

La operación de sumar: el caso de los problemas verbales

Vicente Bermejo
Purificación Rodríguez

Resumen

El presente trabajo revisa algunos de los hallazgos más recientes en el ámbito de la resolución de los problemas verbales aditivos. A este respecto, se recoge una clasificación de los tipos de problemas y se analizan las variables explicativas de los diferentes niveles de ejecución; asimismo se presentan las principales estrategias de resolución y los errores más característicos. Por último, se hace mención de los modelos de simulación que se han desarrollado en este ámbito.

Introducción

La representación de los problemas verbales bajo forma de símbolos matemáticos constituye una meta central en el curriculum de las matemáticas. Sin embargo, los profesores constatan frecuentemente que los niños solucionan correctamente las tareas aditivas cuando se presentan bajo la forma de algoritmos, fracasando, no obstante, en esas mismas tareas cuando se formulan como problemas verbales. La explicación de estos hechos representa una de las mayores preocupaciones de la investigación actual, que pretende establecer los cimientos pertinentes de la aritmética elemental, a fin de facilitar la labor instructiva del profesorado y evitar en lo posible el alto porcentaje del fracaso escolar existente en este ámbito.

Desde esta perspectiva, los esfuerzos de los especialistas han seguido principalmente dos líneas de trabajo estrechamente relacionadas entre sí. Por una parte, se ha intentado dar respuesta al

hecho de que los escolares resuelvan con mayor facilidad unos tipos de problemas aditivos con respecto a otros, analizando los diferentes factores que de un modo u otro podrían incrementar o disminuir el grado de dificultad de los mismos: sintaxis, nivel de vocabulario, número de palabras, etc. Por otra, se está prestando cada vez más interés al estudio de los procesos cognitivos que se originan durante la resolución de estos problemas verbales aditivos. Los resultados de estos esfuerzos se traducen en una gran cantidad de trabajos, sobre todo en Estados Unidos, que podríamos agrupar en dos grandes bloques temáticos: cuestiones relativas al análisis de los niveles de dificultad de los problemas verbales, estrategias de solución y naturaleza de los errores, y muy vinculados con estos temas, la elaboración de modelos de simulación.

En las breves páginas que siguen intentaremos ofrecer una panorámica global de los aspectos mencionados, centrándonos principalmente en torno al primer grupo temático, ya que la complejidad de los modelos de simulación requeriría un espacio físico más amplio, a fin de poder presentar una visión mínimamente satisfactoria. Para una mayor profundización sobre estas cuestiones, y sobre todas las aportadas en este artículo, remitimos al lector a nuestro libro (Bermejo, 1990).

1. Tipos de problemas verbales aditivos

Un primer paso, previo al intento de explicación del nivel de dificultad de los distintos problemas es su clasificación y tipificación. Atendiendo a las relaciones semánticas subyacentes a los proble-

mas verbales, los autores suelen proponer cuatro categorías generales: problemas de cambio, de combinación, de comparación y de igualación (ver Riley, Greeno y Heller, 1983 para una revisión). Los problemas de cambio se caracterizan por la presencia de una condición inicial, sobre la que se efectúa una acción implícita o explícita, produciéndose como resultado un incremento o decremento de esa situación inicial. Por su parte, tanto los problemas de combinación como los de comparación suponen relaciones estáticas. En los primeros se presentan dos conjuntos disjuntos, que pueden ser considerados aisladamente o como partes de un todo, sin que medie ningún tipo de acción. Los de comparación suponen igualmente la relación de

dos cantidades disjuntas, bien para determinar la diferencia existente entre ellas, bien para averiguar una de las cantidades conociendo la otra y la diferencia entre ellas. Por otra parte, tanto los problemas de cambio, como los de combinación y comparación se pueden distinguir tres subtipos en función de la ubicación de la incógnita: en uno de los sumandos o en el resultado. Por último, los problemas de igualación constituyen una mezcla de los problemas de comparación y cambio, puesto que hay una comparación de dos conjuntos disjuntos y una acción implícita que ha de aplicarse a uno de esos subconjuntos para hacerlo igual al otro. En la Tabla 1 se encuentran ejemplos de cada tipo de problema.

