La mitad de un cuadrado

José Antonio Mora Sánchez

Introducción

La realización de trabajos de investigación es uno de los métodos de enseñanza que más se resisten a entrar en las clases de matemáticas. El que sean los estudiantes los que tomen decisiones y determinen el camino de su trabajo plantea muchas incógnitas.

Este artículo intenta poner el énfasis en varios aspectos de los trabajos de investigación:

1. La situación planteada no tiene por qué ser difícil, todo lo contrario, ha de ser accesible a los estudiantes. La complejidad la determinan ellos con sus propias decisiones.

2. La duración de la investigación no se puede predeterminar, vendrá dada por el interés de los estudiantes.

3. El trabajo en grupos es una forma adecuada de organizar la clase para abordar este tipo de trabajos por provocar un intercambio de ideas que induce a aceptar la relatividad o parcialidad de los propios planteamientos y a situarse en perspectivas ajenas.

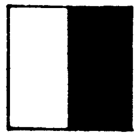
4. La intervención del profesor es fundamental en el transcurso de la investigación:

- Diagnostica el nivel inicial de los estudiantes y las posibles dificultades.
- Promueve, impulsa y agiliza el trabajo de los grupos.
- Hace observaciones.
- Pide justificaciones de las conjeturas realizadas.
- Hace notar contradicciones e incoherencias.
- Hace reflexionar sobre los resultados obtenidos.
- Reta y anima a explorar nuevas ideas.
- Cuando los estudiantes están atascados, les hace sugerencias sin dar la solución.
- Organiza debates para estudiar los resultados obtenidos por los grupos.
- Somete a discusión tanto las buenas soluciones como las erróneas y aprovecha los errores como fuente de aprendizaje.
- Contribuye a que en la clase se dá un ambiente relajado en el que cualquier aportación es valorada positivamente, analizada y debatida.

Enunciado del problema

La mitad

Dado el cuadrado de la figura, una forma de conseguir un polígono cuya rea sea la mitad es: «tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con una línea recta».



(1)

Busca otros procedimientos.

Antecedentes

Ecncontró por primera vez este problema en un artículo de Juan Antonio García Cruz (1986). Me pareció un enunciado abierto y sugerente que, si se dejaba tiempo suficiente a los estudiantes, podía llevar a diversidad de soluciones y, lo que es más importante, darles la posibilidad de hacer matemáticas: adentrarse en conceptos geométricos, como el área o la simetría y en procedimientos como la generalización, la particularización o la demostración.

Lo propuse a los estudiantes de primer curso de reforma en el I.F.P. Verge del Remei de Alicante como una investigación a la que íbamos a dedicar el tiempo que fuera necesario dentro de un apartado de Geometría titulado «Construcciones Geométricas». Posteriormente propuse este mismo enunciado desde una perspectiva algebraica para reforzar la utilización y manipulación de expresiones algebraicas.

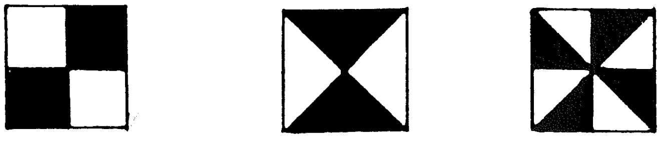
Las notas que siguen son producto del trabajo con los estudiantes en clase y de las discusiones con otros profesores que han trabajado esta investigación ellos mismos o lo han propuesto en sus clases. Una primera redacción apareció en Mora y Pérez (1987).

Los primeros tanteos

Un enunciado abierto provoca que, nada más comenzar, los alumnos planteen preguntas para clarificar el enunciado:

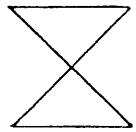
- ¿Hay que dividir el cuadrado en dos partes iguales?.
- ¿Hay que utilizar siempre una línea recta?.
- ¿Una sola línea?.
- ¿Puede ser curva?.
- ¿Hemos de obtener siempre dos polígonos iguales?. -¿Únicamente dos polígonos?.

Es importante dejarles que tomen sus propias decisiones, que examinen las consecuencias de su elección y si ésta responde a las condiciones establecidas por el enunciado. Por ejemplo, suelen surgir soluciones del tipo:



(2)

que lleva a plantearse la pregunta: ¿es esto:



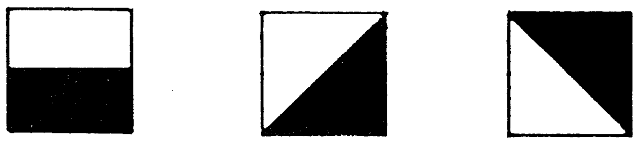
(3)

un cuadrilátero?. D. Crawfort (1988) relata un interesante desarrollo de esta situación en una clase en la que los estudiantes examinan las consecuencias de admitir o rechazar este tipo de figuras como cuadriláteros.

El proceso de generalización

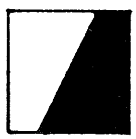
El trabajo se organiza en grupos de cuatro-cinco alumnos. Al principio es necesario organizar frecuentes debates para centrar los objetivos del trabajo y abrir las vías de la investigación. Más adelante cada grupo ir delimitando su tarea en la medida que identifique nuevos problemas e intente su resolución.

Las primeras soluciones son variaciones de la presentada en el enunciado:



(4)

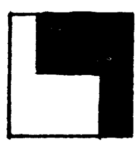
Ante ellas, la intervención del profesor: ¿No habrá una forma más general de dividir el cuadrado, de forma que las cuatro obtenidas sean casos particulares?. Tras un rato de trabajo sale algún alumno a dibujar en la pizarra:



(5)

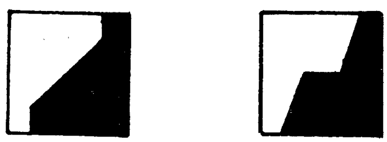
con esto ya tenemos infinitas soluciones al variar la inclinación de la línea, manteniendo que pase por el centro del cuadrado.

