suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 91-98

Calcular usando el contexto del dinero

David Barba y Cecilia Calvo

Tal como comentamos en las entregas previas de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar este ambiente de clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta tercera entrega continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Numeración y Cálculo» con la misma intención de dar a nuestros alumnos y nuestras alumnas un papel protagónico en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

El dinero como modelo para calcular

El uso del dinero como modelo estructurador de contenidos en la enseñanza de las matemáticas es sumamente importante debido a que es un contexto que refleja el sistema de numeración decimal. No es el único modelo que cumple esta propiedad, los

Ell@s tienen la palabra

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

bloques multibase, los ábacos o la utilización de bolsitas con diez garbanzos agrupadas en cajas de diez bolsitas, también lo reflejan y creemos en la importancia de su presencia en las aulas. Sin embargo, el uso del dinero amplía muchísimo las posibilidades de juego ya que, forma parte del contexto cotidiano de los alumnos y brinda muchas más oportunidades a la comunicación.

Comentaremos dos grandes campos de la utilización del dinero en clase de matemáticas:

a) La comprensión del sistema de numeración posicional, en el que cabe incluir también el conocimiento en contexto de los números decimales.
b) El desarrollo de estrategias de cálculo y la oportunidad que brinda un contexto cotidiano para poder verbalizar la justificación de estas estrategias.

El dinero y las operaciones aditivas en el rango 0-100

En la primera entrega de «Ell@s tienen la palabra» (*Suma*, n.º 70) hablamos de la línea numérica como modelo y de una estrategia de cálculo asociada a este modelo: el encadenamiento (*stringing*, en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp. 90). Según esta estrategia para sumar dos números se parte del primero, se descompone el segundo y se suman al número de partida primero las decenas y luego las unidades. Aplicada esta estrategia a la suma 44 + 32 resultaría:

$$44+30=74$$

$$74+2=76$$

Por lo tanto:

$$44+32=76$$

El uso del dinero como contexto puede generar otra estrategia de cálculo, distinta del encadenamiento: la descomposición (*splitting*, en Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp. 90). Veamos un ejemplo: la imagen 1[1] presenta una situación en la que queremos saber el costo total de dos juguetes que valen respectivamente 44 y 32 €. Manipulando dinero lo más normal es agrupar los billetes por un lado, las monedas por otro y finalmente sumar los resultados parciales. En este caso, el cálculo efectuado sería el siguiente:

$$40+30=70$$

$$4+2=6$$

$$70+6=76$$

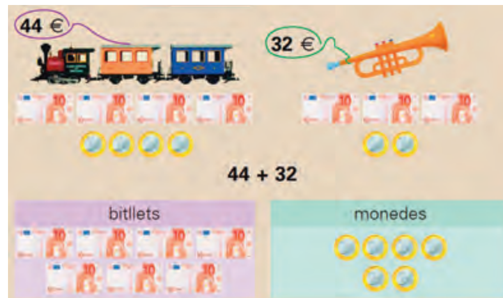

Imagen 1. ¿Cuánto valen los dos juguetes juntos?

En esta estrategia se descomponen los dos números para después sumar los resultados, a diferencia de la estrategia de encadenamiento en la que el primero queda fijo, siendo únicamente el segundo el que se descompone. Mientras el encadenamiento es una estrategia muy adecuada para realizar cálculos mentales y favorece la generación de estrategias alternativas o «cálculos astutos» (por ejemplo, sumar 73+19 sumando 73+20 y restando 1 al resultado), la descomposición es la base sobre la que se construyen los algoritmos de cálculo. En el caso de situaciones que impliquen la utilización de la resta, el proceso es análogo al de la suma con la única diferencia que en lugar de añadir billetes o monedas, se quitan.

Después de la fase de manipulación, entramos en el proceso de representación. Estas representaciones deben unificarse y comprimirse para poder contrastar las distintas soluciones o estrategias usadas por los alumnos y para poder discutirlas entre todos. En las imágenes 2a y 2b tenemos dos ejemplos de estas representaciones. La primera es especialmente adecuada para que la maestra o el maestro represente en la pizarra la explicación oral de un alumn@ que verbaliza su proceso, compartiéndola así con sus compañeros. La segunda implica una representación más formal y su disposición vertical ilustra nuestra afirmación acerca de que la estrategia de descomposición es la base sobre la que se construyen los algoritmos de cálculo.

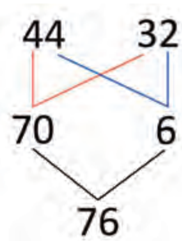

Imagen 2a. Para sumar 44+32, primero sumamos 40+30; luego 4+2; y finalmente, 70+6.

44	40	4
+ 32	30	2
76	70	6

Imagen 2b. Para sumar 44+32 descomponemos los dos sumandos.

En la imagen 3 se presenta una situación relacionada con la resta. Para calcular 56–35 manipulando dinero lo más normal es quitar tres billetes de los 5 que había y 5 monedas de las 6 que tenía, para finalmente sumar los resultados parciales. En este caso el cálculo efectuado sería el siguiente:

$$50 - 30 = 20$$

$$6 - 5 = 1$$

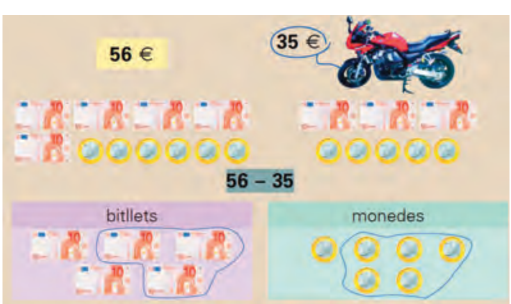

Imagen 3. Si tengo 56€ y compro un juguete que cuesta 35€, ¿cuánto me sobrará?

Reagrupando, quedan 20+1=21 euros. Pero se ha de tener en cuenta que si no ha habido un trabajo manipulativo anterior no se entiende por qué en el paso final se ha de sumar en lugar de restar.

¿Qué pasa en el caso de que las operaciones implicadas son «con llevadas»? En el caso de la suma solamente implica una pequeña modificación en el momento de reagrupar monedas y billetes.

Pongamos, por ejemplo, que queremos sumar 44+38. El proceso sería el siguiente:

$$44 = 40 + 4$$

$$38 = 30 + 8$$

Sumando los billetes, obtenemos:

$$40 + 30 = 70$$

Y sumando las monedas:

$$8 + 4 = 12$$

Cuando reagrupamos obtenemos $70 + 12 = 82$.

El caso de la resta es más complejo. Calcular, por ejemplo, 62 – 34 manipulando dinero supone un reto, ya que de 6 billetes de 10€ puedo quitar 3 sin problema, pero de 2 monedas de euro no podemos quitar 4. Se plantea así el problema de la resta con llevadas a nivel manipulativo.

Buscamos una solución: cambiar la descomposición de 62 para poder restar. En lugar de $62 = 60 + 2$ podemos considerar $62 = 50 + 12$, que corresponde a cambiar un billete de 10€ en monedas y quedarnos con 5 billetes y 12 monedas. Ahora ya podemos efectuar la resta 62 – 34: quitamos 3 billetes de 10 de los 5 que había y 4 monedas de euro de las 12 que teníamos y nos quedan 2 billetes y 8 monedas que representan 28€. En la imagen 4 podemos ver una representación de esta estrategia similar a la que aparecía en la imagen 2b para una suma.

62	50	12
- 34	30	4
28	20	8

Imagen 4. Representación de 62–34=28 por estrategia de descomposición.

Esta reflexión es muy importante de cara a la transparencia de los pasos implicados en el algoritmo de la resta con llevadas, ya que es la que empleamos cuando quitamos «la que llevamos» a las decenas del minuendo[2].

Una representación, de la estrategia de descomposición, que nos acerca más al algoritmo estándar es la llamada representación en columnas: simplemente consiste en un cambio de dirección de la representación que pasa a ser vertical.

En la imagen 5 podemos ver la suma 44 + 38 representada en columna. A nivel visual, esta representación puede parecerse mucho al algoritmo estándar, pero lo que las diferencia es el «discurso asociado».

$$\begin{array}{r} 44 \\ +38 \\ \hline 70 \\ 12 \\ \hline 82 \end{array}$$

Imagen 5

Ante la suma en columnas el alumno no dice: «4+8=12, escribo un 2 y me llevo una», ni «4+3=7», sino que trabaja con las cantidades reales: «40+30 son 70, 4 más 8 son 12, 70 y 12 son 82».

$$\begin{array}{r} 62 \\ -\ 34 \\ \hline 30 \\ -2 \\ \hline 28 \end{array}$$

Imagen 6

Vemos un ejemplo de cómo esta manera de sumar también puede convertirse en una estrategia de cálculo mental en el siguiente vídeo:

http://youtu.be/gdF7qutu5kc

Está extraído de la magnífica colección de vídeos del CEIP Aguamansa de Tenerife, donde Antonio Martín lleva años trabajando en este sentido.

La imagen 6 presenta una variación de la resta en columna e implica la resolución de una resta «con llevadas» de una manera distinta a las usuales en nuestro país (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001, pp 150). Sorprende por su simplicidad, eficacia y transparencia y es una magnífico ejemplo de la potencialidad de la combinación del algoritmo en columnas con el discurso asociado en un contexto de dinero.

El «discurso asociado» en este caso sería: tengo 60€ y he de pagar 30, me quedan 30; tengo 2€ y he de pagar 4 «debo 2» (escribiendo «–2» para indicar esa deuda); si tengo 30 y debo 2 me quedan 28. ¿Podría ser ésta la salida a años y años de pelearnos con la opacidad del algoritmo de la resta «con llevadas»?

El dinero y los números decimales

Escribir o ordenar números decimales no es tarea fácil: que un alumno escriba 15 centésimas como 0,015 o que afirme que 6,32 es mayor que 6,4 porque 32 es mayor que 4, son errores frecuentes en nuestras clases. Pero si la introducción de los números decimales se hace en el contexto del dinero, los alumnos tienen un referente claro que les ayuda a resolver sus dudas y evaluar sus respuestas.

Si presentamos a un alumno un monedero amarillo que tiene un billete de 5€ y una moneda de 20 céntimos y un monedero verde que tiene un billete de 5€ y cuatro monedas de 1 céntimo, podemos invitarlo a que elija el monedero en el que hay más dinero o a que decida si la cantidad de dinero que hay en el monedero verde se escribe 5,4 o 5,04.

Se debe tener en cuenta que el contexto del dinero no agota el trabajo que debemos hacer con decimales puesto que hablando de dinero siempre se tienen dos cifras decimales. De todas maneras, el contexto de las medidas de longitud y el uso de las calculadoras (por ejemplo, para discutir por qué si escribimos 3,20 y pulsamos la tecla igual, aparece en pantalla un 3,2) complementan perfectamente estas carencias.

El dinero y la división decimal

Sabemos que una misma división puede tener resultados diferentes dependiendo de la situación que representa. La división 14:4 puede representar, entre otras cosas, el reparto de 14 libros entre 4 personas (en cuyo caso el resultado sería dar 3 libros a cada persona y que queden 2 libros sin repartir) o el reparto de 14€ entre 4 personas (en cuyo caso el resultado sería dar 3,50€ a cada persona). Por tanto, lo que decide si una división es decimal o no, es la situación a la que da respuesta esa división y no la maestra. Preguntas como «¿extraemos decimales?» o «¿cuántas cifras decimales hemos de sacar?» deberían desaparecer de un aula donde ell@s tienen la palabra.

El trabajo con divisiones decimales comienza con actividades manipulativas como las que se proponen en la imagen 7, donde se pide repartir diferentes cantidades de dinero en diferente número de cajas (cada rectángulo representa una de tales cajas y el que hecho que dos rectángulos tengan el mismo color implica que en ellos debe haber una cantidad igual de dinero).

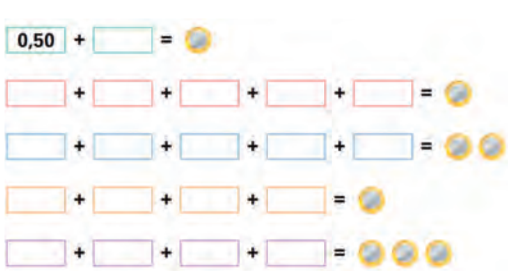

Imagen 7

Después de trabajar con este tipo de ejercicios es posible proponer otras situaciones como las que aparecen en la imagen 8 donde se pide repartir 641€ en cuatro sacos de manera que todos ellos contengan la misma cantidad de dinero.

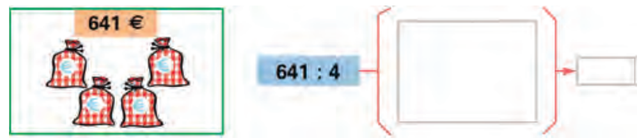

Imagen 8

Un discurso que podría acompañar estos repartos podría ser este: para repartir 641€ entre 4, separamos la cantidad total en grupos que sepamos dividir entre 4 fácilmente. Por ejemplo, uno de 400€, otro de 200€, otro de 40€ y otro de 1€. Y como:

$$400:4=100$$

$$200:4=50$$

$$40:4=10$$

$$1:4=0{,}25$$

En total, pondremos en cada saco:

$$160{,}25\,€=100+50+10+0{,}25$$

El cálculo contextualizado en el dinero mediante *applets*

A continuación presentamos algunos applets que ofrecen la oportunidad de manipular virtualmente dinero con la finalidad de desarrollar estrategias de cálculo y de poder verbalizarlas en discusiones grupales. Un primer ejemplo a destacar es (imagen 9):

www.fisme.science.uu.nl/
toepassingen/00411/spel.html

Imagen 9

Se trata de un *applet* en que se pide que se paguen diferentes importes exactos a partir de una serie de monedas y billetes disponibles. Cuando eso no es posible, se puede pedir que una moneda o billete se cambie en monedas o billetes más pequeños hasta poder pagar el importe exacto.

Un segundo ejemplo podría ser un applet con varias actividades relacionadas con el dinero y del que comentaremos un par de ellas a continuación:

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/01041/

a) En la actividad *Wisselgeld* (imagen 10) se presentan situaciones en que se debe dar cambio al pago de una cierta cantidad con un billete mayor.

Imagen 10

b) En la actividad *Hoeveel kost dit artikel?* (imágenes 11a, 11b y 11c) se presentan situaciones en que se debe adivinar el precio de diferentes artículos. La barra que aparece a la derecha informa de si las aproximaciones que se van dando son por defecto o por exceso y de la proporción que representa la aproximación con relación al valor exacto).

Vale la pena comentar que los precios de los artículos que aparecen en el applet son ajustados con la realidad lo cual da lugar a interesantes discusiones sobre cuál sería una estimación razonable para comenzar.

Imagen 12a

Imagen 11a

Imagen 11b

Imagen 11c

Por último, queremos destacar el applet siguiente (imágenes 12*a* y 12*b*):

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03390/

En este applet se da una cantidad de dinero para repartir en 9 grupos iguales.

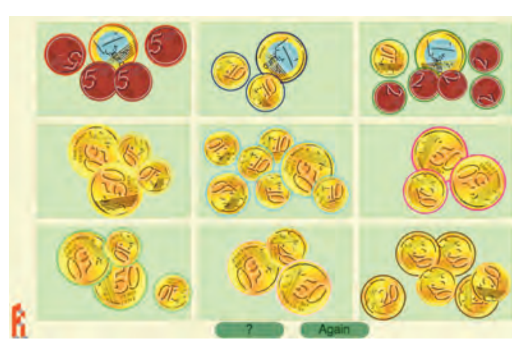

Imagen 12b

Potencial del contexto del dinero

El potencial del dinero como soporte para pensar y comunicar se hace evidente, por ejemplo, en actividades de estimación. Es muy natural para un niño o una niña entender que 1,9 x 5 es aproximadamente 10 si contextualizamos este producto en un problema de cálculo del precio aproximado de 5 tabletas de chocolate que cuestan 1,90 € cada una. Más aun, frente a esta situación pueden ver que 10 es una aproximación por exceso del precio exacto y pueden articular un discurso para explicarlo del estilo de: «como cada tableta cuesta un poco menos que 2 €, las cinco tabletas cuestan un poco menos que 10 €».

Un interesantísimo applet en la línea de este tipo de problemas es:

www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03128/opdracht1.html

En él se recrea el funcionamiento de una caja en un supermercado que capta la información del precio de tres objetos que van apareciendo uno a uno y se pide que se estime el precio total que se ha de pagar (retener en la memoria los tres precios exactos es prácticamente imposible, por lo que la invitación a estimar viene dada por el propio contexto). Al introducir la respuesta, el applet muestra una línea donde se representan el valor exacto, el estimado y una valoración del error cometido.

Tal y como muestra Treffers en el capítulo IX de *Children Learn Mathematics* (Van den Heuvel-Panhuizen, 2001), los criterios de divisibilidad representan un ejemplo del potencial del dinero como herramienta de justificación. ¿Cómo se puede entender que hay criterios de divisibilidad que recurren a la suma de las cifras del número y otros que sólo piden mirar el número formado por las últimas cifras?

Ilustrémoslo con el criterio de divisibilidad entre 9. Si queremos saber si 278 es divisible entre 9 podemos pensar que tenemos 2 billetes de 100 €, 7 billetes de 10 € y 8 monedas de 1 € para repartir entre nueve personas. Entonces:

1) De cada billete de 100€ repartiríamos 11 € a cada persona y guardaríamos el euro sobrante.
2) De cada billete de 10€ repartiríamos 1 € a cada persona y guardariamos el euro sobrante.

Después de esos primeros repartos todavía quedarían por repartir 2 € (procedentes de los dos billetes de 100), 7 € (procedentes de los siete billetes de 10) y los 8 € de las monedas de 1. Y puesto que 2+7+8 no es divisible entre 9, no se podrá repartir la cantidad 278 entre 9 (sin recurrir a los decimales).

De manera análoga se puede explicar por qué el criterio de divisibilidad entre 3 también involucra la suma de las cifras del número. Sin embargo, en los criterios de divisibilidad entre 2, 5 y 10 sólo interesa la última cifra del número. Ilustremos la explicación de este hecho para el caso de la divisibilidad entre 5 tal como lo hicimos en el caso del 9. Para averiguar si 278 es divisible entre 5 podemos pensar, como hicimos antes, que tenemos 2 billetes de 100 €, 7 billetes de 10 € y 8 monedas de 1 € para repartir entre cinco personas. Al repartir cada billete de 100€ y cada billete de 10 € entre cinco personas no hay sobrante, por lo cual se podrá repartir la cantidad 278 entre 5 (sin recurrir a los decimales) únicamente si la cantidad de monedas de 1€ (la cifra de las unidades) es divisible entre 5.

La explicación del criterio de divisibilidad entre 4 es similar, pero permite una interesante variación que da lugar a un segundo criterio:

1) Para saber si 278 es divisible entre 4 volvemos a pensar que disponemos de 2 billetes de 100€, 7 billetes de 10€ y 8 monedas de 1€ para repartir entre cuatro personas. Cogemos cada billete de 100€ y como al repartirlo entre cuatro personas no hay sobrante, se podrá repartir la cantidad 278 entre 4 (sin recurrir a los decimales) únicamente el número formado por las dos últimas cifras (78) es divisible entre 4.

2) Pero también podemos proceder de otro modo:

a) Cogemos cada billete de 100€ y lo repartimos entre cuatro personas sin que haya sobrante.
b) Cogemos cada billete de 10€, repartimos 2€ a cada persona y guardamos los dos euros sobrantes

Después de estos primeros repartos quedan por repartir 14€ (provenientes de los siete billetes de 10) y 8€ (provenientes de las monedas de 1). Por tanto, se podrá repartir la cantidad 278 entre 4 (sin recurrir a los decimales) únicamente si el doble de la cifra de las decenas más la cifra de las unidades es divisible entre 4.

Reflexión final

Hemos intentado explicar cómo un tema, en principio rutinario, como es el trabajo con el sistema monetario puede convertirse en una oportunidad para generar un ambiente de clase donde los alumnos tienen mucho que decir. Basta que planteemos dinámicas de discusión y reflexión en las que participen activamente los alumnos guiados por nosotros, sus maestros. Para ello es necesario que previamente consideremos qué estrategias de cálculo queremos que vayan desarrollando, qué actividades propondremos para facilitar el desarrollo de estas estrategias, qué preguntas centrales realizaremos para favorecer la discusión grupal y cómo iremos observando a cada alumno para escucharlo después de haberle dado la palabra.

Referencias bibliográficas

BARBA URIACH, D., y C. CALVO PESCE (2011), «Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos», en J. E. García Jiménez, (coord.), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática* (recurso electrónico), Ministerio de Educación, Subdirección General de Documentación y Publicaciones, 47-78.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (ed.) (2001), *Children Learn Mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

DAVID BARBA URIACH
Universitat Autònoma de Barcelona

CECILIA CALVO PESCE
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Las imágenes 1, 3, 7 y 8 se han tomado de D. Barba, C. Barba y C. Calvo (2005). *3x6.mat Quaderns d'estratègies de càlcul*, Barcanova, Barcelona.

2 Pueden encontrar más información sobre este punto en cuatro artículos del blog <http://puntmat.blogspot.com.es/> dedicados a este tipo de restas, con fechas: 8/9/11, 20/2/12, 25/2/12 y 24/9/12. Las capturas mostradas en este artículo se tomaron en la fecha 6/2/13.