUPRE	8	4	0	4	26	30	4	65	60	30	

Estas tablas nos dan los ERRORES cometidos por los alumnos en la relación de problemas, expresados en PORCENTAJES, desde tercero de E.G.B. a segundo de BUP.

Evaluación formativa en el área de matemáticas

La evaluación tiene dos dimensiones bien diferenciadas:
- Por una parte la evaluación de alumnos: enjuiciar el trabajo realizado, las actitudes que han mantenido, la adquisición de contenidos...
- Y otra dimensión habitualmente olvidada: la evaluación formativa, que podemos entenderla como AUTOEVALUACIÓN DEL PROFESOR:

- Implica una aptitud del profesor: ¿Tengo algo que aprender de mis alumnos? ¿Puedo hacerlo mejor?
- Significa reconocer que la evaluación formativa es la mejor fuente de aprendizaje profesional. Es difícil "aprender por ósmosis": no se aprende simplemente por estar en clase. Hay que provocar el aprendizaje.
- La evaluación formativa significa preguntarse por:
¿Tienen mis alumnos los conceptos previos consolidados?
¿Se adecuan los nuevos conceptos al nivel de mi aula?
¿Cuáles son los conceptos que están ofreciendo mayor dificultad?

Si los datos obtenidos de la prueba que proponemos los situamos en un cuadro como el siguiente:

Nombres	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Res. Ind.
Resultados por problemas											

Este cuadro nos ofrece dos tipos de información:
- Por una parte resultados individuales de los alumnos (Haciendo una lectura horizontal: los resultados globales por alumno quedarían reflejados en la última columna vertical).
- Por otra, los resultados correspondientes a cada problema (Haciendo una lectura vertical: los resultados globales de cada problema quedan reflejados en la última fila horizontal). Esta lectura nos da la situación de la clase en relación con la prueba y los conceptos incluidos en ella.

Valorando los resultados individuales desde un perspectiva de evaluación formativa, lo que menos debe preocuparnos es enjuiciar el trabajo de los alumnos, siendo la perspectiva alternativa preguntarse: ¿Cuáles son los alumnos que necesitan más ayuda?

Si lo que valoramos son los resultados de cada problema en el cuadro podemos observar cuáles son las lagunas más importantes en las cuatro operaciones que tiene mi clase y mis alumnos.
El primer apartado sugiere un campo de trabajo al profesor: atender más a los alumnos que más lo necesitan; el segundo ofrece la posibilidad de reflexionar sobre la adecuación a mis alumnos de mi proyecto de trabajo y sugiere las modificaciones que tengo que realizar en éste.

Vamos a extraer de los cuadros anteriores algunos resultados para reflexionar sobre ellos:

Nº del problema	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Errores 8º curso	14	3	5	5	18	36	5	33	43	11
Errores 2º BUPRE	8	4	0	4	26	30	4	65	60	30

Como vemos tres son los problemas con más dificultades en estos niveles:

problema 6
problema 8
problema 9

El seis y el nueve son los únicos problemas que necesitan más de una operación: son de los que necesitan operaciones yuxtapuestas para hallar la solución.

El ocho es de razonamiento a partir de la pregunta, en lugar de a partir de los datos.
Los números uno y cinco también han supuesto dificultad, aunque no como los anteriores. El problema uno necesita ordenar temporalmente los

datos y el cinco requiere una lectura atenta antes que una operación.

En segundo de BUP encontramos también un gran número de errores en el problema diez: es un problema de búsqueda.

Que un porcentaje tan elevado de alumnos de octavo y segundo de BUP no dominen aún estos problemas sugiere que muchos alumnos terminan la EGB y recorren el BUP sin tener consolidado el concepto de las cuatro operaciones.

Algunas reflexiones que podemos realizar a partir de estos resultados

- Una posible causa de estos resultados es considerar cada curso como un compartimento estanco: así lo que se debió trabajar en quinto no se hace en sexto, séptimo, octavo, BUP... Cada curso está definido por un programa que no se altera.

- Los niños de Ciclo Superior olvidan los contenidos de ciclos anteriores, así como los de EE.MM olvidan los de EGB.

- La secuencia "explicar un tema y después poner problemas a propósito de ese tema" está tan arraigado en el niño, que muchos intentaron resolver estos problemas por ecuaciones, ya que era el tema que estaban trabajando en ese momento.

- Habitualmente no enseñamos al niño a razonar, sino a "adivinar" operaciones, posiblemente porque se ha optado por una metodología que pone más énfasis en la enseñanza de los algoritmos y su automatización, olvidando el trabjo encaminado a la adquisición de conceptos. No pretendemos que los conceptos suplanten a los algoritmos, sino que caminen juntos.

- Con mucha frecuencia, iniciamos al niño en la realización de problemas tipo, planteando el problema siempre de la misma forma, en lugar de ofrecerle problemas presentados de de múltiples maneras. Prueba de esto es que cuando salimos de la forma-rutina, el niño se pierde.

(2) Ibid. Página 106.
(3) Ibid. Página 116.

Sugerencia de algunas soluciones

Es difícil el planteamiento de soluciones de forma sistemática. Reseñamos brevemente algunas, diferenciadas en dos grupos:

De carácter general:

- Relativizar los programas.
- Acercer la escuela al niño.
- Dejar un hueco diario en la clase de matemáticas para trabajar las cuatro operaciones.
- Plantear más situaciones problemáticas en lugar de operaciones sueltas carentes de sentido.
- Coordinar en departamento o seminario, para plantear soluciones individuales a lo sobrecargado de los libros de texto y a la orientación de estos.
- Trabajar en contacto con la familia, de manera que escuela y hogar converjan en las experiencias que se ofrecen a los niños, buscando aquellas de mayor riqueza.

De carácter concreto:

- Ofrecer la mayor variedad posible de problemas. Ejemplo:

	1	2	3
Pablo tiene	520 pts.	?	y
Santiago tiene	450 pts.	250 pts.	?
Tienen juntos	?	540 pts.	?
Pablo tiene de más	?	?	z (2)

- Plantear problemas que obliguen a seleccionar los datos adecuados a cada pregunta (así se aprende a discriminar qué datos nos sirven y a desechar, según la pregunta, los inútiles). Ejemplo:

Un libro pesa 350 gr.	¿Precio de 3 cuadernos?
Un cuaderno cuesta 2 pts.	¿Precio del libro y del cuaderno?
Un libro cuesta 5 pts.	¿Peso de 5 libros?
Grueso del libro 3 cm.	
Superficie del cuaderno: 300 cm^2	(3)

- Trabajar problemas inventando preguntas a partir de los datos. Ejemplo:

"Se sabe que una caja de café cuesta 3 pts., un paquete de azúcar 2 pts., una botella de aceite 7 pts., que hay 3 cajas de café, 5 kg. de azúcar, 6 botellas de aceite" (4)

A partir de estos datos el alumno tiene que plantear preguntas y contestarlas (A mayor cantidad de datos, más posibles preguntas). Algunas pueden ser:

- ¿Cuánto costarán los 5 kg. de azúcar?
- ¿Cuánto costarán 2 kg. de azúcar y 2 botellas de aceite?

- Ofrecer problemas de razonamiento a partir de la pregunta. (Sería lo contrario del epígrafe anterior: dar una relación de preguntas de un problema y pedir al alumno que invente los datos necesarios para resolverlos?.

- Plantear problemas que incluyan los conceptos de precio de compra, precio de venta y beneficio, por su utilidad en la vida diaria, pero cuidando de presentarlo en distintas formas:

Precio de compra + Beneficio = Precio de venta.
Precio de venta - Precio de compra = Beneficio.
Precio de venta - Beneficio = Precio de compra.

(4) Idem.

Consideraciones finales

- La conclusión básica es la necesidad de relativizar y flexibilizar los programas. Con un ejemplo: Prestando mucha atención a las ecuaciones de segundo grado, cuando no se dominan las sumas y las restas, el sistema educativo "instruye" ciudadanos familiarizados con la resolución de operaciones complejas en situaciones descontextua-lizadas y al mismo tiempo incapaces de resolver problemas sencillos.

- En nuestra vida profesional son muchos los momentos en los que hemos deseado cambiar metodológicamente intentando dar solución a los problemas que observamos en nuestras aulas, pero siempre nos ha faltado la decisión para hacerlo. Las razones de la indecisión son muchas: la presión de los padres, de los compañeros, de otros Centros, del nivel educativo siguiente... La realización de esta prueba **DA FUERZAS PARA CAMBIAR**, adquirimos el convencimiento de que es necesario, y encontramos una justificación ética muy fuerte frente a esa presión.

Si leyendo estas páginas crees que es imposible que en tu clase se den estas situaciones y estos resultados, te invitamos a que lo compruebes: te basta la duda razonable, el deseo de mejorar y media hora de tus alumnos.

¿Cuánto tendría que medir la caja para contener x veces más galletas?

José Mª Tirado Muñoz

Todos los que nos dedicamos a la escuela, podríamos elaborar un nutrido catálogo de ejemplos, que mostrarían cómo nuestros alumnos y alumnas, son capaces de adquirir determinados conceptos y aplicarlos a la resolución de problemas tipo; mientras que, paralelamente, tienen serias dificultades para resolver otras situaciones estrechamente relacionadas con los conceptos que, en teoría, dominan.

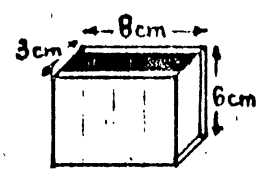
Este trabajo no se centra en las causas de tan extraña y contradictoria convivencia (amplia bibliografía existe al respecto), más bien es un modesto intento de dar respuesta a una necesidad aquí y ahora.

Durante el curso 89-90 trabajo con dos grupos de 8º y en el primer trimestre (en la línea de lo descrito arriba), compruebo que, conociendo las fórmulas para calcular volúmenes de prismas, cilindros y otros cuerpos tienen grandes dificultades para determinar qué se podría hacer para conseguir que una caja de galletas pudiera contener una cantidad doble, triple, cuádruple, ... de producto. Con el propósito de desmenuzar las variables de las que depende el volumen, en concreto de paralepípedos y cilindros (formas de envase muy corrientes en el mercado), planteo en clase las cuestiones que se detallan en el trabajo que presento.

No trascribo los razonamientos intermedios en favor de una mayor brevedad, limitándome a recoger las conclusiones a las que fuimos llegando que, en muchos casos, dieron pie a nuevas vías de investigación.

Queremos empaquetar cajitas de cerillas (fig. 1), en cajas de cartón (fig. 2), ¿podemos hacerlo colocando las cajitas de cerillas en cualquier posición?

Figura 1



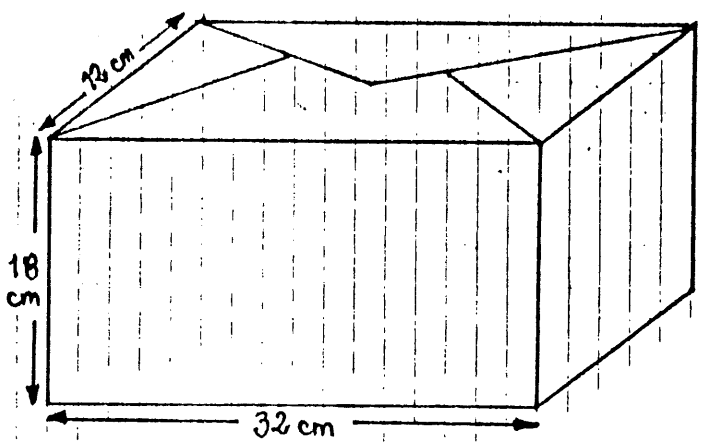


Figura 2

Las cajitas de cerillas pueden colocarse en 6 posiciones diferentes (fig. 3); pero sólo dos de ellas nos permiten llenar la caja de un modo exacto.

En la posición A caben:
- 4 a lo largo
- 4 a lo ancho
- 3 a lo alto.

En la posición C caben:
- 4 a lo largo
- 2 a lo ancho
- 6 a lo alto.

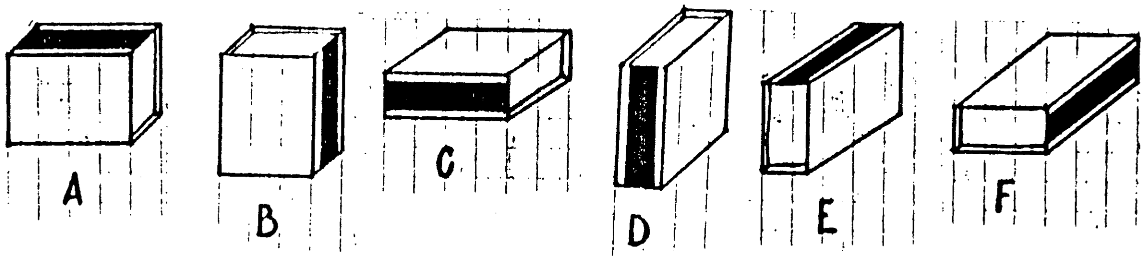


Figura 3

Podemos empaquetar el mismo número de cajitas en las dos posiciones y en ambos casos:

Si multiplicamos el número de cajitas que caben a lo largo por las que caben a lo ancho y a lo alto, obtenemos el total de cajitas que se pueden almacenar en una caja. Es lo mismo que multiplicar las cajitas que caben en una capa por el número de capas posibles.

Las posiciones B, D, E y F no permiten empaquetar porque dos de las tres dimensiones de la caja no son múltiplos de las correspondientes dimensiones de las cajitas de cerillas. Por ejemplo: en la posición B, no se puede almacenar un número exacto de cajitas ni a lo largo ni a lo alto, ya que 32 no es múltiplo de 6, ni 18 lo es de 8.

¿Habrá alguna caja que permita empaquetar las cajitas de cerillas en cualquiera de las 6 posiciones?.

Podríamos utilizar cualquier caja cuyas dimensiones fueran múltiplos comunes de las dimensiones de las cajitas de cerillas (8, 6 y 3 cm).
La más pequeña posible sería la de 24x24x48, 24x48x72, etc. (siguiendo el criterio descrito).

A partir de este momento sustituimos las cajitas de cerillas por centímetros cúbicos de madera.

¿Cuántos podría contener una caja como la de la fig. 4?

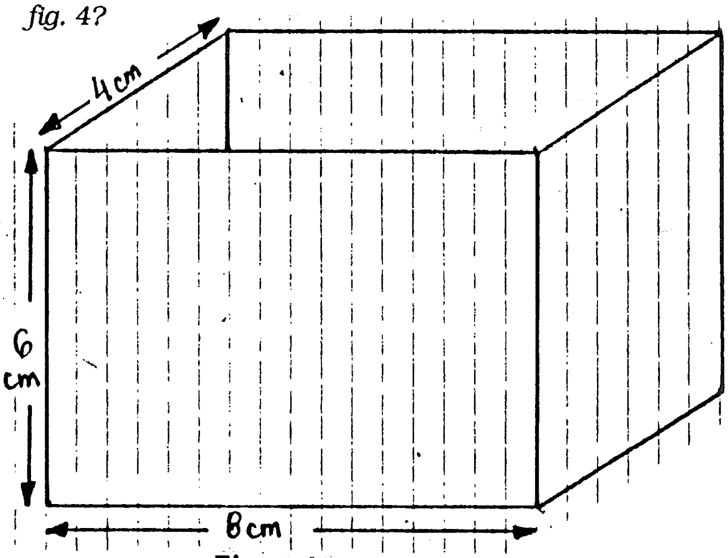


Figura 4

En la primera capa podemos colocar (8x4), cm^3.
Necesitamos 6 capas para llenar la caja, luego el total sería: (8x4x6) cm^3

¿Cuántos cm^3 podría contener la caja si duplicamos, triplicamos, ... una de sus dimensiones?.

Si duplicamos el largo:
En la primera copa podemos colocar (16x4) cm^3.

En las 6 capas: (16x4x6) cm^3 = 384 cm^3 (el doble que la caja de la fig. 4).

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDEN CONTENER
x 2	=	=	x 2
=	x 2	=	x 2
=	=	x 2	x 2
x 3	=	=	x 3
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... una de las tres dimensiones la caja, el número de cm^3 que puede contener, también se duplica, triplica, etc.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, etc., dos de sus tres dimensiones?

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x 2	x 2	=	x 4
=	x 2	x 2	x 4
x 3	=	x 2	x 6
=	x 2	x 3	x 6
x 3	=	x 3	x 9
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... dos de las tres dimensiones de la caja, el número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto de lo que han aumentado las dos dimensiones consideradas.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, ... las tres dimensiones de la caja?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x 2	x 2	x 2	x 8
x 2	x 2	x 3	x 12
x 2	x 3	x 3	x 18
x 3	x 3	x 3	x 27
...	...	...	...

Si duplicamos, triplicamos, ... las tres dimensiones de la caja, el número de cm^3 que puede contener se multiplica por el producto de lo que han aumentado las tres dimensiones.

Para aumentar, entonces, el número de cm^3 que puede contener la caja "n" veces, tendremos tantas posibilidades como trios de números seamos capaces de encontrar cuyo producto sea "n".

¿Qué cambios habría que realizar en las dimensiones de la caja para que el número de cm^3 que pueda contener sea 5 veces mayor que en la fig. 4?.

Siguiendo la regla general descrita en el párrafo anterior, se trata de encontrar trios de números (a, b y c), de tal forma que axbxc = 5.

Modificando una sola dimensión: 1 x 1 x 5
1 x 5 x 1
5 x 1 x 1.
Modificando dos dimensiones: 2 x 1 x 2.5
4 x 1 x 1.25
4 x 1 x 0.625 (1)

Modificando las tres dimensiones:

2 x 2 x 1.25	2 x 0.5 x 5	2 x 0.25 x 10
4 x 2 x 0.625	4 x 0.25 x 5	4 x 0.125 x 10
	8 x 0.25 x 2.5	2 x 0.125 x 20

Etc., etc.

(1) Descartamos valores de más de 3 cifras decimales y decimales periódicos.

De un trio inicial cuyo producto sea 5, podemos sacar otros con el mismo producto: duplicando un factor y reduciendo a la mitad otro, triplicando uno y reduciendo otro a la tercera parte, ...

Cuando uno de los factores es menor que 1, lo que realmente hacemos es reducirlo:

x 0.5 = : 2
x 0.25 = : 4
x 0.125 = : 8
x 0. 625 = x 625 y : 1.000 ó x 25 y : 40.

¿Qué ocurrirá si duplicamos, triplicamos, ... una o dos dimensiones y reducimos a la mitad, la tercera parte, ... otra u otras?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
x2	=	:2	=
x4	=	:2	x2
:2	x3	=	x1.5
...	...	...	...

En el tercer caso que se recoge en la tabla, el número de cm^3 que puede contener la caja se multiplica por 1.5 debido a que el ancho lo hemos triplicado y el largo lo hemos reducido a la mitad: x3 y :2 = x3 y x1/2 = 3/2 = 1.5.

La variación total del número de cm^3 que puede contener la caja se puede obtener multiplicando las variaciones habidas en las tres dimensiones (expresando las reduciones en forma de producto). Ejemplo:

LARGO	ANCHO	ALTO	Nº DE cm^3 QUE PUEDE CONTENER
xA	:B	xC	xA x 1/B x C

El volumen de una caja de forma de paralepípedo se puede calcular numéricamente multiplicando sus tres dimensiones, o bien, multiplicando el área de la base por la altura.