El proceso de generalización puede acabar aquí, o ir más lejos. De nuevo la pregunta: ¿No habrá una forma más general, de modo que los resultados ya obtenidos puedan considerarse nuevamente casos particulares de la nueva solución?, e inducir así a modificar la línea. Hay ideas como:



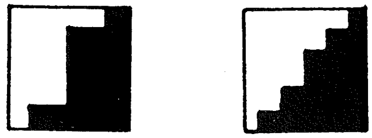
(6)

que abren necesariamente nuevas vías al modificar la inclinación:



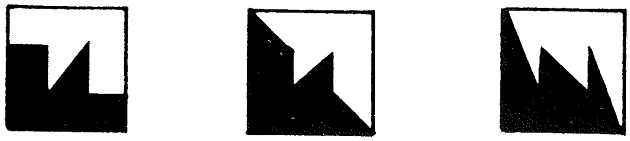
(7)

el número de segmentos:



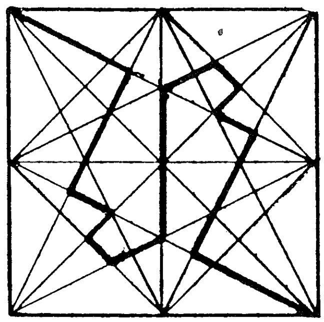
(8)

o introducir nuevas variaciones:



(9)

e incluso fantasías:



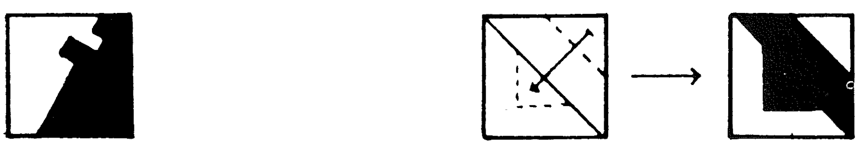
(10)

no es raro que se anuncien como soluciones:

(11)

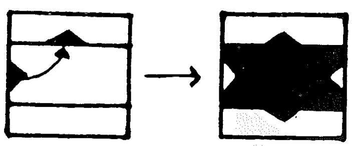
que llevan a revisar el enunciado y examinar si la figura obtenida es realmente un polígono.

Más tarde aparecen nuevas soluciones que son variaciones de las encontradas hasta ahora y que consisten en añadir y quitar una región:



(12)

y surgen polígonos que podemos encontrar en la Alhambra:



(13)

Hablar de matemáticas

En algún momento de este proceso, las intervenciones del profesor han de ir encaminadas a una descripción lo más precisa posible de la línea con la que dividimos el cuadrado. Esta precisión depender fundamentalmente del grado de desarrollo de los estudiantes.

La pregunta en cuestión puede tomar la forma de: ¿Cómo podrías comunicar por teléfono a un interlocutor cada una de las soluciones que has encontrado hasta ahora, de forma que la pueda reproducir tal y como la tienes?.

Es difícil para el profesor tomar la posición de moderador sin dar sus propias soluciones, una de las opciones sería provocar que los estudiantes reflexionen sobre las consecuencias de las definiciones de sus compañeros. Para ello, se propone a la clase que cuando un compañero emita un procedimiento, intenten seguirlo al pié de la letra y vean si pueden conseguir que el polígono obtenido no cumpla las condiciones del problema. Algunas definiciones para el caso del trapecio (5) son:

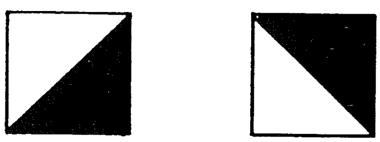
- "Tomar los extremos de dos lados opuestos un poco inclinadas y trazar una línea que los una".
- "Tomar un punto, a una distancia determinada del vértice y otro en el lado opuesto, a la misma distancia y unirlos con una recta".
- "Cualquier línea que salga de un lado hacia el lado opuesto pasando por el centro".

Todas ellas contienen incorrecciones, pero revelan que los estudiantes se estén inmersos en el problema y realizan un verdadero esfuerzo por hacerse entender y expresarse con corrección. Como se apuntó en el Simposio de Valencia (1987): «Para que se desarrolle la capacidad de expresarse con claridad es necesario valorar más la expresión de los intentos titubeantes y los procedimientos incorrectos en lugar de acallarlos en favor de los caminos seguros y las respuestas correctas».

Podemos introducir un elemento de concisión si planteamos: «Pensad ahora que lo vais a comunicar ahora a alguien que está lejos y la conferencia es cara».

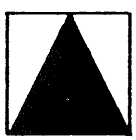
Los polígonos como punto de partida

En este momento parece que la investigación va llegando a su fin, pero el profesor puede introducir nuevos modos de enfocar el problema que hagan despertar de nuevo el interés de los estudiantes. Por ejemplo, «Hemos encontrado dos (o cuatro) triángulos:



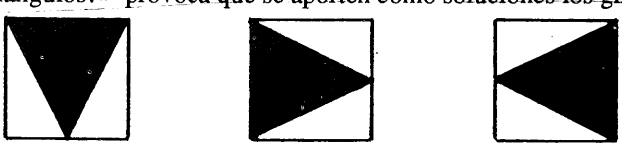
(14)

¿No habrá otros triángulos distintos a estos dentro del cuadrado y cuya área sea la mitad?». No tarda en salir alguien con:



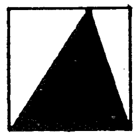
(15)

La pregunta: «¿No habrá más triángulos?» provoca que se aporten como soluciones los giros del anterior



(16)

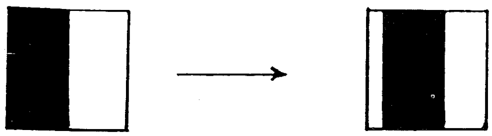
hasta que alguien se da cuenta de que el vértice no ha de estar necesariamente en el centro del lado:



(17)

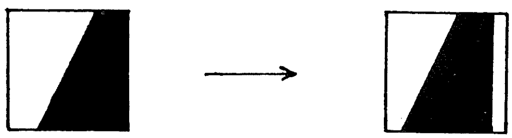
Más adelante se discutirá la conveniencia y la necesidad de probar que el área del triángulo obtenido es la mitad de la del cuadrado. Es interesante señalar que este momento suele ser uno de los más apropiados para que los estudiantes justifiquen por qué ese triángulo tiene por área la mitad del cuadrado y, más adelante hacer una revisión desde esta nueva óptica de las soluciones obtenidas hasta ahora.

Al igual que se ha planteado con triángulos podemos hacerlo con rectángulos: ¿Habrá otros?. Unos alumnos los encuentran al desplazar el del enunciado hacia el interior del cuadrado. A otros les basta con que el rectángulo tenga dos lados en el cuadrado que midan la mitad de su lado.



