Calculadoras, diagramas y funciones

Pedro Alson

Resumen

La calculadora de bolsillo es utilizada para introducir la noción de diagrama. El diagrama es un "artefacto" útil para condensar la descripció del proceso hecho con una calculador al evaluar una fórmula. Consta de tres partes: teclas o cuadrados, pantallas o elipses y flechas. Se muestra cómo utilizarlos para facilitar la introducción de conceptos como la composición de funciones, dominio y rango de funciones, inversa de una función, ecuación y su solución. Se muestra también cómo pueden ser usados para corregir o evitar deficiencias, en el aprendizaje del estudiante, de habilidades operativas relacionadas con esos tópicos. Se hacen algunos comentarios acerca de los resultados obtenidos trabajando con grupos de estudiantes, al comienzo de la Universidad, durante los últimos cinco años. Se incluyen algunas reflexiones generales sobre la estrategia.

Introducción

Algunos estudiantes que ingresan a las Escuelas de Biología o Química de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Venezuela tienen dificultades para distinguir pequeñas diferencias de escritura entre fórmulas. Les cuesta reconocer, por ejemplo, por qué las expresiones *cos (x+1)* y *cos (x) +1* designan objetos diferentes. Este tipo de insuficiencias suele estar acompañado por interpretaciones erróneas de las fórmulas: es frecuente ver que *sen (x)* es interpretado como el producto de *sen* por *x*. Como consecuencia de esto no entienden por qué $(sen\ (x))^2 = sen^2\ (x)$; para ellos lo natural debería ser (sen(x))2 = sen2 (x)2.

No es difícil imaginarse las dificultades que se tendrá para enseñar, a estudiantes con las lagunas y malformaciones señaladas, el cálculo de derivadas (como exige el programa del primer semestre). Por ejemplo, algunos de ellos en vez de aplicar la regla de la cadena para derivar *sen (2x)* utilizarán la regla del producto obteniendo incorrectamente: *cos (2x) + sen (2)*.

La situación que se ha esbozado brevemente: nivel insuficiente de los estudiantes para lo que se les pretende solventar las principales lagunas. Esta estrategia ha sido utilizada por más de cinco años con resultados alentadores. Esto y el hecho de que consideramos que la estrategia podría ser aprovechada en otro contexto, a mediados del bachillerato por ejemplo, nos animan a publicar este artículo.

En la primera sección describimos lo que es un diagrama y mostramos cómo es utilizado para orientar la actividad de los estudiantes y darle un significado no sólo a las fórmulas, sino también a las ecuaciones de la forma $f\ (x) = a$.

En la segunda sección se explica un poco el comportamiento de los estudiantes al haber trabajado con esta estrategia.

Finalmente, en la tercera sección, se hacen algunos comentarios cuya finalidad es explicar, aunque sea parcialmente, en qué se fundamenta la estrategia y cuales son las razones para que funcione relativamente bien.

1.- Diagrama y su uso

Como la calculadora de bolsillo se ha vuelto un objeto al alcance de la mayoría de la población estudiantil se pensó que podría ser utilizada para identificar una fórmula con un proceso realizado con ella.

Para calcular *sen* (3^2) con una calculadora se debe proceder siguiendo los pasos:

marque el número 3;
presione la tecla del cuadrado;
presione la tecla del seno.

Esta descripción se vuelve rápidamente pesada y tediosa. Esto llevó a diseñar unas formas u esquemas para agilizar la descripción del proceso. Las Figuras 1a) y 1b) muestran dos ejemplos de esas formas.