¿Servirá el mismo procedimiento para calcular el volumen de una caja cilíndrica?.

a) Medimos el volumen de varios cilindros macizos por inmersión.

Medimos los radios de las bases y las alturas y realizamos los cálculos numéricos.

Comparamos los resultado obtenidos por los dos procedimientos y observamos un desacuerdo de 3-5 cm^3 que no convence.

b) Tomamos un cilindro hueco, de plástico.

Medimos el radio de la base y la altura.

Despegamos una de las bases y lo llenamos de agua hasta el borde ciudadosamente.

Medimos los cm^3 de agua que hemos necesitado.

Realizamos el cálculo numérico del volumen y admitimos que la diferencia (1.5 cm^3) entre los resultados de los dos procedimientos, puede ser debida a la acumulación de sucesivos pequeños errores de medida difícilmente evitables.

Consideramos, por tanto, válido el mismo procedimiento para calcular el volumen de un paralelepípedo y de un cilindro:

ÁREA DE LA BASE x ALTURA

¿Qué ocurrirá con el volumen de un cilindro al variar el radio de la base y/o la altura?.

Tabla resumen de los cálculos realizados:

RADIO	ALTURA	VOLUMEN
=	x2	x2
=	x3	x3
...	...	...
x2	=	x4
x3	=	x9
x2	x2	x8
x2	x3	x12
...	...	...
x2	:2	x2
:2	x2	:2
x3	:2	x4.5
x3	:3	x3
...	...	...

Si la altura del cilindro se multiplica por n, el volumen se multiplica también por n.

Si el radio del cilindro se multiplica por n, el volumen se multiplica por n^2.

Si el radio se multiplica por n y la altura por m, el volumen se multiplica por: $n^2 \times m$.

Si el radio se multiplica por n y la altura se divide entre m, el volumen se multiplica por: $n^2 \times 1/m$.

Si el radio se divide entre n y la altura se multiplica por m, el volumen se multiplica por: $1/n^2 \times m$.

¿Cuál será, entonces, el procedimiento más viable para duplicar el volumen del aljibe de la fig. 5?.

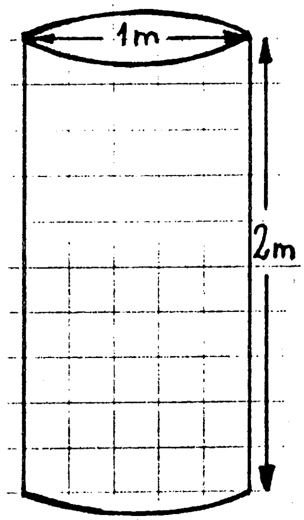


Figura 5

Lo más sencillo sería duplicar la altura ya que si quisiéramos hacerlo modificando el radio de la base, tendríamos que multiplicarlo por un número cuyo cuadrado fuera 2. Ese número sería $\sqrt{2}$, que es una expresión decimal con infinitas cifras no periódicas (número irracional).

El placer de las matemáticas

Peter Hilton(1)

Primero, deseo expresar el profundo aprecio al honor que me hacen al investirme con el grado de Doctor Honoris Causa; procuraré ser digno de su confianza durante el resto de mi carrera académica.

Ahora permítanme que me acerque al objeto de mi presencia aquí. Me gustaría comenzar recordando una ocasión de hace años cuando fui invitado para hablar a un grupo de profesores de matemáticas de enseñanza elemental y secundaria en la ciudad de Salt Lake, Utah. Elegí como tema "La Reforma del Curriculum y la Pedagogía de la Educación Matemática", y, en el curso de mis observaciones sobre las estrategias pedagógicas efectivas, expresé el punto de vista de que la educación matemática podía no tener éxito a menos que los estudiantes fuesen intrigados por las sutilezas de las matemáticas y considerasen el hacer matemáticas como divertido. En el curso de la discusión que siguió a mi exposición, como primera contribución, un profesor de enseñanza secundaria se opuso, diciendo que las matemáticas eran una materia seria y no deberían ser consideradas por los estudiantes, ni presentadas por el profesor, como una diversión.

Mantuve entonces, muy discretamente por supuesto, y mantengo ahora que ese profesor estaba trabajando bajo la extendida pero equivocada creencia de que hay un conflicto fundamental entre el placer y la seriedad de las matemáticas. Esta es una falsa dicotomía, comparable en muchos aspectos entre otra notoriamente falsa entre matemática pura y aplicada.

Ciertamente la matemática es importante, de hecho, cada vez más importante. Ciertas áreas de conocimiento por ejemplo, la sociología, la psicología, la bioquímica, hasta ahora inmunes a toda influencia de las matemáticas excepto a las más rudimentarias, están ahora empleando técnicas e ideas matemáticas sofisticadas. Algunas partes de las matemáticas, hasta ahora indudablemente puras, -por ejemplo, la teoría clásica de invariantes, la teoría de campos finitos, la teoría de la homología-, se están aplicando ahora a problemas importantes del mundo contemporáneo. El omnipresente ordenador esta confiriendo prominencia -incluso a veces trayendo a un primer plano- a ciertos aspectos de las matemáticas actuales.

Sí, la matemática es enormemente importante en la sociedad moderna: sin embargo, tengo que admitir con total honestidad que su importancia no es la razón primordial por la cual los matemáticos con bastante entusiasmo y asiduidad practican su arte. Recuerdo a mi profesor y amigo, Henry Whitehead, el eminente topólogo británico, diciendo una vez en este sentido, *Nada me daría mayor placer que levantarme una mañana y que me dijeran que uno de mis teoremas había vencido la*

(1) N.R. Estas líneas son la traducción, hecha por Mª D. Iriarte Bustos, del discurso de investidura de *Doctor Honoris Causa* por la Universidad de Barcelona de Peter Hilton. Dado el interés de su contenido, hemos creído oportuna su divulgación.

guerra a la obsolescencia. Aunque tendría que admitir que esa afirmación no tenían nada que ver con mis razones para intentar demostrar el teorema.

Nuestra razón para hacer matemáticas es que nos fascinan. Estimulan nuestra curiosidad intelectual y nuestra sensibilidad estética. Nos plantean preguntas significativas cuya respuesta, si tenemos la suficiente fortuna para obtener alguna, nos proporciona inmediatamente una gratificación espiritual que rápidamente produce una nueva ola de curiosidad, un nuevo conjunto de cuestiones.

Ahora hay un argumento posible: las matemáticas nos fascinan porque son importantes. Sin embargo, no creo que este argumento sea cierto si hablamos de importancia de las matemáticas en un sentido social o extrínseco. La conexión filosófica -si es que existe y es objeto de pensamiento, de estudio sostenido, no de charla especulativa, estaría seguramente, entre el atractivo intelectual de las matemáticas y su importancia intrínseca como área primaria de la actividad humana.

Por supuesto, creo profundamente que las matemáticas son importantes en este sentido. Si me permiten citar de nuevo a mi tutor H. Whitehead, lo recuerdo tratando de convencer a un joven colega que estaba meditando el seguir una carrera en la administración pública, en lugar de ser matemático en la Universidad (no tuvo éxito en convencer al joven aunque su argumentación me pareció extremadamente fuerte). Whitehead argüía que había, en la vida, unas cuantas cosas que merecía la pena hacer aún cuando uno no estuviese convencido de su importancia intrínseca, y recuerdo que citó la música, las matemáticas y hacer unos buenos zapatos. Claro, dijo Whitehead, "más vale ser un segunda clase en una ocupación de primera clase que un primera clase en una ocupación de segunda clase" [1].

Sin embargo, como ya he indicado, la importancia a la que se refieren hombres de estado, padres y educadores en lo que atañe a las matemáticas no es este tipo de importancia intrínseca, sino que se refieren a su papel en asegurar el prestigio y bienestar en la sociedad a la que ellos pertenecen. Indirectamente se refieren a la importancia de las matemáticas en la ciencia y en la ingeniería; es así como entienden, casi la mayoría de las personas, el papel de las matemáticas en la sociedad civilizada en todos sus aspectos.

La importancia de las matemáticas es, lo repito, generalmente entendida en el sentido social del término: en este sentido se explica por qué nos pagan por hacer matemáticas pero no por qué las hacemos y tampoco por qué nosotros, o al menos algunos de nosotros, parte del tiempo las hacemos con gusto. Para comprender ésto tenemos que entrar de lleno en la naturaleza de las matemáticas.

La matemática es pensamiento sistematizado, sustentado por un lenguaje y notación bien ajustados. Se caracteriza por el descubrimiento y creación de modelos y por el establecimiento de conexiones sutiles entre partes aparentemente muy dispares. No es un conjunto de distintas disciplinas sino una unidad que contiene un variado pero interrelacionado repertorio de conceptos y técnicas. No es un conjunto de hechos: y la comprensión matemática no puede ser probada por test de conocimiento y memoria.

"Intento escalar el Everest", decía Mallory, "porque está ahí". Análogamente, los matemáticos intentamos hacer matemática. La matemática existe porque nuestra experiencia del mundo exterior nos lleva a formular cuestiones que sólo pueden ser planteadas y respondidas en el entramado de la matemática. "La Naturaleza nos habla en el lenguaje de las matemáticas", decía el físico Richard Feyman. Pero la matemática existe también porque el modo natural de progreso matemático es que las cuestiones sugeridas por recientes avances constituyen el estímulo de nuevos avances. Así pues, como a menudo he defendido, las matemáticas pura y aplicada son semejantes tanto en su dinámica como en su propia práctica.

Los matemáticos tendríamos que ser enviadiados por el placer que las matemáticas nos proporcionan. Este goce se obtiene al conocer el gran poder de una idea matemática fértil y al sentir que tal idea

[1] Habría que añadir que Whithead, siendo un primera clase en una ocupación de primera clase no había tenido que enfrentarse a tal dilema.

ha sido expresada de un modo perfecto. A menudo, releyendo un pasaje de Shakespeare, nos parece que la idea subyacente no podría ser expresada mejor -*Mis pensamientos vuelan a lo alto, mis palabras permanecen abajo. Palabras sin pensamiento nunca llegarán al cielo*- y, menos frecuentemente aunque también con la misma seguridad, tenemos la sensación que un concepto matemático ha logrado la perfección y que un argumento matemático ha obtenido una trascendental belleza y elegancia.

Permítanme darle tres ejemplos de este tipo de elegancia en matemáticas. El primero es el famoso teorema de Euclides de que hay una infinidad de números primos. Para demostrar esto supondremos que los números primos se pueden enumerar: $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$

Sea $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$. Este N es mayor que cualquiera de los números primos y por tanto, no es primo. Debe ser divisible por algún número primo. Como al dividirlo por cualquier número primo deja siempre de resto 1, N debe ser primo. Así llegamos a una contradicción y el teorema de Euclides queda demostrado.

En segundo lugar vamos a considerar la afirmación de que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Partimos de la proposición contraria para obtener una contradicción.

Supóngase que a/b es una fracción irreducible e igual a $\sqrt{2}$, entonces

$$a^2/b^2 = 2;\ a^2 = 2b^2$$

de donde, a^2 es par, es decir $a = 2c$. Por tanto,

$$2b^2 = 4c^2\ ;\ b^2 = 2c^2.$$

Análogamente se concluye que b es par, pero si a y b son ambos pares la fracción a/b no es irreducible en contra de lo supuesto.

Como tercer ejemplo consideraremos la famosa historia acerca del joven Gauss. Parece que el maestro mantenía a la clase con la tediosa tarea de sumar todos lo números del 1 al 100. Gauss adujo que la suma podía ser representada:

$$\begin{array}{cccccccc} 1+ & 2+ & 3+ & \ldots+ & 48+ & 49+ & 50 \\ 100+ & 99+ & 98+ & \ldots+ & 53+ & 52+ & 51 \end{array}$$

Se tienen así 50 sumas verticales cuyo resultado es en todos los casos 101. Por tanto, la suma pedida es 101x50 = 5.050

En todos estos ejemplos el argumento revela una comprensión que obliga a creer necesariamente en la conclusión, nos muestra por qué la proposición considerada en cada caso es cierta.

Hay también elegancia en la argumentación. Uno no puede imaginar que se pueda acortar significativamente. Es austeramente sobria, sin carga superflua alguna.

Ciertamente los últimos dos métodos nos llevan a la convicción de la validez del método seguido y de la posibilidad de adaptarlo para probar otros casos. Realmente el argumento de Gauss es ahora, modificado ligeramente, el procedimiento standart para sumar cualquier progresión aritmética.

Como ya hemos sugerido, todos los ejemplos dados anteriormente nos dan la sensación de que entramos dentro de la estructura real del sistema matemático; yo sostengo que la motivación más fuerte para hacer matemáticas es el deseo de obtener tal sensación. A menudo exige un gran esfuerzo. A veces creemos haber fracasado y entonces, en un flash deslumbrante de inspiración después de muchas horas, quizás de muchos días de esfuerzos aparentemente inútiles, la esencia del problema se pone al descubierto y todo aparece maravilloso y magníficamente claro.

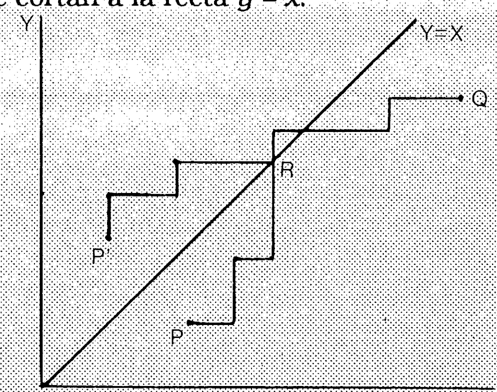
Aquí deseo puntualizar que tales sensaciones, aunque de naturaleza puramente experimental, me parecen de una gran importancia y constituyen la razón primordial para hacer que el estudio de las matemáticas sea una actividad fundamental en la vida de uno. Mantengo que la emoción que se deriva de estos extraños flashes de descubrimiento no depende de que uno mismo haya descubierto la idea original en cuestión -el redescubrimiento es una experiencia comparable con la emoción del descubrimiento original-. La experiencia que tengo de descubrimiento en otras ciencias, por supuesto de segunda mano, sugiere que los matemáticos son muy especiales en este aspecto. James Watson cuenta, en su libro **The double Helix**, el descubrimiento que realizó junto con Frances Crick acerca de la naturaleza del DNA, y sugiere que la motivación más fuerte, dentro de la competencia científica, para resolver estos enigmas era precisamente la urgencia de ser los primeros: en efecto, Watson nos dice como le estimulaba a Crick y a él mismo el saber que Linus Pauling estaba trabajando duro en el mismo problema. También recuerdo una conversación con el eminente biólogo y premio Nóbel Peter Medawar, me dijo que, en su experiencia, la emoción del descubrimiento científico original no era comunicable y que la mera comprensión de algunos trabajos no podía ser comparada con la emoción de hacer un progreso significativo en la investigación propia. Mi experiencia es que en matemáticas, la emoción de la comprensión, de la verdadera comprensión, es comparable con la emoción del descubrimiento original, y más allá de mi experiencia personal, los matemáticos sienten un verdadero placer en el triunfo de otros en el sentido de recrear el acto de descubrimiento, conociendo a fondo los entresijos del trabajo de otros. Se puede decir que la verdadera comprensión en matemáticas consiste en hacer propias las ideas y las técnicas, claro está, no en el sentido estricto de apropiárselas, sino en el sentido profundo de usarlas hábilmente para iluminar y hacer avanzar el pensamiento propio.

Permítanme, pues, darle un ejemplo de una idea matemática realmente bella, debida al matemático francés Desiré André cuyo trabajo fue publicado hace, aproximadamente, 100 años. Estaba en boga, por aquel tiempo, el llamado problema del sufragio, que puede ser descrito como sigue. Supongamos que en una elección hay dos candidatos X e Y y supongamos además que X ganó la elección obteniendo *a* votos frente a los *b* votos obtenidos por Y. Deseamos conocer la probabilidad de que a lo largo del recuento, X vaya siempre por delante de Y. Este problema acababa de ser resuelto por Bernard cuando André publicó su escrito con el título *Solución directa de un problema resuelto por M. Bernard*, pero lo que yo quiero señalar es la elegancia de la solución de André y la claridad que revela y comunica.

André tradujo el problema a otro acerca de una cuadrícula en el plano coordenado. Si P y Q son dos puntos con coordenadas enteras, entonces un camino de P a Q es una sucesión de puntos P_0, P_1, ... P_x tales que P_0 = P, P_x = Q y $P_i + 1$ se obtiene de P_i dando un paso de una unidad hacia el norte ó hacia el este. El número de caminos de (c, d) a (a, b) viene dado por el número combinatorio[2]:

$$\binom{a+b-c-d}{a-c}$$

Entonces el problema del sufragio queda reducido a contar los caminos que van de (0, 0) a (a, b) y que permanecen por debajo de la recta $y = x$ excepto en su punto inicial. Ahora vamos a considerar el siguiente problema más general: partimos de que (c,d) y (a,b) están por debajo de la recta $y = x$, es decir, c > d y a > b, y deseamos contar los caminos de (c, d) a (a,b) que permanecen por debajo de la recta $y = x$. A tales caminos los llamaremos "buenos" y a los caminos que van de (c,d) a (a,b) y que cortan a la recta $y = x$ les llamaremos "malos". Llamemos P y Q a los puntos extremos. Deseamos, como digo, contar los caminos buenos; la primera cosa bonita que hizo André fue contar los caminos malos. Ahora bien, un camino malo debe encontrarse con la recta $y = x$ en algún punto R, al menos una vez. Si reflejamos la parte PR de nuestro camino malo en la recta $y = x$ tenemos un camino P´R donde P´es el punto de coordenadas (d,c). La combinación de P´R con la parte RQ de nuestro camino malo original, produce el camino P´Q de (d,c) a (a,b). Es fácil ver que esta reflexión efectúa una correspondencia uno a uno entre los caminos malos de (c,d) a (a,b) y los caminos de (d,c) a (a,b) que cortan a la recta $y = x$.



Método de reflexión de André[3]

[2]Suponiendo por supuesto, que hay un camino de (c,d) a (a,b), es decir, que c ≤ a y d ≤ b.
[3]Para una información más completa del trabajo de André y de sus consecuencias, ver el artículo de Peter Hilton y Jean Pedersen *Catalan numbers* en Mathematical Intelligencer.

De este modo el número de caminos malos de (c,d) a (a,b) es el número combinatorio:

$$\binom{a+b-c-d}{a-d}$$

y el número de caminos buenos de (c,d) a (a,b) es:

$$\binom{a+b-c-d}{a-c} - \binom{a+b-c-d}{a-d}$$

Volviendo ahora a nuestro problema de votación, necesitamos sólo, contar los caminos buenos de (1,0) a (a,b) que, por nuestra fórmula anterior se reduce a:

$$\frac{(a+b-1)\,!}{a!\ b!} \cdot (a-b);$$

así, la probabilidad buscada se obtiene al dividir este número por

$$\binom{a+b}{a}$$

lo que resulta:

$$\frac{a-b}{a+b}$$

Antes de continuar vamos a fijarnos en un elemento, presente en la solución del problema de votación, que contribuye en gran medida a que las matemáticas nos resulten placenteras y divertidas, es el elemento de sorpresa. La fórmula para la probabilidad (a - b) / (a + b) es extraordinariamente simple, considerando la sutileza del argumento; es más, muestra que la probabilidad de que X esté siempre por delante de Y durante el recuento de votos depende sólo de la razón de votos recibidos y no del número actual. Para mí, este hecho no es intuitivamente obvio. Creo que este elemento de sorpresa está también presente en el ingenioso método de Gauss para sumar los números de 1 a 100 -repentinamente, un ejercicio horroroso a una fácil multiplicación 50 x 101-. Una de las muchas virtudes de la enseñanza idónea de la geometría es que proporciona este elemento de revelación repentina, de descubrimiento inesperado. Desgraciadamente, por regla general, la geometría no tiene hoy un lugar propio en el curriculum: o bien se le da de lado, o bien se la convierte en vehículo de transmisión de la idea de demostración, siendo la tesis a probar muy oscura, muy obvia ó ambas cosas. Pero esta es otra historia -aunque vitalmente importante- y debo volver a mi tema.