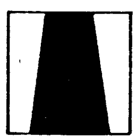
(18)

En los trapecios ocurre algo parecido con los desplazamientos.



(19)

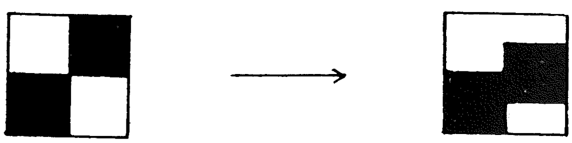
pero es la solucion de los rectángulos que tenía en cuenta la medida de las bases, la que puede dar alguna indicación para trapecios del tipo:



(20)

en los que las condiciones para las bases son mucho más difíciles de expresar.

La idea de trasladar un polígono abre la posibilidad de revisar el trabajo realizado y aparecen soluciones a partir de procedimientos rechazados anteriormente:

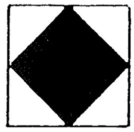


(21)

Hasta ahora hemos trabajado a partir de las figuras que ya teníamos. Si seguimos la estrategia que D. Fielker (1987) llama «actitud abierta», podemos encontrar nuevas preguntas que hagan modificar la forma de los polígonos considerados o el número de lados como:

- "¿No habrá cuadrados de área la mitad dentro del inicial?".
- "¿Y paralelogramos?".
- "¿Y rombos?". "¿Cometas?"
- "¿Otros cuadriláteros distintos a los mencionados?".
- "¿Exágonos?". "¿Pentágonos?". ...
- ...

La figura:

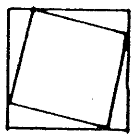


(22)

surge inicialmente como un rombo y no es fácil que vean en ella un cuadrado. A veces se llega a acaloradas discusiones entre los que «saben» que ahí hay un cuadrado y los que «se niegan a admitir» que esa figura pueda ser algo distinto a un rombo. Es una nueva oportunidad de volver a los principios y ver la necesidad de definir con precisión los conceptos de cuadrado y rombo.

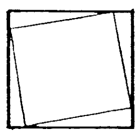
La prueba la realizan considerando que hay cuatro triángulos dentro y cuatro fuera y que todos son iguales.

Esta solución lleva a otra que en principio es aceptada como buena:



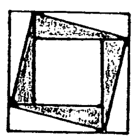
(23)

un método para refutarla es llevarla a casos extremos (cerca del límite):



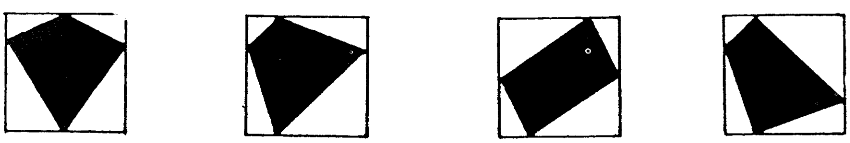
(24)

o estudiando los rectángulos:



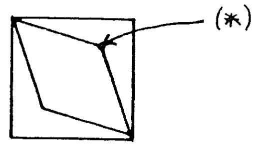
(25)

A partir de (18) pueden surgir variaciones que pueden encaminarse hacia la cometa, el trapecio isósceles, el paralelogramo y otros cuadriláteros:



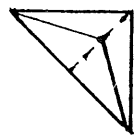
(26)

Cuando buscan rombos puede aparecer:



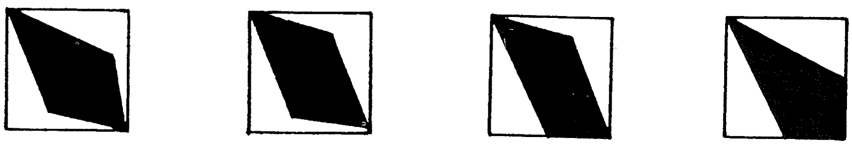
(27)

La dificultad reside en encontrar el punto (*). Una forma de situarlo, es darse cuenta de que el cuadrado inicial está formado por dos triángulos cuyas bases son una de las diagonales del cuadrado, a partir de aquí se puede ver que ha de estar situado sobre la otra a 1/4 (de la longitud de la diagonal) del vértice.



(28)

No es necesario que los puntos (*) se mantengan fijos. Los podemos desplazar sobre las líneas paralelas a la diagonal que pasan por los puntos obtenidos, en el mismo sentido o en sentidos opuestos.

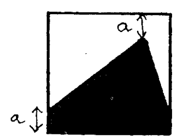


(29)

La búsqueda de pentágonos y exágonos se ve oscurecida por la imagen mental que tienen los estudiantes, cosa que ya ocurría con los rombos que son o no son cuadrados. Parece como si no hubiera pentágonos ni exágonos distintos a los regulares, y esto es producto de que rara vez los libros presentan alguno que no sea regular. Así, aunque ya tienen algunos en su colección de soluciones, no los reconocen como tales:

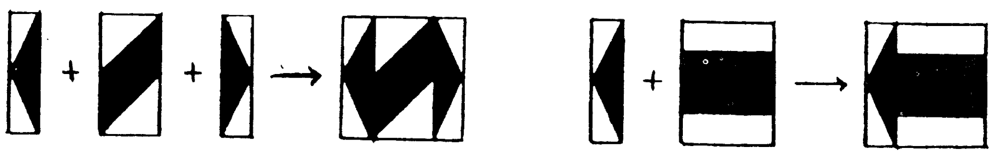
(30)

Un caso especial de pentágono surge al revisar la solución del triángulo:



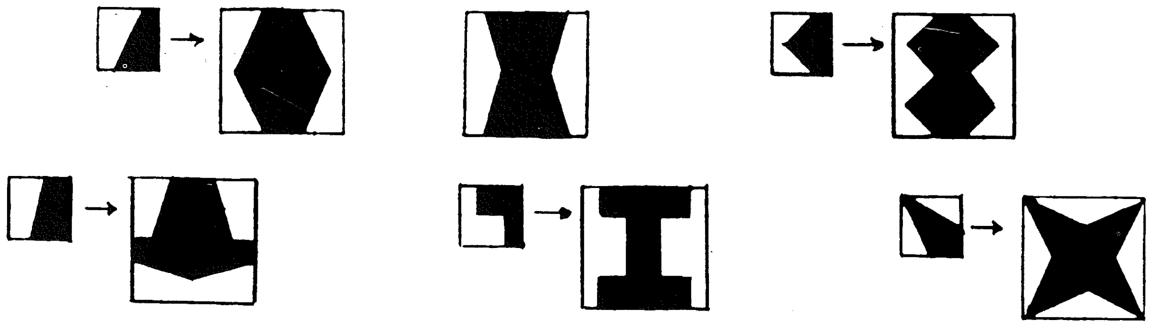
(31)

Hay nuevas soluciones que provienen de dividir el cuadrado en dos o más rectángulos de igual o distinta rea, y aplicar en cada uno de ellos uno de los métodos ya encontrados con cuidado de que la figura resultante sea un polígono.