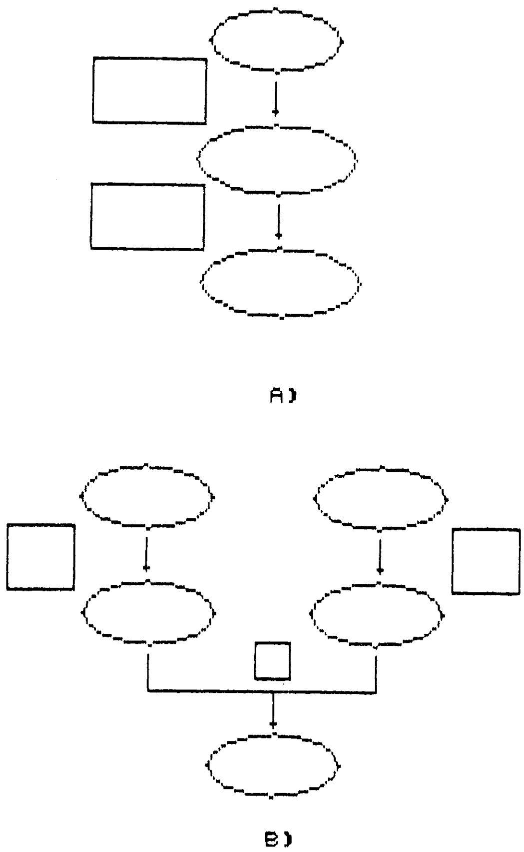


Figura 1

Este tipo de formas se "fabrican" juntando tres tipos de objetos: unos rectangulares, otros elípticos y finalmente unas flechas. Los rectángulos son reservados para anotar las teclas funcionales utilizadas. Las elipses son utilizadas para anotar los números que aparecen en la pantalla al realizar el proceso. La flechas son utilizadas para indicar en qué orden se hacen las operaciones. De ahora en adelante nos referiremos a este tipo de formas como **diagramas**. La Figura 2 muestra el diagrama, debidamente lleno, que describe al proceso asociado con la expresión *sen*(3^2).

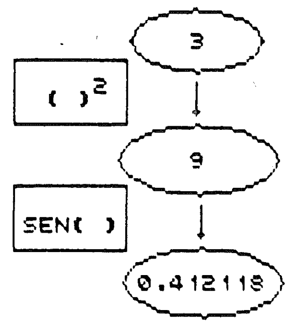


Figura 2

La Figura 2 no describe completamente el proceso realizado con la calculadora: *3* aparece en la pantalla porque se ha presionado la tecla *3* y sin embargo la tecla *3* no aparece en la Figura 2. Esto se hace para evitar un cuadrado adicional y no parece causar mayores problemas para la comprensión por parte de los alumnos.

La fórmula *sen* (x^2) se asocia con el diagrama que aparece en la Figura 3.

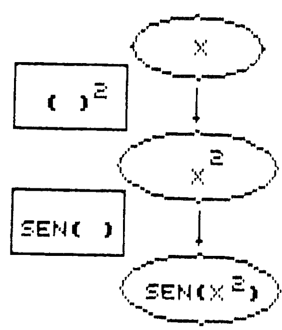
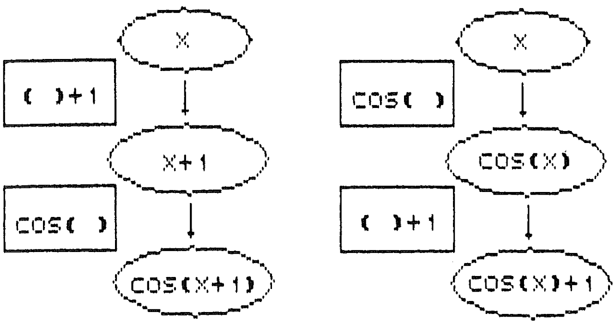


Figura 3

Para utilizar el diagrama para la representación de procesos asociados a una fórmula $f(x)$ **se exige siempre que en los cuadrados no aparezcan expresiones evaluadas en** x. Se verá más adelante que esto tiene consecuencias importantes.

La Figura 4 muestra los diagramas asociados a *cos (x+1)* y *cos (x)+1*. Al comparar los diagramas se hace patente la diferencia de significados entre ambas fórmulas.

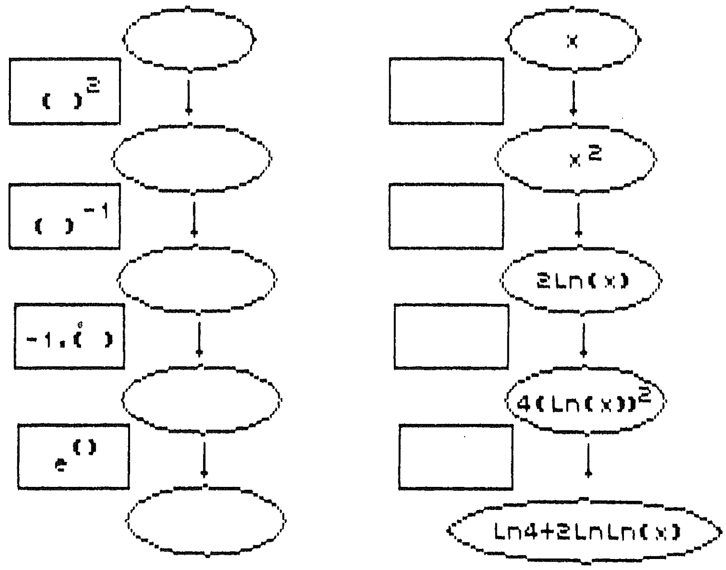


A) B)

Figura 4

Intentando corregir el manejo inapropiado de la notación algebraica se propusieron ejercicios que consistían en completar diagramas parcialmente llenos como los que aparecen en la Figura 5a) y 5b). Uno de los objetivos claramente logrados con este tipo de ejercicios es la comprensión de que una fórmula siempre puede verse como una sucesión ordenada de teclas: en el fondo es la idea de composición de funciones.

Hubo un momento en que los diagramas fueron percibidos como objetos en sí, vacíos de su finalidad primera. En ese momento me di cuenta que bastaba con ir modificando la parte que el profesor llenaba para generar ejercicios y plantear al estudiante preguntas de diversa naturaleza y que iban más allá del simple manejo formal de las fórmulas. Por ejemplo al completar los diagramas parcialmente llenos de la Figura 6a), 6b) y 6c) los estudiantes son puestos en contacto con hechos relacionados con los conceptos de función inversa, dominio de una función y rango de una función.



A) B)

Figura 5

Al enfrentar el alumno con estos hechos no se trata de introducir los conceptos subyacentes de manera inmediata sino más bien hacer ver que cada tecla tiene su inversa, descubrir para cuales números y cuales teclas la calculadora da error y en que casos nunca se puede obtener un número dado después de teclear una tecla (por ejemplo ver que nunca aparece un número mayor que *1* inmediatamente después de haber presionado la tecla *seno*).

Dadas las ventajas que ofrecían los diagramas para orientar el trabajo del estudiante de manera muy precisa, sin por ello mecanizarlo, se crearon formas similares para atacar problemas relacionados con las fórmulas. La Figura 7 muestra una forma que fué utilizada para enseñar y entrenar en el cálculo de la fórmula inversa, específicamente del hecho:

$(f_n o f_{n-1} o \ldots f_1)^{-1} = f^1_1 \, o f^1_2 \, o \ldots o f^1_n$

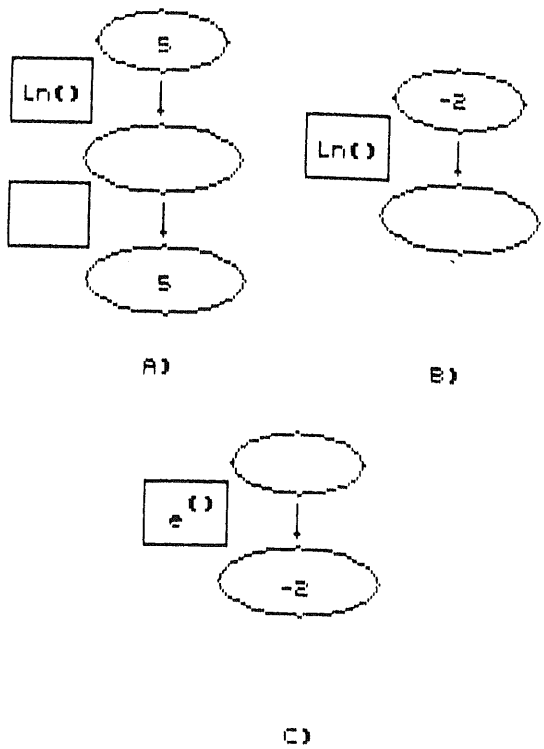


Figura 6

Otro aspecto importante es el de la resolución de ecuaciones. Es claro que la *acción que hace el estudiante al rellenar la Figura 6c)* es interpretada de manera natural como la resolución de la ecuación *exp (x) = -2*. Se prefirió sin embargo tratar las ecuaciones con formas ligeramente más complicadas que un diagrama. Se quería dar la posibilidad al estudiante de que él mismo relacionara o interpretara la expresión usual de las ecuaciones con el lenguaje de los diagramas. La Figura 8 ilustra el punto.

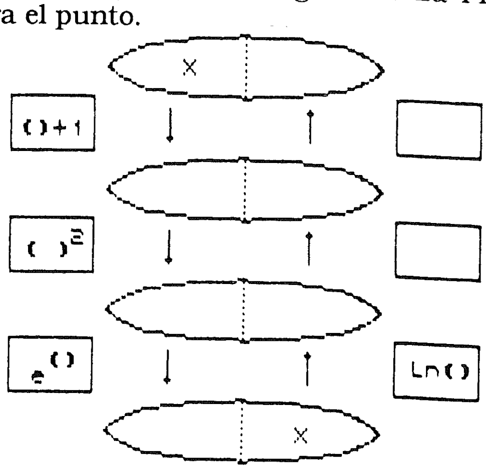


Figura 7

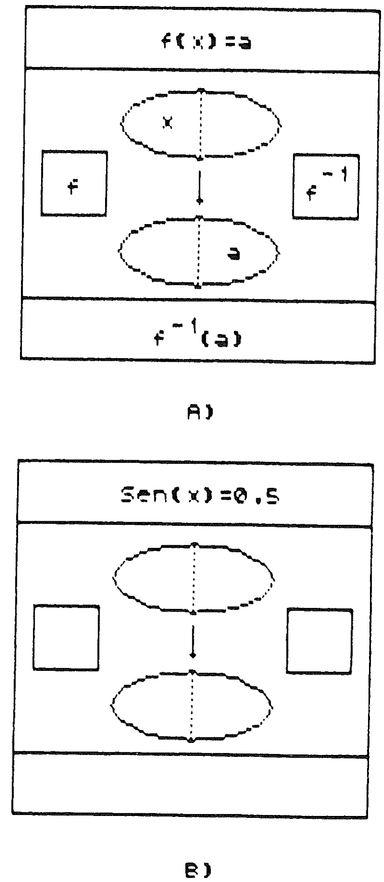


Figura 8

Al tratar de buscar un diagrama apropiado para la fórmula *exp (x) + sen (x)* respetando la convención de que en los cuadrados no pueden ir expresiones en *x*, se llega a la conclusión de que debe utilizarse un diagrama del tipo de la Figura 1b). Este tipo de diagramas es muy importante y lo llamaremos **ramificado**. El tipo de diagrama que nos sirvió de ejemplo en la mayoría de las figuras lo llamamos **no-ramificado**. En general una fórmula tiene un diagrama que se forma "combinando" ambos tipos de diagramas.

Al completar el diagrama de la figura 9 el estudiante está resolviendo la ecuación *exp (x) + sen (x) = 0*. Esta ecuación es aparentemente más sencilla que *ln (sen (x-1)) - 1.48* . Después de algunos intentos y con la ayuda de comentarios por parte del profesor el estudiante descubre que la primera ecuación no se puede resolver despejando. En cambio la segunda que es aparentemente más complicada es resuelta rápidamente y sin dudas. El hecho subyacente es la inexistencia de inversa para la ramificación. El diagrama en este caso ayuda a dar una interpretación clara para el estudiante de lo que significa el no poder "despejar". El ejemplo pone además en relevancia el hecho de que la solución algebraica de una ecuación $f(x) = a$ depende, en el fondo, de la existencia de una inversa de la fórmula $f(x)$.

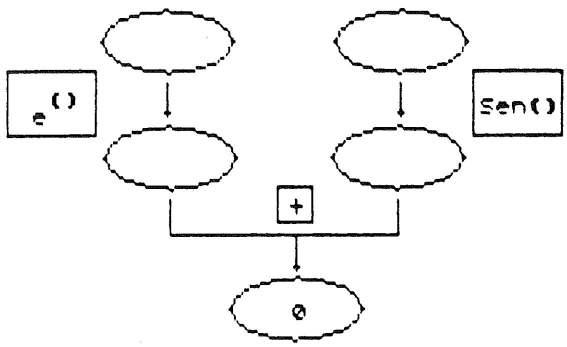


Figura 9

Otro punto importante es que los diagramas de los polinomios y de las funciones racionales son en general los ramificados. La composición de funciones está asociada a los diagramas no ramificados y las operaciones binarias (suma y producto) a los ramificados.

2.- Reacciones de los estudiantes

Un material didáctico que contiene algunas de estas actividades ha sido publicado en (1). Este material ha sido utilizado durante varios años. Buena parte del trabajo hecho en clase fue tutoreando a los estudiantes y evitando las exposiciones magistrales teóricas. La mayoría de los profesores que trabajaron de la manera descrita coinciden en los hechos que siguen:

- Rellenar las elipses cuando en la primera elipse aparece una letra en vez de un número y los cuadrados ya están llenos, no presentó mayores dificultades en los estudiantes. La mayoría de los estudiantes terminó siendo capaz de asociar correctamente diagrama con fórmulas: suele haber mayor dificultad en el caso de diagramas ramificados.
- Muchos llegaron a comprender que un número es solución de una ecuación $f(x) = a$ si al evaluar f en ese número el resultado es a. Este punto, aparentemente trivial, no está claro cuando llegan de bachillerato. Muchos de ellos conciben las raíces de la ecuación de segundo grado como los números que se obtienen al final de un proceso cuyo punto de partida es el polinomio que figura en la ecuación de segundo grado (el $= 0$ es concebido como un aditamento a la fórmula). La aplicación de fórmulas inversas para la resolución de ecuaciones fué dominada por un número menor de estudiantes.
- Desde un punto de vista psicológico los estudiantes disfrutaron de la enseñanza.
- Buen número de ellos se sentía al final bastante seguro en el tópico aunque cometiesen eventualmente algunos errores. Se notó por parte de los alumnos un mayor cuidado al manipular las fórmulas y la conciencia de que pequeñas variaciones en la forma pueden indicar grandes diferencias en el significado. Sin embargo es frecuente, al volver a hacer errores. Esto sucede a pesar de que el alumno tiene, después de haber trabajado con la metodología descrita, la capacidad de comprender el error cuando le es señalado.
- Otro aspecto que notamos, es la tendencia por parte del estudiante a deshacerse de los diagramas a medida que creen que entienden la notación algebraica usual. Esto nos parece es una tendencia universal hacia la economía de notación.

3.- Reflexiones generales

Durante su bachillerato los estudiantes deben aprender a manipular fórmulas, reconocer y demostrar cuándo dos expresiones algebraicas son equivalentes. Además de ello deberían, al salir, saber despejar la solución de ecuaciones de la forma $f(x) = a$ cuando ello es posible. Al ingresar en la Universidad muchos de ellos no han adquirido esos conocimientos.

El lenguaje de los diagramas, a pesar de aparecer elemental, pone en evidencia y de manera mucho más clara que el lenguaje usual, la estructura subyacente a las fórmulas: los conceptos de composición, operaciones binarias con funciones, inversa de una función, etc.