Decíamos que el razonamiento siguiendo la maniobra de reflexión era fácil, cierto, pero la perspicacia consistía en, primero, traducir el problema a un problema combinatorio acerca de caminos en una red, y entonces resolver el problema introduciendo el método de reflexión. Es una pena que no seamos capaces de perder el tiempo, en nuestra enseñanza, para mostrar primero el largo y difícil método por el que se resolvió originalmente el problema, para así poner de manifiesto los maravillosos avances del método superior por el que fue reemplazado. Estoy seguro que los estudiantes no tendrían dificultad para apreciar contraste.

Espero que estos cuatro ejemplos de razonamientos matemáticos espléndidos, os hayan complacido, es decir, os hayan producido una satisfacción estética; espero que cualquier estudiante agudo, con la base matemática necesaria, habrá apreciado fácilmente, al menos en un nivel intuitivo, su belleza y calidad. Estos ejemplos podrían ser usados para discriminar entre aquellos estudiantes que podrían beneficiarse continuando su educación matemática y aquellos que sería mejor avisarles para que se dedicaran a tareas menos gratificantes pero más lucrativas. Los griegos entendieron la importancia y la belleza de las matemáticas. Pero pocos administradores, burócratas y políticos acutales comprenden esta complementariedad en la naturaleza de las matemáticas. De todas formas, alegrémosnos si nuestros ciudadanos prominentes y nuestros líderes industriales nos animan a hacer matemáticas: pero no aceptemos de ellos ni la elección de los problemas en los que trabajar -porque su formulación sería seguramente imprecisa y el problema probablemente insoluble- ni la justificación para hacer matemáticas. Porque al pensar sólo en los resultados materiales nada saben del placer de las matemáticas.

Geometría analítica con ordenador: algunas curiosidades y conjeturas sobre polígonos

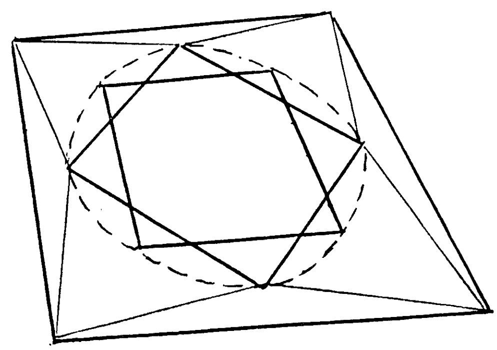
Juan Bosco Romero Márquez

Introducción

En este artículo presentamos algunos problemas de geometría analítica plana sobre polígonos.

Se utilizan fundamentalmente la simetría respecto de un punto, la intersección de rectas y la distancia euclídea para establecer unas curiosidades y conjeturas sobre polígonos planos, cóncavos o convexos, utilizando como herramienta de trabajo el ordenador.

Ha sido experimentado en el aula con un grupo de alumnos de tercero de B.U.P.



1. Descripción del problema

Dado un polígono P (a) de n vértices A_i (X_i, Y_i), (distintos), i = 1,2,3..., n y dado un punto P del plano que lo contiene (pudiendo estar en la frontera en el exterior o en el interior del polígono), se trata de construir otro polígono (que se prueba que es semejante) como sigue:

Sean B_i (X_{i*}, Y_{i*}), i = 1,2,3,..., n los puntos simétricos de P respecto de los vértices A_i del polígono dado, y uniéndolos se forma un nuevo polígono que se prueba que es semejante al dado y que designaremos como P (b).

Desde cada uno de los vértices del polígono P (b) se trazan las rectas a dos vértices consecutivos A_i, A_{i+1} obteniéndose los puntos de intersección de las rectas C_i, i = 1,2,3,..., n. Con esto formamos un tercer polígono P (c).

Se ha realizado un programa en BASIC con un ordenador AMSTRAD 6128.

2. Resolución analítica

A continuación exponemos la resolución analítica cuyas fórmulas han sido utilizadas para confeccionar el programa con ordenador.

1.- Fórmula para hallar los puntos simétricos al lado respecto de los vértices, siendo P y Q los puntos simétricos, n el número de vértices y X (n+1) e Y (n+1) el punto dado la fórmula es:

$$P (i) = 2 X (i) - X (n+1)$$

$$Q (i) = 2 Y (i) - Y (n+1)$$

Donde i va desde 1 hasta n y n es el número de vértices del polígono.

X (n+1) e Y(n+1) son las coordenadas del punto interior, exterior o frontera.

P (i) y X (i) son las abscisas del punto simétrico y del vértice respecto del cual hallamos el punto simétrico respectivamente.

Q (i) e Y (i) son las ordenadas del punto simétrico y del vértice respecto del cual hallamos el punto simétrico respectivamente.

2.- Punto de intersección de dos rectas

Basta con hallar las soluciones comunes de dos rectas, representadas por dos ecuaciones con dos incógnitas de tipo lineal:

$$A X + B Y + C = 0$$
$$A'X + B'Y + C = 0$$

Estas fórmulas han sido utilizadas para hallar los vértices C (i).

3.- Área de las figuras

Como todo polígono se descompone en un número finito de triángulos orientados. Para calcular su área calculamos el área de cada uno de los triángulos en que se descompone y se suman, si la orientación no es adecuada y sale negativa se toma positiva.

Así el área del triángulo de vértices A (a1, a2), B (b1,b2), C (c1,c2) es:

$$A = 1/2 \begin{vmatrix} a1 & a2 & 1 \\ b1 & b2 & 1 \\ c1 & c2 & 1 \end{vmatrix}$$

En caso de polígonos cóncavos siempre podemos elegir el vértice adecuado de forma que los triángulos en que se descompogan queden todos dentro.

4.- Distancia entre dos puntos

Dados A (a1,a2), B (b1,b2), la distancia euclídea es:

$$d\,(A,B) = \sqrt{(b1-b2)^2 + (a1-a2)^2}$$

5.- Notas y Observaciones

a) En el caso de un triángulo, los triángulos obtenidos, en el problema 1 son semejantes al triángulo dado.

b) En el caso de un cuadrilatero simétrico es semejante al cuadrilatero dado. Sin embargo, el cuadrilatero formado por las intersecciones, entre los puntos de éstos, según problema 1 es siempre un paralelogramo, que puede llamarse, el paralelogramo medio o de Varignon de los dos cuadrilateros dados.

c) Se puede generalizar este resultado si partimos de dos cuadrilateros semejantes cualesquiera, y construimos, el cuadrilatero de sus intersecciones, P (c) según lo expuesto en el problema 1.

3. Curiosidades

Notas aclaratorias:

NV: Número de vértices del polígono.

CX: Polígono convexo.

CV: Polígono cóncavo.

1er. polígono/pol resul = Área del 1er. polígono dividida entre el área del polígono resultante.

peri-gran/peri1 = Perímetro de la figura que se forma dividido entre el perímetro de la primera figura.

peri1/peri resul = Perímetro de la primera figura dividido entre le perímetro de la figura resultante.

El símbolo = quiere decir que la razón no es constante.

" " * " " " " " varía unas centésimas.

NV			1er. polígono/pol. resul.	peri-gran/peri1	peri1/peri resultante.
		P. interior	2.25	2	==
3	CX	P. frontera	2.25	2	==
		P. exterior	2.25	2	==
		P. interior	1.125	2	1.05
	CX	P. frontera	1.125	2	1.05
		P. exterior	1.125	2	1.05
4					
		P. interior	1.125	2	1.5*
	CV	P. frontera	1.125	2	1.5*
		P. exterior	1.125	2	1.5*
		P. interior	0.86	2	0.96*
	CX	P. frontera	0.86	2	0.96*
		P. exterior	0.86	2	0.96*
5					
		P. interior	==	2	==
	CV	P. frontera	==	2	==
		P. exterior	==	2	==
		P. interior	0.75	2	0.80*
	CX	P. frontera	0.75	2	0.80*
		P. exterior	0.75	2	==
6					
		P. interior	==	2	1.05*
	CV	P. frontera	==	2	0.95*
		P. exterior	==	2	==

4. Problemas y conjeturas

a) Triángulo: Ta y Tb son directamente semejantes e inversamente semejantes a Tc.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 2.25 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

El perímetro del primero entre el perímetro del tercero no da un número constante.

b) Cuadrilatero: Ta y Tb son semejantes, mientras que Tc es un paralelogramo independiente del punto elegido.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.86 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.96$$

c) Pentágono: Ta y Tb son semejantes mientras que Tc no lo es.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.86 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.96$$

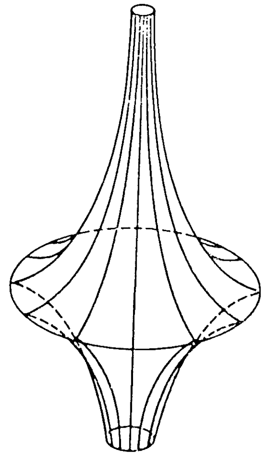
d) Hexágono: Solo hay razón de semejanza entre Ta y Tc.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.75 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.8$$

Observaciones finales: La razón entre el perímetro de la primera figura y la figura grande es siempre 2. Hay que hacer notar que en los polígonos cóncavos no se mantienen muchas razones por problemas de biconcavidad.

PRIMERAS JORNADAS ANDALUZAS DE PROFESORES DE MATEMATICAS



ACTAS

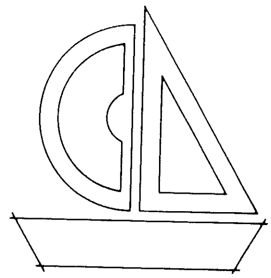
Cádiz, Septiembre de 1983

Pedidos contra reembolso a:
S.A.E.M. «THALES». Aptdo. 254. San Fernando (Cádiz)
(Importe: 1.000 pts. más gastos de envío)

II JORNADAS ANDALUZAS

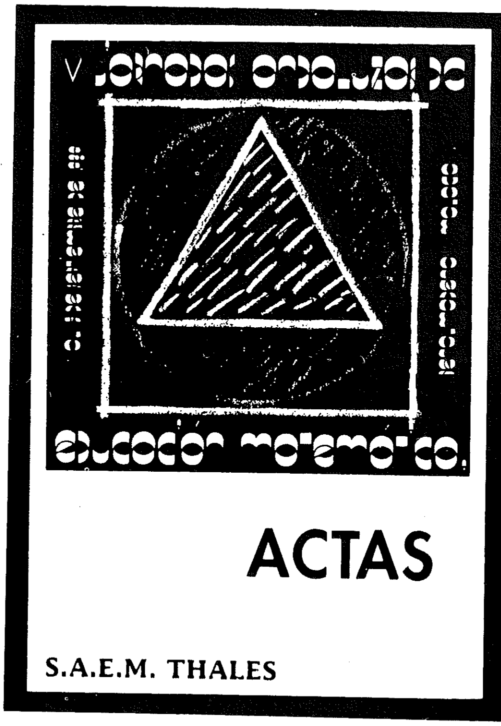
de DIDACTICA de las MATEMATICAS

Almería, Septiembre de 1985



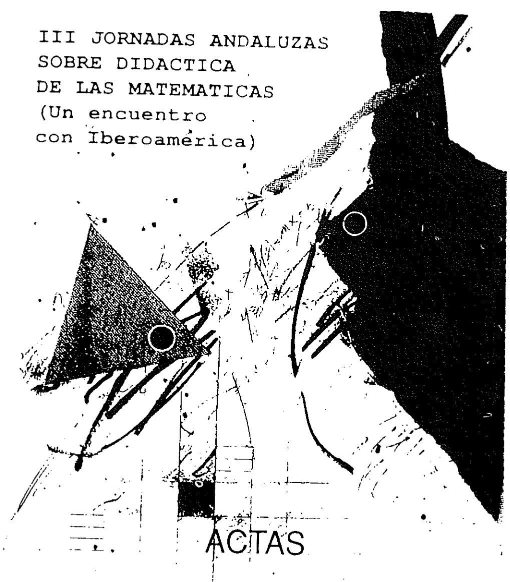
ACTAS

Pedidos contra reembolso a:
S.A.E.M. «THALES». Aptdo. 410. 04080 ALMERIA
(Importe: 1.200 pts. más gastos de envío)



Pedidos:
SAEM THALES'
Apartado 702
29080 MALAGA

III JORNADAS ANDALUZAS
SOBRE DIDACTICA
DE LAS MATEMATICAS
(Un encuentro
con Iberoamérica)



ACTAS

SOCIEDAD ANDALUZA DE PROFESORES
DE MATEMATICAS «THALES»

HUELVA, 10 AL 14 DE ABRIL DE 1987

Pedidos:
SAEM THALES'
Apartado 1.209
21080 - HUELVA

Calculadoras, diagramas y funciones

Pedro Alson

Resumen

La calculadora de bolsillo es utilizada para introducir la noción de diagrama. El diagrama es un "artefacto" útil para condensar la descripció del proceso hecho con una calculador al evaluar una fórmula. Consta de tres partes: teclas o cuadrados, pantallas o elipses y flechas. Se muestra cómo utilizarlos para facilitar la introducción de conceptos como la composición de funciones, dominio y rango de funciones, inversa de una función, ecuación y su solución. Se muestra también cómo pueden ser usados para corregir o evitar deficiencias, en el aprendizaje del estudiante, de habilidades operativas relacionadas con esos tópicos. Se hacen algunos comentarios acerca de los resultados obtenidos trabajando con grupos de estudiantes, al comienzo de la Universidad, durante los últimos cinco años. Se incluyen algunas reflexiones generales sobre la estrategia.

Introducción

Algunos estudiantes que ingresan a las Escuelas de Biología o Química de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela tienen dificultades para distinguir pequeñas diferencias de escritura entre fórmulas. Les cuesta reconocer, por ejemplo, por qué las expresiones *cos (x+1)* y *cos (x) +1* designan objetos diferentes. Este tipo de insuficiencias suele estar acompañado por interpretaciones erróneas de las fórmulas: es frecuente ver que *sen (x)* es interpretado como el producto de *sen* por *x*. Como consecuencia de esto no entienden por qué $(sen\ (x))^2 = sen^2\ (x)$; para ellos lo natural debería ser (sen(x))2 = sen2 (x)2.

No es difícil imaginarse las dificultades que se tendrá para enseñar, a estudiantes con las lagunas y malformaciones señaladas, el cálculo de derivadas (como exige el programa del primer semestre). Por ejemplo, algunos de ellos en vez de aplicar la regla de la cadena para derivar *sen (2x)* utilizarán la regla del producto obteniendo incorrectamente: *cos (2x) + sen (2)*.

La situación que se ha esbozado brevemente: nivel insuficiente de los estudiantes para lo que se les pretende solventar las principales lagunas. Esta estrategia ha sido utilizada por más de cinco años con resultados alentadores. Esto y el hecho de que consideramos que la estrategia podría ser aprovechada en otro contexto, a mediados del bachillerato por ejemplo, nos animan a publicar este artículo.

En la primera sección describimos lo que es un diagrama y mostramos cómo es utilizado para orientar la actividad de los estudiantes y darle un significado no sólo a las fórmulas, sino también a las ecuaciones de la forma $f\ (x) = a$.

En la segunda sección se explica un poco el comportamiento de los estudiantes al haber trabajado con esta estrategia.

Finalmente, en la tercera sección, se hacen algunos comentarios cuya finalidad es explicar, aunque sea parcialmente, en qué se fundamenta la estrategia y cuales son las razones para que funcione relativamente bien.

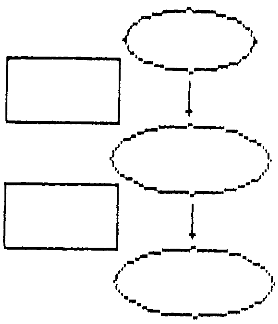
1.- Diagrama y su uso

Como la calculadora de bolsillo se ha vuelto un objeto al alcance de la mayoría de la población estudiantil se pensó que podría ser utilizada para identificar una fórmula con un proceso realizado con ella.

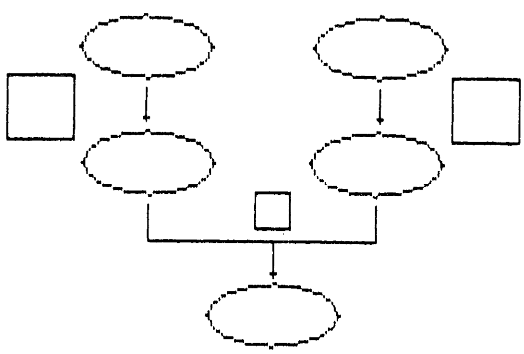
Para calcular *sen* (3^2) con una calculadora se debe proceder siguiendo los pasos:

marque el número 3;
presione la tecla del cuadrado;
presione la tecla del seno.

Esta descripción se vuelve rápidamente pesada y tediosa. Esto llevó a diseñar unas formas u esquemas para agilizar la descripción del proceso. Las Figuras 1a) y 1b) muestran dos ejemplos de esas formas.



A)



B)

Figura 1

Este tipo de formas se "fabrican" juntando tres tipos de objetos: unos rectangulares, otros elípticos y finalmente unas flechas. Los rectángulos son reservados para anotar las teclas funcionales utilizadas. Las elipses son utilizadas para anotar los números que aparecen en la pantalla al realizar el proceso. La flechas son utilizadas para indicar en qué orden se hacen las operaciones. De ahora en adelante nos referiremos a este tipo de formas como **diagramas**. La Figura 2 muestra el diagrama, debidamente lleno, que describe al proceso asociado con la expresión *sen*(3^2).

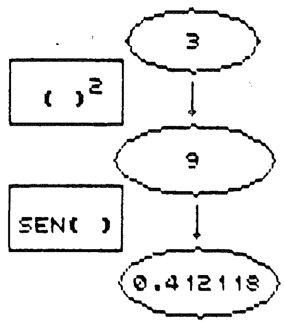


Figura 2

La Figura 2 no describe completamente el proceso realizado con la calculadora: *3* aparece en la pantalla porque se ha presionado la tecla *3* y sin embargo la tecla *3* no aparece en la Figura 2. Esto se hace para evitar un cuadrado adicional y no parece causar mayores problemas para la comprensión por parte de los alumnos.

La fórmula *sen* (x^2) se asocia con el diagrama que aparece en la Figura 3.