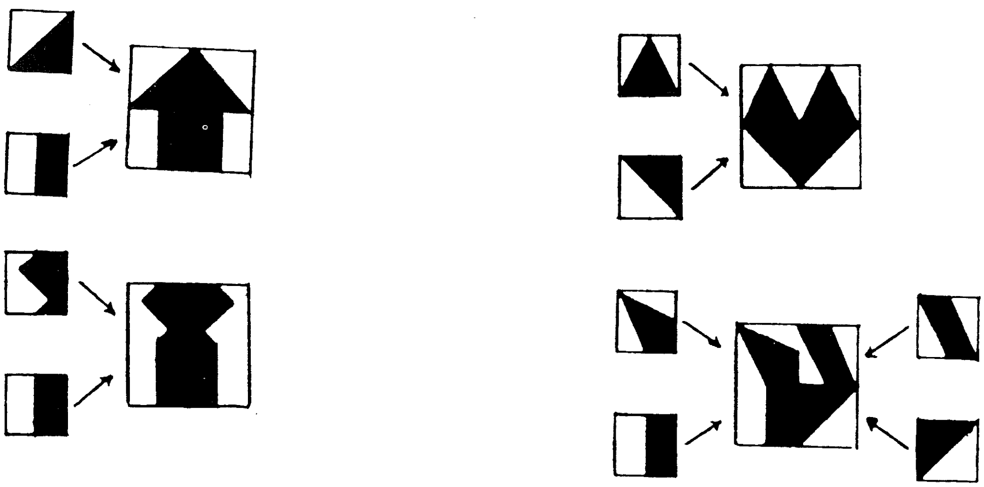
(32)

Las soluciones que provienen de dividir el cuadrado en 4 más pequeños y en todos ellos aplicar un método pueden llegar a ser especialmente elegantes:



(33)

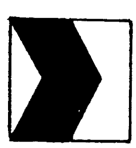
No es necesario aplicar siempre el mismo procedimiento, podemos combinar dos o más con resultados como:



(34)

Resulta sorprendente ver cómo varios procedimientos diferentes pueden dar lugar a una misma figura. Es el caso de:

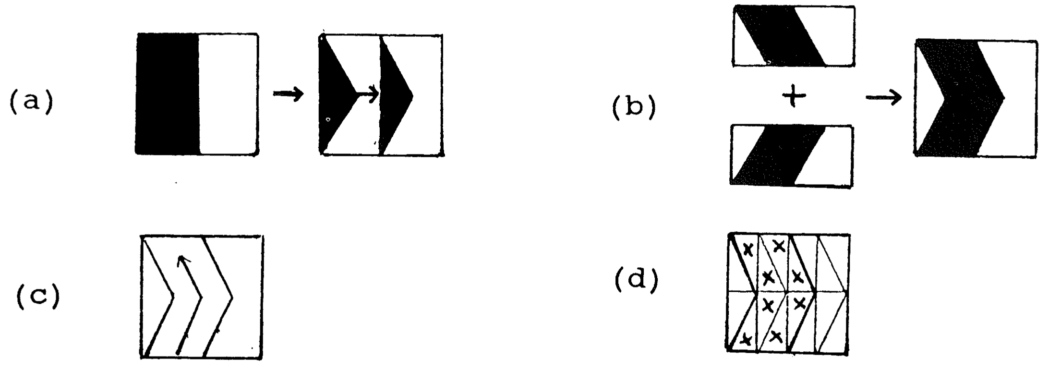
(35)



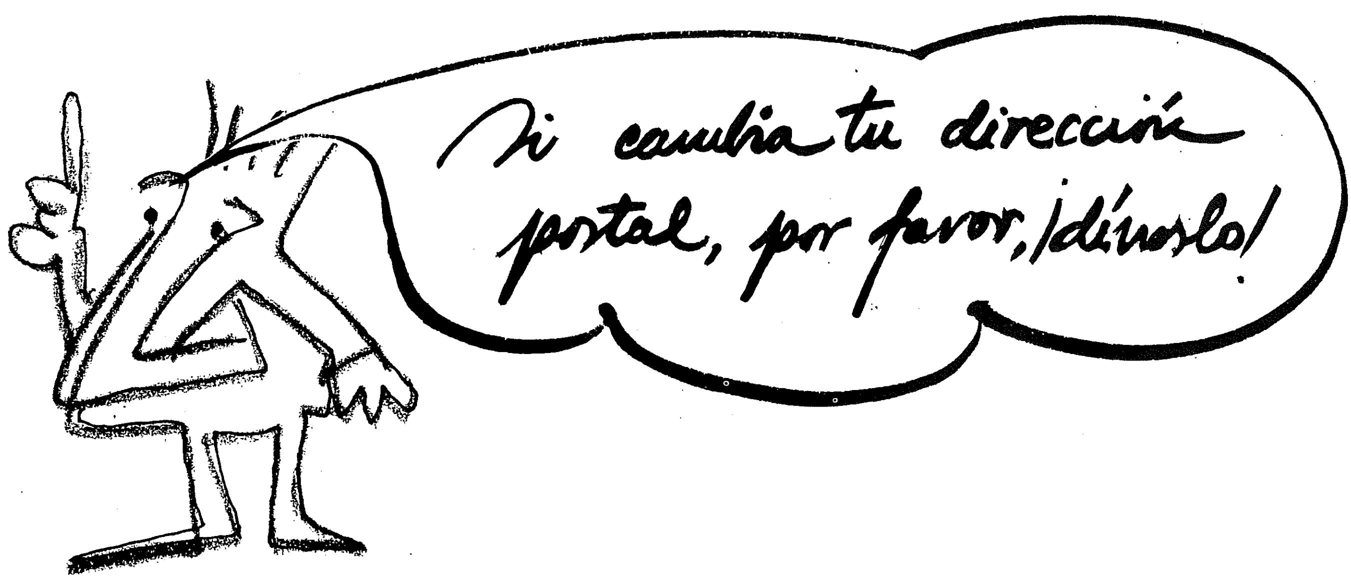
que puede obtenerse por varias vías:

(a) A partir del rectángulo, trasladar un triángulo.
(b) Considerar el cuadrado como dos rectángulos iguales y obtener en cada uno de ellos un paralelogramo.
(c) La región barrida al desplazar un segmento de longitud la mitad del lado del cuadrado.
(d) Dividir el cuadrado en 16 triángulos iguales y tomar 8.

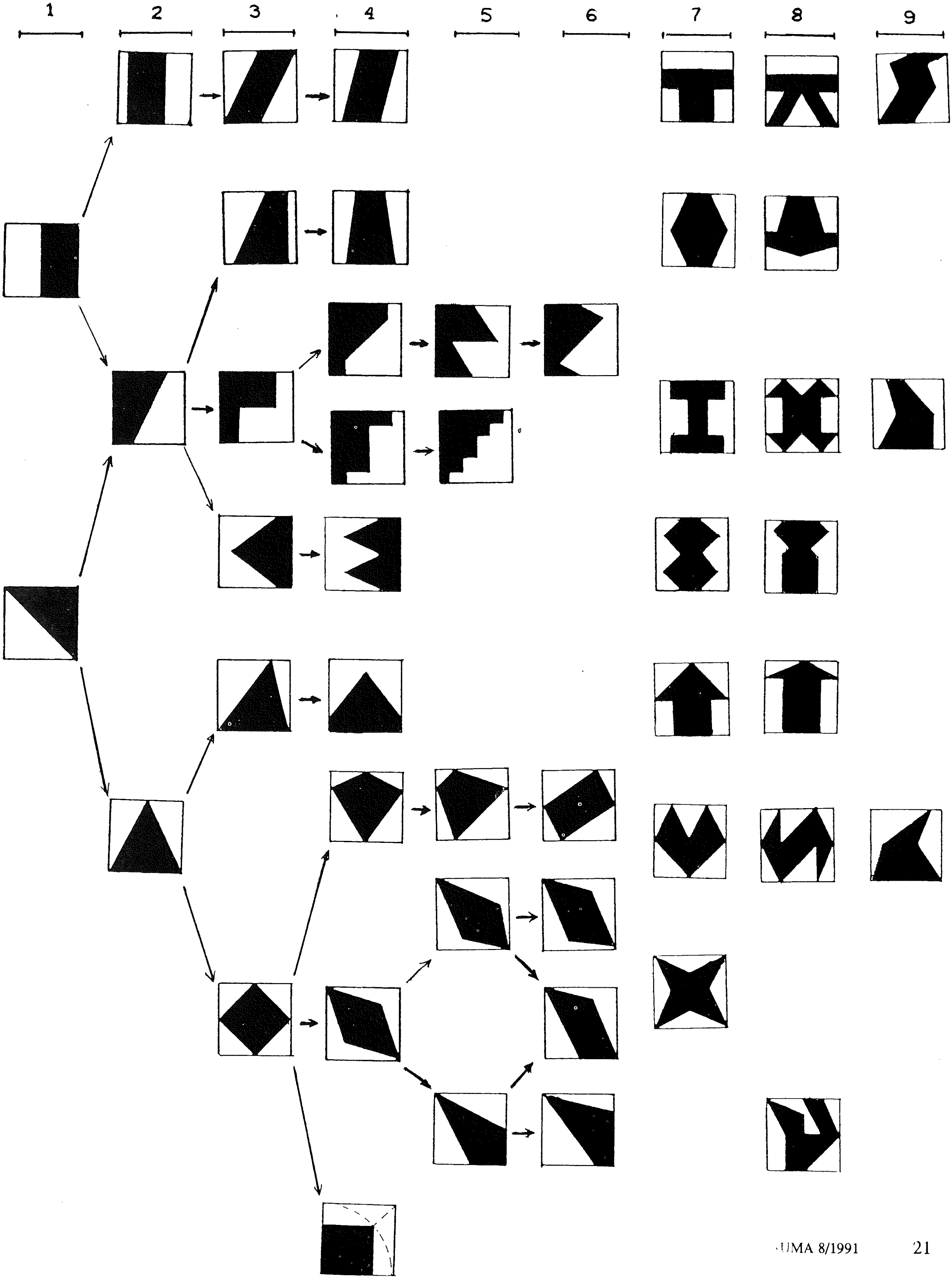
(36)



Para finalizar este apartado, he intentado construir un mapa de las soluciones en el que se pretende reflejar las direcciones del pensamiento a partir de la observación de estudiantes y compañeros enfrentados a esta investigación. Las flechas de los niveles 1 a 6 vienen a indicar que, a partir de lo aprendido al encontrar una solución, los individuos tienen cierta «predisposición» a encontrar la siguiente. Los niveles 7 y 8 corresponden a combinaciones de dos o más procedimientos. Aún hay un 9º nivel que se expone en el apartado siguiente.



Líneas de pensamiento

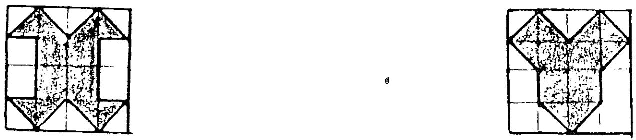


El concepto de área

Cuando los estudiantes trabajan con papel cuadriculado, pronto encuentran soluciones que provienen de formar un polígono que contenga exactamente la mitad de los cuadraditos:

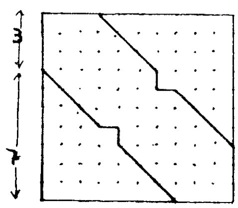
(37)

Con este método surgen infinidad de soluciones, algunas estéticamente atractivas como:



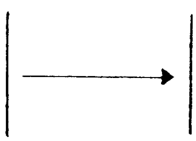
(38)

Y otras que requieren de ciertos refinamientos:

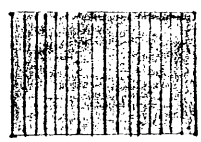


(39)

Lo más interesante es que el método lleva implícito la manipulación del concepto de área desde una perspectiva estética, y que es posible contrastar este enfoque con otro dinámico como el que ofrece Parker (1988) que considera el rea como la cantidad de plano atravesado por un segmento de recta móvil que ha permanecido siempre paralelo al original. Así:



habrá «barrido»



(40)

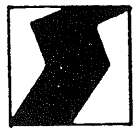
en nuestro caso, el desplazamiento de un segmento que mida la mitad del lado en una dirección perpendicular a sí mismo, nos lleva a la solución del enunciado.

(41)

Si el segmento se mueve en una dirección no perpendicular, sino formando un ángulo agudo consigo mismo mientras permanece paralelo a su posición original, debe atravesar la misma área; y tenemos el paralelogramo:

(42)

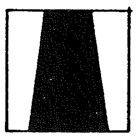
Lo sorprendente de esta visión en el problema que nos ocupa es que aporta nuevas soluciones, ya que si el camino que describe el segmento no influye en la cantidad de superficie barrida, lo podremos hacer cambiar de dirección tantas veces como deseemos, siempre y cuando se mantenga paralelo a su posición original:

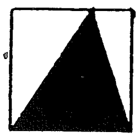


(43)

Parker aún va más lejos ya que, si el segmento se acorta en proporción constante a medida que se desplaza, generar un trapecio. El área será la longitud media del segmento por la distancia que atraviesa. Para obtener una solución lo único que habrá de preocuparnos es que esa media sea exactamente la mitad del lado del cuadrado. En el límite tendremos el triángulo.

$$S = \frac{B+b}{2} \cdot 1$$

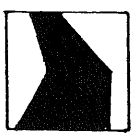


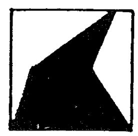


$$S = \frac{B+0}{2} \cdot 1$$

(44)

Para acabar, podemos modificar estas últimas soluciones si hacemos variar la dirección del segmento que decrece:





(45)

La demostración

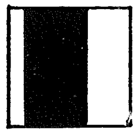
En muchos momentos del proceso relatado surge la necesidad de demostrar que el polígono obtenido tiene por rea la mitad del cuadrado. Si demostrar es convencer con argumentos lógicos, es necesario tener en cuenta quién tiene que producir esos argumentos y a quién van dirigidos, en ambos casos son los estudiantes. El tipo de razonamientos que son plausibles para alumnos de estas edades y que podemos esperar de ellos es muy distinto del que maneja un matemático.

En muchos casos es conveniente dar por válidas justificaciones a veces incompletas o ambiguas ya que el objetivo que se persigue es iniciar a los estudiantes en la conveniencia y el proceso de la demostración y que den sus primeros pasos en este sentido.

Por otra parte, un requisito imprescindible es que en la clase secree una atmósfera de indagación para que los estudiantes sientan la necesidad de probar o refutar sus conjeturas cuando encuentran soluciones al problema.

Las argumentaciones que se dan son de dos tipos: unas utilizan razonamientos de corte geométrico: equivalencia de reas, movimientos, etc.; otras, se basan en procedimientos algebraicos: utilización y manipulación de fórmulas para el cálculo del rea de los polígonos.

La solución del rectángulo planteado en el enunciado es evidentepara los alumnos ya que «se ha dividido el cuadrado en dos partes iguales». Cuando el rectángulo se dibuja en el interior del cuadrado, proponen un desplazamiento hacia uno de los lados.

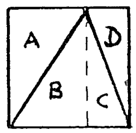


(46)

La demostración algebraica tiene en cuenta que el rectángulo tiene por altura el lado del cuadrado y por base la mitad.

Cuando se propuso la demostración para el triángulo, la congruencia de triángulos hizo que resultara sencillo.

$$S_A = S_B \text{ y } S_C = S_D \text{ luego } S_{B+C} = S_{A+D}$$

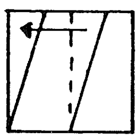


(47)

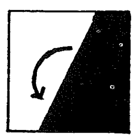
Aquí, la base y la altura del triángulo son iguales a los lados del cuadrado.

Para el paralelogramo se vió que una traslación del triángulo hacia la izquierda lo convierte en un rectángulo

(48)



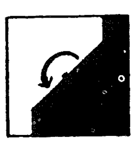
Para el trapecio, los alumnos propusieron realizar un giro de180º alrededor del centro del cuadrado con lo que los dos trapecios se superponen. La demostración algebraica que toma en cuenta que la suma de las bases es igual al lado del cuadrado, tuvo la ventaja de ser útil para otros trapecios obtenidos, con la geométrica hubo que cambiar el procedimiento, dar cortes realizar desplazamientos.



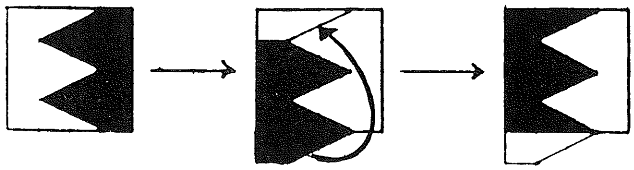
(49)

En cambio la demostracin geométrica sirvió más tarde para lospolígonos con una línea con centro de rotación de orden 2.

(50)

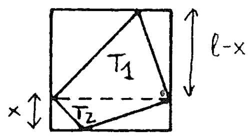


Un caso especial lo realizó una alumna que, ante el polígono dela figura, realizó el siguiente proceso (recortando y desplazando):



(51)

Hay un resultado interesante cuando tenemos un cuadriltero convexo inscrito en un cuadrado (es válido también cuando está inscrito en un rectángulo) con una diagonal paralela a uno de sus lados

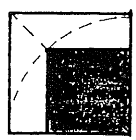


(52)

$$S_{T1} = \frac{l(l-x)}{2} \; ; \; S_{T2} = \frac{lx}{2}$$

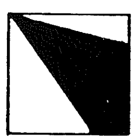
$$S_{T1} + S_{T2} = \frac{l(l-x)+lx}{2} = \frac{l^2-lx+lx}{2} = \frac{l^2}{2} = \frac{S_C}{2}$$

Avanzado ya el trabajo de manipulación algebraica les propuse el siguiente problema: «Demostrar que, según se hace la construcción del cuadrado pequeño de la figura, su rea ser la mitad degrande»



(53)

Aún estudiamos algunos otros cuadriláteros como:



(54)

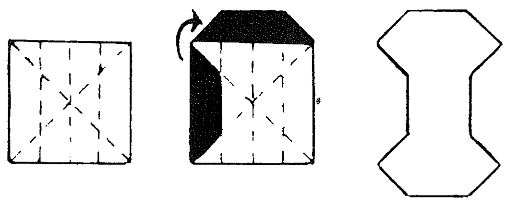
Mosaicos

En este tipo de trabajos, no son los estudiantes los únicos quese plantean preguntas e intentan responderlas. También adquiere relevancia el papel del profesor como investigador en una doble vertiente: por una parte, la investigación didáctica a través de la cual busca estrategias para favorecer el aprendizaje de los estudiantes; por otra, la misma situación matemática planteada supone un reto para él. Ha de situarse en la perspectiva del resolutor para introducirse en la tarea propuesta como uno más.

A veces, podemos encontrar alicientes para retomar temas que teníamos «aparcados» y volver a profundizar en ellos. Durante una época en la que intentaba poner orden a las ideas de este trabajo, una visita a la Alhambra y sus mosaicos, me ofreció nuevas sugerencias.

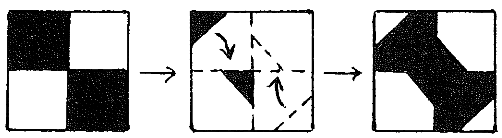
La chispa inicial surgió de una de las figuras que más me llaman la atención: el hueso. La técnica de construcción parte también del cuadrado. Ver Ruiz y Pérez (1987).

La búsqueda de nuevos procedimientos para la mitad del cuadrado me llevó al planteamiento siguiente: «Si el hueso surge de desplazar regiones del cuadrado hacia el exterior:



(55)

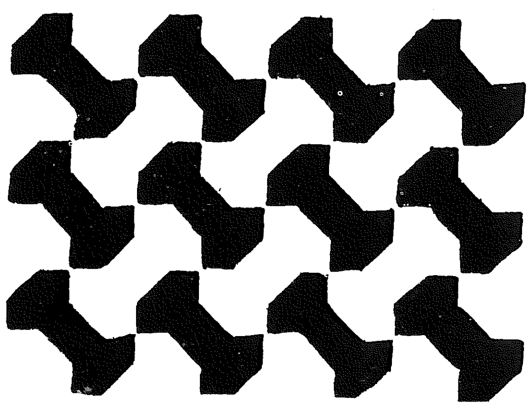
¿Podré conseguir algo parecido sin salirme del cuadrado?». En el contexto de la investigación, la cuestión iba tomando una nueva forma: «¿Podré encontrar el hueso dentro del cuadrado, con un área igual a la mitad?». Tras varias tentativas conseguí una vía a partir de la división del cuadrado en cuatro más pequeños y considerando dos opuestos:



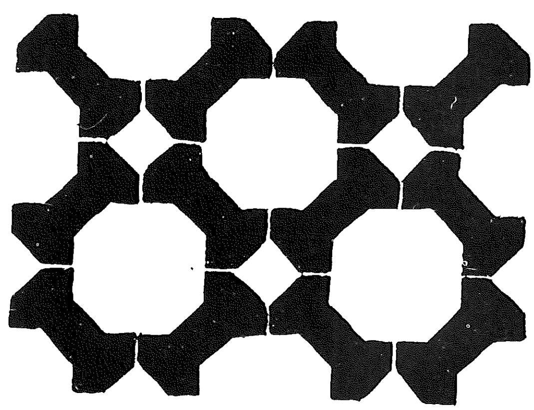
(56)

Dos de los mosaicos que podemos generar con el hueso:

(57)



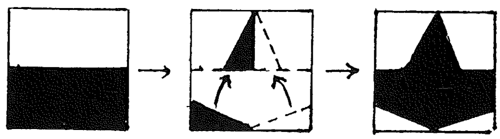
Traslaciones



Simetrías

Ya que estamos en la Alhambra, ¿por qué no intentarlo con otros diseños?.

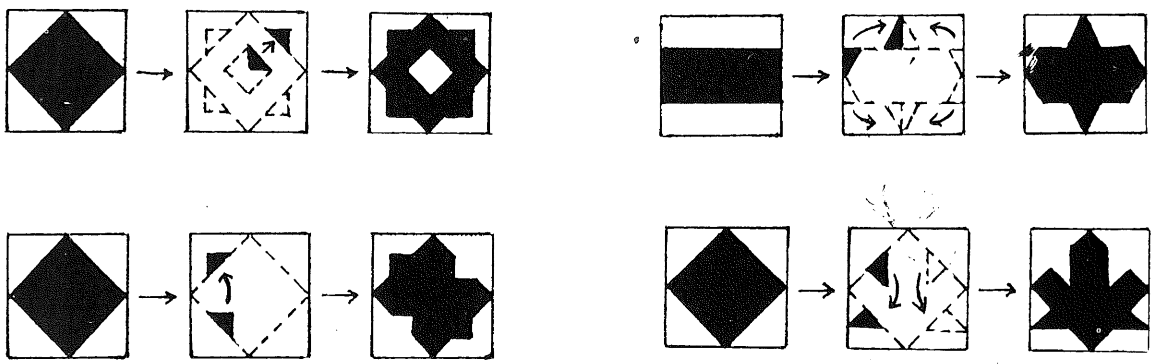
Una vez obtenido el hueso, no fué difícil conseguir el avión:



(58)

