suma+
revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas
71
noviembre 2012

Edita
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Web
Antonio Alamillo Sánchez
<www.revistasuma.es>

Portada
Àngels González Fernández
Josep Moreno Fernández

Maquetación y corrección
Miquel Albertí Palmer
Iolanda Guevara Casanova
Daniel Sierra Ruiz

Revista Suma
Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
Fax: *+(34) 912 911 879*
Tirada: *6250 ejemplares*
Depósito legal: *Gr 752-1988*
ISSN: *1130-488X*

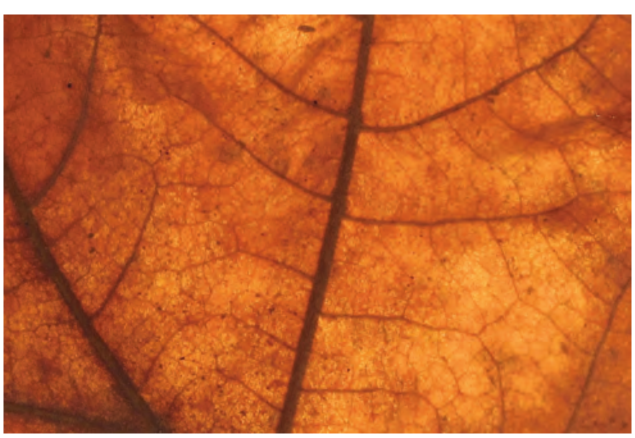
sumario

editorial

artículos

secciones

FESPM & Cía



Suma es una revista de didáctica de las matemáticas de periodicidad cuatrimestral cuyo objetivo es tratar sobre los aspectos relacionados con su enseñanza y aprendizaje y destinada, sobre todo, al profesorado que trabaja en educación infantil, primaria, secundaria y universitaria.

La revista SUMA se edita en Badalona (Barcelona) — España

suma+
Noviembre 2012
71
pp. 3-5

Editorial

Matemáticas a oscuras

Tomamos contacto con relativa frecuencia con la experiencia profesional que representa incluir en las aulas de matemáticas a una alumna o alumno ciego. En esta revista han aparecido a lo largo de los años textos de distinta índole que nos acercan tanto a la realidad de los estudiantes que no ven como a la de quienes se responsabilizan de una pequeña parte de su formación matemática.

El origen del movimiento inclusivo se remonta a los años setenta en el ámbito de la educación especial desde el cual se reclamaba que el alumnado con algún tipo de deficiencia pudiera educarse en un aula ordinaria, independientemente de las características de cada persona y sin disfrazar sus limitaciones. Así pues, podemos aproximarnos a la experiencia matemática de los ciegos desde la retórica de la inclusión o de las necesidades educativas especiales que ciertamente tienen (aunque muchas menos de las que probablemente imaginamos). Sin embargo, desde esta perspectiva es muy difícil percibir el enorme potencial de los recursos que utilizan para el desarrollo de la actividad matemática. En el momento que un alumno ciego pasa a formar parte de nuestra clase nos desbordan los esfuerzos por *adaptar* lo que decimos, lo que hacemos y hasta lo que no hacemos a la oscuridad en la que nos figuramos que desarrollará su actividad matemática. Apenas hay tiempo para poner en tela de juicio las claves para la inclusión, para generar mecanismos y artilugios de adaptación, para detenerse a reflexionar sobre los procesos de razonamiento matemático o acerca de las propiedades que probablemente la vista no nos deja atisbar.

Hay al menos tres aspectos fundamentales que marcan la diferencia en la manera en la que ciegos y videntes llevan a cabo su actividad matemática: el tacto, el lenguaje y el uso del álgebra y la notación matemática.

El tacto es un medio tan apto como la vista para el aprendizaje y los ciegos han de utilizarlo como alternativa a la visión para obtener información de los objetos matemáticos, lo cual implica una experiencia diferente de la del vidente. Si bien es cierto que es menos apropiado que la vista para recoger información de tipo figurativo y global, el tacto ofrece perspectivas de las que la vista adolece y son éstas las que nos interesa enfatizar.

Las impresiones en relieve -carísimas, por cierto- que ofrecen las sofisticadas impresoras que utilizan las organizaciones de ciegos permiten adaptar imágenes gráficas con máxima calidad. Pero no es necesario papel especial ni carísimas impresoras para poder palpar, por ejemplo, la gráfica de una curva. Basta tomar una lámina de goma de unos 5 mm de espesor y colocarla debajo de un papel ordinario sobre el que dibujar con un bolígrafo de punta normal o gruesa. Al esbozar la curva o la gráfica de una función el estudiante ciego puede reconocer mediante el tacto sobre el papel lo que se ha dibujado. El profesor o cualquier otro compañero sin limitación visual verá lo que ha plasmado allí. Sin duda es un medio excelente para la comunicación entre profesores y alumnos en casos de ceguera, pero resulta igualmente excelente para estudiar matemáticas sin pensar en la pérdida de visión.

