suma+ 72
Secciones
Marzo 2013
pp. 53-60

Problemas para manipular II

Grupo Alquerque de Sevilla

Juegos

En el número 49 de la revista *Suma*, de junio de 2005, publicamos en esta sección el artículo «Problemas para manipular» donde partiendo del interés y dificultad que tiene la introducción de la Resolución de Problemas en clase, planteábamos una selección de problemas en los que la presencia de objetos y su manipulación facilitaba la implicación y resolución por parte del alumnado y que considerábamos interesantes por:

Aspectos motivacionales

- Atracción, porque permiten acercarse al problema desprovisto de la carga negativa y rechazo que para muchos alumnos supone la propia palabra problema.
- Exploración, porque facilitan analizar las distintas posibilidades y elegir una y no otras, sin tener que anotar ni borrar nada.
- Variedad.

Adaptabilidad

- A diversidad de edades.
- A diversos niveles de dificultad, desde Primaria a Secundaria, donde el profesor, en virtud de los alumnos con los que vaya a trabajar, puede modificar adecuadamente los enunciados.
- De tamaño proporcionado.

Artículo solicitado por *Suma* en noviembre de 2012 y aceptado en enero de 2013

Viabilidad de su realización

— Facilidad de diseño sin más que un procesador de textos y un programa de tratamiento de imágenes. El enunciado del problema debe figurar en el propio tablero pues facilita un libre descubrimiento por parte de los estudiantes, que interactuarán libremente con el material. En todo caso se pueden dar pequeñas indicaciones generales.
— Permiten una presentación cuidada de los mismos, con buena impresión de los textos e imágenes en color, que los hacen más atractivos.
— Facilidad de construcción, al utilizar fotocopias o impresiones (en blanco y negro o color) plastificadas y materiales de buena calidad, durables (objetos cotidianos: tapones, botones, cubitos, piedrecitas…), seguros (no tener elementos punzantes, no tóxicos).
— Asequibilidad en su precio.

Con estas características creemos que se promueve una actitud positiva y una buena disposición por parte de los alumnos. Por ello seguimos enriqueciendo la selección de problemas susceptibles de esta presentación y hoy traemos una nueva entrega de Problemas para manipular.

Hemos estructurado la selección en tres bloques: Contactar, Ordenar y Colocar, pero se hubiese podido clasificar de otras maneras. Además, hemos indicado, cuando ha sido posible, la fuente de donde están extraídos los enunciados, algunos son pasatiempos clásicos y otros más modernos.

Contactar

En estos problemas hay que buscar el contacto entre los objetos, ya sean lápices, cubos o fichas.

Los seis lápices
(Autor Henry E. Dudeney)

Vamos a jugar con seis lápices.

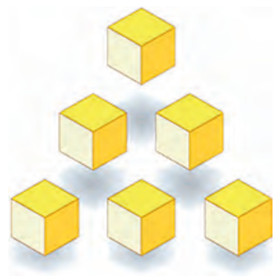
El primer reto consiste en colocar seis lápices de forma que cada uno de ellos toque a otros dos. Es fácil, como se ve en el dibujo. ¿Encuentras una solución diferente? ¿Puedes colocar los mismos seis lápices en la mesa de modo que cada lápiz toque:

a) solamente a tres?
b) solamente a cuatro?
c) a los otros cinco?

Seis Cubos

Y ahora con seis cubos.

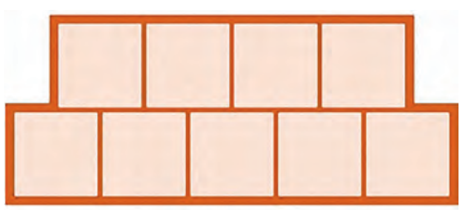
Tienes seis cubos idénticos. Colócalos de forma que cada cubo toque, con una cierta parte de una de sus caras (el contacto a lo largo de las aristas o en los vértices no cuenta):



a) Únicamente a otros dos.
b) Solamente a otros tres.
c) A otros cuatro.
d) A cada uno de los cinco cubos restantes.

En blanco y negro

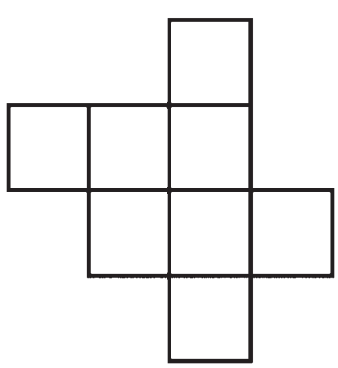
Coloca en el siguiente tablero tres fichas negras y seis fichas blancas, para que cada una, sea de un color o de otro, toque exactamente a dos fichas blancas (puede tocar a las fichas negras que sean).