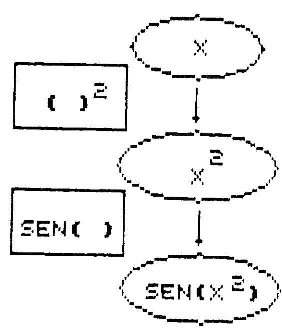
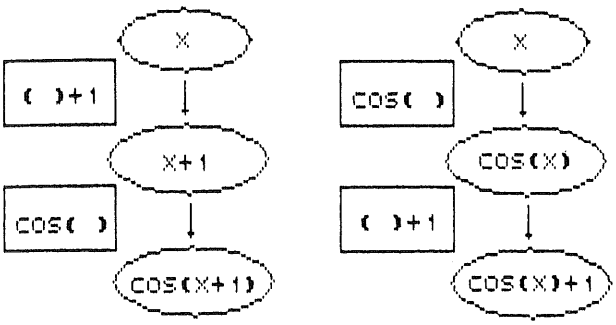


Figura 3

Para utilizar el diagrama para la representación de procesos asociados a una fórmula *f (x)* **se exige siempre que en los cuadrados no aparezcan expresiones evaluadas en** *x*. Se verá más adelante que esto tiene consecuencias importantes.

La Figura 4 muestra los diagramas asociados a *cos (x+1)* y *cos (x)+1*. Al comparar los diagramas se hace patente la diferencia de significados entre ambas fórmulas.

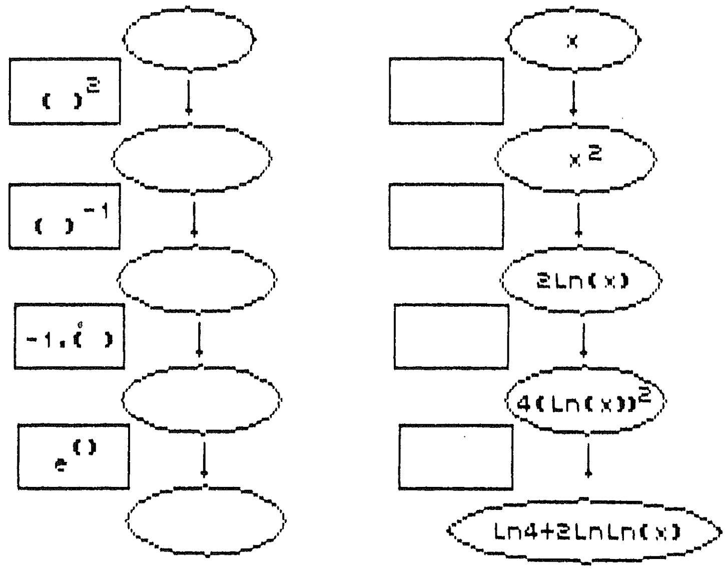


A) B)

Figura 4

Intentando corregir el manejo inapropiado de la notación algebraica se propusieron ejercicios que consistían en completar diagramas parcialmente llenos como los que aparecen en la Figura 5a) y 5b). Uno de los objetivos claramente logrados con este tipo de ejercicios es la comprensión de que una fórmula siempre puede verse como una sucesión ordenada de teclas: en el fondo es la idea de composición de funciones.

Hubo un momento en que los diagramas fueron percibidos como objetos en sí, vacíos de su finalidad primera. En ese momento me di cuenta que bastaba con ir modificando la parte que el profesor llenaba para generar ejercicios y plantear al estudiante preguntas de diversa naturaleza y que iban más allá del simple manejo formal de las fórmulas. Por ejemplo al completar los diagramas parcialmente llenos de la Figura 6a), 6b) y 6c) los estudiantes son puestos en contacto con hechos relacionados con los conceptos de función inversa, dominio de una función y rango de una función.



A) B)

Figura 5

Al enfrentar el alumno con estos hechos no se trata de introducir los conceptos subyacentes de manera inmediata sino más bien hacer ver que cada tecla tiene su inversa, descubrir para cuales números y cuales teclas la calculadora da error y en que casos nunca se puede obtener un número dado después de teclear una tecla (por ejemplo ver que nunca aparece un número mayor que *1* inmediatamente después de haber presionado la tecla *seno*).

Dadas las ventajas que ofrecían los diagramas para orientar el trabajo del estudiante de manera muy precisa, sin por ello mecanizarlo, se crearon formas similares para atacar problemas relacionados con las fórmulas. La Figura 7 muestra una forma que fué utilizada para enseñar y entrenar en el cálculo de la fórmula inversa, específicamente del hecho:

$(f_n o f_{n-1} o \ldots f_1)^{-1} = f^1_1 \, o f^1_2 \, o \ldots o f^1_n$

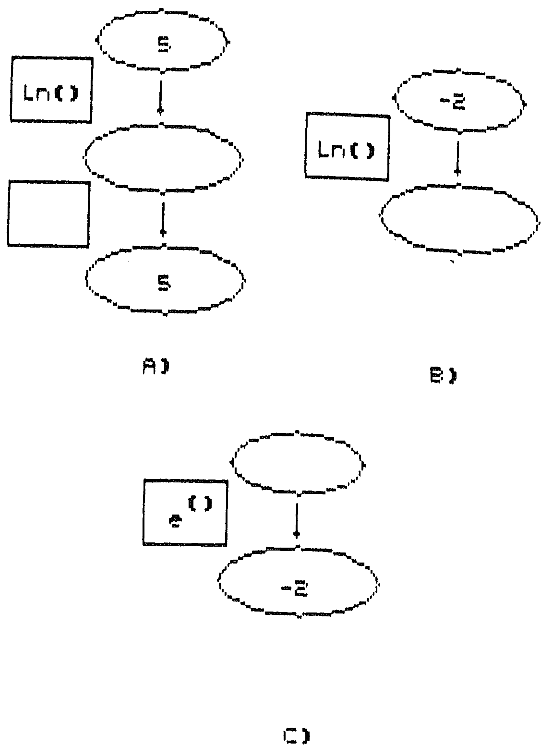


Figura 6

Otro aspecto importante es el de la resolución de ecuaciones. Es claro que la *acción que hace el estudiante al rellenar la Figura 6c)* es interpretada de manera natural como la resolución de la ecuación *exp (x) = -2*. Se prefirió sin embargo tratar las ecuaciones con formas ligeramente más complicadas que un diagrama. Se quería dar la posibilidad al estudiante de que él mismo relacionara o interpretara la expresión usual de las ecuaciones con el lenguaje de los diagramas. La Figura 8 ilustra el punto.

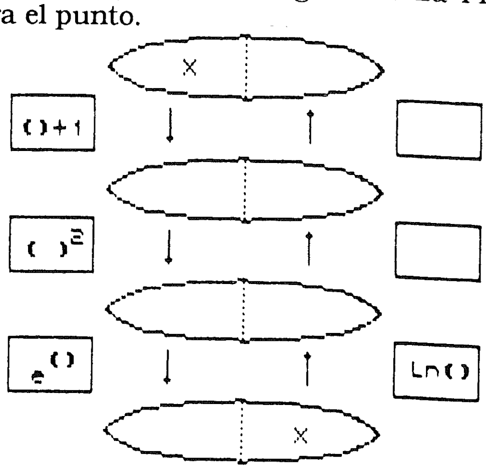


Figura 7

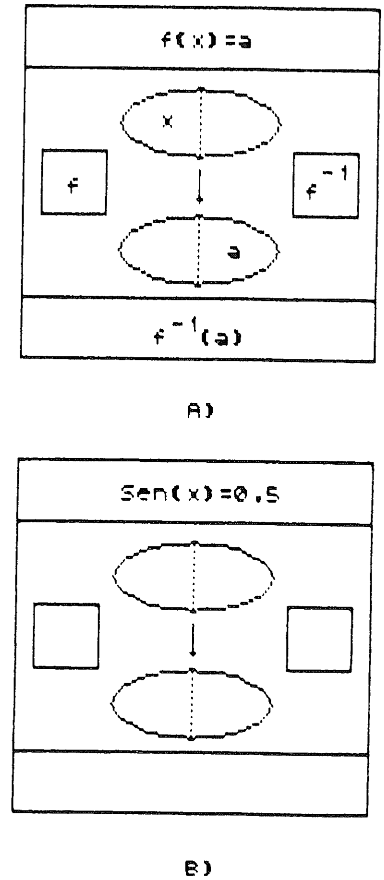


Figura 8

Al tratar de buscar un diagrama apropiado para la fórmula *exp (x) + sen (x)* respetando la convención de que en los cuadrados no pueden ir expresiones en *x*, se llega a la conclusión de que debe utilizarse un diagrama del tipo de la Figura 1b). Este tipo de diagramas es muy importante y lo llamaremos **ramificado**. El tipo de diagrama que nos sirvió de ejemplo en la mayoría de las figuras lo llamamos **no-ramificado**. En general una fórmula tiene un diagrama que se forma "combinando" ambos tipos de diagramas.

Al completar el diagrama de la figura 9 el estudiante está resolviendo la ecuación *exp (x) + sen (x) = 0*. Esta ecuación es aparentemente más sencilla que *ln (sen (x-1)) - 1.48* . Después de algunos intentos y con la ayuda de comentarios por parte del profesor el estudiante descubre que la primera ecuación no se puede resolver despejando. En cambio la segunda que es aparentemente más complicada es resuelta rápidamente y sin dudas. El hecho subyacente es la inexistencia de inversa para la ramificación. El diagrama en este caso ayuda a dar una interpretación clara para el estudiante de lo que significa el no poder "despejar". El ejemplo pone además en relevancia el hecho de que la solución algebraica de una ecuación $f(x) = a$ depende, en el fondo, de la existencia de una inversa de la fórmula $f(x)$.

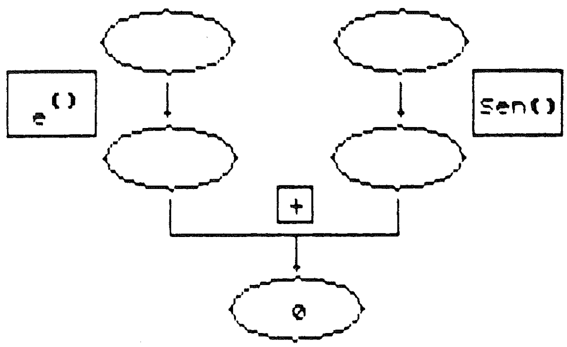


Figura 9

Otro punto importante es que los diagramas de los polinomios y de las funciones racionales son en general los ramificados. La composición de funciones está asociada a los diagramas no ramificados y las operaciones binarias (suma y producto) a los ramificados.

2.- Reacciones de los estudiantes

Un material didáctico que contiene algunas de estas actividades ha sido publicado en (1). Este material ha sido utilizado durante varios años. Buena parte del trabajo hecho en clase fue tutoreando a los estudiantes y evitando las exposiciones magistrales teóricas. La mayoría de los profesores que trabajaron de la manera descrita coinciden en los hechos que siguen:

- Rellenar las elipses cuando en la primera elipse aparece una letra en vez de un número y los cuadrados ya están llenos, no presentó mayores dificultades en los estudiantes. La mayoría de los estudiantes terminó siendo capaz de asociar correctamente diagrama con fórmulas: suele haber mayor dificultad en el caso de diagramas ramificados.
- Muchos llegaron a comprender que un número es solución de una ecuación $f(x) = a$ si al evaluar f en ese número el resultado es a. Este punto, aparentemente trivial, no está claro cuando llegan de bachillerato. Muchos de ellos conciben las raíces de la ecuación de segundo grado como los números que se obtienen al final de un proceso cuyo punto de partida es el polinomio que figura en la ecuación de segundo grado (el $= 0$ es concebido como un aditamento a la fórmula). La aplicación de fórmulas inversas para la resolución de ecuaciones fué dominada por un número menor de estudiantes.
- Desde un punto de vista psicológico los estudiantes disfrutaron de la enseñanza.
- Buen número de ellos se sentía al final bastante seguro en el tópico aunque cometiesen eventualmente algunos errores. Se notó por parte de los alumnos un mayor cuidado al manipular las fórmulas y la conciencia de que pequeñas variaciones en la forma pueden indicar grandes diferencias en el significado. Sin embargo es frecuente, al volver a hacer errores. Esto sucede a pesar de que el alumno tiene, después de haber trabajado con la metodología descrita, la capacidad de comprender el error cuando le es señalado.
- Otro aspecto que notamos, es la tendencia por parte del estudiante a deshacerse de los diagramas a medida que creen que entienden la notación algebraica usual. Esto nos parece es una tendencia universal hacia la economía de notación.

3.- Reflexiones generales

Durante su bachillerato los estudiantes deben aprender a manipular fórmulas, reconocer y demostrar cuándo dos expresiones algebraicas son equivalentes. Además de ello deberían, al salir, saber despejar la solución de ecuaciones de la forma $f(x) = a$ cuando ello es posible. Al ingresar en la Universidad muchos de ellos no han adquirido esos conocimientos.

El lenguaje de los diagramas, a pesar de aparecer elemental, pone en evidencia y de manera mucho más clara que el lenguaje usual, la estructura subyacente a las fórmulas: los conceptos de composición, operaciones binarias con funciones, inversa de una función, etc.

La estructura conceptual que se acaba de señalar es una adquisición de fecha relativamente reciente comparada con la notación y las manipulaciones algebraicas que se enseñan en los cursos elementales. Tanto la notación como las explicaciones que se dan en los cursos elementales están condicionadas por factores históricos, hábitos de escritura, exigencias de economía de notación, la tendencia a disponer de los símbolos de manera unidimensional (en líneas) y secuencialmente, etc. Esto explica en parte la coexistencia de la notación tradicional con la estructura conceptual señalada sin que a nivel de enseñanza se establezca un puente que a todas luces resultaría provechoso.

Hemos notado que algunos estudiantes que ingresan, focalizan su atención en las x (o la letra que juega el papel de la x), de las expresiones algebraicas, sean éstas ecuaciones o simples fórmulas. Reaccionan ante ellas de manera casi compulsiva tratando de "mover" los símbolos para despejar la x, ya que para ellos x es el objeto importante y casi lo único que han aprendido en bachillerato es que cuando se da la solución la x debe quedar de un lado del signo igual y del otro lado debe quedar un número. Este bajo nivel de comprensión suele venir acompañado de un dominio deficiente de las reglas de despeje. Esto hace que a menudo cometan errores al calcular las soluciones de las ecuaciones.

Al trabajar con los diagramas esos vicios de formación no pueden seguir funcionando. En efecto allí despejar la x en $f(x) = a$ es rellenar de abajo hacia arriba: no hay movimiento de la x. Igualmente, al rellenar un diagrama para una fórmula $f(x)$, el mayor esfuerzo está en llenar los cuadrados adecuadamente. Aquí nuevamente el diagrama orienta sutilmente la actividad del estudiante: al hacer que la mayor parte del esfuerzo no se concentre en una actividad alrededor de la x, la importancia que el estudiante le da a la x, al leer una expresión algebraica, disminuye. Otro aspecto importante al enseñar funciones es hacer entender al estudiante la diferencia entre $f(\,)$ y $f(x)$: entre la función y la función evaluada en un x. La convención de que no se puede poner en los cuadrados expresiones de la forma $f(x)$ enfatiza esa diferencia. Esto prepara al estudiante para manejar en un contexto más formal esa distinción.

Probablemente el factor que ha incidido más en la asimilación masiva del tópico es lo que podría ser llamado "la unidad de lenguaje". Al leer el estudiante enunciados de ejercicios como "*resuelva la ecuación...*", "*chequee si 2 está en el rango de sen $(2x + 4)$*", etc., no ve claramente qué es lo que debe hacer. Para superar esto el profesor suele resolver algunos ejercicios similares de manera que el estudiante tenga "un modelo". El hecho es que al utilizar el lenguaje convencional se deben utilizar palabras que no son suficientes para orientar el trabajo del estudiante (porque el estudiante ignora todavía el significado). Cuando se trabaja con diagramas hay una sola instrucción: **COMPLETE EL DIAGRAMA**. El diagrama le permite al alumno "**ver**" qué es lo que hay que hacer. El trabajar con diagramas permite por lo tanto ir en el sentido contrario al usual: no se utilizan nuevas palabras para definir ejercicios al alumno, sino que los ejercicios (definidos por el profesor al completar parcialmente los diagramas) justifican la aparición de nuevas palabras y conceptos. Otro aspecto fundamental que está ligado a la unidad del lenguaje es que existe una manera canónica de ver si un diagrama ha sido correctamente completado: basta con ir chequeando de arriba hacia abajo haciendo las evaluaciones indicadas y viendo si coinciden con lo que aparece en las elipses.

Resumiendo, la estrategia utilizada se basa fundamentalmente en la creación de un lenguaje que cumple simultáneamente tres funciones:

i) evidencia la estructura teórica subyacente al tópico;

ii) inhibe, por su propia forma, el funcionamiento de vicios de formación;

iii) minimiza el uso de terminología para orientar el trabajo del estudiante.

Creemos que el lenguaje descrito, debido a sus características, es particularmente apto para ser utilizado a nivel de secundaria.

Referencias Bibliográficas

(1) Alson P. *Métodos de Graficación*. Fondo Editorial Acta Científica-Facultad de Ciencias. Caracas. Venezuela. (1987).

Barajas matemáticas

Angel Salar Gálvez

Las barajas al igual que los dominós suministran un potencial de primer orden para la elaboración y planificación de actividades matemáticas y pueden ser unos instrumentos didácticos extraordinarios. Las barajas clásicas tienen un atractivo especial para la mayoría de los niños y es difícil encontrar quien a partir de los 6 o 7 años no sepa jugar a alguna modalidad de juego de cartas. En los juegos de naipes los niños aprenden a contar, a agrupar según unas reglas, a clasificar, etc., y algo muy importante desde el punto de vista matemático; asociar valores arbitrarios a determinadas cartas y contar ágilmente en función de estos valores: el as vale tanto, el rey tanto otro, etc.

A diferencia de los dominós en que las reglas del juego admiten pocas modificaciones, la variedad de juegos de naipes es mucho más rica, así como el número de cartas que pueden emplearse. Las reglas de los juegos más comunes son ampliamente conocidas, esto facilita la utilización didáctica de las barajas adaptando sin más complicaciones las mismas reglas de los juegos a situaciones matemáticas. Se facilita así una etapa importante de cualquier actividad didáctica con juegos: el periodo que deben emplear los estudiantes en familiarizarse previamente con las reglas.

La oferta de material de matemáticas que utilice como soporte los naipes es muy escasa, incluso en materiales importados de otros países. Que sepamos hasta la aparición comercial de estas barajas no había ningún material específico para emplear en las clases de matemáticas de este tipo. Existen unos naipes blancos, sobre los que puede escribirse y posteriormente borrarse lo escrito, de procedencia inglesa, que distribuye y comercializa DISTESA. Suelen ser difíciles de conseguir y su precio es alto aunque tienen muchas posibilidades e interés didáctico porque el material permite que cada profesor pueda inventarse sus propios juegos o actividades según los propósitos de enseñanza que se tengan en cada momento.

En este sentido nos parece muy atractiva la idea de MAT-MAT de aprovechar los juegos de naipes como material para el aprendizaje de las matemáticas. Si a ello se añade que el precio de las barajas es bastante asequible, resulta barato disponer de amterial suficiente para trabajar con una clase completa. Desde este punto de vista las barajas son, un material altamente interesante y recomendable.

MAT-MAT es una empresa española de Zaragoza que fabrica y produce material didáctico para las matemáticas, y dispone en la actualidad de una oferta muy amplia, principalmente de juegos de tablero y barajas. En las barajas han adaptado a actividades con contenido matemático, diferentes juegos tradicionales de cartas, en unos casos se mantienen las reglas de estos juegos, y en otros han creado un buen número de juegos con reglas propias nuevas.