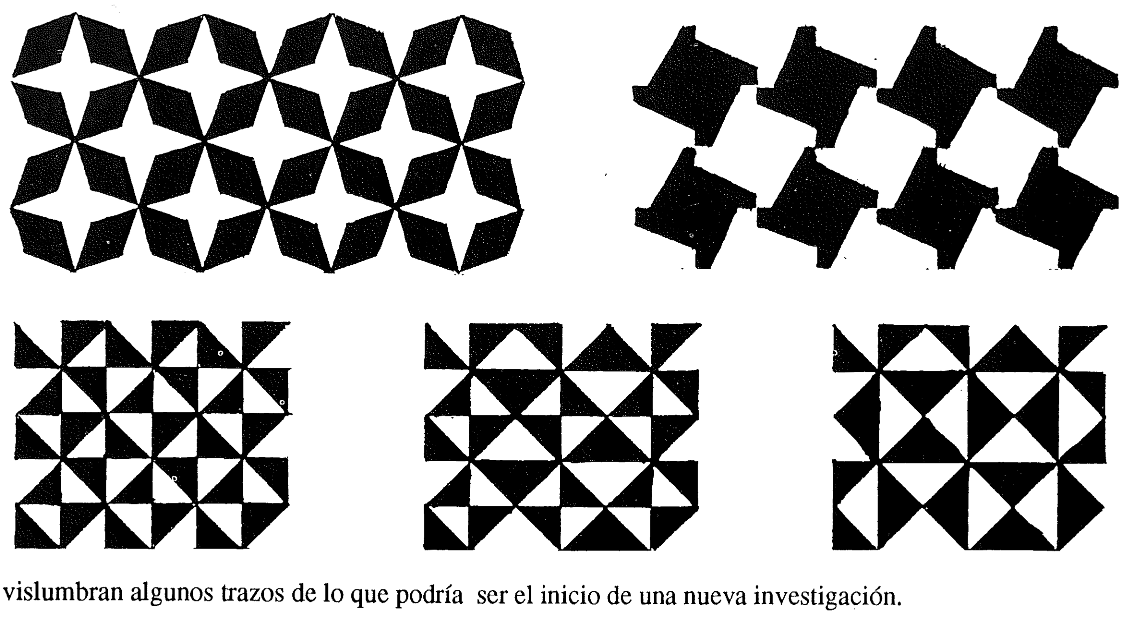
La creación de módulos resultó ser un campo fructífero que da lugar a diversas formas utilizadas por los árabes. Una pequeña muestra:

(59)



Los mosaicos generados por algunas figuras obtenidas en los apartados anteriores como el rombo, el trapecio o el triángulo también nos recuerdan los de la Alhambra:

(60)



Aquí se vislumbran algunos trazos de lo que podría ser el inicio de una nueva investigación.

Ampliaciones

Algunas ampliaciones al problema cuando los alumnos están interesados o para algunos que deseen ir más lejos.

Obtener una polígono de área equivalente a la mitad de un triángulo equilátero o un triángulo isósceles.

Construir polígonos cuya área sea la mitad del cuadrado con piezas del tangram chino.

Obtener una figura de área la mitad de un exágono o un círculo.

El paso del plano al espacio: obtener un poliedro cuyo volumen sea la mitad del cubo. Estudio de las secciones modulares del cubo.

Obtener un polígono que tenga por rea la cuarta parte de la del cuadrado.

Creación de mosaicos con algunas de las figuras obtenidas.

Conclusiones

Una investigación de este tipo puede plantear dificultades al profesor: «Todo esto está muy bien, pero yo tengo un programa que cumplir y no puedo perder tanto tiempo». Podemos responder a esta pregunta si analizamos cuáles son los conocimientos matemáticos implicados en el proceso relatado. Los alumnos:

Han utilizado la terminología geométrica y han enriquecido su vocabulario en la descripción de formas y figuras.
Han profundizado en conceptos como el de polígono, área o los movimientos (traslaciones, giros y simetrías) y los han relacionado.
Han estimado, medido y calculado longitudes y superficies.
Han consolidado destrezas como la utilización de fórmulas y la manipulación algebraica.
Han realizado construcciones geométricas.
Han utilizado propiedades geométricas como el teorema de Pitágoras.

Por otra parte, también hay que considerar como conocimientos a los procedimientos y estrategias que se utilizan para hacer matemáticas:

La búsqueda sistemática a la vez que imaginativa de soluciones a un problema.
La generalización a partir de casos particulares y la particularización al darse cuenta de que una solución engloba a muchas otras.
La realización de conjeturas, la búsqueda de contraejemplos para refutarlas.
La demostración utilizando argumentos geométricos y algebraicos.

Tras esta forma de proceder en el aula, el mejor logro ha residido en la actitud típicamente matemática con que el estudiante ha interpretado esta experiencia:

Han descrito y definido figuras obtenidas con sus propias palabras.
Han defendido sus soluciones ante sus compañeros.
Han tomado decisiones en el curso de su trabajo y han examinado las consecuencias de su elección.
Han tomado una vía de trabajo que han seguido hasta que ha dejado de ser interesante. En algunos casos han ideado un método, por ejemplo el de cuadriculación, y pronto lo han abandonado por resultar demasiado sencillo encaminándose

hacia otros procedimientos más interesantes y satisfactorios.
Han tenido la oportunidad de apreciar la simetría y la regularidad de las formas creadas.

Para acabar, una pregunta: ¿Puede ser esto una muestra (como habrá muchas otras) de aprendizaje significativo?.

Referencias Bibliográficas

ALONSO, F. y otros. (1987). Aportaciones al debate sobre las matemáticas en los 90. Simposio de Valencia. (Mestral:Valencia).

CRAWFORT, D.. ¿Qué es un cuadrilátero?. En WALTER, M. (1988). pp. 9-12. (M.E.C.:Madrid)

FIELKER, D. (1987). Rompiendo las cadenas de Euclides. (M.E.C.: Madrid).

GARCIA CRUZ, J.A. (1986). Actividades de Geometría. En Apuntes de Educación. Naturaleza y Matemáticas. num. 20 pp 12-13 (Anaya: Madrid)

MORA, J. A. y PEREZ, P. (1987). Geometría. En Propuesta de D.C. de matemáticas en la Comunidad Valenciana. (Generalitat Valenciana).

PARKER, J.. Revisión del concepto de rea. En WALTER, M. (1988). pp. 23-31. (M.E.C.:Madrid)

RUIZ GARRIDO y PEREZ GOMEZ. (1987). Visiones matemáticas de la Alhambra. El color. En revista Epsilon, monográfico dedicado a la Alhambra. pp 51-59.

SCHOENFELD, A.M. (1983). Sugerencias para la enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. En La Enseñanza de la Matemática a Debate. (M.E.C.: Madrid).

WALTER, M. (1988). Geometría. (M.E.C. Colección «Documentos y Propuestas de trabajo»: Madrid)

WALTERS, C. (1981). Matematicians at large. (A.T.M.)