suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 83-90

Jacob Bernouilli y el cálculo de probabilidades

Santiago Gutiérrez Vázquez

Hace trescientos años, en 1713, veía la luz un libro titulado *Ars conjectandi* (El arte de las conjeturas), considerado por un buen número de historiadores científicos como el origen del Cálculo de Probabilidades, en cuanto parte integrante de la ciencia Matemática. Su autor, Jacob Bernoulli, había fallecido en 1705, dejando inconcluso su trabajo. No obstante mereció ser publicado, y así lo entendió y lo hizo su sobrino Nicolaus, matemático como su tío, hijo del pintor Nicolaus, hermano de Jacob.

Jacob pertenecía a una familia de comerciantes originaria de los Paises Bajos, en concreto, de Amberes, de donde habían emigrado sus antepasados en 1583 huyendo de la persecución a que eran sometidos los protestantes por parte Española. De allí pasaron a Francfort, y posteriormente a Suiza. Se establecieron en Basilea en 1622, donde pudieron gozar de un gran prestigio.

Jacob, nacido en Basilea en 1654, era el quinto de los once hijos que tuvieron el farmacéutico Nikolaus y Margaretha. Hizo sus primeros estudios en la escuela pública de Basilea. Posteriormente, cursó, por deseo de su padre, filosofía, teología e idiomas en la universidad de esta su ciudad natal. A los 17 años se graduó como magíster en filosofía y a los 22 ad-

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

quirió el título de doctor en teología. A la vista de semejante preparación, lo que menos podía esperarse de él era llegar a verlo situado, pasados los años, en la cumbre de los matemáticos de su tiempo. Y es que desde muy temprano sintió una gran afición por las matemáticas, lo que le llevó a dedicarse a ellas, a escondidas de su padre, por su cuenta, sin maestro, y con libros no muy apropiados para un principiante como eran la *Geometría* de Descartes, la *Aritmética infinitorum* de Wallis y las *Lecciones de geometría* de Barrow. Interesado especialmente por la astronomía, a los 18 años ya resolvía complicados problemas relacionados con esta materia.

Sello con la imagen de Jacob Bernoulli con ocasión del Congreso Internacional de Matemáticas celebrado en Zurich en 1994

Finalizados sus estudios, en la universidad de Basilea, se dedica a viajar por distintos países europeos. Entre 1676 y 1680, recorre Italia y Francia, además de Suiza. Durante estos viajes lleva consigo un cuaderno donde anota diversos comentarios científicos, entre los que se incluye la resolución de diversos problemas matemáticos. Dos años después de regresar a Basilea, en 1682, emprende nuevos viajes, esta vez por Inglaterra y Holanda. En Ámsterdam, conoce a Huygens, cuyos trabajos sobre el azar influirán, como se verá más adelante, de forma decisiva en las teorías de Jacob sobre el tema. En general, el resultado de sus viajes ha sido para él altamente provechoso. Estableció relaciones con destacados matemáticos europeos con los que no dejó de cartearse a lo largo de toda su vida.

En 1683, de regreso a casa, comienza su tarea docente como profesor de Física experimental en la universidad de Basilea. El año siguiente, con 30 años cumplidos, se casa con Judit Stupanus. Tuvieron dos hijos, chico y chica. Ninguno de los dos siguió la carrera de su padre. Sin embargo, la familia Bernoulli fue muy prolífica en vocaciones científicas.

Por lo que se refiere a las matemáticas, Jacob trabaja en dos direcciones: sobre el cálculo diferencial e integral y sobre el cálculo de probabilidades.

Encuentro con el nuevo cálculo de Leibniz

En 1686 Jacob es elegido para ocupar la plaza de profesor de matemáticas de la universidad de Basilea, que a la sazón había quedado vacante. Se convierte así en el primero de la saga de matemáticos Bernoulli que dominó la docencia en dicha universidad durante casi un siglo, aunque si tenemos en cuenta, además de los matemáticos, al conjunto de la familia, abuelos, hijos y nietos, que logró ocupar algún puesto de profesor en esa universidad, de esa o de otras materias, nos vamos a los dos siglos y medio sin interrupción. A éste se le denomina Jacob I, para distinguirlo del otro Jacob (1759 – 1789), nieto de Johann I, su hermano, astrónomo y científico de la Academia de ciencias de San Petesburgo. En este artículo, siempre nos referiremos al primero de los Jacob, aunque no lo explicitemos.