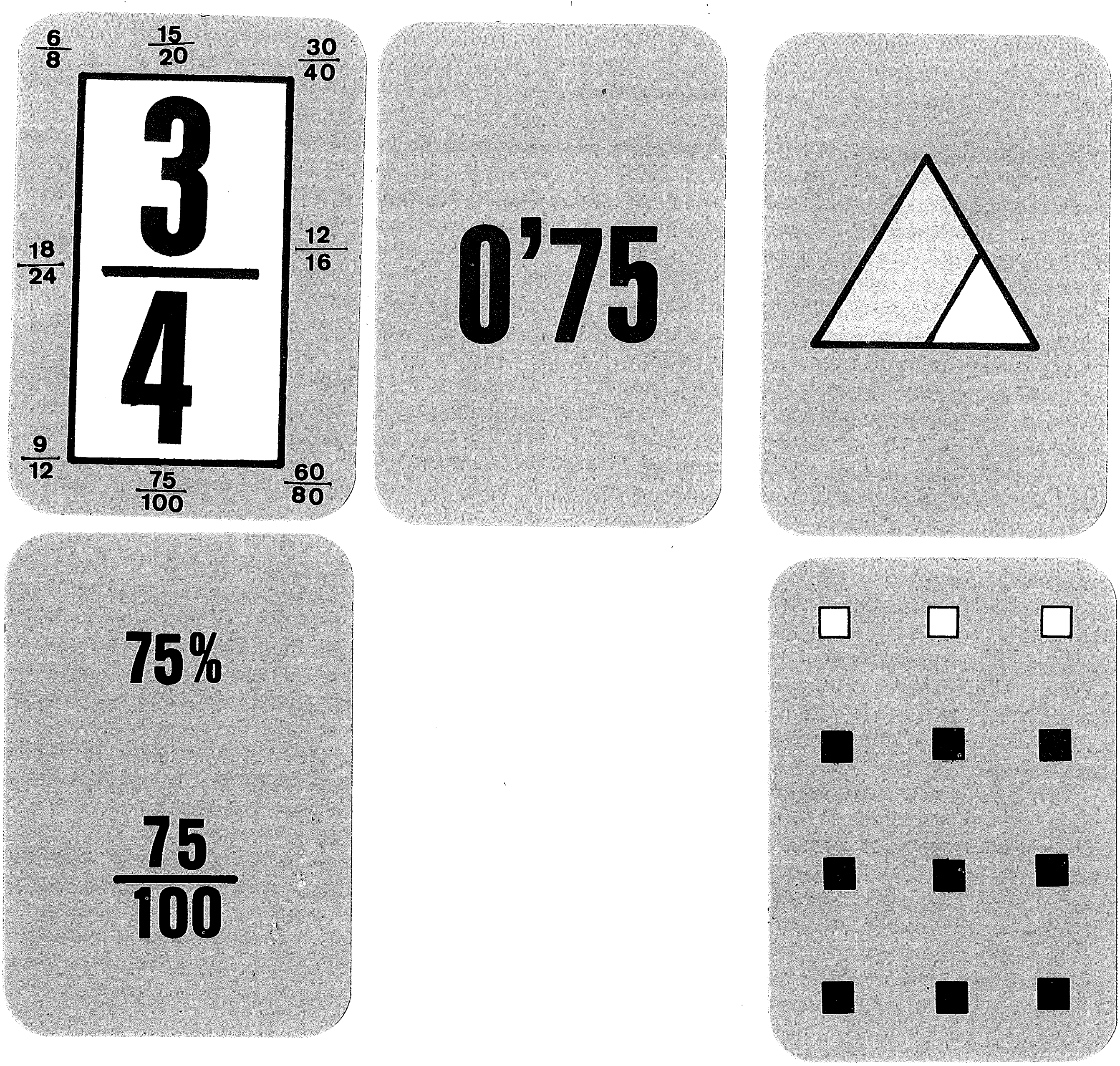
Los naipes son de cartulina resistente satinada, muy parecidas en el tamaño a las cartas de los juegos para niños y de la baraja clásica. El diseño de los naipes ha mejorado notablemente de los primeros modelos de barajas a los más recientes.

Cada baraja se acompaña con unos comentarios generales para el profesor sobre la utilización didáctica del juego, las reglas de cada juego y los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con los diferentes modos de juego que pueden desarrollarse con dicha baraja. En todas las barajas hay por tanto varias modalidades alternativas de juego y distintas formas de jugar, normalmente son tres o más posibilidades las que se ofrecen.

1.- Nombre de la baraja: Las Pandillas

Nivel: Ciclo Medio y Ciclo Superior y EE.MM.
Tema: Fracciones

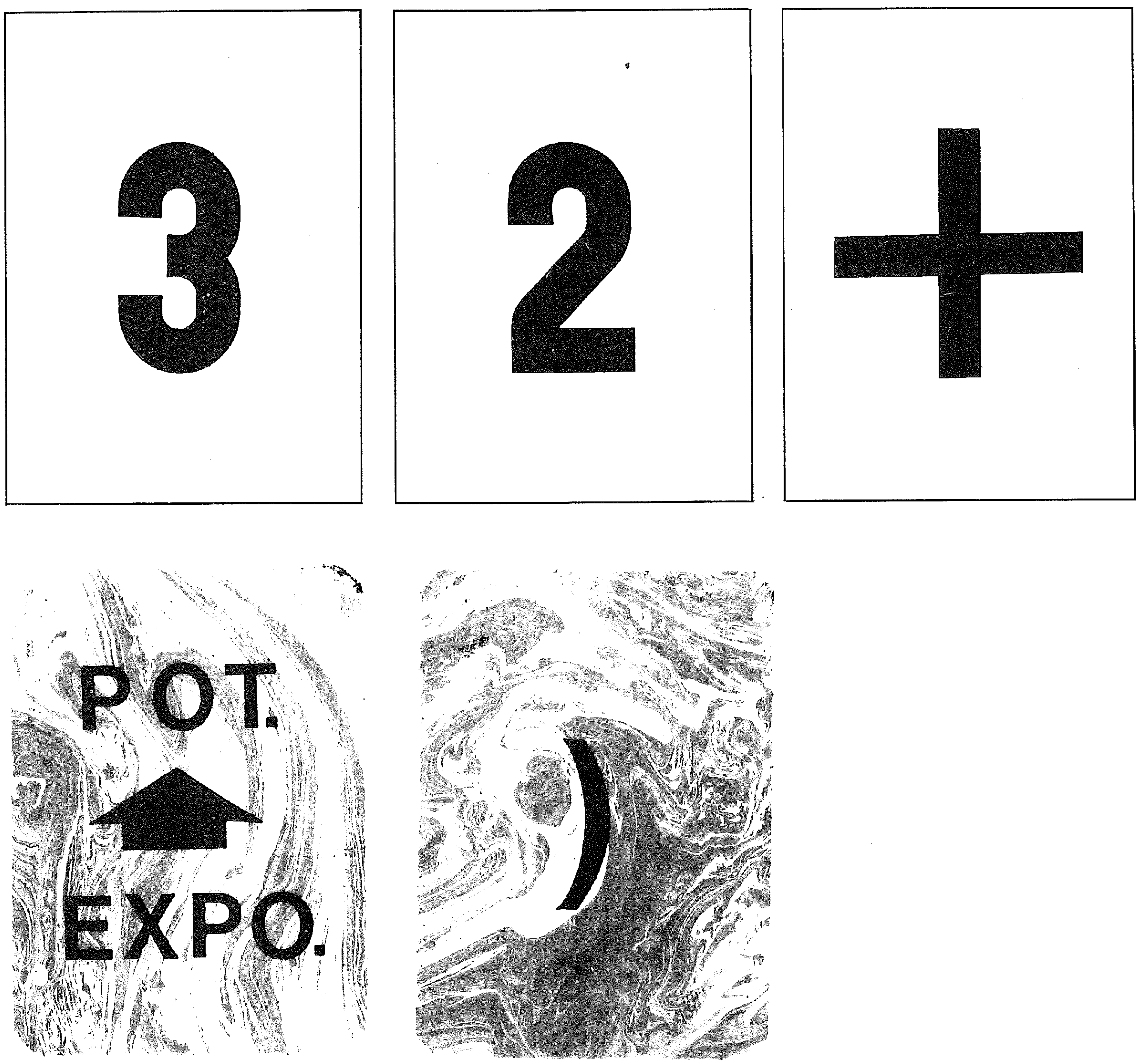
Es un juego de 55 cartas. Cada naipe lleva la representación de un número fraccionario. Hay 5 formas distintas en total de representar cada número: gráfica, porcentaje, decimal, subconjunto y fracción. La idea del juego consiste en agrupar los números según sus diferentes representaciones en pandillas. Hay otras variantes posibles y el profesor puede inventar otras reglas.



2.- Nombre de la baraja: La Escalada

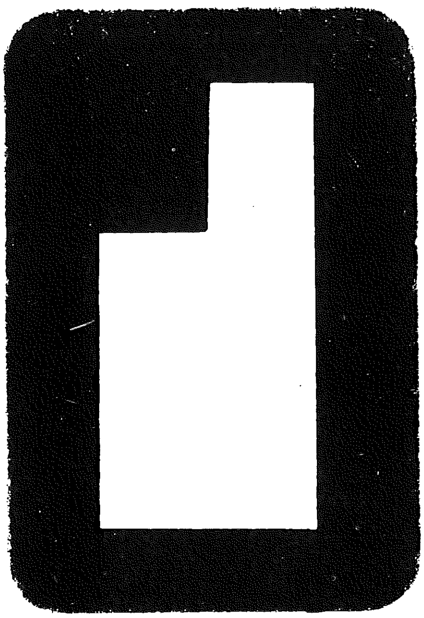
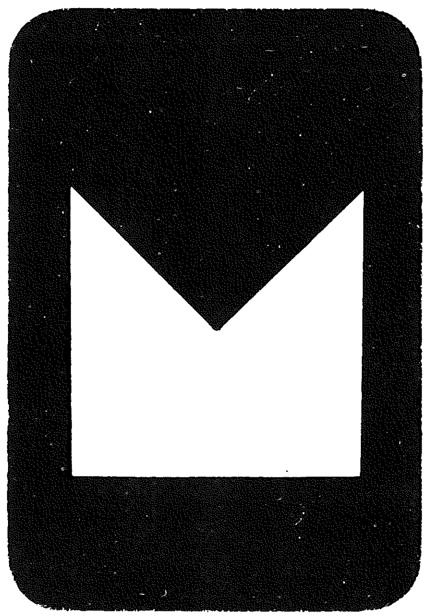
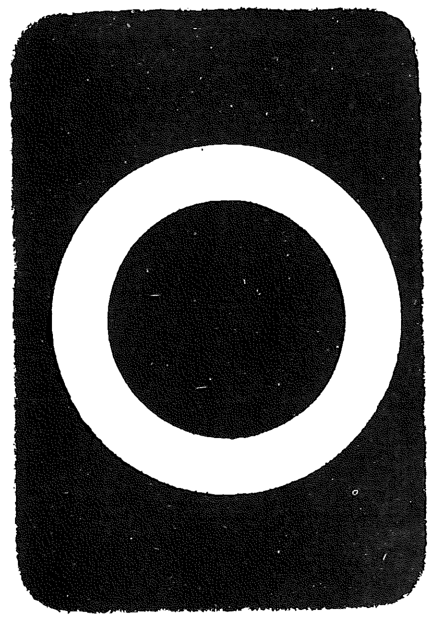
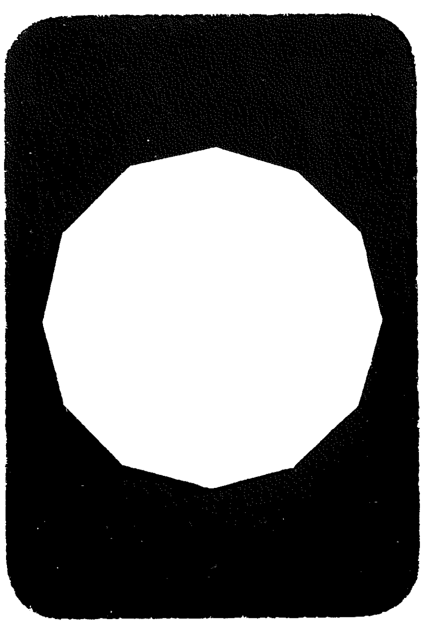
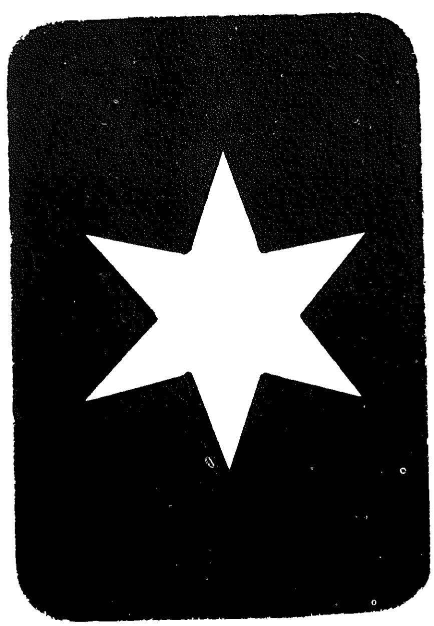
Nivel: Ciclo Inicial y Ciclo Medio
Tema: Números naturales, operaciones y cálculo mental

Es una baraja compuesta por 64 naipes. Los naipes son números naturales; signos de operaciones: más, menos, por, división y elevar a una potencia; y también unas cartas con paréntesis. Por la composición de las cartas es evidente que aún sin reglas, un profesor podría diseñar por sí mismo actividades con estas cartas o bien sus propios juegos para facilitar la comprensión del significado de las operaciones aritméticas elementales. En las instrucciones que acompañan a la baraja se dan las reglas para jugar hasta 3 juegos.



3.- Nombre de la baraja: Buscágono
Nivel: Ciclo Medio y Ciclo Superior
Tema: Números naturales, operaciones y cálculo mental

Baraja de 45 cartas con diferentes figuras geométricas planas en cada carta. La descripción más detallada de esta baraja puede verse en el Nº 3 de la Revista "SUMA".

4.- Nombre de la baraja: Múltiplos y divisiones

Nivel: Ciclo Medio y Ciclo Superior
Tema: Números naturales, operaciones y cálculo mental

La baraja consta de 48 cartas cada una con un número del 1 al 48 y tres "comodines" con diversos números.

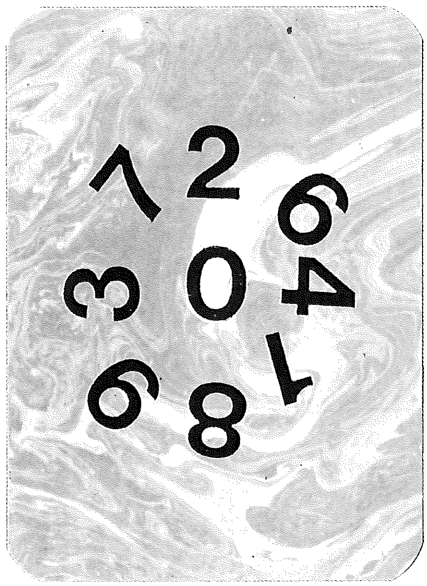
Referencias Bibliográficas

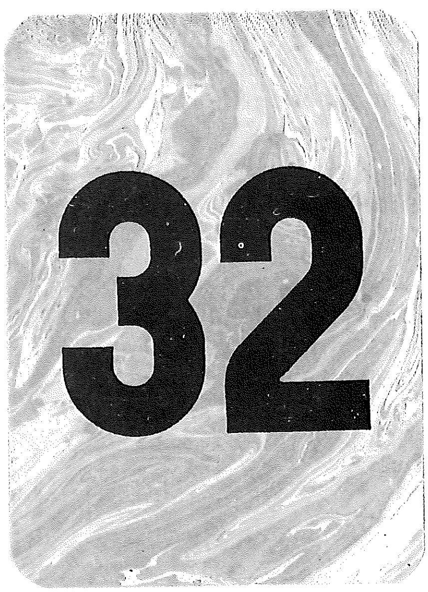
Fernando Corbalán Yuste/José Mª Gairín Sallán "Juegos en clase de matemáticas". Revista "Cuadernos de Pedagogía", Nº 160 (Julio de 1988)

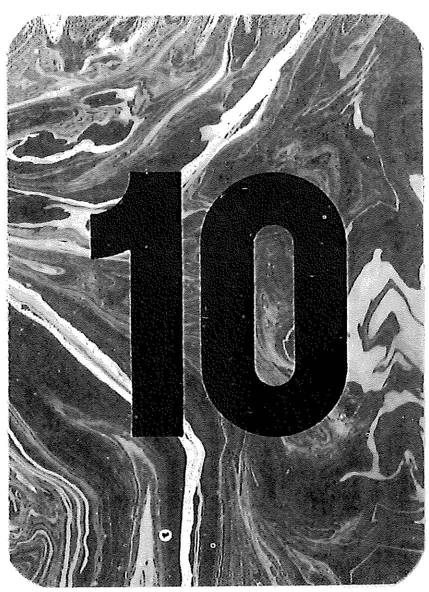
Fernando Corbalán Yuste/José Mª Gairín Sallán "Problema a mi Nº3 (Juegos)". Editorial EDINUMEN

J. Antolín/Fernando Corbalán Yuste/José Mª Gairín Sallán "Buscágono" Revista "Suma", Nº 3 (Primavera 1989)

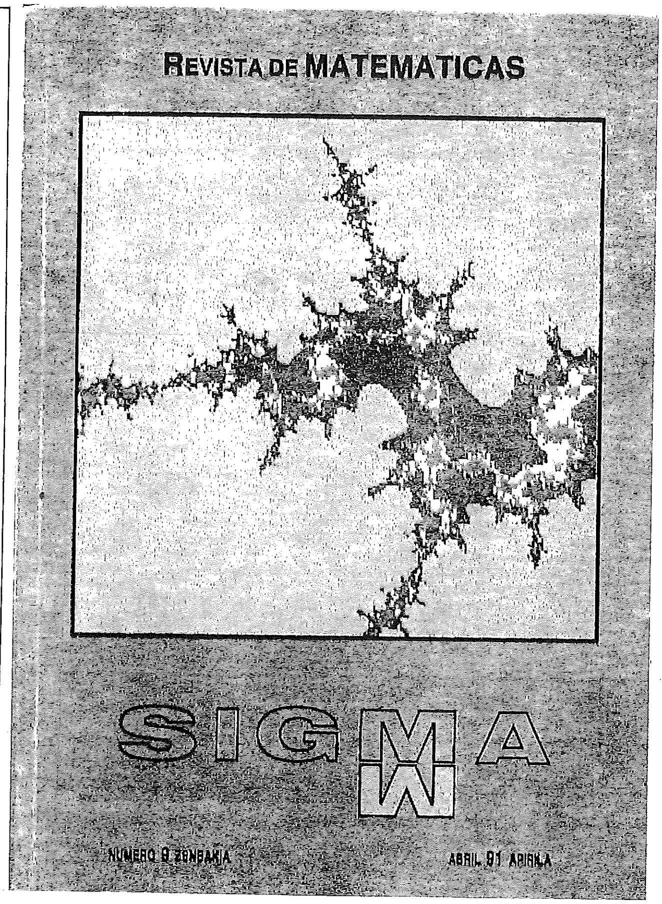
"Juegos. Enciclopedia práctica" (2 Tomos) Ediciones Nueva Lente







INDICE



NUEVA DIRECCIÓN PARA LA CORRESPONDENCIA CON SUMA

Apdo. de Correos 1304

21080 - HUELVA

La raíz cuadrada y la matemática china

Santiago Fernández Fernández

Introducción

En este artículo se presenta uno de los algoritmos más utilizados en las clases de Matemáticas, el de la Raíz Cuadrada, el origen es probablemente Chino, descubierto a. J.C.