Ocho dados

(Tomado de *Acertijos enigmáticos* (1998), de Alan Maley y Francoise Grellet)

Sobre un tablero se han dejado ocho dados ocupando las casillas del dibujo. Colócalos sabiendo que de los números que se ven:



a) Cada dado es un 1, un 2, un 3 o un 5.
b) Hay por lo menos un 2.
b) Cada 2 está entre dos 3.
b) Hay por lo menos un 3 entre dos 5.
b) Ningún 5 está en contacto con un 2.
b) Hay exactamente un 1.
b) Ningún 3 está en contacto con el 1.
b) Por lo menos un 3 está en contacto con un 3.

Ordenar

Personajes Disney

(Tomado de *Problemas de ingenio 1* (1980), de Pedro Ocón de Oro)

Seis conocidos personajes de Walt Disney están sentados en el suelo formando un círculo.

Minnie no está al lado de Donald ni de Tío Rico[1]. Margarita no está al lado de Mickey ni de Tío Rico. Donald no está al lado de Mickey ni de Margarita, y Tribilín está a la izquierda de Donald.

¿Cuál es la ubicación de cada uno de estos personajes?

Espectadores

(Tomado de *Mensa. Rompecabezas lógicos* (2000), de Philip Carter y Ken Russell)

Cuatro parejas de marido y mujer van a ver una obra teatral. Todos se sientan en la misma fila, pero ningún marido se sienta junto a su mujer, y en los extremos opuestos de la fila hay un hombre y una mujer. Se apellidan Andrews, Barker, Collins y Dunlop.

1. La señora Dunlop o el señor Andrews ocupan el asiento del extremo.

2. El señor Andrews se sienta entre el señor y la señora Collins.
3. El señor Collins está a dos asientos de la señora Dunlop.
4. La señora Collins se sienta entre el señor y la señora Barker.
5. La señora Andrews se sienta junto al asiento del final de la fila.
6. El señor Dunlop está a dos asientos del señor Andrews.
7. La señora Collins está más cerca del extremo derecho que del izquierdo.

Averigua cómo se han dispuesto en la fila.

Tarjetas

(Tomado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio* (2000). Prueba final, de Ivan Skvarca)

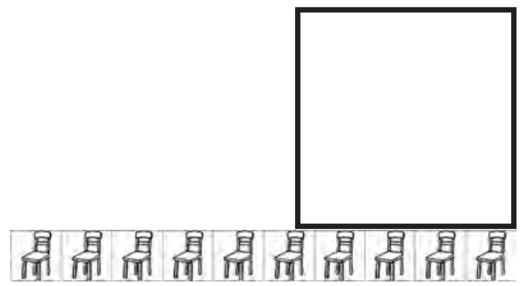
Las tarjetas 1, 2, 3, y 4 son amarillas; las tarjetas 5, 6, 7 y 8 son verdes. Ordénalas una detrás de otra para que todas las frases resulten verdaderas (los números del margen superior izquierdo solo sirven para controlar la exactitud del resultado).

Colocar

Diez sillas

(Tomado de *Problemas de ingenio 1* (1980), de Pedro Ocón de Oro)

Un camarero, al llegar a su trabajo, recibe el encargo de colocar en un salón cuadrado diez sillas que están desordenadas de la noche anterior, de modo que en cada una de las paredes queden situadas tres sillas. ¿Cómo resolverá el problema?



Formando cuadrados

Formar un cuadrado con ocho galletas no es muy difícil. Una vez conseguido, ¿eres capaz, con las mismas ocho galletas, de formar un cuadrado con cuatro en cada lado?

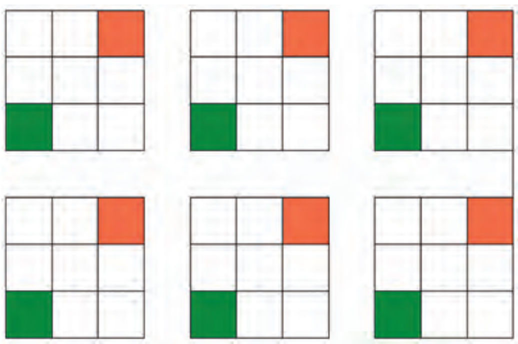
Completar cuadritos

Rellena las casillas de estos cuadrados de tres colores (rojo, amarillo y verde) sabiendo que:

a) Dos casillas vecinas (en horizontal o vertical) no pueden tener el mismo color.

b) No es necesario que en cada fila y en cada columna estén los tres colores.
c) Debe haber tres casillas ocupadas por cada color.
d) Hay que respetar las dos casillas ya pintadas.

Hay seis posibilidades distintas (salvo giro, en cuyo caso no se consideran diferentes).



Este problema se puede plantear más abierto dando solo una plantilla con las dos casillas pintadas y pedir primeramente una solución, y después todas la posibles, sin indicar que son seis. La condición b) se puede omitir para que los alumnos lleguen a esa conclusión ya que no está indicada en el enunciado, y a veces nosotros mismos nos ponemos restricciones que no son tales.

Una variante del problema es buscar todas las soluciones (salvo giro) en las que la única casilla que se da pintada es la central, por ejemplo de amarillo.

De la A la H

(Tomado de *Jeux Mathématiques* (2006), de Fédération française des jeux mathématiques)

Completa el dibujo con las letras *B, C, D, E, F* y *G* de forma que dos círculos unidos por un segmento no contengan dos letras consecutivas en el alfabeto.

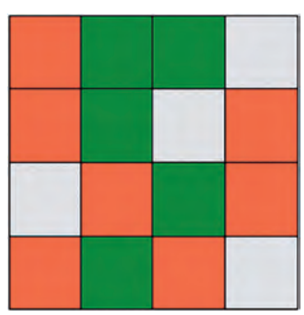
Béticos y sevillistas

(Adaptado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio (2000). Prueba final,* de Jaime Poniachik)

Descubre en cada tablero lugares habitados por aficionados béticos y sevillistas. Donde hay un número hay un seguidor bético o bien uno sevillista. Donde no hay número, no vive nadie. En cada casilla donde hay un bético, el número indica cuántos sevillistas tiene a su alrededor, y en cada casilla donde hay un sevillista, el número indica cuántos béticos tiene a su alrededor. Los alrededores de una casilla son sus vecinas inmediatas en horizontal, vertical y diagonal. En el tablero está ubicado en verde un aficionado bético.

	1	3	1		
	2	4	3		
		5	2	2	
	2	4	3	3	2
	2	5	5	3	
	1	2	3		

Es un juego muy adaptable y el diseño es bien sencillo, utilizando la técnica de empezar por el final. Una vez elegido el tamaño que deseamos para la cuadrícula, en nuestro ejemplo 4x4 escribimos la solución que queremos y, después, los números que indican cuántos aficionados del equipo contrario viven a su alrededor (diferenciamos las preferencias futbolísticas utilizando los colores verde y rojo de los equipos mencionados). Ya solo falta indicar la ubicación de uno de los seguidores.



2	**2**	**1**	
2	**3**		**2**
	3	**4**	**1**
1	**3**	**2**	

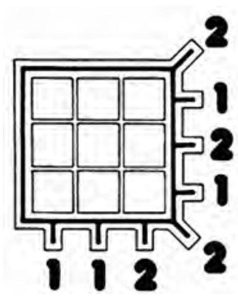
Para su resolución podemos utilizar fichas de parchís o tapones de plástico.

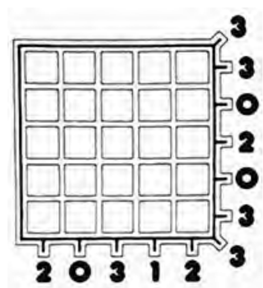
Ocultos

(Tomados de *Cacumen,* n.os 46 y 47)

Dos problemas de la añorada revista de ingenio, juegos y pasatiempos de los años 80 *Cacumen,* en un tablero 3×3 y en uno 5×5.

Sitúa sobre el tablero las fichas necesarias para que en cada fila, columna y diagonal haya la cantidad que se indica. En cada casilla solo puede ir una ficha.

