Aplicaciones didácticas de la localización de errores matemáticos*

Mª Isabel Goicoechea
Esteban Induráin
Esperanza Minguillón

Resumen:

Planteamos este artículo con ánimo didáctico: Analizamos una serie de ejemplos en los cuáles un error matemático ha sido deliberadamente incluido. El alumno que intente detectar dónde está el error se ve forzado a revisar aquéllos conceptos ya aprendidos, pero quizá no consolidados. Creemos que está técnica de descubrimiento de errores servirá para elevar el nivel de rigor matemático del alumno.

1. Introduccion

Un conocido aforismo del juego del ajedrez, debido al gran maestro Tartakower, dice que «en ajedrez sólo se aprende de los errores» (véase [V-P]). De hecho, hay libros de "didáctica del ajedrez" que consisten en la contemplación de partidas en las cuales se han cometido errores, que, al ser puestos en evidencia al lector de un tal libro, ayudan al mejor conocimiento del juego por parte de éste, adquiriendo un mayor nivel.

Pues bien, creemos que esta misma idea didáctica es aplicable a la enseñanza universitaria de las matemáticas (a todos los niveles), en base a la inclusión (por ejemplo, en problemas de exámenes) de razonamientos matemáticos en los que un error ha sido cometido deliberadamente, y que el alumno debe localizar. La conclusión de un tal razonamiento puede ser absurda (por ejemplo, en las típicas «convincentes» demostraciones del hecho "2 = 1" a través de algún razonamiento matemático cuya falsedad no sea obvia). Quizá, la presentación de estas situaciones absurdas o paradójicas hacen que el alumno se vea más motivado a repasar los conceptos matemáticos que ha ido aprendiendo, ayudando a consolidarlos a un nivel mayor de precisión, rigor, y detalle. Nuestro objetivo es, por tanto, precisamente ése: la consolidación de conceptos clave, en todo su detalle, por parte del alumno.

2. Sobre errores típicos

Entre los errores típicos que suelen cometerse en los razonamientos matemáticos cabe distinguir entre los *errores "de operación"* y los *errores "de concepto"*. A los del primer tipo no se les suele dar, en principio, excesiva importancia, pensando que, "todo matemático se equivoca alguna vez en las operaciones más sencillas". Los errores del segundo tipo son los que intervienen directamente en la adquisición de los conceptos matemáticos. Un error de concepto significa que algo no se ha captado del todo, o se ha captado mal.

Cabe señalar, no obstante, que errores que a primera vista se considerarían "de operaciones" acaban siendo errores de concepto en muchos

*Parte del contenido de este artículo fue expuesto en el Congreso "XIV Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas", (Puerto de la Cruz, Tenerife, Junio 1989), en la sección correspondiente a "Didáctica e Historia de las matemáticas".

casos. Así se apunta en **[CIP]** , donde vemos el siguiente ejemplo .

EJEMPLO 1: Supongamos que un alumno tiene que derivar el cociente de dos funciones. En ese momento duda si "la fórmula" es "denominador por derivada de numerador , menos numerador por derivada de denominador, dividido todo por cuadrado de denominador", o bien es "numerador por derivada de dedominador , menos denominador por derivada de numerador , ... ". El alumno piensa : "¡No importa, todo lo más me equivoco en un signo, no creo que me bajen mucho la nota por eso !". Al razonar así, nuestro alumno olvida la interpretación del signo de la derivada (derivada positiva se corresponde con función creciente). Si aplica mal la regla de derivación a una función como $1/x$, obteniendo, por ese error, que su derivada es $+(1/x^2)$, no sólo ha cometido un error de operaciones, sino también de concepto, ya que la función $1/x$ es siempre decreciente, luego no puede tener derivada positiva.

Otro ejemplo típico en esta línea puede ser el "*despiste*" (que el alumno casi nunca considera "grave") consistente en dejarse de sumar la "constante de integración" en el cálculo de la primitiva de una función. Veamos cómo un tal error puede conducir a situaciones totalmente absurdas :

EJEMPLO 2 : (Véase **[NOR]**) Se desea calcular una integral tan inocente como $\int(dx/x)$. razonamos así : Por un lado, si pensamos que el numerador "dx" es la diferencial del denominador "x", la integral será el logaritmo del denominador "logx". Pero, si en la integral multiplicamos por 2 a numerador y denominador, tendremos $\int(2dx/2x)$, y $2dx = d(2x)$ sigue siendo la diferencial del denominador (en este caso "2x") con lo que nuestra integral será, también, log(2x).