El lenguaje algorítmico tiene una gran fuerza en nuestras aulas, algoritmos de la suma, de la resta, del producto, de la división, de la raíz cuadrada, ... aparecen innumerables veces en nuestras clases. De entre todos hay uno verdaderamente misterioso nos referimos al algoritmo de la raíz cuadrada en su presentación más clásica, seguramente pocos profesores conocen su origen y menos su justificación.

Preocupado por responder a estas dos cuestiones me propuse bucear un poco en la Historia de las Matemáticas y seguir la pista de un algoritmo tan utilizado como poco conocido, parece que el origen y justificación del mismo pertenece a la misteriosa y poco estudiada Antigua Cultura China.

Cultura Matemática China

La Cultura China es tan antigua como la Egipcia y Mesopotámica y probablemente tan vitalista como ellas, no obstante las fuentes históricas que tenemos a nuestro alcance no pueden considerarse del todo objetivas, lo que hace mirar con ciertas dudas algunas de sus contribuciones.

Los primeros signos matemáticos de la Cultura China se atribuyen al documento *Zhoubi Suanjing* probablemente escrito hacia el siglo XII a. de J.C., pero sin duda el tratado más importante es *Jiuzhang Suanshu* (El arte matemático en Nueve Secciones) de autor y fechas de aparición desconocidos, está dividido en 9 secciones conteniendo en total 246 problemas, el *Jiuzhang Suanshu* (*JZS*) es considerado por los historiadores de la Matemática una especie de biblia matemática China, equivalente en cierto sentido a *Los Elementos* de Euclides, una diferencia a tener en cuenta entre estos dos tratados es que el *JZS* no contiene ninguna demostración. La influencia del *JZS* ha sido notable en otras culturas: Japón, Corea, Vietnam,...

En una de las Secciones aparece con todo detalle la manera de actuar para realizar el cálculo de la raíz cuadrada de un número.

Algoritmo de la raíz cuadrada

Queremos calcular la $\sqrt{55225}$ de acuerdo al algoritmo comentado anteriormente escribiríamos los cálculos organizados de la siguiente manera:

```
√5,52,25   | 235
-4         | 43 x 3 = 129
 152       | 465 x 5 = 2325
-129       |
  2325
 -2325
     0
```

Resultado $\sqrt{55225} = 235$

Surgen varias preguntas:

- ¿Por qué separar los números de 2 en 2 empezando desde la derecha?.

- ¿Por qué disponer los cálculos de forma tan caprichosa?.

- ¿ ... ?

En el *JZS* la disposición de cálculos es la siguiente:

Resultado (*Shang*)
Número dado (*Shi*)
Elemento Cuadrado (*fang fa*)
Apuntador (*Jie suan*)

(a)

55225
↑

(b)

2
15225
2
↑

(c)

2
15225
4
↑

(d)

23
15225
4
↑

(e)

23
2325
43
↑

(f)

23
2325
46
↑

(g)

235
2325
46
↑

(h)

235
465
↑

completando así la exposición

Sin duda esta presentación parece más complicada que la anterior, sin embargo tiene la esencia del proceso.

La clave está en la fórmula:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)\ b$

Si llamamos N = 55225,

$\sqrt{N} = abc = 100.a + 10.b + c$

(naturalmente estamos considerando N exacta)

La disposición de cálculos es la siguiente:

	a	a+b	a+b
N	$N - a^2$	$N - a^2$	$N - a^2 - (2a + b)\ b$
	a	2a	2a + b
↑	↑	↑	↑
(a)	(b)	(c)	(e)

a+b	a+b+c	a+b+c
$N - (a+b)^2$	$N - (a+b)^2$	$N - [2.\ (a+b) + c]\ .\ c = 0$
2 . a+b+c	2 . (a+b)	2 . (a+b) + c
↑	↑	↑
(f)	(g)	(h)

Notas:

- Al poner a, señalamos en realidad 100.a; b será 10.b; a+b+c representa por tanto abc; ...
- El apuntador nos señala la posición adecuada para disponer las operaciones.

Explicaciones:

Si nos damos cuenta cada vez que realizamos cálculos estamos acercándonos a la $\sqrt{N}$, así en el primer paso tomamos una primera aproximación:

$$N - a.a = N - a^2$$

En los siguientes pasos (e) nos seguimos aproximando

$$N - a^2 - (2a + b) = N - (a+b)^2$$

Y por último en (h) tenemos la última y definitiva aproximación, que en este caso dá por resto cero.

$$N - (a + b)^2 - [2\ (a+b) + c]\ .\ c = N - (a+b+c)^2 = 0$$

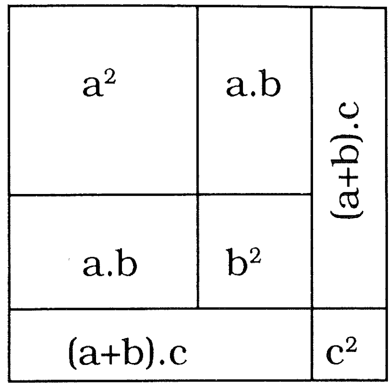
Si analizamos con detalle todo el proceso, vemos por ejemplo que una vez realizada la primera aproximación N - a^2 la segunda viene explicada en el esquema siguiente:

$\sqrt{5\,,\,52\,,\,25}$ — N | 2 3 5
- 4 — a^2 | 4 3 x 3 = 129 — (2.a+b).b
1 5 2 — N-a^2 | 4 6 5 x 5 = 2325 — [2(a+b)+c]c
- 1 2 9 — N-$(a+b)^2$
2 3 2 5
- 2 3 2 5 — N-$(a+b+c)^2$
0

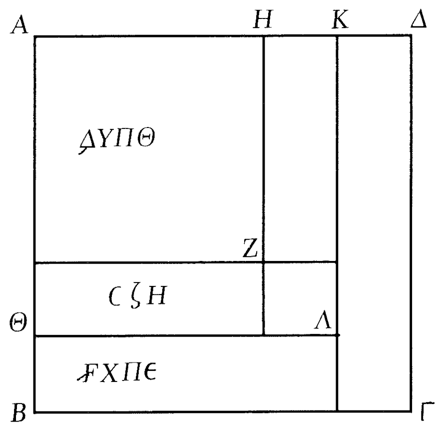
N = 55225; a=2 b=3 c=5

Justificación geométrica

Como sabemos la Cultura Griega era partidaria de asociar el Álgebra a la Geometría, surgiendo así la llamada Álgebra-Geométrica, justamente esa relación explica perfectamente estas aproximaciones sucesivas, el diagrama adjunto es suficientemente claro:



Como curiosidad es de notar que este mismo diagrama aparece en obras de un matemático griego como es Teón de Alejandría, siglo IV d. de J.C.



Referencias Bibliográficas

- Martzloff, J.C.: **Histoire des Mathematiques Chinoises**. MASSON, París (1987).

- Li Yan and Du Shiran: **Chinesse Mathematics**. Oxford Science Publications. (1987).

- Taton, R. y otros: **Historia General de las Ciencias I**. Ed. Destino. Barcelona. (1975).

La A.P.M.E.P. a través de su grupo de Lyon, organiza su congreso nacional los días

18, 19 y 20 de octubre de 1991

con el tema

"MATEMÁTICAS SIN FRONTERAS"

Los que deseen inscribirse, o presentar alguna comunicación, (en este caso, hay que enviar un resumen de 5 líneas) deben dirigirse a

A.P.M.E.P. LYON
Université Claude Bernard
43 Bd. du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX
FRANCE

antes de fin de mayo.

"La enseñanza de las matemáticas está cambiando mucho: innovación, investigación-acción, investigación, didáctica, didáctica-acción, epistemología, historia de las matemáticas.

¿Se trataría de un mundo sin fronteras?
¿Cómo se observan estos cambios fuera de nuestro hexágono (FRANCIA)?

También podemos intentar atravesar más fronteras, entrevistándonos con colegas de distintas asignaturas.

¿Por fin podrá uno iniciarse a las matemáticas, descubrirlas, aprender a construirlas, usarlas?
¿Qué formación se tiene que dar a los maestros?"

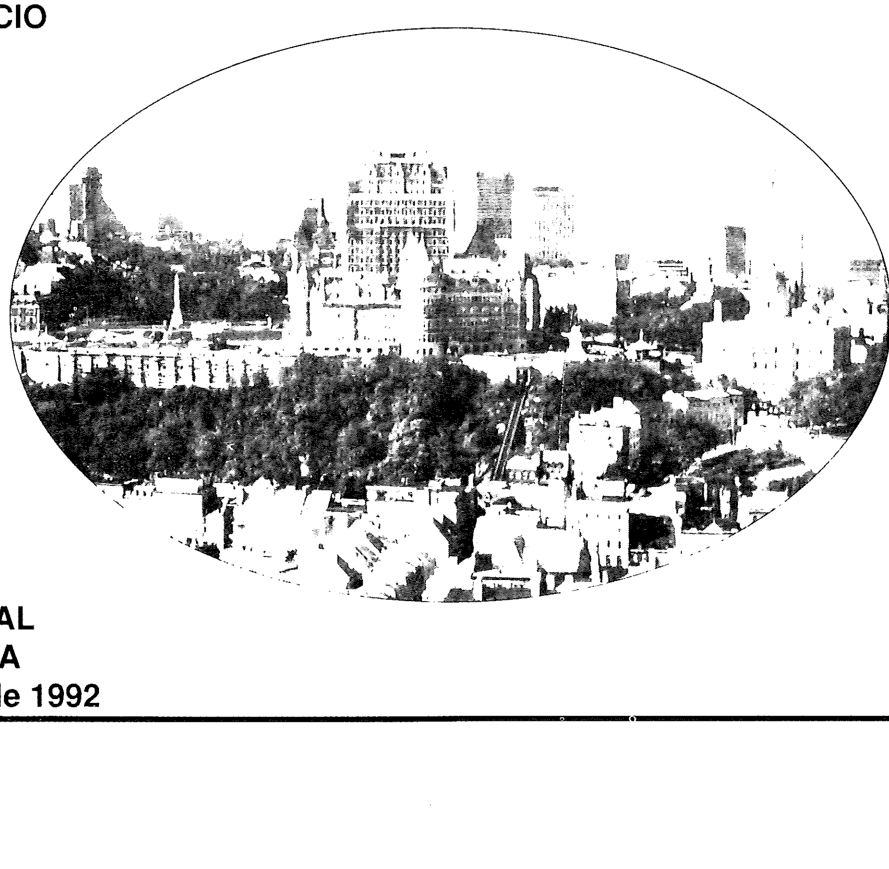
Han confirmado su participación:
C. Lobry: Conferencia sobre Análisis no-estandar e informática.
R. Jost: Matemáticas sin fronteras: una competencia interclases y transfonteriza.
P. Ennebeck. Matemáticas y francés, ¿qué transdisciplinariedad?.
G. Brousseau: Influencia de los procesos sociales y didácticos sobre el aprendizaje y los conocimientos matemáticos de los alumnos.
M. Legrand: Conferencia: Razonamiento matemático e iniciación a un proceder científico.
D. Lehwan: Geometrías planas no euclídeas.
R. Douady: Elaboración de enunciados de problemas: interacción entre matemáticas y didáctica de maestros.
P. Terracher: ¿Es razonable enseñar geometría?
A. Valabrègue: "Ver, saber, poder, concebir"
F. y J.P. Bertrandias: Matemáticas para las ciencias de la naturaleza.
P. Audin: Matemáticas en vaqueros.
J. Delerue: Utilización de imágenes analógicas y numéricas en un curso de matemáticas.
F. Magna: La enseñanza de las matemáticas a los no-videntes.
P. Linati: La escuela Europea de Varese (Italia).
M. Pupier: Modelización en biología.
M. Berger: Conferencia sobre geometría.
J. Grea: Modelización en Física.
¿¿XX??: La didáctica en los países del Este.

Diversos talleres presentados por el IREM de Lyon.

7° CONGRESO INTERNACIONAL SOBRE EDUCACION MATEMATICA

ICME 7

SEGUNDO ANUNCIO



UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, CANADA
17-23 de Agosto de 1992

FECHAS LIMITES

INSCRIPCIONES (ver página 9 y el formulario incluido)

	Pago antes del 15 de Diciembre de 1991	Pago antes del 15 de Junio de 1992	Pago después del 15 de Junio de 1992
Participante	290 $CAN	340 $CAN	395 $CAN
Acompañante	90 $CAN	105 $CAN	125 $CAN

Todos los impuestos están incluidos en la matrícula de inscripción. Los pagos deberán efectuarse en dólares canadienses. Sólo en caso de dificultad especial se aceptará el dólar americano ($US) según la siguiente tarifa:

	Pago antes del 15 de Diciembre de 1991	Pago antes del 15 de Junio de 1992	Pago después del 15 de Junio de 1992
Participante	250 $US	295 $US	345 $US
Acompañante	80 $US	90 $US	110 $US

REEMBOLSO (ver página 9)

La anulación de inscripciones deberá efectuarse por correo, fax. correo electrónico o télex.

Reembolso del 90% si se recibe la anulación antes del 15 de Febrero de 1992.
Reembolso del 80% si se recibe la anulación antes del 15 de Junio de 1992.
Reembolso del 50% si se recibe la anulación antes del 15 de Julio de 1992.

No se reembolsará ningún pago posterior al 15 de Julio de 1992.

SOLICITUD DE RESERVA DE HABITACION (ver página 8 y el formulario incluido)

Fecha límite: 1 de Julio de 1992

PROPUESTA DE COMUNICACION BREVE (ver página 6 y el formulario incluido)

Fecha límite: 31 de Enero de 1992

PRESENTACION DE PROYECTO (ver página 7)

Fecha límite: 31 de Enero de 1992

DIRECCION DEL CONGRESO

CONGRÈS ICME-7 CONGRESS
UNIVERSITÉ LAVAL
QUÉBEC, QC
CANADA G1K 7P4

Teléfono: (418) 656-7592
Fax: (418) 656-2000
Correo electrónico: ICME-7@VM1.ULAVAL.CA
Télex: (021) 051-31621 UNILAVAL QBC

UNIVERSITÉ LAVAL

INTRODUCCION

En nombre de la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI), el Comité Nacional Canadiense del ICME-7 le invita a participar en el Séptimo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-7), a celebrarse en la Université Laval, Québec (Canadá). El congreso se llevará a efecto del 17 al 23 de Agosto de 1992.

Los idiomas oficiales del Congreso serán el inglés y el francés, aunque se anticipa que la mayoría de las sesiones se desarrollarán en inglés. Algunos servicios estarán disponibles en tres idiomas: inglés, francés y español.

Este segundo anuncio ofrece información sobre el programa, actividades del Congreso, inscripción y alojamiento. Incluye además, los formularios de inscripción, de reserva de habitación y de propuesta para una comunicación breve.

SI USTED PREVE ASISTIR AL CONGRESO, RELLENE Y DEVUELVA, LO ANTES POSIBLE Y POR AVION, LOS FORMULARIOS DE INSCRIPCION Y DE RESERVA DE HABITACION ACOMPAÑADOS DEL PAGO CORRESPONDIENTE.

El tercer anuncio estará disponible en Abril de 1992 e incluirá el programa detallado del Congreso. Este se hará llegar a las personas que hayan enviado los formularios y el pago correspondiente antes del 15 de Junio de 1992, a la dirección del ICME-7. Aquellos cuyos formularios sean recibidos después de esta fecha recibirán el programa en el lugar del Congreso.

QUEBEC: LA CIUDAD ANFITRIONA

Fundada en 1608 por Samuel de Champlain, Québec es la ciudad más antigua de Canadá, capital de la provincia del mismo nombre y cuna de la civilización francesa en América. Ciudadela natural dominando el majestuoso río Saint-Laurent, es la única ciudad fortificada al norte de México. Declarada patrimonio mundial por la UNESCO por su riqueza histórica y cultural, la belleza y el carácter francés han hecho de Québec un lugar privilegiado que atrae a turistas del mundo entero y donde encontramos la hospitalidad y la «joie de vivre» tradicionales de los «Québécois». Québec también seduce por sus buenos restaurantes, sus terrazas y su vida nocturna.

En el mes de Agosto, época del ICME-7, la actividad turística llega a su más alto nivel y se celebran diversas actividades en la ciudad. Por tanto, no espere más y formule lo antes posible su reserva de viaje.

El congreso se celebrará en el campus de la Université Laval, situado a 7 km del centro de la ciudad. Se ofrece una gran variedad de servicios; la mayoría de los grandes edificios están climatizados y acondicionados para el acceso de personas minusválidas. El campus se puede cruzar andando en unos 15 minutos, y además encontrará pistas especiales para pasear, hacer jogging o incluso practicar su deporte favorito. Cuatro centros comerciales se encuentran cerca del campus y se puede ir en autobús rápidamente a la parte antigua de Québec.

INFORMACION GENERAL

Transportista oficial

Air Canada, transportista oficial del ICME-7, ofrece varios vuelos desde muchas ciudades de Europa y Estados Unidos a todas las regiones de Canadá. Los congresistas del ICME-7 pueden aprovechar tarifas especiales dirigiéndose a cualquier oficina de Air Canada (en América del Norte, el número de teléfono es: 1-800-361-7585). Basta preguntar por el Servicio de congresos indicando el código CY920017 del ICME-7.

Llegada a Québec

La mayoría de los vuelos con destino Québec parten del aeropuerto de Dorval, en Montréal. Si usted llega al aeropuerto de Mirabel (otro aeropuerto de Montréal) encontrará un enlace a su disposición para ir a Dorval. Una oficina de información de ICME-7 permanecerá abierta en las horas punto durante los días 15 y 16 de Agosto de 1992 en el aeropuerto de Québec, situado a 10 km de la Université Laval.

Si usted prefiere viajar de Montréal a Québec en autobús, puede tomar uno de los autobuses regulares desde el aeropuerto de Mirabel o desde el de Dorval al centro de la ciudad de Montréal, donde podrá viajar en un tiempo aproximado de dos horas y media en uno de los autobuses que parten cada hora hacia Québec. También algunos trenes conectan las ciudades de Montréal y Québec. Tanto si viaja en tren como en autobús, deberá apearse en la estación de Sainte-Foy, a pocos kilómetros del campus.

Si usted prefiere alquilar un coche, podrá hacerlo en cualquiera de los aeropuertos mencionados, así como en las ciudades de Montréal y de Québec.

Visados

Los visitantes de algunos países necesitarán un visado de entrada a Canadá. La solicitud del visado deberá efectuarse al menos con tres meses de antelación en el consulado canadiense más próximo o en cualquier representación oficial de Canadá.

Aviso a los participantes japoneses

La agencia oficial del ICME-7 en Japón es Canon Tours Inc., 1-9-12 Nishi-Shinjuku, Shinjuku-Ku, Tokyo 160, Japon (teléfono: (03) 346-2249, fax: (03) 342-1911).

Clima y vestimenta

En Agosto, la temperatura de Québec varía entre los 12°C y 23°C (54°F y 73°F). Durante el día el tiempo es muy agradable, aunque las tardes pueden ser más frescas. En esta época del año hay riesgo de chubascos ocasionales. Asegúrese, pues, de llevar la vestimenta apropiada.

