Problemas multiplicativos de conversión

Carlos Maza Gómez

Introducción

Desde que, en los años setenta, se planteó la necesaria presencia de la resolución de problemas como eje vertebrador del currículum de Matemáticas, se han dado decisivos avances en este terreno. En lo concerniente a la resolución de problemas aritméticos en la Enseñanza Primaria, se ha trabajado «grosso modo» en tres aspectos fundamentales:

1) En primer lugar, las posibilidades que ofrecen los distintos conceptos y operaciones aritméticas de desarrollarse a través de la resolución de problemas.

2) En segundo lugar, las estrategias empleadas por los niños al resolver problemas, con especial énfasis en la llamada «artimética informal», es decir, las estrategias infantiles no influídas por la escolarización.

3) Por último, la aplicación de todo lo anterior en la instrucción escolar, sea por medio del currículum, sea por formas concretas de enseñanza en el aula. Este es el aspecto más reciente y el que orientará, probablemente, el más próximo futuro en la investigación sobre resolución de problemas.

Fruto de estos esfuerzos han surgido trabajos consistentes sobre los dos primeros aspectos para la suma y la resta [Carpenter, Moser y Romberg 1982], así como resultados menos completos en la multiplicación, división, fracciones, etc.

Parece razonable suponer que la bien establecida clasificación de distintos tipos de problemas de suma y resta [Puig y Cerdán 1988, Maza 1989] irá introduciéndose paulatinamente y de modo sistemático en el currículum español. Lo mismo sucede desde hace tiempo, aunque sólo de forma intuitiva, respecto a los problemas de multiplicación y división. Dado que el aprendizaje infantil, dentro de una misma operación, varía sustancialmente según los tipos de problemas considerados, se puede afirmar que la no consideración por el profesor de estas clasificaciones comportaría:

a) Que se transgrediera el principio de una progresiva complejidad en el aprendizaje, planteandose problemas complicados antes que otros más sencillos.

b) Olvidar tipos de problemas en beneficio de otros, más clásicos. Tal sería el caso de presentar sólo problemas de multiplicación resolubles por suma reiterada, olvidando los de combinación propios del producto cartesiano o los que se presentan en este artículo, de conversión.

A la vista de todo ello, este artículo pretende hacer conocer al profesorado la clasificación de problemas de multiplicación y división, difundiendo, al mismo tiempo, las posibilidades que encierran los llamados problemas de conversión.

Clasificación de problemas de multiplicación y división

Hay cierto acuerdo entre los investigadores en Educación Matemática en la existencia de tres tipos generales de problemas para estas dos operaciones [Schwartz 1976, Vergnaud 1983, Quintero 1986, Nesher 1988].

Para la multiplicación, e incluyendo un ejemplo breve de cada caso, serían los siguientes:

1) Problemas de razón

Compras 2 paquetes de caramelos. Cada paquete tiene 6 caramelos. ¿Cuántos caramelos compraste?.

2) Problemas de comparación

Tienes 6 pesetas. Un amigo tiene dos veces las pesetas que tú tienes. ¿Cuántas pesetas tiene tu amigo?.

3) Problemas de combinación (o de producto cartesiano)

Tienes 6 camisas y 2 pantalones. Si te pones una camisa y un pantalón cada vez, ¿de cuántas formas distintas puedes vestirte?.

Todos los problemas planteados se resuelven con la operación 2 x 6 pero, sin embargo, plantean dificultades diferentes. Parece claro que los problemas de combinación (que implican la combinación de los elementos en juego a través de un producto cartesiano) son más difíciles que los dos tipos anteriores, resolubles por una suma reiterada [Hart 1981, Quintero 1985].

Si bien se está conforme con esta clasificación, no hay tanto acuerdo en determinar aquella variable que distingue a unos problemas de otros. Aquí presentaremos, exclusivamente, la interpretación dada por Schwartz [1976, 1986] que supone un análisis de los tipos de cantidades empleados.