Cualquiera puede hacer el experimento de dibujar mediante este sistema, por ejemplo, una o varias parábolas de la familia:

$$y = a \cdot x^2$$

y pedir a un vidente -que sepa un poquito de matemáticas- que trate de averiguar, con los ojos cerrados y palpando el relieve de la gráfica, cuál es la función que se ha representado. En tales condiciones no podremos evocar la imagen global de la parábola que nos ofrecería la vista de manera casi inmediata. El reconocimiento de la gráfica exige reconocer, paso a paso, su simetría, su concavidad o convexidad, el vértice y algo que, aunque conocido, nunca hubiéramos tenido antes en cuenta: mientras palpamos una de las ramas de la parábola nos percatamos que en cierto momento tenemos bajo la yema de los dedos el vértice y el eje de abscisas y tomamos en consideración el ángulo con el que la rama de la parábola se va separando del eje de abscisas para reconocerla. En consecuencia, necesariamente nos detenemos en la exploración de propiedades como la tangencia al eje de abscisas y el cambio de pendiente. De esta forma, haya o no ciegos en la clase, el uso de la lámina de caucho para «tocar» las gráficas, las simetrías y otros movimientos en el plano abre la puerta para la exploración de propiedades locales que de otro modo tal vez pasarían desapercibidas.

El ejemplo anterior es sólo uno de tantos con los que ilustrar que los recursos inventados para la adaptación de un ciego pueden ser entendidos y utilizados con eficacia para explorar y visualizar las matemáticas también por el alumnado vidente. Por eso dichos recursos trascienden la inclusión del alumnado ciego, pues desarrollar una buena intuición sobre qué características y qué propiedades son susceptibles de ser analizadas por el tacto supone una enorme ventaja para la resolución de problemas y para todo el mundo.

Por otra parte, la visión aboca a la mayoría de quienes gozamos de ella a verbalizar y comunicar con una cantidad muy reducida y corriente de términos. Este hecho puede estar muy relacionado con que nuestros interlocutores, alumnos y alumnas, a menudo no entiendan más que la mitad de las ideas vinculadas a los términos que utilizamos.

Cualquiera puede hacer el experimento sencillo de pedir a alguien que intente explicar cómo un rectángulo al girar sobre un eje imaginario genera un cilindro. Pero si le pide que repita la explicación suponiendo que se está dirigiendo a una persona ciega comprobará la gran diferencia en el uso de términos relacionados con las figuras geométricas en cuestión y sus propiedades, la localización en el espacio, etc. El discurso matemático de los ciegos resulta enriquecedor y seductor porque se desvía a menudo de las maneras ordinarias de hablar, redundando en aspectos esenciales para la comprensión de un problema, de una conjetura o de su solución desde una perspectiva que nunca antes habíamos considerado.

También podríamos dedicar un amplio espacio a reflexionar sobre la utilización del álgebra desde la perspectiva de la no visión. En el ámbito educativo se ha escrito mucho sobre el uso desmedido de formulaciones algebraicas en problemas que más bien exigen una organización prudente de la información. Muchos docentes hemos utilizado enunciados de problemas cuya solución por métodos algebraicos es enormemente tediosa para concluir con la moraleja de que el álgebra no siempre es el mejor camino y que una buena intuición es muy positiva. Esta tesis los ciegos la tienen clarísima porque escribir álgebra en *braille* es tan pesado y proclive al error que desarrollan muchas estrategias de visualización antes de proceder a un estudio analítico de los objetos matemáticos con los que trabajan. Más aún, sorprende que en ocasiones argumenten con largos razonamientos visuales y geométricos lo que podría zanjarse con la solución de una ecuación. El corolario es evidente: así ejercitan enormemente la intuición y la visualización.

Cuanto más nos acercamos a la experiencia del tacto, al análisis de las referencias y metáforas visuales y al juego de generar alternativas en el uso del lenguaje sin la visión pierde sentido aproximarse a la actividad matemática de los ciegos desde la retórica de las necesidades educativas especiales y desde la perspectiva de la inclusión. Tómese, por tanto, todo lo dicho como una invitación a cerrar los ojos y abocarse a lo positivo que nos sugiere la penumbra: hablar, tocar, imaginar. Una invitación a hacer matemáticas a oscuras para alumbrar así lo que la luz oculta.

++

SUMA+
Recomendaciones a los autores

TÍTULO Deberá ser breve y evitar descripciones excesivas del contenido del artículo.

RESUMEN Presentará en no más de cinco líneas el contenido del artículo.

NIVELES No más de tres. Título aparte, tan solo apartado y sub apartado.

INICIO No es conveniente iniciar el texto con un título de apartado. Conviene hacerlo con una introducción que no es necesario titular como «introducción», pues se sobreentiende.

TEXTO Procurar que la redacción sea directa y concisa. Evitar el uso innecesario y/o excesivo de oraciones subordinadas y paréntesis que puedan entorpecer tanto la lectura fluida como la comprensión del texto, sobre todo en una misma frase. Evitar redundancias, dequeísmos, el uso excesivo de las preposiciones «de» y «en» y la reiteración del pronombre relativo «que». Mientras sea posible, observar el mismo tiempo verbal a lo largo de todo el texto.

