El placer de las matemáticas

Peter Hilton(1)

Primero, deseo expresar el profundo aprecio al honor que me hacen al investirme con el grado de Doctor Honoris Causa; procuraré ser digno de su confianza durante el resto de mi carrera académica.

Ahora permítanme que me acerque al objeto de mi presencia aquí. Me gustaría comenzar recordando una ocasión de hace años cuando fui invitado para hablar a un grupo de profesores de matemáticas de enseñanza elemental y secundaria en la ciudad de Salt Lake, Utah. Elejí como tema "La Reforma del Curriculum y la Pedagogía de la Educación Matemática", y, en el curso de mis observaciones sobre las estrategias pedagógicas efectivas, expresé el punto de vista de que la educación matemática podía no tener éxito a menos que los estudiantes fuesen intrigados por las sutilezas de las matemáticas y considerasen el hacer matemáticas como divertido. En el curso de la discusión que siguió a mi exposición, como primera contribución, un profesor de enseñanza secundaria se opuso, diciendo que las matemáticas eran una materia seria y no deberían ser consideradas por los estudiantes, ni presentadas por el profesor, como una diversión.

Mantuve entonces, muy discretamente por supuesto, y mantengo ahora que ese profesor estaba trabajando bajo la extendida pero equivocada creencia de que hay un conflicto fundamental entre el placer y la seriedad de las matemáticas. Esta es una falsa dicotomía, comparable en muchos aspectos entre otra notoriamente falsa entre matemática pura y aplicada.

Ciertamente la matemática es importante, de hecho, cada vez más importante. Ciertas áreas de conocimiento por ejemplo, la sociología, la psicología, la bioquímica, hasta ahora inmunes a toda influencia de las matemáticas excepto a las más rudimentarias, están ahora empleando técnicas e ideas matemáticas sofisticadas. Algunas partes de las matemáticas, hasta ahora indudablemente puras, -por ejemplo, la teoría clásica de invariantes, la teoría de campos finitos, la teoría de la homología-, se están aplicando ahora a problemas importantes del mundo contemporáneo. El omnipresente ordenador esta confiriendo prominencia -incluso a veces trayendo a un primer plano- a ciertos aspectos de las matemáticas actuales.

Sí, la matemática es enormemente importante en la sociedad moderna: sin embargo, tengo que admitir con total honestidad que su importancia no es la razón primordial por la cual los matemáticos con bastante entusiasmo y asiduidad practican su arte. Recuerdo a mi profesor y amigo, Henry Whitehead, el eminente topólogo británico, diciendo una vez en este sentido, *Nada me daría mayor placer que levantarme una mañana y que me dijeran que uno de mis teoremas había vencido la*

(1) N.R. Estas líneas son la traducción, hecha por Mª D. Iriarte Bustos, del discurso de investidura de *Doctor Honoris Causa* por la Universidad de Barcelona de Peter Hilton. Dado el interés de su contenido, hemos creído oportuna su divulgación.

guerra a la obsolescencia. Aunque tendría que admitir que esa afirmación no tenían nada que ver con mis razones para intentar demostrar el teorema.

Nuestra razón para hacer matemáticas es que nos fascinan. Estimulan nuestra curiosidad intelectual y nuestra sensibilidad estética. Nos plantean preguntas significativas cuya respuesta, si tenemos la suficiente fortuna para obtener alguna, nos proporciona inmediatamente una gratificación espiritual que rápidamente produce una nueva ola de curiosidad, un nuevo conjunto de cuestiones.

Ahora hay un argumento posible: las matemáticas nos fascinan porque son importantes. Sin embargo, no creo que este argumento sea cierto si hablamos de importancia de las matemáticas en un sentido social o extrínseco. La conexión filosófica -si es que existe y es objeto de pensamiento, de estudio sostenido, no de charla especulativa, estaría seguramente, entre el atractivo intelectual de las matemáticas y su importancia intrínseca como área primaria de la actividad humana.

Por supuesto, creo profundamente que las matemáticas son importantes en este sentido. Si me permiten citar de nuevo a mi tutor H. Whitehead, lo recuerdo tratando de convencer a un joven colega que estaba meditando el seguir una carrera en la administración pública, en lugar de ser matemático en la Universidad (no tuvo éxito en convencer al joven aunque su argumentación me pareció extremadamente fuerte). Whitehead argüía que había, en la vida, unas cuantas cosas que merecía la pena hacer aún cuando uno no estuviese convencido de su importancia intrínseca, y recuerdo que citó la música, las matemáticas y hacer unos buenos zapatos. Claro, dijo Whitehead, "más vale ser un segunda clase en una ocupación de primera clase que un primera clase en una ocupación de segunda clase" [1].

Sin embargo, como ya he indicado, la importancia a la que se refieren hombres de estado, padres y educadores en lo que atañe a las matemáticas no es este tipo de importancia intrínseca, sino que se refieren a su papel en asegurar el prestigio y bienestar en la sociedad a la que ellos pertenecen. Indirectamente se refieren a la importancia de las matemáticas en la ciencia y en la ingeniería; es así como entienden, casi la mayoría de las personas, el papel de las matemáticas en la sociedad civilizada en todos sus aspectos.

La importancia de las matemáticas es, lo repito, generalmente entendida en el sentido social del término: en este sentido se explica por qué nos pagan por hacer matemáticas pero no por qué las hacemos y tampoco por qué nosotros, o al menos algunos de nosotros, parte del tiempo las hacemos con gusto. Para comprender ésto tenemos que entrar de lleno en la naturaleza de las matemáticas.

La matemática es pensamiento sistematizado, sustentado por un lenguaje y notación bien ajustados. Se caracteriza por el descubrimiento y creación de modelos y por el establecimiento de conexiones sutiles entre partes aparentemente muy dispares. No es un conjunto de distintas disciplinas sino una unidad que contiene un variado pero interrelacionado repertorio de conceptos y técnicas. No es un conjunto de hechos: y la comprensión matemática no puede ser probada por test de conocimiento y memoria.

"Intento escalar el Everest", decía Mallory, "porque está ahí". Análogamente, los matemáticos intentamos hacer matemática. La matemática existe porque nuestra experiencia del mundo exterior nos lleva a formular cuestiones que sólo pueden ser planteadas y respondidas en el entramado de la matemática. "La Naturaleza nos habla en el lenguaje de las matemáticas", decía el físico Richard Feyman. Pero la matemática existe también porque el modo natural de progreso matemático es que las cuestiones sugeridas por recientes avances constituyen el estímulo de nuevos avances. Así pues, como a menudo he defendido, las matemáticas pura y aplicada son semejantes tanto en su dinámica como en su propia práctica.

Los matemáticos tendríamos que ser enviadiados por el placer que las matemáticas nos proporcionan. Este goce se obtiene al conocer el gran poder de una idea matemática fértil y al sentir que tal idea

[1] Habría que añadir que Whithead, siendo un primera clase en una ocupación de primera clase no había tenido que enfrentarse a tal dilema.

ha sido expresada de un modo perfecto. A menudo, releyendo un pasaje de Shakespeare, nos parece que la idea subyacente no podría ser expresada mejor *-Mis pensamientos vuelan a lo alto, mis palabras permanecen abajo. Palabras sin pensamiento nunca llegarán al cielo-* y, menos frecuentemente aunque también con la misma seguridad, tenemos la sensación que un concepto matemático ha logrado la perfección y que un argumento matemático ha obtenido una trascendental belleza y elegancia.

Permítanme darle tres ejemplos de este tipo de elegancia en matemáticas. El primero es el famoso teorema de Euclides de que hay una infinidad de números primos. Para demostrar esto supondremos que los números primos se pueden enumerar: $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$

Sea $N = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_n + 1$. Este N es mayor que cualquiera de los números primos y por tanto, no es primo. Debe ser divisible por algún número primo. Como al dividirlo por cualquier número primo deja siempre de resto 1, N debe ser primo. Así llegamos a una contradicción y el teorema de Euclides queda demostrado.

En segundo lugar vamos a considerar la afirmación de que $\sqrt{2}$ no es un número racional. Partimos de la proposición contraria para obtener una contradicción.

Supóngase que a/b es una fracción irreducible e igual a $\sqrt{2}$, entonces

$$a^2/b^2 = 2;\ a^2 = 2b^2$$

de donde, a^2 es par, es decir $a = 2c$. Por tanto,

$$2b^2 = 4c^2\ ;\ b^2 = 2c^2.$$

Análogamente se concluye que b es par, pero si a y b son ambos pares la fracción a/b no es irreducible en contra de lo supuesto.

Como tercer ejemplo consideraremos la famosa historia acerca del joven Gauss. Parece que el maestro mantenía a la clase con la tediosa tarea de sumar todos lo números del 1 al 100. Gauss adujo que la suma podía ser representada:

$$\begin{array}{rrrcrrr} 1+ & 2+ & 3+ & \dots+ & 48+ & 49+ & 50 \\ 100+ & 99+ & 98+ & \dots+ & 53+ & 52+ & 51 \end{array}$$

Se tienen así 50 sumas verticales cuyo resultado es en todos los casos 101. Por tanto, la suma pedida es 101x50 = 5.050

En todos estos ejemplos el argumento revela una comprensión que obliga a creer necesariamente en la conclusión, nos muestra por qué la proposición considerada en cada caso es cierta.

Hay también elegancia en la argumentación. Uno no puede imaginar que se pueda acortar significativamente. Es austeramente sobria, sin carga superflua alguna.

Ciertamente los últimos dos métodos nos llevan a la convicción de la validez del método seguido y de la posibilidad de adaptarlo para probar otros casos. Realmente el argumento de Gauss es ahora, modificado ligeramente, el procedimiento standart para sumar cualquier progresión aritmética.

Como ya hemos sugerido, todos los ejemplos dados anteriormente nos dan la sensación de que entramos dentro de la estructura real del sistema matemático; yo sostengo que la motivación más fuerte para hacer matemáticas es el deseo de obtener tal sensación. A menudo exige un gran esfuerzo. A veces creemos haber fracasado y entonces, en un flash deslumbrante de inspiración después de muchas horas, quizás de muchos días de esfuerzos aparentemente inútiles, la esencia del problema se pone al descubierto y todo aparece maravilloso y magníficamente claro.

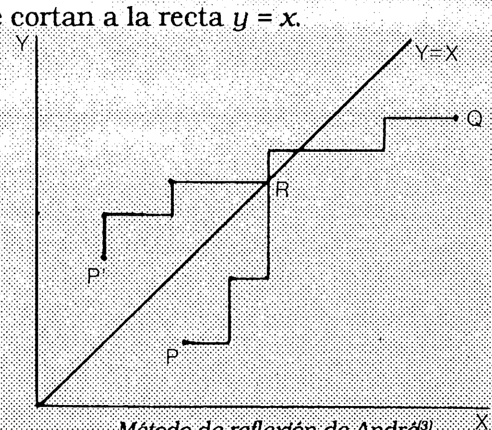
Aquí deseo puntualizar que tales sensaciones, aunque de naturaleza puramente experimental, me parecen de una gran importancia y constituyen la razón primordial para hacer que el estudio de las matemáticas sea una actividad fundamental en la vida de uno. Mantengo que la emoción que se deriva de estos extraños flashes de descubrimiento no depende de que uno mismo haya descubierto la idea original en cuestión -el redescubrimiento es una experiencia comparable con la emoción del descubrimiento original-. La experiencia que tengo de descubrimiento en otras ciencias, por supuesto de segunda mano, sugiere que los matemáticos son muy especiales en este aspecto. James Watson cuenta, en su libro **The double Helix**, el descubrimiento que realizó junto con Frances Crick acerca de la naturaleza del DNA, y sugiere que la motivación más fuerte, dentro de la competencia científica, para resolver estos enigmas era precisamente la urgencia de ser los primeros: en efecto, Watson nos dice como le estimulaba a Crick y a él mismo el saber que Linus Pauling estaba trabajando duro en el mismo problema. También recuerdo una conversación con el eminente biólogo y premio Nóbel Peter Medawar, me dijo que, en su experiencia, la emoción del descubrimiento científico original no era comunicable y que la mera comprensión de algunos trabajos no podía ser comparada con la emoción de hacer un progreso significativo en la investigación propia. Mi experiencia es que en matemáticas, la emoción de la comprensión, de la verdadera comprensión, es comparable con la emoción del descubrimiento original, y más allá de mi experiencia personal, los matemáticos sienten un verdadero placer en el triunfo de otros en el sentido de recrear el acto de descubrimiento, conociendo a fondo los entresijos del trabajo de otros. Se puede decir que la verdadera comprensión en matemáticas consiste en hacer propias las ideas y las técnicas, claro está, no en el sentido estricto de apropiárselas, sino en el sentido profundo de usarlas hábilmente para iluminar y hacer avanzar el pensamiento propio.

Permítanme, pues, darle un ejemplo de una idea matemática realmente bella, debida al matemático francés Desiré André cuyo trabajo fue publicado hace, aproximadamente, 100 años. Estaba en boga, por aquel tiempo, el llamado problema del sufragio, que puede ser descrito como sigue. Supongamos que en una elección hay dos candidatos X e Y y supongamos además que X ganó la elección obteniendo *a* votos frente a los *b* votos obtenidos por Y. Deseamos conocer la probabilidad de que a lo largo del recuento, X vaya siempre por delante de Y. Este problema acababa de ser resuelto por Bernard cuando André publicó su escrito con el título *Solución directa de un problema resuelto por M. Bernard*, pero lo que yo quiero señalar es la elegancia de la solución de André y la claridad que revela y comunica.

André tradujo el problema a otro acerca de una cuadrícula en el plano coordenado. Si P y Q son dos puntos con coordenadas enteras, entonces un camino de P a Q es una sucesión de puntos P_0, P_1, ... P_x tales que $P_0 = P$, $P_x = Q$ y $P_i + 1$ se obtiene de P_i dando un paso de una unidad hacia el norte ó hacia el este. El número de caminos de (c, d) a (a, b) viene dado por el número combinatorio[2]:

$$\binom{a+b-c-d}{a-c}$$

Entonces el problema del sufragio queda reducido a contar los caminos que van de (0, 0) a (a, b) y que permanecen por debajo de la recta $y = x$ excepto en su punto inicial. Ahora vamos a considerar el siguiente problema más general: partimos de que (c,d) y (a,b) están por debajo de la recta $y = x$, es decir, $c > d$ y $a > b$, y deseamos contar los caminos de (c, d) a (a,b) que permanecen por debajo de la recta $y = x$. A tales caminos los llamaremos "buenos" y a los caminos que van de (c,d) a (a,b) y que cortan a la recta $y = x$ les llamaremos "malos". Llamemos P y Q a los puntos extremos. Deseamos, como digo, contar los caminos buenos; la primera cosa bonita que hizo André fue contar los caminos malos. Ahora bien, un camino malo debe encontrarse con la recta $y = x$ en algún punto R, al menos una vez. Si reflejamos la parte PR de nuestro camino malo en la recta $y = x$ tenemos un camino P´R donde P´es el punto de coordenadas (d,c). La combinación de P´R con la parte RQ de nuestro camino malo original, produce el camino P´Q de (d,c) a (a,b). Es fácil ver que esta reflexión efectúa una correspondencia uno a uno entre los caminos malos de (c,d) a (a,b) y los caminos de (d,c) a (a,b) que cortan a la recta $y = x$.