Así, se distinguen las cantidades «extensivas» del tipo 6 caramelos o 2 pantalones, de las cantidades «intensivas», que señalan la presencia de una cantidad en otro. Este sería el caso de 6 caramelos por paquete. Al objeto de simplificar este análisis, Schwartz [1986] propone que las cantidades del tipo «dos veces más» sean consideradas como intensivas, bajo el razonamiento de que, en el problema de comparación expuesto, ese «dos veces más» podría entenderse como las pesetas de tu amigo respecto de las tuyas.

Esta reducción se propone exclusivamente para simplificar el análisis teórico. En su vertiente práctica se siguen considerando distintas la razón del primer problema (6 caramelos/paquete) y el cuantificador del segundo (2 veces más).

De esta forma, los problemas de razón y de comparación tendrían la estructura de cantidades E x I (cantidad extensiva por cantidad intensiva), mientras que el problema de combinación respondería a la estructura E x E.

Esta clasificación supone que para los dos primeros tipos, inicialmente, la operación de multiplicar no es conmutativa. Uno de los números corresponde a la cantidad que se repite (I en el primero, E en el segundo) y el otro a la cantidad de veces que se repite el anterior. Ello tiene como consecuencia inmediata que los problemas de división correspondientes han de tener en cuenta que la incógnita sea una u otra cantidad, lo que da lugar a dos problemas de división para cada uno de los dos primeros casos contemplados anteriormente. Serían los siguientes:

1) Problemas de razón

a) Paricipación-razón: Compras 2 paquetes de caramelos, lo que hacen un total de 12 caramelos. ¿Cuántos hay en cada paquete?.

b) Agrupamiento-Razón: Compras 12 caramelos en paquetes de a 6 caramelos. ¿Cuántos paquetes compraste?.

2) Problemas de comparación

a) Participación-Cuantificador: Tu amigo tiene 12 pesetas, 2 veces lo que tú tienes. ¿Cuántas pesetas tienes?.

b) Agrupamiento-cuantificador: Tienes 6 pesetas y tu amigo 12. ¿Cuántas veces más que tú tiene tu amigo?.

3) Problemas de combinación

Tienes 6 camisas y varios pantalones. Si te pones una camisa y un pantalón cada vez, puedes vestirte de 12 maneras diferentes. ¿Cuántos pantalones tienes?.

Las denominaciones «partición» y «agrupamiento» (que también recibe el nombre de cuotición) corresponden a las dos acciones fundamentales de resolución de estos problemas: Repartir los elementos dados observando los que corresponden al final o formar grupos de los mismos elementos alcanzando un número de grupos determinado.

Los problemas de conversión en la multiplicación

En el análisis de los problemas multiplicativos se han mencionado las posibilidades E x I y E x E. Una simple extensión de las mismas conduce a considerar la posibilidad I x I.

Este tipo de problemas ha sido, en general, considerado como poco usual o inaplicable en la Enseñanza Primaria [Puig y Cerdán 1988, Nesher 1988], por lo cual ha merecido poca atención. La única aplicación que se aduce para ellos es la conversión de medidas que se desarrolla en cursos superiores. Sin embargo, un análisis sencillo puede descubrir no sólo su aplicabilidad en las aulas de Primaria sino, además, su posible conveniencia.

Respecto a los problemas de multiplicación, la estructura IxI ofrece tres posibilidades, según se considere por cantidad intensiva una razón (R) o un cuantificador (C). Estas son:

1) Problemas R X R

En cada bolsa de un cumpleaños hay 5 paquetes de chicle. Cada paquete tiene 3 chicles. ¿Cuántos chicles hay en cada bolsa?.

2) Problemas R X C

Hay 5 chicles en un paquete pequeño. Un paquete grande tiene 3 veces los chicles del paquete pequeño. ¿Cuántos chicles tiene el paquete grande?.

3) Problemas C X C

Pablo tiene un dinero. Enrique tiene 3 veces el dinero de Pablo. Guillermo tiene 4 veces el dinero de Enrique. ¿Cuántas veces tiene Guillermo el dinero de Pablo?.

Como una simple muestra de las posibilidades de resolución que pueden tener estos problemas, se le plantearon a Guillermo, un niño de 8 años y 2 meses. Cursaba el segundo curso de EGB, en el cual había encontrado, por primera vez, distintos problemas multiplicativos y algunos ejemplos no sistemáticos de división. Se le recomendó, durante la entrevista, que dibujara los elementos del problema antes de resolverlos, al objeto de observar la expresión gráfica de su procedimiento y ello diera una pista de la posible representación del problema que hubiera construído.

Los problemas RxR y RxC fueron bien resueltos y, como se puede apreciar por sus dibujos (Figura 1), a través de una suma reiterada. Tal parece que el procedimiento de solución consistía en considerar la primera razón dada como el multiplicando y el otro número (razón o cuantificador) como el multiplicador. Con ello, en realidad, se reducía el problema RxR a un problema de razón y el RxC a un problema de comparación.

De ahí surgen dos interrogantes: Esta estrategia de suma reiterada ¿es la más aplicable, en general, a este tipo de problemas?. Además, ¿estos problemas de conversión conllevan mayor dificultad que los de razón y comparación, o suponen una dificultad de aprendizaje similar?. Lo que sí parece probable es que, si la estrategia de resolución fuera la suma reiterada, los problemas de conversión serían posibles de resolver incluso a los 8 años.

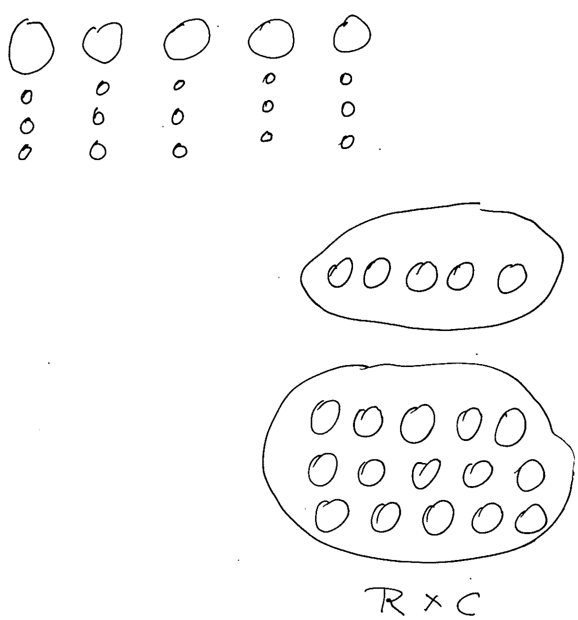

Figura 1

El problema CxC acarreó, sin embargo, una gran dificultad. El entrevistado parecía necesitar un referente concreto sobre el que trabajarpor lo que consideraba para Pablo un dinero hipotético (5 pesetas). Además, era incapaz de emplear más de un cuantificador, de manera que aplicaba el último pronunciado (4 veces) para dar la solución errónea de 20.

Este tipo de problemas supone la inclusión jerarquizada de tres conjuntos: El dinero de Pablo está incluído en el de Enrique (3 veces) que, a su vez, está incluído en el de Guillermo (4 veces). Se le suministró, entonces, un diagrama de Venn donde aparecían los tres conjuntos relacionados de esta manera, pero no dió resultado alguno.

Para confirmar la hipótesis de que la inclusión jerarquizada era un ostáculo en este tipo de problemas, se le planteó otro del mismo tipo:

La tienda «Roja» vende 3 veces más que la «Azul» y la «Azul» vende el doble que la «Verde». ¿Cuál vende más: La tienda «Roja» o la «Verde»? ¿Cuántas veces más?.

La respuesta a la primera pregunta fué acertada (lo cual ni confirmó ni desmintió la hipótesis). Habiéndole instado a dibujar la situación fué incapaz de hacerlo, aferrándose a la respuesta de la segunda pregunta. Esta consistió en el siguiente diálogo:

Pregunta:	*¿Cuántas veces más?*
Respuesta:	*Una.*
Pregunta:	*Una vez. Entonces ¿vende el doble?*
Respuesta:	*No. De 3 la verde es el doble ¿no?. Luego es 3 menos el doble, una vez más.*
Pregunta:	*¡Ah! Lo que haces es 3 menos 2.*
Respuesta:	*Si, éso. Una vez más.*

Tal parece que la secuencia «Verde incluída en Azul incluída en Roja» es transformada en «Azul incluída en Verde incluída en Roja», de manera que lo que se compara son las veces que la Azul estaría incluída en ambas. En una estaría incluída 2 veces y en la otra 3. Así que la pregunta del problema se transforma en: *¿Cuántas veces más incluye la Roja que la Verde a la Azul?.*

De todo ello, se puede conjeturar que existirían tres acciones en la resolución de este tipo de problemas:

a) Admitir la presencia hipotética de una cantidad (el dinero de Pablo, la mercancía vendida por la tienda Verde). Ello parece plantear dificultades en el primer problema.

b) Considerar una adecuada relación de inclusión entre las tres cantidades en juego, lo que se muestra como difícil en el segundo problema, así como en el primero.

c) Realizar una operación multiplicativa entre cuantificadores apoyada en las dos primeras acciones. Ello resulta insalvable si alguna de las anteriores acciones fracasa.

Los problemas de conversión en la división

Se puede sostener que las multiplicaciones del tipo IxI no son conmutativas, lo que daría lugar a dos clases de división para cada una de las categorías presentadas [Puig y Cerdán 1988]. Dimensionalmente, se puede sostener también lo contrario, que es lo que haremos aquí. En efecto, en el problema RxR de multiplicación, la solución viene dada por

5 paquetes/bolsa x 3 chicles/paquete

y también por

3 chicles/paquete x 5 paquetes/bolsa

Esta solución es, en ambos casos, de 15 chicles/bolsa.

Si se toma, entonces, la multiplicación como conmutativa, los posibles problemas de división que surgen paralelamente a los anteriores, son los siguientes:

1) Problemas R X R
Un paquete tiene 4 caramelos. Hay 12 caramelos en una bolsa. ¿Cuántos paquetes entran en una bolsa?.

2) Problemas R X C
Los niños de una familia comen 14 galletas en cada desayuno, el doble de lo que comen los niños de otra familia. ¿Cuántas galletas comen en cada desayuno los niños de la segunda familia?.

3) Problemas C X C
Pablo tiene un dinero. Guillermo tiene 10 veces el dinero de Pablo y el doble del dinero de Enrique. ¿Cuántas veces tiene Enrique el dinero de Pablo?.

Es interesante observar que Guillermo, el niño entrevistado, presenta un comportamiento estable tanto para los problemas de multiplicación como de división. Así, resuelve con facilidad los dos primeros y falla en el segundo.

El problema RxR muestra además, en su resolución, un adecuado establecimiento de las relaciones de inclusión entre los tres conjuntos presentes, los de caramelos, paquetes y bolsas. Su representación gráfica así lo muestra (Figura 2).

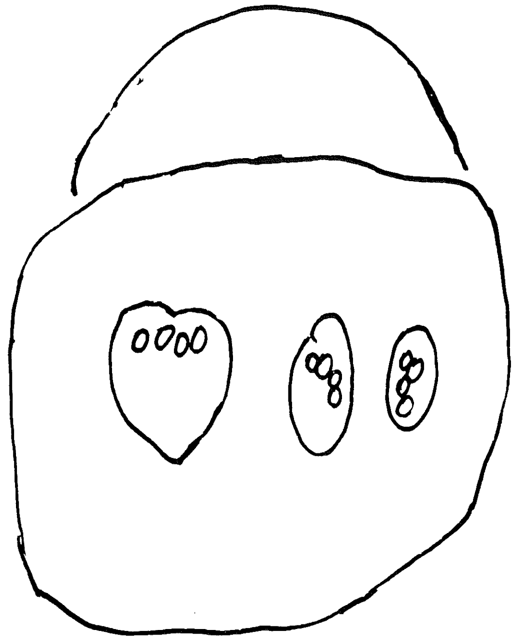

Figura 2

Dicha representación no reproduce el esquema de acciones tal como se presentan en el problema, sino que comienza dibujando la bolsa para continuar con los paquetes uno a uno, incluyendo en cada paso los caramelos correspondientes y dando la respuesta final adecuada. Algo similar sucede en el problema RxC.