Seguros de salud y personales

Los gastos médicos y la hospitalización pueden ser muy elevados para los visitantes, por lo cual se sugiere a todos los participantes la contratación de un seguro individual antes de dejar su país, que incluya gastos médicos y de hospitalización. También se recomienda el seguro contra pérdida de equipaje y los cambios de horario de los vuelos. Los organizadores del ICME-7 se desentienden de toda responsabilidad a este respecto.

Servicios en el campus

En el mismo campus, además de las residencias de estudiantes se encuentran varios restaurantes (cafeterías y otros servicios de alimentación), un colmado, un banco, una oficina de correos, una librería, una capilla ecuménica y también una gran zona de estacionamiento (gratuita para aquellos que estén alojados en las residencias). La mayoría de los edificios tienen accesos especiales para minusválidos. Los servicios de guardería también estarán disponibles para los hijos de los congresistas.

Excursiones turísticas antes y después del Congreso

Han sido programadas varias excursiones antes y después del Congreso que partirán de Québec y de Montréal. Comprenden desde visitas de uno, dos o tres días hasta viajes organizados de una semana. Se proponen destinos populares como la zona de Charlevoix y de Saguenay-Lac Saint-Jean, la Gaspésie, Ottawa, Toronto y las cataratas del Niágara. Podrá obtener el programa que detalla las excursiones turísticas en el tercer anuncio. Para más información diríjase a la dirección del Congreso.

PROGRAMA CIENTIFICO

Los congresos ICME son una ocasión única para descubrir lo que pasa en la educación matemática en el mundo, para reflexionar sobre las responsabilidades y las realizaciones relativas a este campo, identificar los problemas, conocer novedades y tomar contacto con los últimos progresos hechos en matemáticas, así como con las más recientes investigaciones sobre su aprendizaje y su enseñanza. De manera general, estos encuentros favorecen el intercambio de puntos de vista y de experiencias sobre métodos prácticos y teóricos, aplicados a la enseñanza de las matemáticas a todos los niveles. El programa ha sido estructurado de manera que ofrezca una vasta gama de actividades que animen a todos los congresistas a dedicar algún tiempo a intercambiar ideas y experiencias. El comité organizador reservará salones disponibles a ciertas horas predeterminadas para que los participantes puedan tomar la iniciativa de organizar sesiones informales.

Los apartados más importantes se exponen a continuación. Un programa detallado aparecerá junto con el tercer anuncio.

Sesiones plenarias

Ceremonias de apertura y clausura.

Conferencias plenarias de Geoffrey Howson (UK), Colette Laborde (Francia) y Benoit Mandelbrot (Francia y USA).

Grupos de trabajo

Objetivos: a) involucrar al congresista en un estudio activo de un determinado aspecto de las matemáticas;
b) conseguir un contexto internacional para el estudio de este aspecto.

Cada grupo de trabajo se reunirá en cuatro sesiones de 90 minutos.

A cada congresista se le pedirá que elija un grupo de trabajo de entre los señalados en la siguiente lista.

WG1 Formación de conceptos matemáticos elementales en la enseñanza primaria
Organizadora general: Helen Mansfield (Australia)

WG2 Concepciones erróneas y contradicciones de pensamiento de los estudiantes
Organizador general: Shlomo Vinner (Israël)

WG3 Dificultades de los estudiantes en el cálculo diferencial e integral
Organizadores generales: Michèle Artigue (Francia), Gontran Ervynk (Bélgica)

WG4 Teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas
Organizadora general: Pearla Nesher (Israël)

WG5 Mejora de las actitudes y de las motivaciones de los alumnos
Organizadora general: Gilah Leder (Australia)

WG6 Formación inicial y perfeccionamiento del profesorado
Organizador general: John Dossey (USA)

WG7 Lenguaje y comunicación en el aula
Organizador general: Heinz Steinbring (Alemania)

WG8 Innovaciones en la evaluación de los estudiantes en la clase de matemáticas
Organizadores generales: Zoltán Báthory, Júlia Szendrei (Hungría)

WG9 La diferenciación de los programas de matemáticas dentro del aula y entre aulas diferentes
Organizador general: Skip Kifer (USA)

WG10 Clases pluriculturales y plurilingües
Organizador general: Patrick Scott (USA)

WG11 El papel de la geometría en la educación general
Organizadora general: Rina Hershkowitz (Israël)

WG12 Probabilidad y estadística para el futuro ciudadano
Organizadores generales: James Schultz (USA), Mary Rouncefield (UK)

WG13 El lugar del álgebra en la enseñanza secundaria y postsecundaria
Organizadora general: Carolyn Kieran (Canadá)

WG14 Actividades de modelización en el aula
Organizador general: Trygve Breiteig (Noruega)

WG15 Matemáticas de nivel postsecundario para diferentes grupos de estudiantes
Organizador general: Daniel Alibert (Francia)

WG16 El impacto de la calculadora en el curriculum de las escuelas elementales
Organizadora general: Hilary Shuard (UK)

WG17 La tecnología al servicio del curriculum de las matemáticas
Organizador general: Klaus-Dieter Graf (Alemania)

WG18 Métodos para la implementación del cambio curricular
Organizador general: Hugh Burkhardt (UK)

WG19 Matemáticas para alumnos que abandonan prematuramente sus estudios
Organizador general: Carlos Vasco (Colombia)

WG20 Matemáticas en educación a distancia
Organizador general: Gordon Knight (Nueva Zelanda)

WG21 La imagen pública de las matemáticas y de los matemáticos
Organizador general: Thomas Cooney (USA)

WG22 Educación matemática con medios limitados
Organizador general: Fidel Oteiza (Chile)

WG23 Metodologías para la investigación en educación matemática
Organizador general: (por designar)

Conferencias

Se han previsto unas cuarenta conferencias en el programa. Versarán sobre temas ligados a la enseñanza, a los programas, a la formación del profesorado, a la investigación en educación, a la historia y sociología de las matemáticas, a las teorías en didáctica de las matemáticas y a los más recientes resultados en matemáticas.

Grupos temáticos (lista parcial)

Cada grupo temático se reunirá en dos sesiones de 90 minutos.

Se ruega a cada participante que elija uno de entre los siguientes grupos y que lo indique en el formulario de inscripción.

TG1 Competiciones matemáticas
Organizador general: Edward Barbeau (Canadá)

TG2 «Ethnomatemática» y educación matemática
Organizador general: Ubiratán D'Ambrosio (Brasil)

TG3 Matemáticas para el trabajo y enseñanaza profesional
Organizador general: Rudolf Strässer (Alemania)

TG4 Los pueblos autóctonos y la educación matemática
Organizador general: Bill Barton (Nueva Zelanda)

TG5 El contexto social de la educación matemática
Organizador general: Alan Bishop (UK)

TG6 La teoría y la práctica de la demostración matemática
Organizadores generales: Gila Hanna (Canadá), Niels Jahnke (Alemania)

TG7 Juegos y rompecabezas matemáticos
Organizador general: Tibor Szentivanyi (Hungría)

TG8 Enseñanza de las matemáticas mediante proyectos
Organizador general: Jarkko Leino (Finlandia)

TG9 Las matemáticas en el contexto de un curriculum total
Organizador general: John Mack (Australia)

TG10 Interpretaciones constructivistas de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas
Organizadores generales: John Malone, Peter Taylor (Australia)

TG11 Matemáticas y arte iberoamericano
Organizador general: Rafael Pérez-Gómez (España)

TG12 El papel de las posiciones teóricas fundamentales en educación matemática
Organizador general: Hans-Georg Steiner (Alemania)

TG13 La televisión en el aula de matemáticas
Organizador general: David Roseveare (UK)

TG14 Cooperación entre teoría y práctica en la educación matemática
Organizador general: Falk Seeger (Alemania)

TG15 Estadística en el curriculum de la secundaria y postsecundaria
Organizador general: Richard Schaeffer (USA)

TG16 Filosofía de la educación matemática
Organizador general: Paul Ernest (UK)

Grupos de Estudio

La Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI) cuenta oficialmente con tres grupos internacionales de estudio: PME (Grupo internacional de psicología de la educación matemática), HPM (Grupo internacional de estudio de las relaciones entre la historia y la pedagogía de las matemáticas), y IOWME (Organización internacional de mujeres y educación matemática). Cada uno de los grupos organizará cuatro sesiones de 90 minutes cada una.

Estudios del ICMI

Tres estudios realizados por el ICMI serán presentados en el congreso. Se ha previsto una duración de dos o cuatro sesiones de 90 minutos para cada una de ellas.

S1 La influencia de los ordenadores y de la informática en las matemáticas y en su enseñanza (*nueva edición*)
Organizador general: Bernard Cornu (Francia)

S2 La popularización de las matemáticas
Organizador general: Henry Pollak (USA)

S3 La evaluación en la educación matemática y sus efectos
Organizador general: Mogens Niss (Dinamarca)

Minicongreso sobre calculadoras y ordenadores

Organizadores: Rosemary Fraser (UK), Eric R. Muller (Canada)

Esta conferencia especial de medio día al principio del congreso está pensada para dar la oportunidad a los participantes de recopilar información, compartir experiencias y discutir estrategias, con el proposito de avanzar en las aplicaciones prácticas de la nueva tecnología en las aulas de todo el mundo. El programa incluirá sesiones plenarias, simulación de aulas y presentaciones breves.

Se ruega a los participantes que escojan un grupo de trabajo y que indiquen esta elección en el formulario de inscripción.

MC1 Estudiantes de 5-11 años
MC2 Estudiantes de 11-16 años
MC3 Estudiantes de 15-18 años
MC4 Estudiantes de la licenciatura de Matemáticas
MC5 Futuros profesores

Presentaciones nacionales

Algunos países representados en el ICMI expondrán cintas de video enseñando aspectos de educación matemática en su país. Canadá, como país anfitrión, hará una presentación especial.

Comunicaciones breves

En un congreso internacional, muchos congresistas pueden tener dificultades para expresarse o para comprender a sus colegas en uno de los idiomas oficiales o en los dos. En estas cirscuntancias, las comunicaciones orales de 10 minutos, presentes tradicionalmente en la programación, tienen poco valor. Por esta razón, a los participantes del ICME-7 se les ofrece la oportunidad de presentar comunicaciones breves a través de posters o excepcionalmente por medio de videos o software. Los posters estarán expuestos durante la mayor parte del desarrollo del congreso y sus autores serán invitados a organizar encuentros para intercambiar ideas con las personas interesadas. Para ser aceptados, los posters deben tener una dimensión de 70 cm por 100 cm. El texto, especialmente los cuadros y gráficos, debe ser claro y legible a una distancia de un metro. Los posters que no responden a estas exigencias no podrán ser expuestos.

El mismo formulario debe ser utilizado para las propuestas de comunicación a través de un video o software. Más que presentar un resumen, la proposición debe describir el producto y especificar detalladamente la característica del material requerido. Es necesario señalar que sólo los sistemas que son utilizados en América del Norte estarán disponibles durante el congreso. Por otra parte, los responsables no pueden garantizar que el material solicitado pueda ser proporcionado aunque la proposición haya sido aceptada.

Para poder ser aceptada una comunicación, la persona interesada debe hacer llegar un resumen o la descripción de la misma en inglés o en francés. El formulario aquí incluido, debidamente rellenado, será recibido a más tardar el 21 de Enero de 1992 a la dirección indicada. (Los resúmenes transmitidos por fax o por correo electrónico serán rechazados.) Las cartas de aceptación o de rechazo serán enviadas a las personas interesadas a más tardar el 15 de Marzo de 1992.

El resumen o la descripción debe ser mecanografiado en caracteres de 10 a 12 pulgadas (2,5 cm), en el interior del rectángulo azul al dorso del formulario. La impresión del texto debe ser lo mas nítida posible, de manera que facilite su reproducción. Las copias obtenidas a través de una impresora por puntos no son generalmente de buena calidad. El comité de programa podrá rechazar una proposición no conforme a las indicaciones antes mencionadas.

Para facilitar la clasificación de las comunicaciones y los intercambios entre congresistas, los autores deben indicar en el formulario el grupo de trabajo, grupo temático o grupo del mini-congreso al cual se relaciona más su propuesta. Los resúmenes de las comunicaciones serán entregados a los congresistas a su llegada.

Los autores de comunicaciones breves que necesitan una invitación especial al congreso pueden hacer la demanda escribiendo a la dirección del ICME-7. La carta hará referencia a una «comunicación breve» sin precisar el modo de presentación (poster, video o software).

Proyectos

Tras una seleccion un numero limitado de proyectos será incluido en el programa final. Cada proyecto podrá ser presentado a traves de una exposición de posters o una exposición oral o una mezcla de estas posibilidades. Por «proyecto» se entiende un trabajo realizado por los miembros de un grupo numeroso identificado por un nombre reconocido.

Todo grupo que desee proponer la presentación de un proyecto debe acompañar su petición de una carta en la cual hará notar la contribución científica al congreso. Indicará la forma que tomará el proyecto, así como el material necesario para su presentacion. Las peticiones deben llegar antes del 31 de Enero de1992 a la siguiente dirección: Présentations de projets, Congrès ICME-7 Congress, Université Laval, Québec, QC, Canada G1K 7P4.

Reuniones especiales

Además de la Asamblea General del ICMI están previstas distintas reuniones: responsables de revistas sobre la educación matemática. representantes de organizaciones nacionales de profesores de matemáticas, el Comité Interamericano de Educación Matemática, participantes que hayan asistido a todos los congresos ICME, etc.

Exposiciones, talleres, etc.

Los responsables del congreso esperan una gran participación de editoriales y asociaciones profesionales en la exposición de libros, software informático y otros materiales didácticos. También se presentarán exposiciones de matemáticas en relación con el arte y la artesanía, material de archivo y trabajos infantiles. Habrá también un taller de juegos matemáticos, proyección de películas y un «sendero matemático».

ACTOS SOCIO-CULTURALES

El programa prevé un número de actos de carácter social o cultural. Entre otros, cocktails y recepciones así como una noche cultural. El jueves 20 de Agosto, día de excursiones, los congresistas podrán escoger entre distintas propuestas de circuitos. Otras actividades estarán disponibles con un suplemento. La información más precisa será publicada en el tercer anuncio.

HORARIO

El horario detallado aparecerá en el tercer anuncio.

La oficina de recepción estará abierta desde las 10 hasta las 22 horas del domingo 16 de Agosto y a partir de las 7 horas del lunes 17 de Agosto.

El Congreso empieza oficialmente el lunes 17 de Agosto a las 9 horas y finaliza el domingo 23 de Agosto a las 12.30.

El mini-congreso sobre calculadoras y ordenadores tendrá lugar la tarde del lunes 17 de Agosto.

Los grupos de trabajo, los grupos temáticos y los grupos de estudio están previstos los días 18, 19, 21 y 22 de Agosto.

Algunas actividades científicas y culturales tendrán lugar por las tardes.

El jueves 20 de Agosto no hay previstas actividades científicas por estar reservado para la excursión.

ALOJAMIENTO

La Centrale d'hébergement de l'Office du tourisme et des congrès de la Communauté urbaine de Québec es la responsable de las reservas de habitación para el ICME-7. Por favor use el formulario de reserva para este fín. No es posible reservar habitación por teléfono.

Las solicitudes de habitación serán aceptadas hasta el 1 de Julio de 1992 y por riguroso orden de llegada. Después de esta fecha usted será responsable de su reserva. Los organizadores del ICME-7 se desentienden de toda responsabilidad respecto a reservas y anulaciones de habitaciones, así como de cualquier gasto que pudiera conllevar.

La Centrale d'hébergement le enviará confirmación escrita con el nombre del establecimiento asignado, el precio exacto y demás datos de interés.

Para información, cambio o anulación antes del 1 de Julio de 1992, puede comunicarse con la Centrale d'hébergement por teléfono (418) 529-2402 o por fax (418) 529-3121.

Alojamiento en el campus

Cada habitación tiene un lavabo y en cada piso hay duchas y servicios.

Tarifas:	habitación individual, una cama:	32 $CAN por noche (más impuestos — 15,56% en el momento actual)
	habitación individual, dos camas:	45 $CAN por noche (más impuestos — 15,56% en el momento actual)

Todas las camas son individuales. La expresión «habitación individual, dos camas» indica habitación individual con una cama suplementaria.

El precio por habitación incluye el desayuno, permiso de estacionamiento, sábanas, toallas, jabón y limpieza diaria de la habitación. El pago en dólares canadienses ($CAN) se efectuará a la llegada (se aceptan Visa y MasterCard).

Hoteles y moteles

Se han reservado habitaciones para los congresistas y su familia en hoteles y moteles de cuatro categorías diferentes. Algunos cerca del campus y otros en el casco antiguo de Québec, a 7 km de la universidad.

Todas las tarifas están en dólares canadienses ($CAN) por día y sólo por habitación (impuestos no incluidos). La factura deberá pagarse directamente en el establecimiento antes de la partida.

Categoría A: 150 $CAN o más

Categoría B: 125-150 $CAN

Categoría C: 100-125 $CAN

Categoría D: 75-100 $CAN

Camping

Es posible acampar en la región de Québec. Los interesados pueden escribir a la dirección del ICME-7.

DERECHOS DE INSCRIPCION

A fin de evitar retrasos en la oficina de inscripciones se recomienda la inscripción por adelantado. Los derechos deben ser pagados para que la inscripción sea aceptada.

Por favor, rellene el formulario de inscripción incluido y devuélvalo a la dirección del Congreso junto con el pago. Se recomienda conservar une copia del formulario de inscripción y de la correspondencia concerniente al ICME-7.

Las inscripciones en el ICME-7 pueden ser en calidad de participante o de acompañante. En este último caso podrá elegir entre rellenar el formulario junto con el participante o bien uno propio. Los participantes podrán tomar parte en todas las actividades científicas y socio-culturales del programa y recibirán gratuitamente las Actas del Congreso. Los acompañantes podrán tomar parte en los actos sociales pero no participarán en el programa científico ni recibirán las Actas del Congreso. Por otra parte, los niños menores de 15 años no pagarán derechos de inscripción pero podrán participar en las actividades culturales y excursiones.

¡APROVECHE LAS TARIFAS REDUCIDAS OFRECIDAS A LOS QUE SE INSCRIBAN CON ANTELACION!

	Pago antes del 15 de Diciembre de 1991	**Pago antes del 15 de Junio de 1992**	**Pago después del 15 de Junio de 1992**
Participante	290 $CAN	340 $CAN	395 $CAN
Acompañante	90 $CAN	105 $CAN	125 $CAN

El pago debe efectuarse en dólares canadienses ($CAN). Sólo en caso de dificultad especial se aceptará el dólar americano ($US) según la siguiente tarifa:

	Pago antes del 15 de Diciembre de 1991	**Pago antes del 15 de Junio de 1992**	**Pago después del 15 de Junio de 1992**
Participante	250 $US	295 $US	345 $US
Acompañante	80 $US	90 $US	110 $US

Todos los impuestos están incluidos en los derechos de inscripción. El pago mediante tarjeta de crédito será aceptado (Visa, MasterCard o American Express solamente), al igual que los giros postales, transferencias bancarias y cheques personales hechos a la orden del «Congrès ICME-7». Los cheques personales serán aceptados solamente si son a favor de bancos canadienses.