Método de reflexión de André[3]

[2]Suponiendo por supuesto, que hay un camino de (c,d) a (a,b), es decir, que $c \leq a$ y $d \leq b$.
[3]Para una información más completa del trabajo de André y de sus consecuencias, ver el artículo de Peter Hilton y Jean Pedersen *Catalan numbers* en Mathematical Intelligencer.

De este modo el número de caminos malos de (c,d) a (a,b) es el número combinatorio:

$$\begin{pmatrix} a + b - c - d \\ a - d \end{pmatrix}$$

y el número de caminos buenos de (c,d) a (a,b) es:

$$\begin{pmatrix} a + b - c - d \\ a - c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a + b - c - d \\ a - d \end{pmatrix}$$

Volviendo ahora a nuestro problema de votación, necesitamos sólo, contar los caminos buenos de (1,0) a (a,b) que, por nuestra fórmula anterior se reduce a:

$$\frac{(a + b - 1)\,!}{a!\ b!} \,.\, (a - b);$$

así, la probabilidad buscada se obtiene al dividir este número por

$$\begin{pmatrix} a + b \\ a \end{pmatrix}$$

lo que resulta:

$$\frac{a - b}{a + b}$$

Antes de continuar vamos a fijarnos en un elemento, presente en la solución del problema de votación, que contribuye en gran medida a que las matemáticas nos resulten placenteras y divertidas, es el elemento de sorpresa. La fórmula para la probabilidad (a - b) / (a + b) es extraordinariamente simple, considerando la sutileza del argumento; es más, muestra que la probabilidad de que X esté siempre por delante de Y durante el recuento de votos depende sólo de la razón de votos recibidos y no del número actual. Para mí, este hecho no es intuitivamente obvio. Creo que este elemento de sorpresa está también presente en el ingenioso método de Gauss para sumar los números de 1 a 100 -repentinamente, un ejercicio horroroso a una fácil multiplicación 50 x 101-. Una de las muchas virtudes de la enseñanza idónea de la geometría es que proporciona este elemento de revelación repentina, de descubrimiento inesperado. Desgraciadamente, por regla general, la geometría no tiene hoy un lugar propio en el curriculum: o bien se le da de lado, o bien se la convierte en vehículo de transmisión de la idea de demostración, siendo la tesis a probar muy oscura, muy obvia ó ambas cosas. Pero esta es otra historia -aunque vitalmente importante- y debo volver a mi tema.

Decíamos que el razonamiento siguiendo la maniobra de reflexión era fácil, cierto, pero la perspicacia consistía en, primero, traducir el problema a un problema combinatorio acerca de caminos en una red, y entonces resolver el problema introduciendo el método de reflexión. Es una pena que no seamos capaces de perder el tiempo, en nuestra enseñanza, para mostrar primero el largo y difícil método por el que se resolvió originalmente el problema, para así poner de manifiesto los maravillosos avances del método superior por el que fue reemplazado. Estoy seguro que los estudiantes no tendrían dificultad para apreciar contraste.

Espero que estos cuatro ejemplos de razonamientos matemáticos espléndidos, os hayan complacido, es decir, os hayan producido una satisfacción estética; espero que cualquier estudiante agudo, con la base matemática necesaria, habrá apreciado fácilmente, al menos en un nivel intuitivo, su belleza y calidad. Estos ejemplos podrían ser usados para discriminar entre aquellos estudiantes que podrían beneficiarse continuando su educación matemática y aquellos que sería mejor avisarles para que se dedicaran a tareas menos gratificantes pero más lucrativas. Los griegos entendieron la importancia y la belleza de las matemáticas. Pero pocos administradores, burócratas y políticos acutales comprenden esta complementariedad en la naturaleza de las matemáticas. De todas formas, alegrémosnos si nuestros ciudadanos prominentes y nuestros líderes industriales nos animan a hacer matemáticas: pero no aceptemos de ellos ni la elección de los problemas en los que trabajar -porque su formulación sería seguramente imprecisa y el problema probablemente insoluble- ni la justificación para hacer matemáticas. Porque al pensar sólo en los resultados materiales nada saben del placer de las matemáticas.