Así, de la igualdad $\log x = \log(2x)$ se sigue $x = 2x$, y de aquí se sigue "1 = 2".

Otro tipo frecuente de error se produce cuando se razona "por analogía", pero dejándose llevar en exceso por la intuición, sin basar el razonamiento en algún hecho matemático bien conocido y consolidado. Veamos algún ejemplo :

EJEMPLO 3 : Nos disponemos a calcular $\int_{[0,1]} \cos x \, dx$. Razonamos así :
No importa qué valor tenga x : Por ejemplo, si x vale 1 , 2, , 3 , ... al ser cos 1 , cos2, cos 3 , ... sendas constantes, salen fuera de la integral. Así, la integral en [0, 1] de cos 1 vale cos 1 , la de cos2 vale cos2 , la de cos3 vale cos3 , ... Luego, por analogía, la integral pedida debe valer cos x.

EJEMPLO 4 : Observemos que $2^2 = 2 + 2$ (se suma dos veces). también $3^2 = 3 + 3 + 3$ (se suma tres veces) , y $4^2 = 4 + 4 + 4 + 4$ (se suma cuatro veces).
En general $x^2 = x + x + ... + x$ (se suma x veces) , luego derivando miembro a miembro en la anterior expresión tenemos que $2x = 1 + 1 + ... + 1$ (y aparecen "x" unos) . Así que $2x = x$, y , por tanto, $2 = 1$.

EJEMPLO 5 : (Este ejemplo lo tuvieron que "sufrir" alumnos de la Universidad de Zaragoza en un examen (23-enero-82) de la asignatura "Análisis Matemático V (Análisis Complejo)", entonces a cargo del Dr. D. José Garay de Pablo).

"Vamos a ver que los únicos números que existen son el cero y el uno, razonando con lo mucho que sabemos sobre números complejos :
Sea z un número complejo no nulo, y sea $w = \text{Log } z$. Entonces se verifica $z = e^w = e^{2\pi i(w/2\pi i)} = (e^{2\pi i})^{w/2\pi i} = 1^{w/2\pi i} = 1$.

En consecuencia de lo que antecede afirmamos que todo número complejo no nulo es igual a la unidad. Luego dado un número complejo, o es

Cabe decir, en defensa del hecho de «olvidarse de alguna condición» , que, cuando se hace deliberadamente , a conciencia, puede dar fruto en la investigación matemática. Pensemos que un método muy usual consiste , en esencia, en relajar («olvidar») una condición de un teorema, para intentar obtener la misma conclusión (pero en condiciones más generales). Si este resultado más general no es ya cierto, se obtendrá un contraejemplo.

cero, o es uno, y así, no hay ningun número complejo (y por tanto, tampoco real) distinto de cero o de uno".

Otro tipo de error mucho más sutil, es todo aquél que aparezca en un razonamiento que parte de hipótesis válidas y llega a conclusiones válidas (pero por un camino falso) . Evidentemente, como todo parece correcto, el error es mucho más difícil de descubrir. Veamos un ejemplo, que también hubieron de «sufrir» alumnos de la Universidad de Zaragoza en un examen (5-feb-77) de la asignatura "Geometría I", entonces a cargo de D. Javier Otal Cinca :

EJEMPLO 6 : La desigualdad de Schwarz dice : "Si v y w son vectores libres, se tiene que $|vw| \leq |v| \ |w|$" . A continuación damos una demostración de este hecho: "Basta ver que $(vw)^2 \leq v^2 w^2$. Si v ó w son nulos, el resultado es evidente . Supongamos, pues, que ni v ni w son nulos. entonces v^2 , y w^2 son números reales positivos y existen sus raíces cuadradas $\sqrt{(v^2)}$ y $\sqrt{(w^2)}$. Para todo par s,t de números reales se tiene : $0 \leq (tv-sw)^2 = t^2v^2 + s^2w^2 -2tsvw$, luego $2tsvw \leq t^2v^2 + s^2w^2$. Tomando $t = \sqrt{(v^2)}$, $s = \sqrt{(w^2)}$ obtenemos que $2 \sqrt{(v^2)} \sqrt{(w^2)}vw \leq 2v^2w^2$. Por tanto, simplificando, $vw \leq \sqrt{(v^2)}\sqrt{(w^2)}$, y así $(vw)^2 \leq v^2w^2$ La demostración es falsa. Localícese algún error.

(Digamos que hay un error, claro, en el último paso: No es cierto, en general, que al elevar dos cantidades al cuadrado se mantenga una desigualdad: por ejemplo, $-7 < 5$, pero $49 > 25$).

Otro tipo de error frecuente se produce al no ser cuidadoso con una notación que, según los casos, puede significar cosas distintas. Un ejemplo aparece en **[M-T]** , problema 41, pág. 186.

EJEMPLO 7: ¿Cuál es el fallo del siguiente razonamiento ?

"Supongamos que $w = f(x,y)$, y que $y = x^2$. Por la regla de la cadena $\partial w/\partial x = \partial w/\partial x \, . \, \partial x/\partial x + \partial w/\partial y \, . \, \partial y/\partial x = \partial w/\partial x + 2x \, \partial w/\partial y$. Así $0 = 2x(\partial w/\partial y)$, luego $\partial w/\partial y = 0$. Pero, si por ejemplo es $w = f(x,y) = x + y$, resulta $dw/\partial y = 1$, así que $0 = 1$".

(Nótense los dos significados de $\partial w/\partial x$, antes y después de la sustitución $y = x^2$) .

Otro tipo de error frecuente aparece cuando el alumno *razona mecánicamente*, empleando "recetas" o "fórmulas" que son la panacea a la hora de resolver un problema o tipo de problemas concreto.

En una tal circunstancia, el alumno no quiere tener en cuenta que una fórmula por sí sola no sirve para nada, no dice nada, no es más que una sucesión de símbolos, igual que pudiera ser un galimatías como: "rguhFFS□B, IOEWio□ꞵ\†□¥^□°dkgflk". *Las fórmulas sólo sirven cuando actúan sobre conceptos* para obtener y producir resultados.

Además, "*cada fórmula tiene su radio de acción*", esto es : ha de darse respuesta a cuándo y cómo la tal fórmula puede ser utilizada, dependiendo esto del contexto en el que estemos trabajando. No podemos "sacarnos una fórmula de la manga", cuando nos venga en gana, porque eso puede incluso no tener sentido. Veamos dos ejemplos a este respecto (el primero de los cuáles dedicamos a nuestros alumnos de Ciencias Económicas y Empresariales) y que consisten en "mezclar" dos "ingredientes" (o "fórmulas") cuyos radios de acción son "conjuntos disjuntos" (por ejemplo : capitalización a interés simple versus a interés compuesto ; movimiento uniforme versus uniformemente acelerado) .

EJEMPLO 8: "Teorema : Ninguna entidad bancaria nos paga jamás ningun interés".

"*Demostración*": El banco trabajará con interés simple y/o interés compuesto.

Sea C_0 el capital inicial que nosotros colocamos en el banco. Sea i el tanto unitario de interés. Sea Cn el capital que tendremos al cabo de n años. Veamos que, o bien i es cero (con lo que no nos pagan intereses) o bien $C_0 = C_n$ (con lo que, si al cabo de n años tenemos lo mismo que al empezar, tampoco nos han pagado intereses). En efecto : Apliquemos que $C_{n+1} = C_n + i \, C_0$ ("fórmula" del interés simple) y que $C_{n+1} = C_n + i \, C_n$ ("fórmula" del interés compuesto). Igualando resulta $i \, C_0 = iC_n$. Por tanto i es cero, o bien $C_0 = C_n$.