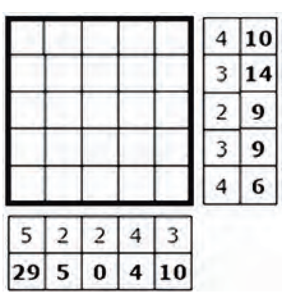




Camino de dominós

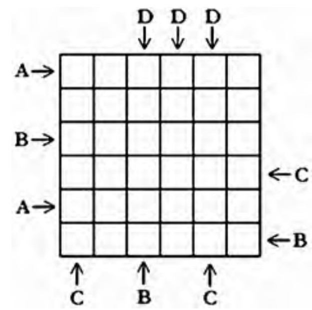
(Tomado del *Campeonato Argentino de Juegos de Ingenio (2000). Prueba final*, de Marcelo Iglesias)

Sobre el tablero se han colocado ocho fichas de dominó (0-0, 0-3, 0-4, 0-5, 0-6, 3-4, 5-6, 6-6), formando un camino cerrado y respetando la regla de contacto (dos fichas sólo pueden unirse por el mismo número incluso lateralmente formando un escalón). En el tablero vacío hay, como pistas, dos series de números. La primera, con números más finos, indica cuántas casillas están ocupadas en cada fila o columna. La segunda, con números más gruesos, indica la suma de los valores de cada fila o columna. Descubre cómo están ubicadas las fichas.



El juego de ABCD

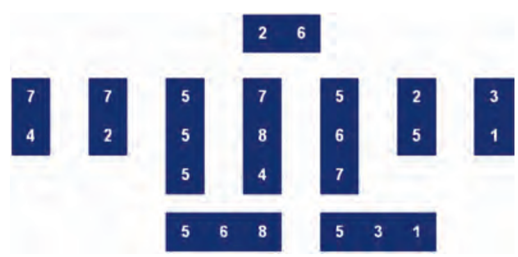
Hay que colocar las letras *A, B, C* y *D* en el dibujo. Las cuatro letras aparecen exactamente una vez en cada fila y cada columna, en total seis veces cada una. Doce cuadritos permanecen vacíos. En algunas filas y columnas se indica la primera letra que se colocará en ese lado.



Puzzle numérico bidireccional

(Tomado del *XIII Open Matemático* (2001))

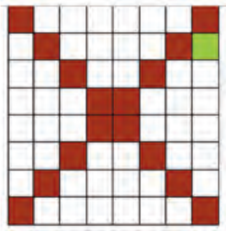
Compón un cuadrado con estas baldosas numéricas, formando números de cinco cifras. El cuadrado estará bien hecho si los cinco números de cinco cifras se pueden leer, de igual forma, tanto en horizontal como en vertical, es decir, el número de la primera fila sea el de la primera columna, el número de la segunda fila sea el de la segunda columna, etc.



Ocho estrellas

(Tomado de *Acertijos, desafíos y tableros mágicos (2007),* de Henry Dudeney)

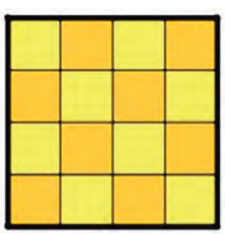
Coloca ocho estrellas sobre el tablero de modo que ninguna quede alineada con otra, ni en horizontal, ni en vertical ni en diagonal. Una estrella ya está puesta, y no debe ser movida, de modo que solo queda por poner 7. No se deben poner estrellas en ninguna de las casillas grises.

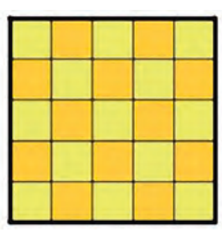


Se trata de una variante del clásico problema de las ocho reinas propuesto por el ajedrecista alemán Max Bezzel en 1848. A partir del problema de las ocho reinas el número de problemas que se han estudiado relacionados con la colocación de piezas en tableros de ajedrez es amplísimo.

Si consideramos iguales las soluciones que se pueden obtener a partir de simetrías, rotaciones y traslaciones tenemos una única solución. Si no hubiésemos fijado una estrella de inicio habría dos soluciones esencialmente distintas.

Para familiarizarse con el problema, en caso de no encontrar ningún camino para abordarlo o bien para graduar su dificultad, es aconsejable empezar por casos más sencillos; por ejemplo, con cuatro objetos en un tablero 4×4 o con cinco en uno de 5×5. En el primer caso hay una solución esencialmente distinta (dos aceptando reflexiones y/o rotaciones); en el tablero 5×5 hay dos soluciones esencialmente distintas (10 si admitimos reflexiones y/o rotaciones).

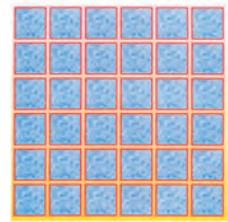




Treinta y seis

(Del libro *Problemas y experimentos recreativos,* de Yakov I. Perelman)

En las casillas de esta cuadrícula se colocan 36 fichas.