Un acuse de recibo será enviado a todos aquellos que se inscriban antes del 15 de Junio de 1992. Después de esta fecha no se enviarán acuses de recibo.

Las personas que participen activamente en el programa o en la organización no están exentas de los derechos de inscripción.

Reembolsos

Las cancelaciones de inscripciones deben ser recibidas por correo, fax, correo electrónico o télex.

Reembolso del 90% si la cancelación se recibe antes del 15 de Febrero de 1992.
Reembolso del 80% si la cancelación se recibe antes del 15 de Junio de 1992.
Reembolso del 50% si la cancelación se recibe antes del 15 de Julio de 1992.

No se harán reembolsos si el aviso de devolución es recibido después del 15 de Julio de 1992.

COMISION INTERNACIONAL DE EDUCACION MATEMATICA
COMITE EJECUTIVO (1991-1994)

Miguel de Guzmán, *presidente*
Yu. Ershov
Jean-Pierre Kahane
Jeremy Kilpatrick
Jacques-Louis Lions
Eduardo Luna
Mogens Niss, *secretario-tesorero*
Jacob Palis Jr.
Lee Peng Yee
Anna Sierpinska
Jacobus H. van Lint

COMITE NACIONAL DE ICME-7

John Berry
Michael Cassidy
Pierre De Celles
John C. Egsgard
Claude Gaulin
Gila Hanna
Carl Herz
Bernard R. Hodgson, *presidente*
Lars Jansson
Carolyn Kieran
Thomas E. Kieren
Jean-Claude Méthot
Eric R. Muller
David F. Robitaille
Patricia K. Rogers
Rémi Vaillancourt
Charles Verhille
David Wheeler
Edgar R. Williams
Edward Zegray

COMITE INTERNACIONAL DE PROGRAMA

Claudi Alsina
Willibald Dörfler
Rosemary Fraser
Geoffrey Howson (antes de Enero 1991)
Edward Jacobsen
Jeremy Kilpatrick
Lev Kudriatsev
Eduardo Luna
Eric R. Muller
Roberta Mura
Tibor Nemetz
Mogens Niss (después Enero 1991)
Lee Peng Yee
David F. Robitaille
Anna Sierpinska
David Wheeler, *presidente*

COMITE DE ORGANIZACION LOCAL

Ejecutivo
Claude Gaulin, *presidente*
Bernard R. Hodgson
Dominique Houde, *ejecutiva adjunta*
Edward Zegray

Secretaria
Ginette Lamontagne

Otros miembros
Julien Bouchard
Louis-Philippe Gaudreault
Lévis Lemire
Marcel Mius d'Entremont
Lucille Roy

Colaboradores
Rosanne Bruneau
Charles Cassidy
Jean Dionne
Charlotte Gélinas
Hélène Kayler
Raynald Lacasse
Hervé-G. Morin
Elizabeth Ann Schofield

COMITE EJECUTIVO

John C. Egsgard
Claude Gaulin
Bernard R. Hodgson
Carolyn Kieran
Eric R. Muller
David F. Robitaille, *presidente*
Rémi Vaillancourt
David Wheeler

COMITE DE FINANCIAMIENTO

Subvenciones gubernamentales
John Berry
Claude Gaulin
Bernard R. Hodgson
Maurice Labbé
Rémi Vaillancourt, *presidente*

Financiamiento privado
Julien Bouchard
Jean-Marie De Koninck
Ron Fitzgerald
Dominique Houde
Lévis Lemire
Guy-W. Richard
Edgar R. Williams
Edward Zegray, *presidente*

COMITE DE EXPOSICIONES

Exposición de materiales didácticos
Thomas Déri, *co-presidente*
Bob Robinson, *co-presidente*

Otras exposiciones
Claude Gaulin
Lévis Lemire, *presidente*
Marcel Mius d'Entremont
Richard Pallascio

COMITE DE ENLACE

Michael Cassidy, *co-presidente*
John C. Egsgard
Edward Zegray, *co-presidente*

FORMULAIRE DE PROPOSITION D'UNE COMMUNICATION BRÈVE

Nom ______________________ Prénom(s) ______________________

Adresse ____

____

____

Ville ______________________ Province/État ______________________

Code postal ______________________ Pays ______________________

Téléphone (______) ______________________ Télécopieur (______) ______________________
code régional numéro(s) code régional numéro

Télex ______________________ Adresse électronique ______________________

Je désire faire une communication brève par ☐ affiche ☐ bande vidéo ☐ logiciel.

(Cochez une case seulement)

S'il s'agit d'une communication par bande vidéo ou par logiciel, veuillez spécifier en détail les caractéristiques du matériel requis (type d'appareil, moniteur, voltage, fréquence en hertz, mémoire, système d'exploitation, taille de la disquette, etc.) ______________________

____

Identifiez le Groupe auquel le sujet de votre proposition s'associe le mieux:

☐ Groupe de travail WG___ ☐ Groupe thématique TG___ ☐ Groupe du mini-congrès MC____

(Cochez une case seulement et ajoutez le numéro du groupe)

Veuillez dactylographier le résumé ou la description au verso de ce formulaire suivant les instructions de la page 6.

Date limite de réception des propositions: 31 janvier 1992.

Les résumés et descriptions transmis par télécopieur ou courrier électronique ne seront pas pris en considération.

Prière d'envoyer le formulaire à: Communications brèves
Congrès ICME-7 Congress
Université Laval
Québec, QC
Canada G1K 7P4

Le résumé ou la description doit être dactylographié à raison de 10 à 12 caractères au pouce (2.5 cm). à l'intérieur du rectangle bleu. Le texte doit ressortir le plus nettement possible afin d'en faciliter la reproduction. Les copies obtenues à l'aide d'une imprimante à matrice par points ne sont généralement pas de qualité suffisante. Le Comité du programme pourra rejeter une proposition non conforme aux directives de la page 6.

TITRE ______________________________

____

AUTEUR-E(S) ______________________________

____

INSTITUTION ______________________________

RÉSUMÉ OU DESCRIPTION

FORMULAIRE D'INSCRIPTION

Prière d'utiliser un formulaire par participant-e

Nom ______________________ Prénom(s) ______________________

Adresse ____

____

____

Ville ______________________ Province/État ______________________

Code postal ______________________ Pays ______________________

Téléphone (______) ______________________ Télécopieur (______) ______________________
code régional numéro(s) code régional numéro

Télex ______________ Adresse électronique ______________________

Personne(s) accompagnante(s)

	Nom	Prénom(s)
1.	______________________	______________________
2.	______________________	______________________
3.	______________________	______________________

Veuillez indiquer les numéros des Groupes auxquels vous avez l'intention de participer:

Groupe de travail WG ____ Groupe thématique TG ____ Groupe du mini-congrès MC ____

FRAIS D'INSCRIPTION (taxes incluses)

Le paiement doit être effectué en dollars canadiens ($CAN). Dans les cas où cela occasionnerait des difficultés spéciales, le dollar américain ($US) pourra être accepté. Les paiements par carte de crédit (Visa, MasterCard ou American Express seulement) sont acceptés. Les mandats postaux, les traites bancaires et les chèques personnels doivent être émis à l'ordre du «Congrès ICME-7». Veuillez noter que les chèques personnels ne seront acceptés que s'ils sont tirés sur une banque canadienne.

	Paiement avant le 15 décembre 1991	**Paiement avant le 15 juin 1992**	**Paiement après le 15 juin 1992**
Participant-e	290 $CAN (250 $US)	340 $CAN (295 $US)	395 $CAN (345 $US)
Personne accompagnante	90 $CAN (80 $US)	105 $CAN (90 $US)	125 $CAN (110 $US)

Participant-e	1	x $__________	_____$__________
Personne(s) accompagnante(s)	___	x $__________	_____$__________
		TOTAL	__________

(verso)

VEUILLEZ INDIQUER LE MODE DE PAIEMENT:

☐ Mandat postal ☐ Traite bancaire ☐ Chèque personnel tiré sur une banque canadienne

☐ Carte de crédit *(prière de compléter)*:

☐ Visa ☐ MasterCard ☐ American Express

______________________________ ______________________________

Numéro de la carte de crédit Date d'expiration

Montant total versé: __________$CAN ou __________$US *(autres devises non acceptées)*

Date__________________________ Signature____

Envoyez à: **CONGRÈS ICME-7 CONGRESS**
Université Laval
Québec, QC
Canada G1K 7P4

FORMULAIRE DE RÉSERVATION DE CHAMBRE

La réservation ne sera faite que si les frais d'inscription ont été reçus en entier

Prière d'écrire en lettres majuscules

M. ☐ Mme ☐

Nom ______________________ Prénom(s) ______________________

Adresse ____

____

Ville ______________________ Province/État ______________________

Code postal ______________________ Pays ______________________

Téléphone (______) ______________________ Télécopieur (______) ______________________
code régional numéro(s) code régional numéro

Date d'arrivée ____________ Heure ____________ Date de départ ____________

La Centrale d'hébergement de l'Office du tourisme et des congrès de la Communauté urbaine de Québec sera responsable des réservations de chambre jusqu'au 1er juillet 1992. Après cette date, vous serez entièrement responsable de voir à ce que votre réservation soit faite.

Hébergement demandé pour ________ adulte(s) et ________ enfant(s) âgé(s) de ______________

Besoins particuliers ____

— RÉSIDENCES SUR LE CAMPUS

☐ Chambre simple, un lit (32 $CAN plus taxe) ☐ Chambre simple, deux lits (45 $CAN plus taxe)

S'il y a lieu, nom complet de la personne partageant votre chambre ______________________

— HÔTELS ET MOTELS

Prière d'indiquer votre choix:

	Catégorie A (150 $CAN et plus)	Catégorie B (125-150 $CAN)	Catégorie C (100-125 $CAN)	Catégorie D (75-100 $CAN)
Occupation simple	☐	☐	☐	☐
Occupation double	☐	☐	☐	☐

Préférences: ☐ Près du campus (environ 2 km) ☐ Dans le Vieux-Québec (7 km)

S'il y a lieu, nom complet des personnes partageant votre chambre ______________________

____

Si votre arrivée est prévue après 16 h, vous pouvez immédiatement garantir votre réservation par carte de crédit *(complétez ci-après)*. Sinon vous devrez prendre arrangement avec l'établissement qui vous aura été assigné.

☐ Visa ☐ MasterCard ☐ American Express ☐ Autre ______________________

______________________ ______________________ ______________________
Numéro de la carte de crédit Date d'expiration Signature

Envoyez à:

Congrès ICME-7 Congress
Université Laval
Québec, QC
Canada G1K 7P4

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Nombre y Apellidos: ______________________

Calle: ______________________

Población: ______________ C.P.: ________

Provincia/País: ______________ Tfno.: (   ) ________

CIF/NIF: ______________ Centro de Trabajo ________

Firmado: ______________ Fecha: ________

☐ Renovación

Firma:

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número ________ inclusive, al precio de: 3.000 ptas. particulares y 3.500 Centros. Europa $35 U.S.A. y $45 U.S.A. resto, cuyo importe haré efectivo mediante:

☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal Nº ________ Fecha ________
☐ Contra reembolso

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envíe, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1304, 21080 Huelva (España).** A esta dirección se pueden solicitar, también, **los números atrasados, al precio de 1.200 ptas. más gastos de envío.** La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ______________________

Agencia: ______________ Nº C/C: ________

Calle: ______________________

Población: ______________ C. Postal: ________

Provincia: ______________________

Titular: ______________________

Firmado: ______________ Fecha: ________

Firma:

Domiciliacion Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Agradeceríamos la reseña de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada, para enviarle información sobre la presente publicación. Gracias.

Enviamos información de SUMA a:

Nombre y Apellidos: ______________________

C./Plz./Avda.: ______________ C.P. ________

Población: ______________ Provincia: ________

Este envío es por sugerencia de:

Nombre y apellidos: ______________________

Dirección: ______________________

Población: ______________ C.P. ________

Provincia: ______________

Un saludo

Apdo. 1304

21080 HUELVA

ESPAÑA

Francisco Hernán
Retrato de una profesión imaginada
(Proyecto Sur, Granada, 1991)

Lo más llamativo y lo más positivo de la obra de Francisco Hernán consiste en haber tomado en serio y con profunda pasión lo que para muchos de nosotros, profesores de matemáticas, no deja de ser una frase bien manida: *la enseñanza no es una ciencia, sino un arte.*

La matemática en sí misma es una actividad que, desde su nacimiento entre los pitagóricos como forma peculiar de captar las raíces y fuentes de la naturaleza, ha estado profundamente embebida de la intención de penetrar en los misterios de la forma del espacio y tiempo, a través de la geometría, aritmética y música. Si la enseñanza en general es un arte, parece difícil tener algún éxito en la enseñanza de este arte que es la matemática a menos que todo el contexto se trate de entender desde esta vertiente estética. Así lo intenta Francisco Hernán en este profundo y estimulante ensayo.

La obra se presenta en 8 capítulos, cada uno de ellos centrado alrededor de un eje de pensamiento que proporciona una profunda inspiración para la reflexión personal: *I. Discontinuidad; II. Multiplicidad; III. Discernimiento; IV. Asombro; V. Gravitación; VI. Imaginación; VII. Pasión; VIII. Sentido común; Epílogo.*

Hernán ofrece una perspectiva personal, a ratos profundamente apasionada, siempre intensamente estimulante y en ocasiones fuertemente provocativa. La expresión presenta en su conjunto una verdadera brillantez literaria. Para quienes estamos acostumbrados a leer y a escuchar los áridos discursos que sólo pretenden objetividad y rigor de pensamiento, los ensayos de Hernán hacen surgir con gozo muchas de la reverberaciones internas adormecidas o tal vez reprimidas que probablemente están presentes en lo profundo de quienes nos dedicamos a la enseñanza de la matemática. Estando nuestra actividad tan cerca del arte en muchos aspectos es de agradecer que de vez en cuando al menos alguien nos hable de ella emocionadamente.

A la obra de Hernán se debe uno acercar como una fuente de inspiración para la reflexión propia y para examinar su propia actitud ante su tarea como enseñante. Que nadie busque en ella recetas específicas sobre la forma de enseñar la probabilidad, pongo por caso. El ambiente apropiado para leerla es de pausa y tranquilidad. Henán no ha querido, con buen acuerdo, hacer ninguna sinopsis de su pensamiento a ratos poético. Por otra parte no valdría de mucho. Tampoco ha de esperar uno estar de acuerdo con todas las propuestas que va a encontrar ni con todas las afirmaciones que en la obra se hacen. No es necesario para obtener de su lectura un estímulo extraordinariamente positivo.

La presentación de la obra es muy satisfactoria desde el punto de vista estético, con fotografías de Pilar Moreno, bellas y bien reproducidas, que casan perfectamente con el contenido. Tanto el autor como Proyecto Sur de Ediciones merecen una calurosa felicitación por su esfuerzo valiente en sacar adelante esta obra.

Miguel de Guzmán

Grupo Azarquiel
Ideas y Actividades para enseñar Álgebra
(Editorial Síntesis, Madrid, 1991)

Hay quien dice, y no sin razón, que las Matemáticas son la ciencia de la x y de la y, mientras que la Física es la de la t y la v. Y es que cuando una situación comienza a poder tratarse matemáticamente necesitamos de las "letras" más que nunca. Dar el salto desde lo numérico a lo simbólico es muy difícil para la mayoría de los estudiantes que, con frecuencia, trabajan relativamente bien en situaciones matemáticas particulares y encuentran grandes dificultades al generalizar. En una palabra, en el paso de la aritmética al álgebra -pasando por la aritmética generalizada- se producen las primeras bajas entre los estudiantes recién ingresados en secundaria.

El Grupo Azarquiel, al que no voy a descubrir en esta modesta recensión, ha puesto el dedo en una de las llagas más profundas que tiene la Educación Matemática: la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en secundaria. Hace algunos años era necesario inculcar la necesidad de retomar la Geometría en los currículos escolares; en este momento creo que tal planteamiento está dando ya algunos resultados. Si embargo, el Álgebra, que nunca desapareció de los programas, necesita hoy de un proceso de reflexión profunda por el profesorado. Este libro llega pues en un buen momento.

Podemos estructurarlo en cuatro partes bien diferenciadas:

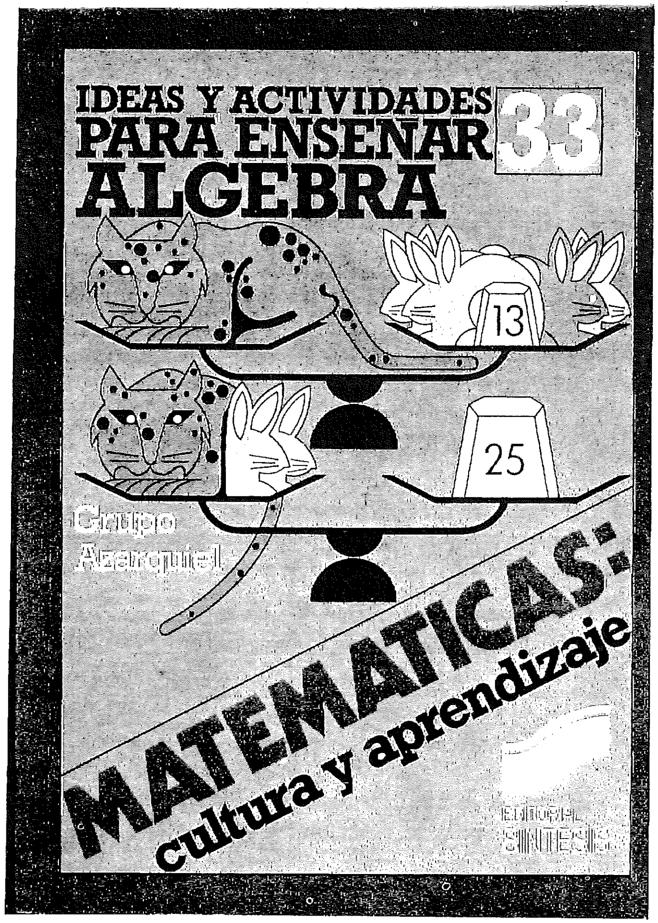
1. Métodos algebraicos — Traducción / Simbolización / Traducción — Generalización
2. El lenguaje algebraico — Ecuaciones / Sistemas
3. Destrezas algebraicas
4. Juegos y pasatiempos

Como detalles concretos podemos señalar que en este libro se recogen prácticamente la mayoría de las inquietudes de cuantos participaron en la redacción del *Yearbook* que sobre Álgebra hizo recientemente la NCTM., los modelos intermedios para resolver ecuaciones según las líneas de investigación actuales (por ejemplo la de Gerard Vergnaud) en el terreno de la Psicología aplicada al aprendizaje de las Matemáticas, el papel del signo igual, etc.

Lo más destacable de todo el libro, desde mi punto de vista, consiste en que todas sus páginas son fruto de situaciones vividas en clase por los autores del mismo. Con la observación de decenas de estudiantes de modo directo, sin necesidad de intervenir sobre estudiantes ajenos, el Grupo Azarquiel puede sugerirnos formas de actuación en esa difícil tarea que es el Álgebra.

Por todo lo anterior creo que este libro creo que será muy utilizado por todos nosotros.

Rafael Pérez Gómez



Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa*, etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:

Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).

Título: (el que corresponda).

Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.

Número: (el que corresponda, subrayado).

Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.

Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:

Autor: ...

Título: ...

Editorial: ...

Lugar de edición: ...

Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores