Geometría analítica con ordenador: algunas curiosidades y conjeturas sobre polígonos

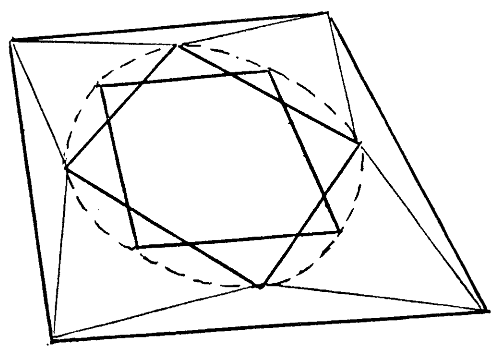
Juan Bosco Romero Márquez

Introducción

En este artículo presentamos algunos problemas de geometría analítica plana sobre polígonos.

Se utilizan fundamentalmente la simetría respecto de un punto, la intersección de rectas y la distancia euclídea para establecer unas curiosidades y conjeturas sobre polígonos planos, cóncavos o convexos, utilizando como herramienta de trabajo el ordenador.

Ha sido experimentado en el aula con un grupo de alumnos de tercero de B.U.P.



1. Descripción del problema

Dado un polígono P (a) de n vértices A_i (X_i, Y_i), (distintos), i = 1,2,3..., n y dado un punto P del plano que lo contiene (puediendo estar en la frontera en el exterior o en el interior del polígono), se trata de construir otro polígono (que se prueba que es semejante) como sigue:

Sean B_i (X_{i*}, Y_{i*}), i = 1,2,3,..., n los puntos simétricos de P respecto de los vértices A_i del polígono dado, y uniéndolos se forma un nuevo polígono que se prueba que es semejante al dado y que designaremos como P (b).

Desde cada uno de los vértices del polígono P (b) se trazan las rectas a dos vértices consecutivos A_i, A_{i+1} obteniéndose los puntos de intersección de las rectas C_i, i = 1,2,3,..., n. Con esto formamos un tercer polígono P (c).

Se ha realizado un programa en BASIC con un ordenador AMSTRAD 6128.

2. Resolución analítica

A continuación exponemos la resolución analítica cuyas fórmulas han sido utilizadas para confeccionar el programa con ordenador.

1.- Fórmula para hallar los puntos simétricos al lado respecto de los vértices, siendo P y Q los puntos simétricos, n el número de vértices y X (n+1) e Y (n+1) el punto dado la fórmula es:

$$P (i) = 2 X (i) - X (n+1)$$

$$Q (i) = 2 Y (i) - Y (n+1)$$

Donde i va desde 1 hasta n y n es el número de vértices del polígono.

X (n+1) e Y(n+1) son las coordenadas del punto interior, exterior o frontera.

P (i) y X (i) son las abscisas del punto simétrico y del vértice respecto del cual hallamos el punto simétrico respectivamente.

Q (i) e Y (i) son las ordenadas del punto simétrico y del vértice respecto del cual hallamos el punto simétrico respectivamente.

2.- Punto de intersección de dos rectas

Basta con hallar las soluciones comunes de dos rectas, representadas por dos ecuaciones con dos incógnitas de tipo lineal:

$$A X + B Y + C = 0$$
$$A'X + B'Y + C = 0$$

Estas fórmulas han sido utilizadas para hallar los vértices C (i).

3.- Área de las figuras

Como todo polígono se descompone en un número finito de triángulos orientados. Para calcular su área calculamos el área de cada uno de los triángulos en que se descompone y se suman, si la orientación no es adecuada y sale negativa se toma positiva.

Así el área del triángulo de vértices A (a1, a2), B (b1,b2), C (c1,c2) es:

$$A = 1/2 \begin{vmatrix} a1 & a2 & 1 \\ b1 & b2 & 1 \\ c1 & c2 & 1 \end{vmatrix}$$

En caso de polígonos cóncavos siempre podemos elegir el vértice adecuado de forma que los triángulos en que se descompogan queden todos dentro.

4.- Distancia entre dos puntos

Dados A (a1,a2), B (b1,b2), la distancia euclídea es:

$$d\,(A,B) = \sqrt{(b1-b2)^2 + (a1-a2)^2}$$

5.- Notas y Observaciones

a) En el caso de un triángulo, los triángulos obtenidos, en el problema 1 son semejantes al triángulo dado.

b) En el caso de un cuadrilatero simétrico es semejante al cuadrilatero dado. Sin embargo, el cuadrilatero formado por las intersecciones, entre los puntos de éstos, según problema 1 es siempre un paralelogramo, que puede llamarse, el paralelogramo medio o de Varignon de los dos cuadrilateros dados.

c) Se puede generalizar este resultado si partimos de dos cuadrilateros semejantes cualesquiera, y construimos, el cuadrilatero de sus intersecciones, P (c) según lo expuesto en el problema 1.

3. Curiosidades

Notas aclaratorias:

NV: Número de vértices del polígono.

CX: Polígono convexo.

CV: Polígono cóncavo.

1er. polígono/pol resul = Área del 1er. polígono dividida entre el área del polígono resultante.

peri-gran/peri1 = Perímetro de la figura que se forma dividido entre el perímetro de la primera figura.

peri1/peri resul = Perímetro de la primera figura dividido entre le perímetro de la figura resultante.

El símbolo = quiere decir que la razón no es constante.

" " * " " " " " varía unas centésimas.

NV			1er. polígono/pol. resul.	peri-gran/peri1	peri1/peri resultante.
		P. interior	2.25	2	==
3	CX	P. frontera	2.25	2	==
		P. exterior	2.25	2	==
		P. interior	1.125	2	1.05
	CX	P. frontera	1.125	2	1.05
		P. exterior	1.125	2	1.05
4					
		P. interior	1.125	2	1.5*
	CV	P. frontera	1.125	2	1.5*
		P. exterior	1.125	2	1.5*
		P. interior	0.86	2	0.96*
	CX	P. frontera	0.86	2	0.96*
		P. exterior	0.86	2	0.96*
5					
		P. interior	==	2	==
	CV	P. frontera	==	2	==
		P. exterior	==	2	==
		P. interior	0.75	2	0.80*
	CX	P. frontera	0.75	2	0.80*
		P. exterior	0.75	2	==
6					
		P. interior	==	2	1.05*
	CV	P. frontera	==	2	0.95*
		P. exterior	==	2	==

4. Problemas y conjeturas

a) Triángulo: Ta y Tb son directamente semejantes e inversamente semejantes a Tc.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 2.25 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

El perímetro del primero entre el perímetro del tercero no da un número constante.

b) Cuadrilatero: Ta y Tb son semejantes, mientras que Tc es un paralelogramo independiente del punto elegido.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.86 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.96$$

c) Pentágono: Ta y Tb son semejantes mientras que Tc no lo es.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.86 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.96$$

d) Hexágono: Solo hay razón de semejanza entre Ta y Tc.

$$\frac{A\ (Ta)}{A\ (Tc)} = 0.75 \qquad \frac{P\ (Tb)}{P\ (Ta)} = 2$$

$$\frac{P\ (Ta)}{P\ (Tb)} = 0.8$$

Observaciones finales: La razón entre el perímetro de la primera figura y la figura grande es siempre 2. Hay que hacer notar que en los polígonos cóncavos no se mantienen muchas razones por problemas de biconcavidad.