Hay que quitar 12 fichas, de tal modo que, después de esto, en cada fila y en cada columna quede el mismo número de fichas. ¿Qué fichas hay que quitar?

Una versión es la siguiente: Quitar seis fichas de la cuadrícula, de modo que en cada una de las filas, columnas y las dos diagonales siga quedando un número par de fichas.

Cuatro casas de campo

(Este rompecabezas se inspira en *Las seis casas de campo del libro 536 puzzles y problemas curiosos,* de Henry E. Dudeney)

En el dibujo se muestra un mapa de un camino circular. La distancia entre dos puntos consecutivos es de 1 km. Hay dos casas construidas ya en el camino, y se quieren construir dos más. El Ayuntamiento quiere saber dónde se han de colocar teniendo en cuenta que se den todas las distancias posibles de 1 a 12. Las dos casas que ya están colocadas están separadas por 1 o 12 km, dependiendo de la dirección del itinerario, por lo que el objetivo es colocar las dos nuevas casas para obtener las distancias de 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11.

Parejas de números

Coloca los números 1, 1, 2, 2, 3, 3 en fila de manera que entre los dos unos haya un número, entre los dos doses haya dos números y entre los dos treses haya tres números. ¿Y con cuatro: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4?

Es imposible para cinco y seis, pero es nuevamente posible para siete y para ocho parejas. Halla las soluciones.

1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8

Es una variante, con números, del Puzzle o Problema de Langford, denominado así por el matemático escocés Dudley Langford que lo propuso en 1958 al observar como su hijo pequeño jugaba con parejas de bloques de colores.

Los emparejamientos Langford existen sólo cuando el número de parejas n es congruente con 0 o 3 módulo 4; por ejemplo, no hay emparejamiento Langford cuando n = 1, 2 o 5. Los números de los distintos emparejamientos Langford para *n* = 1, 2,..., considerando iguales una secuencia y su inversa, son (según Wikipedia):

N.º de parejas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
N.º emparejamientos	0	0	1	1	0	0	26	150	0	0	17792	...

Simultáneamente el matemático y lógico noruego Thoralf Skolem (1887-1963) trabajaba una variante del problema de Langford que nosotros podemos aprovechar para nuestro juego.

Coloca los números 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 en fila de manera que entre los dos unos no haya separación, entre los dos doses haya un número, entre los dos treses haya dos números y entre los dos cuatros haya tres números.

Este problema tiene solución siempre que el número de parejas n sea congruente con 0 o 1 módulo 4. Los números de los distintos emparejamientos Skolen para *n* = 1, 2,..., considerando iguales una secuencia y su inversa, son:

N.º de parejas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
N.º emparejamientos	1	0	0	3	5	0	0	252	1318	...

Como vemos un problema teórico reducido a pasatiempo en sus casos más sencillos y que aún está abierto para generalizaciones a ternas, cuaternas…

Para finalizar

La manipulación es especialmente atractiva en muchas edades, sobre todo en Primaria y ESO. Por ello, abordar este tipo de acertijos crea una motivación especial para introducirse en la resolución de problemas, ya que se realiza como un juego. Como se ha podido apreciar la base de algunos de ellos son problemas con un hondo sentido matemático e incluso hay algunos problemas abiertos que no son nada elementales. Además, conseguir el material es fácil, barato y puede ser creado por los propios alumnos, lo que añade un elemento más de atracción. Pensamos que este tipo de retos es un buen recurso para animar a toda persona a acercarse de una manera lúdica y crítica a las matemáticas, desarrollando una serie de estrategias que podrá aplicar en muchas situaciones cotidianas. Nosotros los usamos con bastante aceptación en las clases cuando abordamos la resolución de problemas, en semanas culturales y en actividades en la calle. Pequeños y mayores se acercan sin tanto miedo a las matemáticas.

GRUPO ALQUERQUE DE SEVILLA
Constituido por

JUAN ANTONIO HANS MARTÍN
CC Santa María de los Reyes

JOSÉ MUÑOZ SANTONJA
IES Macarena

ANTONIO FERNÁNDEZ-ALISEDA REDONDO
IES El Majuelo

<juegos@revistasuma.es>

1 Los nombres de los personajes se mantienen textualmente, pero su equivalencia a los utilizados hoy en día sería: Tío Rico es Tío Gilito, Margarita es Daisy y Tribilín es Goofy.