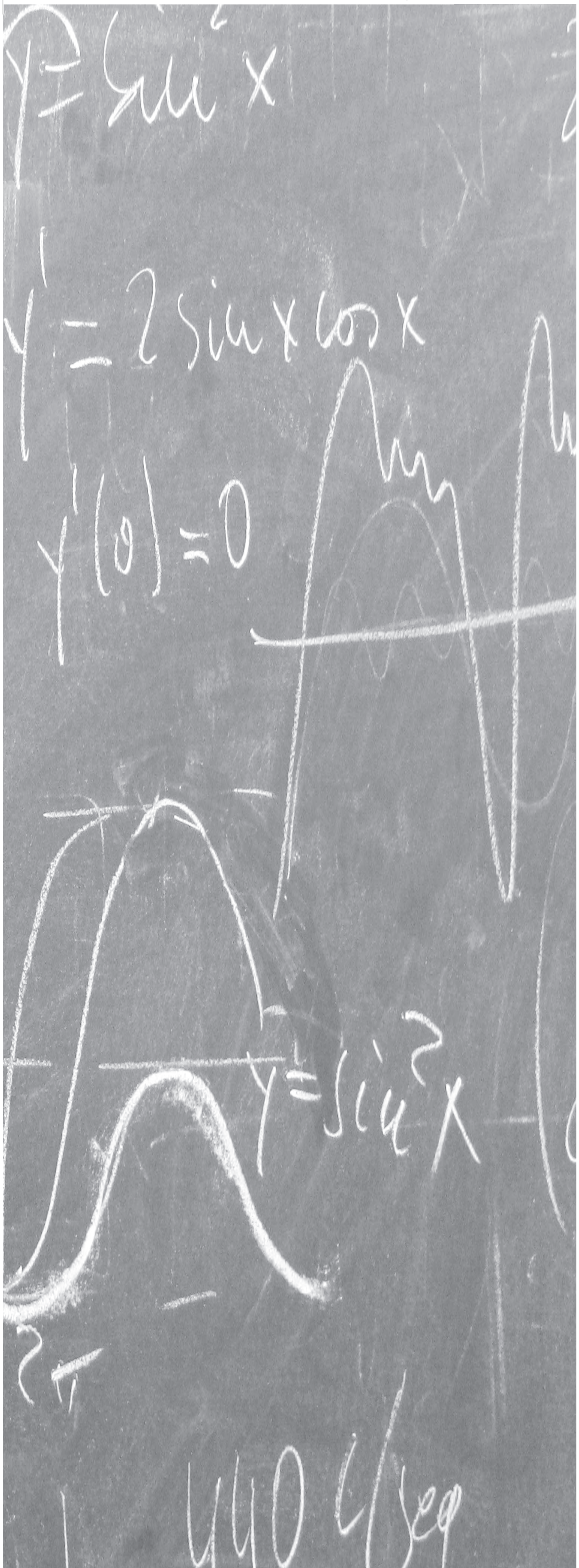
ORTOGRAFÍA Y SINTAXIS Uso apropiado de los signos de puntuación. En frases largas conviene que el lector respire.

SENSIBILIDADES Evitar comentarios políticamente incorrectos acerca de la facilidad o dificultad de comprensión de ideas, conceptos y argumentos. Usar expresiones neutras de tipo genérico para referirse a grupos de ambos sexos como, por ejemplo, alumnado, estudiantes, escolares, profesorado, docentes, …

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Observar las pautas referidas en las *Normas de publicación* teniendo especial cuidado en que se trate exclusivamente de referencias citadas en el texto y de incluir en cada una de ellas el año, la editorial y la localidad de publicación.

ILUSTRACIONES Todas las imágenes, figuras, dibujos, fotografías y tablas deben ir acompañadas de un pie explicativo y estar referenciadas en el texto. Además, deberán tener la resolución señalada en las normas de publicación.

LECTURA Una lectura final y de un tirón del texto completo es de gran ayuda para mejorar su expresión y su puntuación.



suma+ 71

artículos

suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 9-18

La introducción del sistema métrico decimal y los libros de texto en España

Miguel Picado y Luis Rico

El artículo resalta la relevancia de los libros de texto en la difusión de determinados conocimientos matemáticos. Este alcance se ejemplifica con resultados de un estudio histórico realizado sobre funcionalidad y características de los textos de matemáticas en la introducción y difusión del Sistema Métrico Decimal en España en el período 1849-1892.

Palabras clave: Libros de texto de matemáticas, Historia de la Educación Matemática, Cambio curricular, Sistema Métrico Decimal, Conocimiento matemático.

The Introduction of Metric System and the Textbooks in Spain

This paper aims to highlight the textbooks as resources in the spreading of mathematical knowledge. This gives an example by means of the findings obtained from a historic study on the functionality and features of mathematical texts in the promotion of the Metric System in Spain from 1849 to 1892.

Keywords: Mathematical textbooks, History of Mathematics Education, Metric system, Curricular change, Mathematical knowledge.

La reflexión histórica es objeto de atención singular por los investigadores en educación matemática (Fauvel y van Maanen, 2000). La investigación histórica proporciona métodos de indagación que atraen a matemáticos, profesores de matemáticas y otros expertos en matemáticas y educación. El interés por la aproximación histórica al estudio de problemas e interrogantes relacionados con la educación matemática se encauza y difunde mediante diversos canales e instituciones. Así lo constatamos en la edición de revistas especializadas y en la realización de encuentros entre expertos en esta temática, como es el caso del *International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics* afiliado a la *International Commission on Mathematical Instruction*, de la Conferencia de Investigación Europea en Educación Matemática, el Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática, la Conferencia Internacional sobre Historia de la Educación Matemática y el Congreso Internacional sobre Educación Matemática.

Particularmente, en España se viene trabajando en este campo desde el Grupo de Historia de la Educación Matemática de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática y, de

Artículo recibido en *Suma* en junio 2011 y aceptado en abril de 2012

manera transversal, desde la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas y la Sociedad Española de Historia de la Educación.

Desde hace casi tres décadas, diversas cuestiones, métodos, técnicas y conceptos propios de los estudios históricos vienen siendo objeto de examen y reflexión por investigadores en educación matemática. Así se muestra en los trabajos de Baumgart (1993), Carrillo (2005), Fauvel y van Maanen (2000), Furinghetti (2004), Gómez (2003), Siu y Tzanakis (2004), Rico (2003), Schubring (2011) y Sierra (1997).

En esta misma línea, el estudio de textos históricos de matemática forma parte de la agenda de grupos de investigación en España en instituciones como la Universidad de Granada, la Universidad de Valencia, la Universidad de Salamanca y la Universidad de Murcia. Como parte del trabajo de análisis de textos desde la historia de la educación matemática, se ha llevado a cabo en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada un estudio sobre el papel desempeñado por los libros de texto en el proceso de implantación del Sistema Métrico Decimal (SMD) en España en la segunda mitad del siglo XIX.

La introducción del SMD en España hubiese experimentado muchas más dificultades si su propagación hubiese dejado al margen el sistema educativo y no hubiera implementado una reforma curricular que derivara en la edición de libros de texto.

El texto en el ámbito educativo

Resumimos algunas ideas generales sobre el texto escolar como fuente escrita de información, y otras más específicas, vinculadas con un estudio preliminar realizado. Partiendo de una perspectiva general, la bibliografía permite distinguir dos enfoques sobre los cuales otorgar un significado al texto: lingüístico y literario. Desde el primero se puede concebir el texto escolar como el conjunto de signos lingüísticos analizables, como la unidad lingüística comunicativa fundamental caracterizada por su cierre semántico y comunicativo, su coherencia profunda y superficial y por su estructuración producto de reglas textuales y de las del sistema de la lengua (Sánchez, 1983; Salvador, Rodríguez y Bolívar, 2004). La perspectiva literaria, en que centraremos nuestro interés, concibe el texto escolar como aquello dicho o escrito en una obra, es decir, un texto educativo es aquel conjunto de escritos o contenidos con estructura común y unidad temática (Sánchez, 1983; Salvador y otros, 2004).

Esta categorización posibilita una diferenciación en las formas de entender el texto. Sin embargo, las tendencias pueden encontrar un punto en común y entrelazar aspectos de ambas perspectivas para referirse al texto de matemáticas. Siguiendo a Filloy, Puig y Rojano (2008) el texto de matemáticas es el resultado de una lectura —entendida como una transformación— realizada en un espacio textual[1] cuyo objetivo no es extraer un significado inherente a este espacio textual sino producir sentido; es una nueva articulación del espacio textual realizada por un individuo como resultado de la lectura realizada. Sus ideas conducen a dar sentido a un conjunto de signos partiendo de la lectura y la interpretación de un determinado objeto o sujeto informante.

Las ideas descritas categorizan el significado del texto a partir de la comunicación verbal, de la lengua o el idioma, del léxico y el sentido que a esta pueda darse en una región particular; o bien, del registro escrito de esa comunicación. En lo que sigue se va a hablar de libros de texto, como modalidad privilegiada de texto matemático en la que centramos nuestro interés.

Libros de texto de matemáticas

Estos libros proporcionan uno de los vehículos más relevantes en los procesos de difusión y transmisión del conocimiento matemático a lo largo de la historia. Gómez (2008) afirma que «son los registros disponibles del conocimiento matemático que la institución escolar ha trasmitido, en un momento determinado de la historia» (p. 2).

Así, se constituye en un testimonio de ideas, paradigmas, conocimientos y creencias en una época determinada. El estudio de su contenido posibilita el análisis de conceptos, significados y procedimientos, de las formas de representación y los contextos utilizados para la exposición e introducción de conocimientos matemáticos en la sociedad, en una época y entorno particulares.

La bibliografía histórica proporciona una reflexión sobre la funcionalidad y utilidad de los textos en ámbitos como la educación. En esta perspectiva histórica, Guthrie (2003) realiza dos planteamientos relativos al papel del libro de texto. El primero sobre su universalidad, que asemeja con la escolarización masiva formal y de la que exceptúa a ciertas naciones con altos niveles de pobreza. El segundo, que les otorga una función política. Es decir, este tipo de libro es un instrumento pedagógico, pero también un documento político cuyo contenido refleja una visión determinada de una sociedad, de su historia, sus valores y aspiraciones y su posición internacional. Es un instrumento de organización y de poder (Gómez, 2000; Vea, 1995).

Esta segunda consideración como instrumentos pedagógicos, políticos y culturales y la implantación del sistema público de enseñanza han dado pie a la presentación de libros de textos con característica particulares, en forma y contenido, utilizados en la escuela como respuesta a las necesidades del sistema de enseñanza, con una estructura, un diseño y una forma de comercialización específica: los manuales escolares.

La aparición del manual escolar suple la falta de formación suficiente de los profesores, da soporte al modelo de enseñanza simultánea con ventaja frente al individual y se adapta a las características de los estudiantes en cada uno de los niveles educativos (Gómez, 2011). De esta forma, los libros de texto —y, por tanto, los manuales escolares— mantienen una vinculación directa con los intereses sociales, específicamente políticos, culturales, económicos y educativos. Preservan y sostienen el conocimiento y la cultura —historia, tradiciones y costumbres, valores, estilo de vida, ideología—, hacen asequible la educación estandarizada y logran mayor cobertura para sus usuarios.

Gómez (2011) considera el libro de texto como una publicación especializada, identificable por su contenido, por la información específica sobre la materia y por la población a la que se dirige. Los planteamientos sobre su significado desde la perspectiva literaria conducen al reconocimiento de los manuales escolares como textos con una función educativa y una orientación didáctica. Son textos para apoyar el aprendizaje, o bien para su uso como guía, material didáctico y auxiliar de enseñanza para instruir en una disciplina particular y en un nivel concreto de la misma (Salvador y otros, 2004). En su elaboración se deben incorporar las tendencias pedagógico-linguísticas del momento, actualizar los avances técnicos y cientificos y responder a las necesidades reales de la escuela (Prellezo, 2009).

los libros de texto —y, por tanto, los manuales escolares— mantienen una vinculación directa con los intereses sociales, específicamente políticos, culturales, económicos y educativos.

Particularmente en matemáticas, la elaboración de libros de texto contribuye a la presentación, transmisión y difusión del conocimiento cultural y científico. Hofmann

(1961), Gordon-Childe (1979), Bell (1992) y Boyer (2003) resaltan esta función difusora de los conocimientos matemáticos que han tenido los libros de texto a lo largo del tiempo. Pero esta finalidad los constituye también en instrumentos para la transmisión e importación de conocimientos. Peralta (2009) afirma que en el siglo XIX, con la traducción de textos y la adaptación de obras extranjeras «poco a poco empiezan a introducirse en España las nuevas teorías […] se va teniendo acceso a la matemática internacional…» (p. 224). Al mismo tiempo dependerá del empleo de un lenguaje adecuado y representativo de estos conocimientos el que se contituyan en el lenguaje textual, en el referente más sobresaliente en estos procesos (Maz, 2009).

El potencial del libro de texto como fuente de ideas, propósitos y reflejos de una sociedad particular, ha conducido a un estudio que enfoca el SMD como estructura matemática predominante en ámbitos como el comercio, la ciencia, la educación y la realidad social en una región y época particulares.

El estudio

Nuestro quehacer se ha dirigido a abordar el tratamiento dado al SMD en libros de texto de matemáticas en España en el período comprendido entre la adopción e implantación legal del sistema en 1849 y la promulgación de obligatoriedad de su uso en 1892 (Picado, 2009, 2012). El potencial del libro de texto como fuente de ideas, propósitos y reflejos de una sociedad particular, ha conducido a un estudio que enfoca el SMD como estructura matemática predominante en ámbitos como el comercio, la ciencia, la educación y la realidad social en una región y época particulares.

Para ello, se han considerado estos libros como textos desde un enfoque literario, concebidos como una obra con estructura y unidad, cuya finalidad es la comunicación y difusión de una serie de datos. El texto responde a una selección de finalidades y a su articulación mediante una delimitación de información —conocimientos—, que contribuyan al logro de determinados objetivos de carácter educativo y propósito formativo. Esta especificidad se hace necesaria pues el estudio ha incluido una selección y análisis de libros de texto de matemáticas editados para ámbitos como el comercial y mercantil, el legal y político, el social, el educativo, el administrativo, el técnico y el científico, cuya finalidad radicaba en facilitar y servir de instrumentos para la difusión del SMD en España desde el momento de su introducción en 1849 hasta finales del siglo XIX.

El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España

Las ideas expuestas y el estudio llevado a cabo permiten contextualizar la utilidad del libro de texto escolar como instrumento para la ejecución de decisiones políticas y para la transmisión e introducción de nuevos conocimientos, como es el caso de los vinculados a la matemática.

En diversas obras sobre la historia social y científica de España se muestra cómo los múltiples contratiempos ocurridos durante la implantación del SMD en el país —por razón del arraigo de las medidas tradicionales y el fuerte ideal colectivo— no fueron impedimento para su introducción en los establecimientos de enseñanza y para la edición e impresión de gran cantidad de textos, legales y particulares, para su difusión.

> …pese a los problemas, el estímulo legal sirvió para dar la salida a una larga y concurrida carrera de textos divulgadores del Sistema

> Métrico Decimal y de su nomenclatura francesa. Desde un círculo de instituciones públicas, de funcionarios, de técnicos, de profesionales del comercio, se propagó con rapidez a capas sociales más amplias; pero fue la enseñanza desde 1852 el vehículo principal con el que la nueva nomenclatura se introdujo en la sociedad. (Gutiérrez y Peset, 1997, p. 27)

Gran parte del siglo XIX estuvo caracterizada por diversos y profundos cambios sociales y políticos en la sociedad española, algunos de los más importantes en el orden intelectual y académico. Las ideas que orientan estos cambios también se dirigen a la renovación del Sistema Educativo. En este proceso de reorganización, los libros de texto juegan un doble papel: como medios para controlar la enseñanza impartida y como instrumentos para la difusión de nuevos conocimientos, entre ellos la introducción del SMD.

El libro de texto como regulador de la enseñanza impartida tuvo algunas dificultades pues parecía oponerse a las ideas liberales de la época, entre ellas la libertad de cátedra. Vea (1995) ha distinguido dos períodos en la segunda enseñanza española del siglo XIX en cuanto al uso del libro de texto. En el primero, comprendido entre 1836 y 1868, los planes de estudio «indicaban la conveniencia de seguir libros de texto —que el propio Gobierno señalase a través de listas, elaboradas por el Real Consejo de Instrucción Pública o por la Dirección General de Estudios, que aparecerían periódicamente—» (p. 34). En el segundo, de 1868 hasta ya avanzado el siglo XX, se «aboga por una mayor libertad de elección por parte del profesorado con el control previo del Gobierno para la admisión de obras como "aptas" para la instrucción pública» (p. 34).

En los ámbitos político y social, los libros de texto se convirtieron en un aliado inmejorable del Gobierno español para la difusión del SMD en todas las esferas sociales.

En los ámbitos político y social, los libros de texto se convirtieron en un aliado inmejorable del Gobierno español para la difusión del SMD en todas las esferas sociales. El documento divulgativo puso a disposición de una mayor capa social los conocimientos elementales del saber humano, en particular aquellos relacionados con la ciencia. En las escuelas de enseñanza primaria, los institutos de segunda enseñanza, las escuelas normales, los centros de enseñanza superior y en otros centros de formación, como los dedicados al ejército, la marina y el comercio, los libros de texto estuvieron a disposición de quienes tenían a su cargo la enseñanza y de quienes se disponían a su aprendizaje o aplicación.

Estudios históricos señalan a los libros escolares de matemáticas como la fuente más efectiva para la difusión de la nueva normativa metrológica y la reglamentación concerniente a las nuevas pesas y medidas adoptadas con la implantación del SMD en España. Estos estudios han permitido verificar la existencia de documentos mediante los cuales identificar y caracterizar el proceso de implantación del SMD en España durante la segunda mitad del siglo XIX (Aznar, 1997; Picado, 2009, 2012).

Desde la promulgación de la Ley de 19 de julio 1849 se establece una pugna en la edición de libros de texto, manuales y tablas para difundir el nuevo sistema legal. El comercio, la enseñanza, la agricultura, los requisitos técnicos y científicos, y las disposiciones legales impusieron esta necesaria proliferación de libros de texto. En las escuelas se requerían textos y materiales para la enseñanza y el aprendizaje de las nuevas medidas; en el comercio se necesitaban tablas numéricas para el dominio de las equivalencias; en la administración pública se precisaba familiarizar a los funcionarios con las nuevas medidas; y, en general, urgía una formación en sus equivalencias y uso, de las nuevas pesas y medidas, para todo un mercado nacional dependiente del gran mercado internacional europeo.

Sierra, Rico y Gómez (1997) exponen que con la introducción del SMD los libros de texto para la enseñanza de la Aritmética necesitaron una reelaboración. Estas modificaciones derivaron hacia una expansión en número, estilos y títulos de textos manteniendo para los escolares la estructura y el contenido recomendado por José Mariano Vallejo (figura 1).

Mediante la definición de criterios de selección de textos y la aplicación de la técnica de análisis de contenido (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008), nuestro estudio ha identificado y realizado una categorización de los textos elaborados para la difusión del SMD en España en el período 1849-1892. Se registran y describen, principalmente, textos educativos, documentos legales y textos mercantiles o para el comercio.

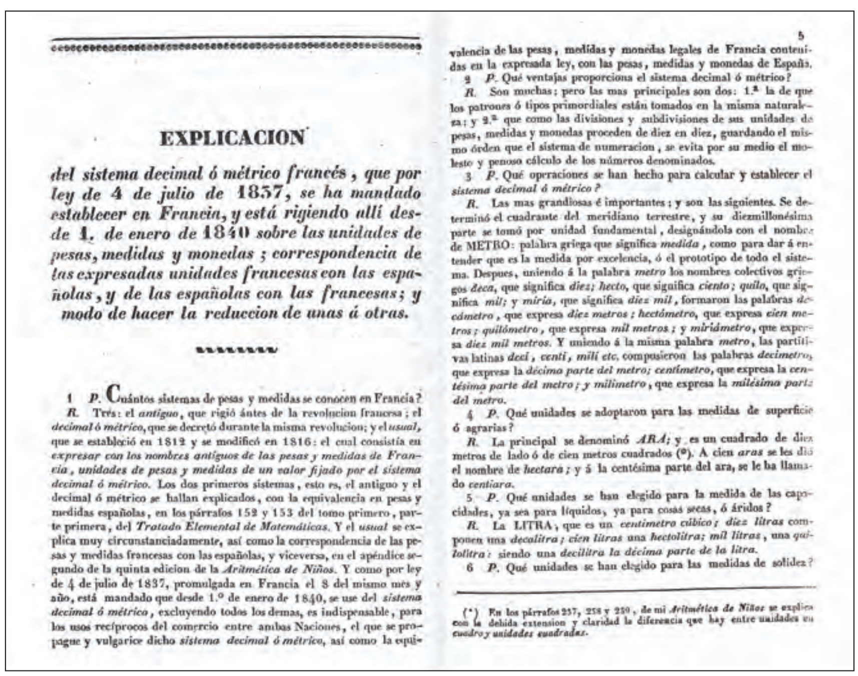
Figura 1. José Mariano Vallejo y Ortega (1779-1846)

Los libros de matemáticas escolares presentan características propias que los diferencian en cuanto a su contenido. Algunos corresponden a textos para la enseñanza de la Aritmética, en los que se han incluido ciertas consideraciones relacionadas con el SMD como las unidades de medida, la nomenclatura y las equivalencias con las unidades antiguas, pero el libro sigue dando prioridad a las nociones aritméticas.

Otros libros de texto se dedican exclusivamente a la exposición del SMD. Es decir, incluyen las nociones aritméticas, como las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, como parte de la presentación de los diversos conceptos, ejemplos y procedimientos relacionados directamente con las unidades métricas y monetarias del nuevo sistema.

Tomando en cuenta la población diana, se han reconocido libros de texto para la instrucción matemática en los niveles de primaria —primordialmente— y secundaria; también textos para los centros de formación de enseñantes, principalmente de las Escuelas Normales. De manera similar identificamos libros para una autoformación de los ciudadanos, a los que Aznar (1997) llama manuales prácticos. Una particularidad de los libros de texto escolares, principalmente de aquellos dirigidos a la enseñanza primaria es que, en su mayoría, los autores mantenían un vínculo cercano con la educación. Es decir, los maestros y profesores protagonizaron la renovación de documentos para la enseñanza del SMD.

Gran parte de esta renovación de libros de texto de matemáticas se fundamentó en obras como «Explicación del sistema decimal ó métrico francés…» de Mariano Vallejo editado en 1840, cuya importancia en la época inspiró la redacción y el diseño de una gran variedad de textos escolares. La figura 2 muestra una página



EXPLICACION

del sistema decimal ó métrico francés, que por ley de 4 de julio de 1837, se ha mandado establecer en Francia, y está rigiendo allí desde 1. de enero de 1840 sobre las unidades de pesas, medidas y monedas; correspondencia de las expresadas unidades francesas con las españolas, y de las españolas con las francesas; y modo de hacer la reduccion de unas á otras.

1 *P.* Cuántos sistemas de pesas y medidas se conocen en Francia?

R. Tres: el *antiguo*, que rigió ántes de la revolucion francesa; el *decimal ó métrico*, que se decretó durante la misma revolucion; y el *usual*, que se estableció en 1812 y se modificó en 1816: el cual consistía en *expresar con los nombres antiguos de las pesas y medidas de Francia, unidades de pesas y medidas de un valor fijado por el sistema decimal ó métrico.* Los dos primeros sistemas, esto es, el antiguo y el decimal ó métrico se hallan explicados, con la equivalencia en pesas y medidas españolas, en los párrafos 152 y 153 del tomo primero, parte primera, del *Tratado Elemental de Matemáticas.* Y el *usual* se explica muy circunstanciadamente, así como la correspondencia de las pesas y medidas francesas con las españolas, y viceversa, en el apéndice segundo de la quinta edicion de la *Aritmética de Niños.* Y como por ley de 4 de julio de 1837, promulgada en Francia el 8 del mismo mes y año, está mandado que desde 1.º de enero de 1840, se use del *sistema decimal ó métrico*, excluyendo todos los demas, es indispensable, para los usos recíprocos del comercio entre ambas Naciones, el que se propague y vulgarice dicho *sistema decimal ó métrico*, así como la equi-

5

valencia de las pesas, medidas y monedas legales de Francia contenidas en la expresada ley, con las pesas, medidas y monedas de España.

2 *P.* Qué ventajas proporciona el sistema decimal ó métrico?

R. Son muchas; pero las mas principales son dos: 1.ª la de que los patrones ó tipos primordiales están tomados en la misma naturaleza; y 2.ª que como las divisiones y subdivisiones de sus unidades de pesas, medidas y monedas proceden de diez en diez, guardando el mismo órden que el sistema de numeracion, se evita por su medio el molesto y penoso cálculo de los números denominados.