Por si el alumno no está aún convencido, todavía cabe proponerle otra "demostración" alternativa : Aplicamos ahora que $C_n = C_0 \, (1 + ni)$ (interés simple), y también que $C_n = C_0(1+i)^n$ (interés compuesto). Igualando resulta que $C_0 \, (1 + ni) = C_0(1+i)^n$.

Así, o bien $C_0 = 0$ (con lo que, seguro, no nos pagarán interés , pues significa que no pusimos dinero alguno en el banco), o bien $1 + ni = (1+i)^n$. Particularizando esto último para n=2 resulta que $(1+i)^2 = 1 + 2i$. Desarrollando el cuadrado obtendremos que $1 + 2i + i^2 = 1 + 2i$. Así, simplificando términos, es $i^2 = 0$, luego $i = 0$.

EJEMPLO 9: Un móvil cae libremente desde una altura h. Sea t el tiempo que tarda en caer. Como espacio es velocidad por tiempo, llamando v a la velocidad será $h = vt$. Además velocidad es aceleración por tiempo, luego $v = at$ (siendo "a" la aceleración gravitatoria), y así $h = a t^2$.

Por otra parte espacio es velocidad inicial (en nuestro caso cero) por tiempo, más la mitad de la aceleración por el cuadrado del tiempo. Así, resultará $h = (a/2)t^2$. Ahora, resulta un juego de niños concluir, igualando las dos expresiones de "h", que "2 = 1".

3. Comentarios sobre la literatura existente

No hemos encontrado suficiente literatura al respecto del aprovechamiento de errores para la enseñanza de las matemáticas. Un estudio pedagógico aparece en **[CIP]** , donde aparecen ideas interesantes, que rozan aspectos psicológicos del razonamiento de un alumno ante un problema. Los ejemplos de este texto son, tal vez, demasiado elementales.

Un excelente libro, con recopilación más que suficiente de ejemplos , en niveles que van desde el más sencillo hasta la más completa "paradoja en alta matemática" es **[NOR]** .

Dos buenos libros, pero quizá pensados a un nivel lúdico, propio de una matemática "recreativa", diseñada tal vez para aumentar el "equipaje" matemático de cualquier persona "curiosa" , son **[GAR]** , y **[BUN]**. Este último libro trabaja también con la filosofía de la lógica y el razonamiento matemáticos.

Un interesante libro sobre "contraejemplos", si bien a un nivel propio ya del profesor universitario, más que del alumno, es **[HAU]**.

Por último, digamos que en buenas colecciones de problemas resueltos de algun área de las matemáticas aparece siempre algun problema de "localizar el error". En este sentido, hemos observado que , en lo que respecta al Análisis Matemático, se juega en demasía con las "*paradojas del infinito*" (falacias provenientes de series divergentes u oscilantes, que se manejan, alegremente, como si fuesen "números" (o como si fuesen convergentes)). Quizá sería conveniente la búsqueda de ejemplos en otras áreas, no sólo en series. En este sentido, son interesantes libros como **[BUT]** (véase problema 4, pág. 200, o problema 16, pág. 207, sobre integrales impropias), o **[M-T]** (además del Ejemplo 5, véase la página 328 que da un "contraejemplo" (por supuesto, falso) al teorema de Fubini para integrales dobles, en base a la utilización de una función construída mediante una serie doble).

Referencias Bibliográficas

[BUN] BUNCH, B.H. : «Matemática Insólita». Reverté. Barcelona. 1987.

[BUT] BUTUZOV, B.F. (editor) : «Mathematical Analysis in questions and problems». Mir. Moscow. 1988.

[CIP] CIPRA, B. : «Erreures». Inter Editions. Paris. 1985.

[GAR] GARDNER, M. : «Paradojas». Labor. barcelona. 1986.

[HAU] HAUCHECORNE, B.: «Les contre-examples en mathématiques». Ellipses. Paris. 1988.

[M-T] MARSDEN, J.E. - TROMBA, A.J. : «Vector calculus». Freeman. New York. 1988.

[NOR] NORTHROP, E. : «Riddles in mathematics». Penguin books. Harmondsworth. Middlesex, U.K. 1963.

[V-P] VORONKOV, B. - PERSITS, B. : «Errores típicos». Colección Escaques. Martínez Roca. Barcelona. 1976.