Por entonces, y como producto sin duda de los contactos establecidos durante su estancia en Alemania, Jacob recibe un trabajo de Leibniz titulado *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangetibus, qua nec irrationales quantitates moratur* (Nuevo método para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que también puede aplicarse a las cantidades irracionales). En este trabajo, publicado en la revista *Acta Eruditorum* de 1684, que fundara en 1682 el profesor de Filosofía moral y política Otto Mencke, y de la cual Leibniz era su primer y habitual colaborador, Leibniz establece las reglas generales de la diferenciación, más que de la derivación, utilizando el símbolo *d* para designar la diferencial.

Jacob propone a su vez el problema conocido como de la catenaria, esto es, encontrar la forma que adopta una cuerda flexible y homogénea, suspendida por sus extremos, sometida exclusivamente a su propio peso.

La comprensión del escrito no le resulta nada fácil a Jacob. Encuentra especialmente difíciles algunas de las conclusiones a que llega Leibniz, por lo que decide escribirle pidiéndole que se las aclare. Pero Leibniz anda en esos momentos de viaje por Italia, con lo que no puede satisfacer las peticiones de Jacob hasta tres años después. Durante la larga espera éste no solo ha resuelto ya sus dudas, sino que ha hecho varias contribuciones al desarrollo del nuevo método.

Sello con la efigie de Leibniz con motivo
del 350 aniversario de su nacimiento

Posteriormente, recibe una segunda memoria de Leibniz, publicada en el *Acta Eruditorum* de 1686, titulada *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (Sobre una geometría altamente escondida y el análisis de los indivisibles y de los infinitos). En esta memoria, establece Leibniz las reglas fundamentales del cálculo integral. Aquí introduce el signo $\int$, estilización de la letra S, inicial de la palabra *summatio*, como contrario al signo *d*, y lo justifica del siguiente modo:

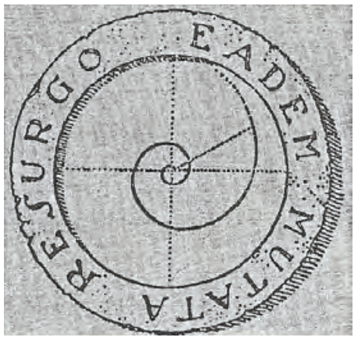
> Será ventajoso que en lugar de las sumas de Cavalieri (o sea, en vez de suma de todos los *y*), en lo sucesivo, se escriba $\int ydy$. En definitiva, con esto se manifiesta el nuevo tipo de cálculo que corresponde a la adición y multiplicación.(…) Del mismo modo que el signo $\int$ aumenta la dimensión, asimismo el signo *d* la reduce. El signo $\int$ denota una suma; *d*, una diferencia. (Wussing, 1989: 263)

En 1686 Leibniz propone el problema de la isócrona, esto es, determinar la curva de descenso de un móvil con una velocidad vertical uniforme. Jacob lo resuelve en 1690 y lo publica en el *Acta Eruditorum*. Se trata de la curva de ecuación $x^3 = ay^2$. En la solución de este problema aparece por primera vez el término integral, de modo que Leibniz lo adopta para sus escritos, utilizándolo en adelante en lugar del término sumatorio del que se servía hasta entonces.

Al final de este trabajo, Jacob propone a su vez el problema conocido como de la catenaria, esto es, encontrar la forma que adopta una cuerda flexible y homogénea suspendida por sus extremos, sometida exclusivamente a su propio peso. El problema fue resuelto geométricamente por Huygens, a quien se debe el nombre de la curva resultante: «catenaria» de *catena*, cadena en latín. Tanto Leibniz como Johann Bernoulli lo resolvieron por medio del cálculo infinitesimal.

Otras muchas curvas fueron objeto del interés de Jacob, en particular la espiral logarítmica de la cual demostró varias propiedades. Su ecuación en coordenadas polares es $\rho = Ce^{\kappa\theta}$, donde κ y θ son las variables de la curva. Se da la particularidad de que cualquiera que sea el valor de *C* se obtiene siempre la misma curva. Fue tal la fascinación que le produjo este hecho a Jacob que la denominó *spira mirabiles* y pidió que se grabara sobre su tumba con la divisa *Eadem mutata resurgo* (aunque cambie permanezco igual a mi misma), como símbolo de la resurrección. Al final, el tallista grabó la espiral de Arquímedes en lugar de la logarítmica.

Por estos años, se producía una controversia sobre la validez del método de inducción aplicado con frecuencia por los matemáticos de entonces. Jacob, tan amante como era del rigor, no podía dejar pasar por alto la crítica que se le hacía al método. Lo estudió profundamente y como resultado ideó el método de inducción completa.



Inscripción sobre la tumba de Jacob Bernoulli

Contó Jacob, para sus trabajos de análisis, con la colaboración de su hermano Johann, a pesar de ser trece años más joven y de estar estudiando aún su carrera de medicina, pero que, iniciado por Jacob en el conocimiento de las matemáticas, se había interesado ahora en las nuevas ideas del cálculo. Ambos hermanos contribuyeron decisivamente al desarrollo del cálculo diferencial e integral, aunque de una forma un tanto anómala: discutiendo, retándose a resolver diversos problemas, compitiendo entre ellos,… Jacob era más crítico, lento y riguroso, más profundo; mientras que Johann destacaba por su ingenio y su rapidez, era más brillante.

De cualquier forma, lo cierto es que realizaron grandes progresos en favor del cálculo de Leibniz. Hasta tal punto que puede decirse que entre Leibniz, Jacob y Johann fundamentaron en menos de veinte años todo el análisis infinitesimal.

Los antecedentes del azar

Desde muy antiguo eran tratados por filósofos y hombres de ciencia los sucesos que solo ocurrían determinados por la casualidad. Las predicciones a que daban lugar eran conjeturas únicamente, pero no llegaban a formar parte un cuerpo de doctrina suficiente como para merecer integrarse en las teorías científicas. De ahí el título de *Arte de las conjeturas* con el que, no exento de cierta humildad, recoge Jacob sus reflexiones sobre el tema.

Fueron no pocos los matemáticos que abordaron problemas sobre el tema del azar en épocas relativamente recientes. Ya en el siglo XV introduce Luca Pacioli varios problemas que dan lugar a consideraciones probabilísticas en la *Suma de conocimientos de aritmética, geometría, razones y proporcionalidad*. Eso sí, en una parte especial y bajo el título de *Problemas no habituales*. Uno de ellos, el problema de los repartos, lo vemos más tarde abordado por Pascal y Fermat (Ver *Suma*, número 70, pág. 111). Pacioli lo enuncia del siguiente modo:

> —Se realiza un cierto juego hasta 60 puntos y se hace una apuesta de 22 ducados. En razón de ciertas circunstancias, el juego no puede ser terminado y la apuesta debe ser repartida. En el momento de la suspensión, uno de los jugadores ha alcanzado la cifra de 50 puntos y el otro la de 30. ¿Qué parte de la apuesta debe recibir cada contrincante? (Sánchez y Valdés, 213)

Pacioli propone repartir la apuesta en razón directamente proporcional al número de puntos obtenidos hasta ese momento por cada uno. Así, deberían recibir 5/8 y 3/8 de la apuesta. Esta solución fue criticada por autores posteriores como Tartaglia, que no la consideró correcta y para exponer su idea propuso un caso límite. Supongamos que uno de los jugadores ha conseguido un cierto número de puntos (puede ser simplemente 1 punto) mientras el otro ha conseguido 0, en el momento de la interrupción. Según la solución de Pacioli, al primero le correspondería todo y al segundo nada. Este protestaría porque quedando mucha partida, si se hubiera conti-

> *La idea fundamental de Bernoulli es que lo importante reside en las partidas que faltan y no en las que ya se han jugado.*

nuado, podría haber sucedido de todo. Pero, Tartaglia no propone ninguna solución. Hay que esperar siglo y medio para que Pascal y Fermat, en 1654, nos mostraran una solución correcta por medio de su correspondencia. Sin embargo, aún estos dos genios no hablaban de probabilidad, se limitaban a calcular el número de casos posibles y el número de casos favorables al suceso en cuestión.

El holandés Christiaan Huygens, que había tenido conocimiento de los trabajos de Pascal y Fermat en su viaje a Paris de 1655, intentó probar fortuna en esta nueva rama, aún balbuciente, de las matemáticas. Estudió el problema de los repartos por su cuenta, y, como resultado, escribió una obra titulada *De los razonamientos en los juegos de azar* que publicó en 1657.

Sello con la efigie de Huygens de una serie dedicada a personalidades de la ciencia

El Ars conjectandi

Jacob, durante sus viajes por Europa, tuvo ocasión de conocer a Huygens y su escrito sobre los juegos de azar. Inspirado en la lectura de la obra se adentró así mismo en los misterios del azar y durante sus últimos veinte años reflexionó sobre el tema. De este modo, llegó a escribir el célebre tratado de las conjeturas. No le dio tiempo a terminarlo, pero lo que hizo fue suficiente para que en él podamos ya apreciar los rudimentos de lo que hoy conocemos como cálculo de probabilidades.

JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
Mathematici Celeberrimi,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et Epistola Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
CIↄ Iↄcc xiii.

Portada de la primera edición del *Ars conjectandi*

Estructura su libro en cuatro partes. En la primera, titulada *Apuntes sobre los posibles cálculos en los juegos de azar de Christiaan Huygens con notas de Jacob Bernoulli*, reproduce íntegramente la obra de Huygens y añade valiosos comentarios de su cosecha. Advierte que esta parte es fundamental para comprender el resto de la obra. En concreto, enuncia y demuestra una proposición clave, que luego generaliza. Dice así:

> Si tengo las mismas posibilidades de obtener *a* y *b*, entonces esto me vale *(a+b)/2*.

En efecto, aclara Jacob:

> Supongamos que alguien oculta 3 monedas en una mano y 7 en la otra. Dos personas señalan una mano diferente cada una, y obtienen las monedas de la mano señalada. Entre las dos, tendrán 10 monedas. Cada una tenía la misma oportunidad al elegir su mano, así que la esperanza conjunta debe ser dividida por la mitad, y la esperanza de cada una es obtener 5 monedas. Esta esperanza será la misma en el caso de que en una mano haya *a* monedas y en la otra ninguna. (Sánchez y Valdés, 2001:216)

A partir de aquí, generaliza el caso a más de dos posibilidades. Así, en el caso de cuatro posibilidades la esperanza sería $(a+b+c+d)/4$. Considera, en fin, el caso general:

> Si el número de casos en que se obtiene la suma *a* es *p* y el número de los que se obtiene la suma *b* es *q*, y todos los casos son igualmente posibles, entonces la esperanza es *(pa+qb)/(p+q)*. (Sánchez y Valdés, 217)

Para demostrarlo, Jacob considera $p + q$ jugadores para $p + q$ urnas, y razona de la siguiente manera. En p urnas se colocan a monedas en cada una y, del mismo modo, en q urnas se colocan b monedas en cada una. Cada jugador obtiene las monedas de una urna, estando todos en iguales condiciones. El total de jugadores habrá obtenido $pa+qb$ monedas. Entonces la esperanza para cada uno, será $(pa+qb)/(p+q)$. De este modo, Jacob utiliza la esperanza matemática como punto de partida para la probabilidad.

Analiza entonces, el problema del reparto equitativo de la apuesta cuando se interrumpe el juego sin haber terminado. La idea fundamental de Bernoulli es que lo importante reside en las partidas que faltan y no en las que ya se han jugado. Supone varias situaciones que va complicando hasta llegar a una conjetura. Así, por ejemplo, si se trata de un juego entre dos jugadores, en que hay una apuesta inicial a, y el juego se interrumpe cuando a un jugador, A, le falta una partida para ganar y al otro jugador, B, le faltan tres partidas, analiza todas las posibilidades del máximo de partidas necesarias para dar por finalizado el juego. En este caso son 3. Puede ocurrir que el jugador B gane las dos primeras partidas y el jugador A gane la tercera, lo simbolizaremos por el paréntesis (B, B, A). Simbolizamos así todas las posibilidades como sigue:

(A, A, A), (A, A, B), (A, B, A), (A, B, B)

(B, B, B), (B, B, A), (B, A, B), (B, A, A)

Se ve que el jugador B solo gana en un caso, mientras el jugador A gana en los otros 7 casos. Así que A debe recibir $7a/8$; y B, $a/8$.

Estos y otros muchos casos analizados conducen a Jacob a formular una conclusión:

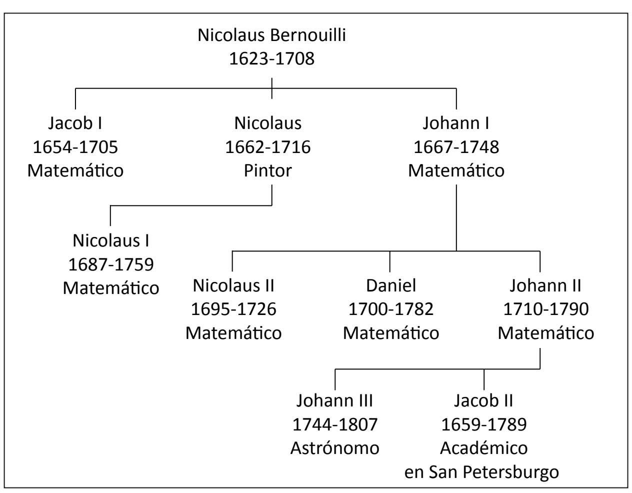
> Si a mi me falta una partida y a mi oponente le faltan n, entonces mi parte de la apuesta y la de él deben relacionarse en la proporción de $(2^n-1)/1$. (Sánchez y Valdés, 2001:218)

La base de su idea reside en lo que hoy conocemos como ley de los grandes números, que Jacob enuncia, en su forma más elemental, en esta cuarta parte de su Ars conjectandi...

Más adelante, Jacob generaliza el problema del reparto al caso de juegos no equitativos. Supone un juego que consta de n partidas en el que el jugador A tiene una probabilidad p de ganar, mientras que la probabilidad de ganar de su contrincante B es $q=1-p$. ¿Cuál es la probabilidad de que el jugador A gane k partidas del total?

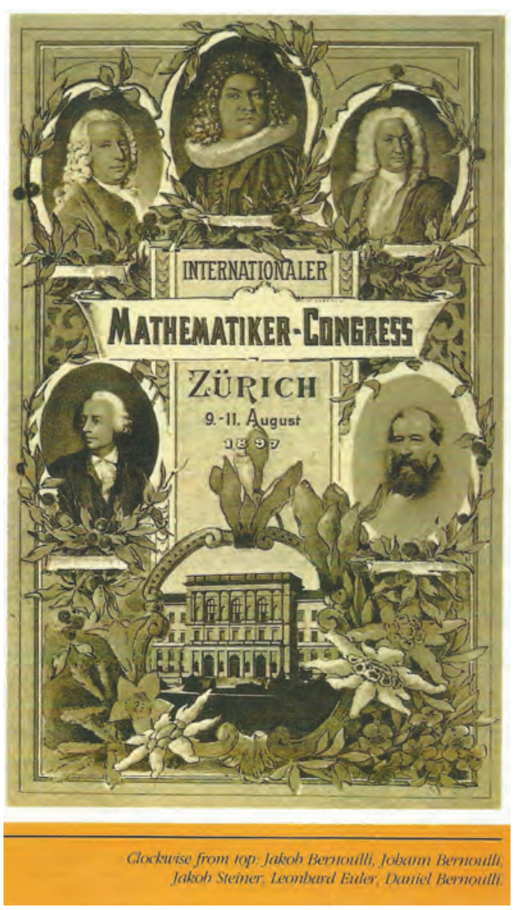
Todo este tipo de problemas hizo necesario el desarrollo del cálculo combinatorio que Leibniz llamó el «arte de la combinatoria». A ello se dedica Bernoulli en la segunda parte del *Ars conjectandi*. Así como la primera parte toma como referencia a Huygens, en esta segunda cita a Van Schooten, Leibniz, Wallis y Prestet.

La tercera parte se ocupa de la aplicación de las reglas de la combinatoria a ciertos juegos de dados y de azar. Incluye una demostración del teorema del binomio. Aparecen aquí los denominados por Euler como números de Bernoulli. Estos números los encontró Jacob tratando de hallar unos polinomios que nos permitieran calcular en poco tiempo la suma de las potencias de los números naturales hasta el exponente 10. Observando que las fórmu-



Arbol genealógico de toda la familia Bernoulli de científicos las para el caso de las primeras potencias son polinomios de un grado en una unidad mayor que el exponente, por un ingenioso procedimiento en el que utiliza las propiedades de las integrales, calcula el polinomio para el caso general de potencias de exponente *n*. Los coeficientes de este polinomio son los números de Bernoulli.

La cuarta parte, que titula *Aplicación de la doctrina a cuestiones civiles, éticas y económicas*, además de la más novedosa es también la más interesante. En ella trata de ampliar el campo de aplicaciones de los teoremas establecidos en las secciones anteriores a las relaciones sociales y económicas. Es decir intenta ir más allá de los problemas de juegos hasta entonces tratados.