Nuevamente, es el problema CxC el que le causa dificultades. Dibuja un conjunto de seis elementos (que manifiesta ser el dinero de Pablo) y, a continuación, otro conjunto de seis más seis elementos (que afirma ser el dinero de Enrique). Así pues, necesita nuevamente tomar un conjunto de referencia sobre el que operar y la operación que ejecuta es la aplicación del último cuantificador dado (el doble).

Con un tratamiento semejante al caso de la multiplicación, se le planteó un nuevo problema menos propicio a serle asignadas cantidades hipotéticas iniciales:

La tienda «Roja» vende 8 veces más que la tienda «Azul» y 4 veces más que la tienda «Verde». ¿Quién vende más, la tienda «Verde» o la «Azul»?. ¿Cuántas veces más?.

La primera pregunta fué, nuevamente, acertada. La segunda supuso un comentario similar al caso de la multiplicación:

Pregunta:	*¿Cuántas veces más?*
Respuesta:	*Cuatro.*
Pregunta:	*¿Por qué?*
Respuesta:	*Porque 4 más 4 son 8.*

Una vez más, la pregunta parece haberse transformado en ¿Cuántas veces más vende la Roja que la Verde respecto de la Azul?. Parece, pues, que es posible realizar la inclusión de los tres conjuntos (tal como en el problema RxR) así como prescindir de la cantidad inicial (aquí no hace hipótesis alguna al respecto), pero no consigue operar multiplicativamente las tres relaciones simultáneas de inclusión que hay que considerar: la Roja incluye a la Azul, la Verde incluye a la Azul y la Verde incluye a la Azul.

No obstante, existe un dato significativo que permite sostener otro tipo de hipótesis sobre el origen del error detectado. Surge del diagrama que se le mostró en torno al problema de división CxC del dinero de los tres niños (Figura 3).

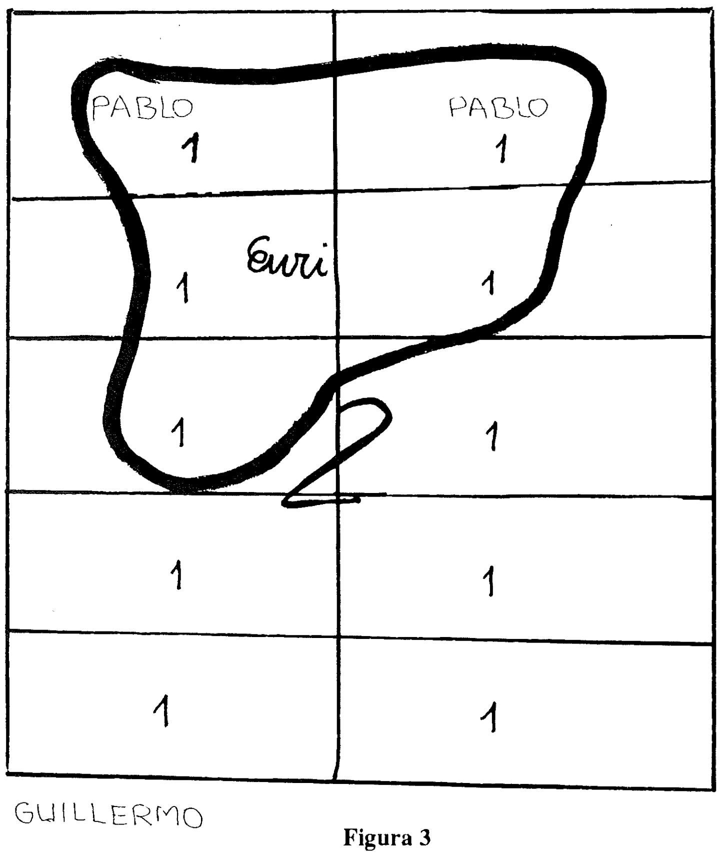

Figura 3

Este diagrama mostraba la relación de inclusión entre la cantidad menor (el dinero de Pablo) y la mayor (el de Guillermo). Se le pedía que determinase la relación entre el conjunto intermedio (el dinero de Enrique) y el mayor. Reduciendo el problema a un agrupamiento, la respuesta fué correcta como se muestra por la forma en que lo completó (en trazo grueso) y el diálogo que siguió:

Pregunta:	*¿Cuántas veces tiene Enrique el dinero de Pablo?*
Respuesta:	*Cinco, cinco veces.*
Pregunta:	*¿Por qué?*
Respuesta:	*El doble de 5 son 10.*

Ante esta realización, podría sostenerse que el hecho de hacer perceptiva la cantidad inicial de Pablo (representada por un rectángulo) pudo motivar el acierto. Ello estaría conforme por esa necesidad planteada de considerar una cantidad hipotética inicial.

No obstante, parece más probable que el establecimiento de una de las inclusiones a través del diagrama le ayude a centrar su atención en sólo dos inclusiones (el dinero de Enrique respecto de Pablo y respecto de Guillermo). La reducción de tres inclusiones simultáneas a dos podría ser la clave del mayor acierto.

Conclusiones

Este trabajo así expuesto no permite sacar conclusiones definitivas, como tampoco lo pretendía. Su objetivo ha sido el de abrir a la observación un reducido campo de problemas normalmente no tratados en la escuela. Se han mostrado algunas de las posibilidades que ofrece en el desarrollo infantil de la comprensión y aplicación de estas operaciones aritméticas, así como en el terreno de la instrucción, sea por el planteamiento de una diversidad de situaciones resolubles con una misma operación, sea por la aplicabilidad de las representaciones gráficas para facilitar el razonamiento infantil en resolución de problemas.

Algunos de los interrogantes que plantea este tipo de problemas ya han sido mencionados de manera explícita. Otros pueden irse formulando más adelante. En todo caso, se puede sostener que los problemas de conversión están llamados a ejercer un papel tan importante como los restantes tipos de problemas y, por ello, me permito invitar a profesores e investigadores a seguir profundizando en las estrategias infantiles que los resuelven, en la comparación entre este tipo de problemas y los demás y en la viabilidad de su aplicación en el aula.

Referencias Bibliográficas

CARPENTER, T.P.; MOSER, J.M. y ROMBERG, T.A.: «Addition and subtraction: A Cognitive perspective». Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey. 1982.

HART, K.M.: «Children's understanding of Mathematics». Ed. J. Murray. Londres. 1981.

MAZA, C.: «Sumar y restar». Ed. Visor. Madrid. 1989.

NESHER, P.: «Multiplicative School word problems: Theoretical approaches and empirical findings». En Hiebert, J. y Behr, M.: «Number concepts and operations in the middle grades». Lawrence Erlbaum. Hillsdale, New Jersey. 1988.

PUIG, L. y CERDAN, F.: «Problemas aritméticos escolares». Ed. Síntesis. Madrid. 1988.

QUINTERO, A.H.: «Conceptual understanding of multiplication: Problems involving combination». Arithmetic Teacher. Vol. 33, n 3, 34-37. 1985.

QUINTERO, A.H.: «Children's conceptual understanding of Situations involving multiplication». Arithmetic Teacher. Vol. 33, n 5, 34-37. 1986.

SCHWARTZ, J.L.: «Semantic aspects of quantity». M.I.T. Cambridge, Massachusets. Manuscrito. 1976.

SCHWARTZ, J.L.: «Intensive quentity and Referent transforming Arithmetic Operations». M.I.T. Cambridge, Massachusets. Manuscrito. 1986.

VERGNAUD, G. : «Multiplicative structures». En Lesh,R. y Landau,M.: «Adquisition of mathematical concepts and processes». Academic Press. New York. 1983.