La estructura conceptual que se acaba de señalar es una adquisición de fecha relativamente reciente comparada con la notación y las manipulaciones algebraicas que se enseñan en los cursos elementales. Tanto la notación como las explicaciones que se dan en los cursos elementales están condicionadas por factores históricos, hábitos de escritura, exigencias de economía de notación, la tendencia a disponer de los símbolos de manera unidimensional (en líneas) y secuencialmente, etc. Esto explica en parte la coexistencia de la notación tradicional con la estructura conceptual señalada sin que a nivel de enseñanza se establezca un puente que a todas luces resultaría provechoso.

Hemos notado que algunos estudiantes que ingresan, focalizan su atención en las x (o la letra que juega el papel de la x), de las expresiones algebraicas, sean éstas ecuaciones o simples fórmulas. Reaccionan ante ellas de manera casi compulsiva tratando de "mover" los símbolos para despejar la x, ya que para ellos x es el objeto importante y casi lo único que han aprendido en bachillerato es que cuando se da la solución la x debe quedar de un lado del signo igual y del otro lado debe quedar un número. Este bajo nivel de comprensión suele venir acompañado de un dominio deficiente de las reglas de despeje. Esto hace que a menudo cometan errores al calcular las soluciones de las ecuaciones.

Al trabajar con los diagramas esos vicios de formación no pueden seguir funcionando. En efecto allí despejar la x en $f(x) = a$ es rellenar de abajo hacia arriba: no hay movimiento de la x. Igualmente, al rellenar un diagrama para una fórmula $f(x)$, el mayor esfuerzo está en llenar los cuadrados adecuadamente. Aquí nuevamente el diagrama orienta sutilmente la actividad del estudiante: al hacer que la mayor parte del esfuerzo no se concentre en una actividad alrededor de la x, la importancia que el estudiante le da a la x, al leer una expresión algebraica, disminuye. Otro aspecto importante al enseñar funciones es hacer entender al estudiante la diferencia entre $f(\ )$ y $f(x)$: entre la función y la función evaluada en un x. La convención de que no se puede poner en los cuadrados expresiones de la forma $f(x)$ enfatiza esa diferencia. Esto prepara al estudiante para manejar en un contexto más formal esa distinción.

Probablemente el factor que ha incidido más en la asimilación masiva del tópico es lo que podría ser llamado "la unidad de lenguaje". Al leer el estudiante enunciados de ejercicios como "*resuelva la ecuación...*", "*chequee si 2 está en el rango de sen $(2x + 4)$*", etc., no ve claramente qué es lo que debe hacer. Para superar esto el profesor suele resolver algunos ejercicios similares de manera que el estudiante tenga "un modelo". El hecho es que al utilizar el lenguaje convencional se deben utilizar palabras que no son suficientes para orientar el trabajo del estudiante (porque el estudiante ignora todavía el significado). Cuando se trabaja con diagramas hay una sola instrucción: **COMPLETE EL DIAGRAMA**. El diagrama le permite al alumno "**ver**" qué es lo que hay que hacer. El trabajar con diagramas permite por lo tanto ir en el sentido contrario al usual: no se utilizan nuevas palabras para definir ejercicios al alumno, sino que los ejercicios (definidos por el profesor al completar parcialmente los diagramas) justifican la aparición de nuevas palabras y conceptos. Otro aspecto fundamental que está ligado a la unidad del lenguaje es que existe una manera canónica de ver si un diagrama ha sido correctamente completado: basta con ir chequeando de arriba hacia abajo haciendo las evaluaciones indicadas y viendo si coinciden con lo que aparece en las elipses.

Resumiendo, la estrategia utilizada se basa fundamentalmente en la creación de un lenguaje que cumple simultáneamente tres funciones:

i) evidencia la estructura teórica subyacente al tópico;
ii) inhibe, por su propia forma, el funcionamiento de vicios de formación;
iii) minimiza el uso de terminología para orientar el trabajo del estudiante.

Creemos que el lenguaje descrito, debido a sus características, es particularmente apto para ser utilizado a nivel de secundaria.

Referencias Bibliográficas

(1) Alson P. *Métodos de Graficación.* Fondo Editorial Acta Científica-Facultad de Ciencias. Caracas. Venezuela. (1987).