Tabla 1: Ejemplos de cada una de las categorías de problemas verbales.

PROBLEMAS DE CAMBIO

1. Juan tiene 7 cromos. Carlos le da 5 cromos más. ¿Cuántos cromos tiene ahora Juan?
2. Juan tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos necesita para tener 16 en total?
3. Juan tenía algunos cromos. Carlos le da 6 cromos más. Ahora tiene 16 en total. ¿Cuántos tenía al principio?

PROBLEMAS DE COMBINACION

1. Juan tiene 8 cromos y Carlos 4. ¿Cuántos cromos tienen entre los dos?
2. Juan tiene 7 cromos. Carlos tiene también algunos cromos. Entre los dos tienen 14. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?
3. Juan tiene algunos cromos y Carlos tiene 4. Entre los dos tienen 12 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan?

PROBLEMAS DE COMPARACION

1. Juan tiene 7 cromos y Carlos tiene 4 cromos. ¿Cuántos cromos tiene Juan más que Carlos?
2. Juan tiene 6 cromos. Carlos tiene 8 cromos más que Juan. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?
3. Juan tiene 12 cromos. Tiene 5 cromos más que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?

PROBLEMAS DE IGUALACION

1. Juan tiene 12 cromos, Carlos tiene 6 cromos. ¿Cuántos cromos le tienen que dar a Carlos para tener los mismos que Juan?
2. Juan tiene 4 cromos. Si le dan 7 cromos tendrá los mismos que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?
3. Juan tiene 13 cromos. Si a Carlos le dan 4 cromos tendrá los mismos que Carlos. ¿Cuántos cromos tiene Carlos?

Por otro lado, el nivel de ejecución de los niños varía sistemáticamente dependiendo del tipo de problema planteado y dichas variaciones se explican generalmente en función de una serie de variables, que sumariamente mencionamos a continuación:

1) La estructura semántica: la mayoría de los trabajos (Carpenter y Moser, 1982, 1983, 1984; Bermejo y Rodríguez, 1988; De Corte y Verschaffel, 1987; etc.), coinciden en señalar que los problemas de cambio son los más fáciles seguidos de los de combinación y finalmente los de comparación. Además, una investigación realizada por nosotros (Bermejo y Rodríguez, 1987a) con niños de 2º de preescolar y 1º de EGB sobre problemas de combinación e igualación, encontramos que el nivel de ejecución era notoriamente inferior, sobre todo entre los preescolares, en los problemas de igualación, mientras que el porcentaje de éxito en los problemas de combinación era muy elevado en ambos grupos.

2) El lugar ocupado por la incógnita: se ha comprobado que en general el nivel de dificultad de los problemas aumenta cuando la incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Pero, la dificultad se incrementa aún más cuando la incógnita se sitúa en el conjunto de partida. Por último, no se observan diferencias importantes entre los problemas cuando ésta se halla en el resultado. Así, por ejemplo, el nivel de dificultad de los problemas de comparación aumenta considerablemente cuando la incógnita aparece en el conjunto de partida, según los resultados obtenidos en nuestra investigación con problemas de comparación (Bermejo y Rodríguez, 1990) en niños de 2º y 3º de EGB.

3) La formulación verbal del problema: esto es, el orden de presentación de la información en el problema así como el grado de explicitación de las relaciones entre las cantidades conocidas y desconocidas, pueden influir en los procesos de resolución de los niños.

Además de los factores señalados, existen otros que podrían igualmente facilitar o dificultar la correcta ejecución de estas tareas sobre todo en el caso de los niños pequeños. Nos referimos a la presencia de ayudas y la magnitud de los sumandos (Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987a). El ajustado control de todos estos parámetros en la

programación curricular y en la enseñanza en el aula no sólo incidiría positivamente en la disminución de las altas tasas de fracaso escolar, sino que ayudaría a cambiar la actitud frecuentemente negativa de los niños hacia esta materia.

2. Estrategias de solución y errores infantiles

La observación detenida de las respuestas dadas por los niños ante los problemas verbales de adición nos permite diferenciar, entre otras, las siguientes estrategias propuestas por Carpenter y Moser (1983, 1984):

1) Estrategias de modelado directo: consisten en representar ambos conjuntos o cantidades propuestas en el problema mediante objetos físicos (o los dedos) y recontar después dichos objetos. Constituye un tipo de estrategias muy simple que los niños utilizan incluso antes de recibir instrucción formal (Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez 1987a, 1987b; Carpenter y Moser, 1984).

2) Estrategias de conteo: son las estrategias de contar sin modelos (objetos físicos). Son similares a las estrategias del apartado anterior, pero se diferencian de ellas en que el niño no usa objetos o dedos para representar los sumandos. Aunque no precisa representar previamente los conjuntos, sí necesita utilizar algún procedimiento que le permita registrar el número de pasos efectuados al final del conteo, como por ejemplo los dedos (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Lago, 1988; Bermejo y Rodríguez, 1987b; Fuson, 1988) o bien cuando el conteo se produce mentalmente ciertos ritmos físicos, como movimientos de cabeza. Dentro de este grupo se incluyen también las estrategias de contar a partir del primer sumando y contar a partir del sumando mayor.

3) Estrategias de hechos numéricos: incluyen la memorización y las reglas. En la primera, el hecho numérico se recupera inmediatamente de la memoria a largo plazo sin conteo aparente. Las reglas se refieren a procedimientos en los que el niño compone y descompone los números para hallar la suma total o resultado del problema.

Además de los tipos de estrategias recogidos, los autores prestan cada vez más atención a otros tres aspectos fundamentales relacionados con ellos: su

evolución con la edad, los mecanismos de transición entre ellas y los procesos implicados en la elección del tipo de estrategia. Para una revisión más detallada remitimos al lector al volumen antes citado (Bermejo, 1990).

En cuanto a los *Errores*, se suelen presentar dos tipos: de *ejecución* y de *representación*. Los primeros se originan cuando el niño elige correctamente la operación aritmética correspondiente, pero fracasa a la hora de ejecutarla. Los segundos surgen a causa de una representación inapropiada del problema a partir del texto verbal (De Corte y Verschaffel, 1985). Suelen presentarse en tres categorías fundamentales: repetir una de las cantidades propuestas en el problema, seleccionar una operación inadecuada e inventar la respuesta. Respecto al primer tipo, puede observarse con frecuencia en todas las categorías de problemas. Un ejemplo de ello lo tenemos en los problemas de cambio cuando los niños se muestran incapaces de representar los conjuntos de partida y de cambio separadamente, cometiendo los consiguientes errores (Riley et al., 1983). En relación con la selección de una operación inadecuada aparece cuando el niño aplica la forma canónica $A + B = ?$ a problemas cuya incógnita se sitúa en uno de los sumandos. Este error puede tener tres causas: 1) dificultad para concebir el significado de la indefinición de uno de los sumandos ("algunos"); 2) que los niños no tomen en consideración la información temporal contenida en el texto; y 3) que no comprendan la proposición comparativa que determina el otro sumando (Bermejo y Rodríguez, 1990). Por último, en algunas ocasiones los niños inventan la respuesta, como ocurre frecuentemente cuando están cansados o no comprenden en absoluto el problema planteado.

3. Modelos de simulación

Los modelos teóricos intentan ofrecer hipótesis plausibles sobre las estructuras cognitivas subyacentes en la resolución de los problemas verbales (Briars y Larkin, 1984; De Corte y Verschaffel, 1985; Kintsch y Greeno, 1985; Riley et al., 1983). Todos ellos insisten en que las dificultades que presentan los niños se deben a la construcción

inadecuada de la representación inicial del problema planteado (Bermejo y Lago, 1987). Así, los modelos de Riley et al. (1983) y Briars y Larkin (1984) asumen que la solución de los problemas verbales depende del conocimiento conceptual que conduce a la selección apropiada de un esquema de acción para la solución. Por otro lado, aportan datos sobre la dificultad de las diferentes clases de problemas y proporciona hipótesis acerca de los procesos de representación que los niños construyen cuando solucionan problemas verbales, así como las inferencias que hacen de las operaciones que ejecutan sobre los conjuntos.

De Corte y Verschaffel (1985) proponen un modelo en el que se insiste en la importancia del procesamiento semántico. Consta de cinco fases: (1) representación global del problema; (2) selección de una operación aritmética formal o una estrategia informal de conteo para encontrar el elemento desconocido; (3) ejecución de la operación o de la estrategia informal; (4) reactivación de la representación inicial del problema, sustituyendo el elemento desconocido por el resultado de su ejecución; y (5) verificación de la solución. En la primera fase dos esquemas cumplen un papel esencial: los semánticos que representan el conocimiento del niño sobre las relaciones subyacentes en los problemas verbales; y el «esquema de las palabras del problema» (Word Problem Schema, WIPS), que hace referencia a su conocimiento sobre la estructura, el papel, y la intención del problema. Los distintos modelos son sólo aproximaciones teóricas sobre los procesos cognitivos subyacentes en la resolución de los problemas.

4. Conclusiones

A pesar de la concisión seguida a lo largo de este artículo, resulta evidente la existencia de un gran cúmulo de trabajos y hallazgos (algunos realizados con poblaciones de nuestro país) sobre los procesos, procedimientos y demás circunstancias que rodean e inciden en la comprensión de la operación de sumar. Parece obvio, que las implicaciones de tales trabajos deben tener una clara repercusión en las prácticas cotidianas de enseñar la adición. Por lo tanto, es una tarea necesaria y urgente tratar de acercar el ámbito de la investigación a la progra-

mación, así como a la gestación de materiales y procedimientos educativos que faciliten el aprendizaje de los contenidos matemáticos en el aula. Desde esta óptica, hemos señalado los principales factores que inciden de un modo u otro en la dificultad de los problemas verbales aditivos. Igualmente hemos analizado tanto las estrategias que los niños utilizan habitualmente para solucio-

nar estas tareas en función de la edad y el tipo de problema planteado, como los tipos de errores más frecuentes que suelen cometer los niños. Por último, hemos revisado brevemente algunos de los modelos teóricos más significativos, que pueden ser de gran ayuda para el educador ya que sugieren los procesos cognitivos que el aprendiz pone en marcha cuando soluciona este tipo de problemas.

Referencias Bibliográficas

- Baroody, A. J. (1987). The development of counting strategies for single-digit addition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 141-157.
- Baroody, A. J. y Ginsburg, H. (1986). The relationships between initial meaningful and mechanical knowledge of arithmetic. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 75-112). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas*. Barcelona: Paidós.
- Bermejo, V. y Lago, M. O. (1987). El aprendizaje de las matemáticas. Estado actual de las investigaciones. *Psicólogos. Papeles del Colegio*, 6, 35-47.
- Bermejo, V. y Lago, M. O. (1988). La adquisición de la adición. Estrategias infantiles en función de la naturaleza de los sumandos. En A. Alvarez (Comp.), *Psicología y educación. Realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica* (pp. 321-329). Madrid: MEC y Visor.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987a). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje*, 39-40, 71-81.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1987b). Fundamentos cognitivos de la adición. *Psiquis*, 3, 21-30.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1988). La genèse de l'opération d'addition. Analyse de quelques variables significatives dans la résolution de problèmes additifs. *European Journal of Psychology of Education, Número Special*, 75-76.
- Bermejo, V. y Rodríguez, P. (1990). Relevancia de algunos factores en la solución de problemas aditivos. *Investigaciones Psicológicas*, 8, 23-40.
- Briars, D. y Larkin, J. H. (1984). An integrated model of skills in solving elementary word problems. *Cognition and Instruction*, 1, 245-296.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1982). The development of addition and subtraction problem solving skills. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). Hillsdale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1983). The acquisition of addition and subtraction concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics: Concepts and processes* (pp. 7-44). Nueva York: Academic Press.
- Carpenter, T. P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1984). Beginning first graders' initial representation of arithmetic word problems. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4, 3-21.
- De Corte, E. y Verschaffel, L. (1987). The effect of semantic structure on first graders' strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 363-381.
- Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Nueva York: Springer-Verlag.
- Kintsch, W. y Greeno, J. G. (1985). Understanding and solving word arithmetic problems. *Psychological Review*, 92, 109-129.
- Riley, M. S.; Greeno, J. G. y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En H. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 135-196). Nueva York: Academic Press.