Cartel del primer congreso internacional de matemáticas celebrado en Zurich en agosto de 1897. En la parte superior aparecen tres miembros de la familia Bernouilli, con Jacob en el centro

Se inicia esta parte con consideraciones acerca de varios conceptos. Respecto de la probabilidad dice:

> La probabilidad no es más que un grado de la certeza y se distingue de ella lo mismo que una parte se distingue del todo. (Wussing y Arnold, 285)

Al intentar extender la noción de probabilidad a las cuestiones sociales y económicas tropieza con la dificultad de que en estas cuestiones no se puede saber el número de casos posibles de un suceso ni el número de casos favorables en una determinada experiencia. Tampoco se pueden tratar todas las posibilidades equitativamente. Esto sí ocurre, en cambio, en los juegos de azar. Al lanzar una moneda, por ejemplo, los dos resultados posibles son igualmente fáciles o difíciles. O al lanzar un dado, todos los números tienen la misma facilidad o dificultad de salir. Pero no es posible, por ejemplo, establecer la probabilidad a priori con que un determinado tratamiento de una enfermedad va a ser efectivo. O de que un control de calidad proporcione cierto resultado...

Ante esta dificultad, Jacob, además de la definición teórica de probabilidad o «probabilidad a priori», introduce un nuevo concepto como es la definición estadística de probabilidad, abriendo así la puerta a la mayor parte de las aplicaciones actuales del cálculo de probabilidades. La base de su idea reside en lo que hoy conocemos como ley de los grandes números, que Jacob enuncia, en su forma más elemental, en esta cuarta parte de su *Ars conjectandi*. Lo hace de la siguiente manera:

> ...al aumentar las observaciones crece también constantemente la probabilidad de que el número de las observaciones favorables alcance su verdadera relación con respecto al número de las desfavorables, y ello precisamente hasta el extremo de que dicha probabilidad supere finalmente cualquier grado de certeza... (Wussing y Arnold, 286)

La demostración de la ley o *teorema de Bernoulli*, como también se la conoce, le resultó al parecer especialmente difícil y, aunque es correcta, no deja de ser, además de larga, un tanto enrevesada. El propio Jacob confiesa que le llevó veinte años de reflexiones hacerla. Es decir, todo el tiempo que estuvo dedicado al tema de la probabilidad. La palabra probabilidad aparece, por cierto, en este párrafo por primera vez. Parece pues, que la ley fue una de sus intuiciones iniciales. La idea, de alguna manera, estaba ya en el ambiente. Refiriéndose a los razonamientos sobre los sucesos en que no es posible determinar los casos posibles y favorables, así se expresa Jacob:

> Para tales razonamientos se necesita una gran cantidad de observaciones… Aunque esto, naturalmente, es conocido de todos la demostración construida sobre fundamentos científicos, en general, no es tan frecuente y por esto necesitamos exponerla. (Sánchez y Valdés, 226)

La incredulidad sobre las cuestiones relativas a la probabilidad era todavía tan grande que, durante este siglo y los dos posteriores, aparecieron numerosos experimentos para verificar la ley o teorema de Bernoulli. El ejemplo de la moneda resultaba ser el más socorrido. Jacob, sin duda, había dado pie a ello, pues no solo enunció y demostró la ley, sino que calculó incluso el número de observaciones necesarias para tener la seguridad de que la frecuencia relativa del suceso se diferenciara de la probabilidad teórica en menos de una cantidad previamente fijada. La cantidad calculada por Jacob resultaba en la práctica excesivamente grande, no hacían falta tantas observaciones como él pedía.

Por desgracia, Jacob no pudo terminar su *Ars conjectandi* debido a que una infección de tuberculosis acabó con su vida prematuramente, en 1705, cuando solo contaba 51 años. Lo que faltaba era relativamente poco, pero tenía una importancia crucial. Pretendía extender la aplicación de sus teorías a materias de tipo jurídico, a cuestiones relativas a los seguros y a estadísticas de población. Su sobrino Nicolaus I, dándose cuenta de la importancia del trabajo de su tío, decidió publicarlo con un prólogo justificativo.

Incluso el propio Nicolaus continuó trabajando sobre el tema hasta el punto que pudo mejorar las estimaciones de Jacob acerca del número de observaciones necesario para aproximar la frecuencia relativa de un suceso a la probabilidad obtenida teóricamente a priori. Y la tesis que defendió para obtener su grado de licenciado en derecho se titulaba precisamente *Sobre la aplicación del arte de la conjetura a los problemas del derecho*.

Referencias bibliográficas

COLLETTE, J. P. (1985), *Historia de las matemáticas*, Siglo XXI de España editores, Madrid.

SÁNCHEZ, C., y C. VALDÉS (2001), *Los Bernoulli*, Nivola, Madrid.

WUSSING, H., y W. ARNOLD (1989), *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias, Zaragoza.

SANTIAGO GUTIÉRREZ VÁZQUEZ
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
<hace@revistasuma.es>