3 *P.* Qué operaciones se han hecho para calcular y establecer el *sistema decimal ó métrico?*

R. Las mas grandiosas é importantes; y son las siguientes. Se determinó el cuadrante del meridiano terrestre, y su diezmillonésima parte se tomó por unidad fundamental, designándola con el nombre de METRO: palabra griega que significa *medida*, como para dar á entender que es la medida por excelencia, ó el prototipo de todo el sistema. Despues, uniendo á la palabra *metro* los nombres colectivos griegos *deca*, que significa *diez; hecto*, que significa *ciento; quilo*, que significa *mil;* y *miria*, que significa *diez mil*, formaron las palabras *decámetro*, que expresa *diez metros; hectómetro*, que expresa *cien metros; quilómetro*, que expresa *mil metros;* y *miriámetro*, que expresa *diez mil metros.* Y uniendo á la misma palabra *metro*, las partitivas latinas *deci, centi, mili etc.* compusieron las palabras *decímetro*, que expresa la *décima parte del metro; centímetro*, que expresa la *centésima parte del metro; y milímetro*, que expresa la *milésima parte del metro.*

4 *P.* Qué unidades se adoptaron para las medidas de superficie ó agrarias?

R. La principal se denominó *ARA;* y es un cuadrado de diez metros de lado ó de cien metros cuadrados (*). A cien *aras* se les dió el nombre de *hectara;* y á la centésima parte del ara, se le ha llamado *centiara.*

5 *P.* Qué unidades se han elegido para la medida de las capacidades, ya sea para líquidos, ya para cosas secas, ó áridos?

R. La LITRA, que es un *centímetro cúbico; diez litras* componen una *decalitra; cien litras* una *hectolitra; mil litras*, una *quilolitra:* siendo una *decilitra la décima parte de la litra.*

6 *P.* Qué unidades se han elegido para las medidas de solidez?

(*) En los párrafos 257, 258 y 259, de mi *Aritmética de Niños* se explica con la debida extension y claridad la diferencia que hay entre unidades en *cuadro y unidades cuadradas.*

Figura 2. Extracto de la «Explicación del Sistema Decimal ó Métrico Francés» (Vallejo, 1840, pp. 4-5) de este libro, el cual reconoce la iniciativa francesa en el establecimiento del SMD y sus ventajas, así como la exposición de las nuevas unidades para pesas y medidas mediante una serie de cuestiones con sus respectivas respuestas propias del estilo catecismo utilizado por el autor en textos escolares.

De forma similar, debe reconocerse a autores como Lorenzo de Alemany y Juan Cortázar por sus aportes en esta producción bibliográfica. El caso de Cortázar (1883), sobresale por su implementación de métodos y estrategias para la enseñanza del sistema legal como en la introducción de elementos geométricos y el uso de pequeñas cantidades de cifras decimales en los problemas de conversión a partir del establecimiento de equivalencias aproximadas entre pesas y medidas antiguas y las métrico-decimales (figura 3 y figura 4 en página siguiente).

Los documentos o textos de carácter legal muestran primordialmente tablas de equivalencias oficiales y las disposiciones legales sobre el SMD. Además de lo anterior, algunas de estas obras presentan ciertos aspectos teóricos y terminológicos. Estaban destinadas a la población en general e incluso se elaboraban en forma de carteles para su exhibición pública.

El contenido de los libros destinados al comercio presenta, preferentemente, las unidades de longitud, superficie, volumen y capacidad relacionadas directamente con las transacciones comerciales de compra y venta de productos o mercancías. Incluyen la presentación de tablas de equivalencias entre medidas antiguas y modernas y de correspondencias para el establecimiento del precio de los productos según la unidad monetaria establecida.

En síntesis, los libros de texto de matemáticas para la enseñanza de la Aritmética editados a partir de 1849 pretendían la difusión en España de las nuevas unidades de medidas en todos los ámbitos sociales. La introducción del SMD en España hubiese experimentado muchas más dificultades si su propagación hubiese dejado al margen al sistema educativo y no hubiera implementado una reforma curricular que derivara en la edición de libros de texto.

30. Acabamos de ver lo fácil que es resolver estos dos problemas por medio de las equivalencias exactas (*). Pero muchas veces, cuando se trata de resolver uno de estos problemas, no se tienen á mano estas equivalencias, y en tales casos la resolucion del problema sería imposible. Para obviar este inconveniente, dedujimos en 1853 de las equivalencias exactas otras aproximadas que pueden retenerse sin esfuerzo, y que evitan por lo tanto la incomodidad de tener que ir á buscar en los libros la equivalencia que se necesite. Ademas, nuestras equivalencias tienen la ventaja de dar una idea suficientemente aproximada de la magnitud de las nuevas medidas.

31. He aquí el método que seguimos para construir dichas equivalencias.

Concretémonos para fijar las ideas á la relacion entre el metro y la vara.

Figura 3. Método para la enseñanza del SMD (Cortázar, 1883, pp. 203-204)

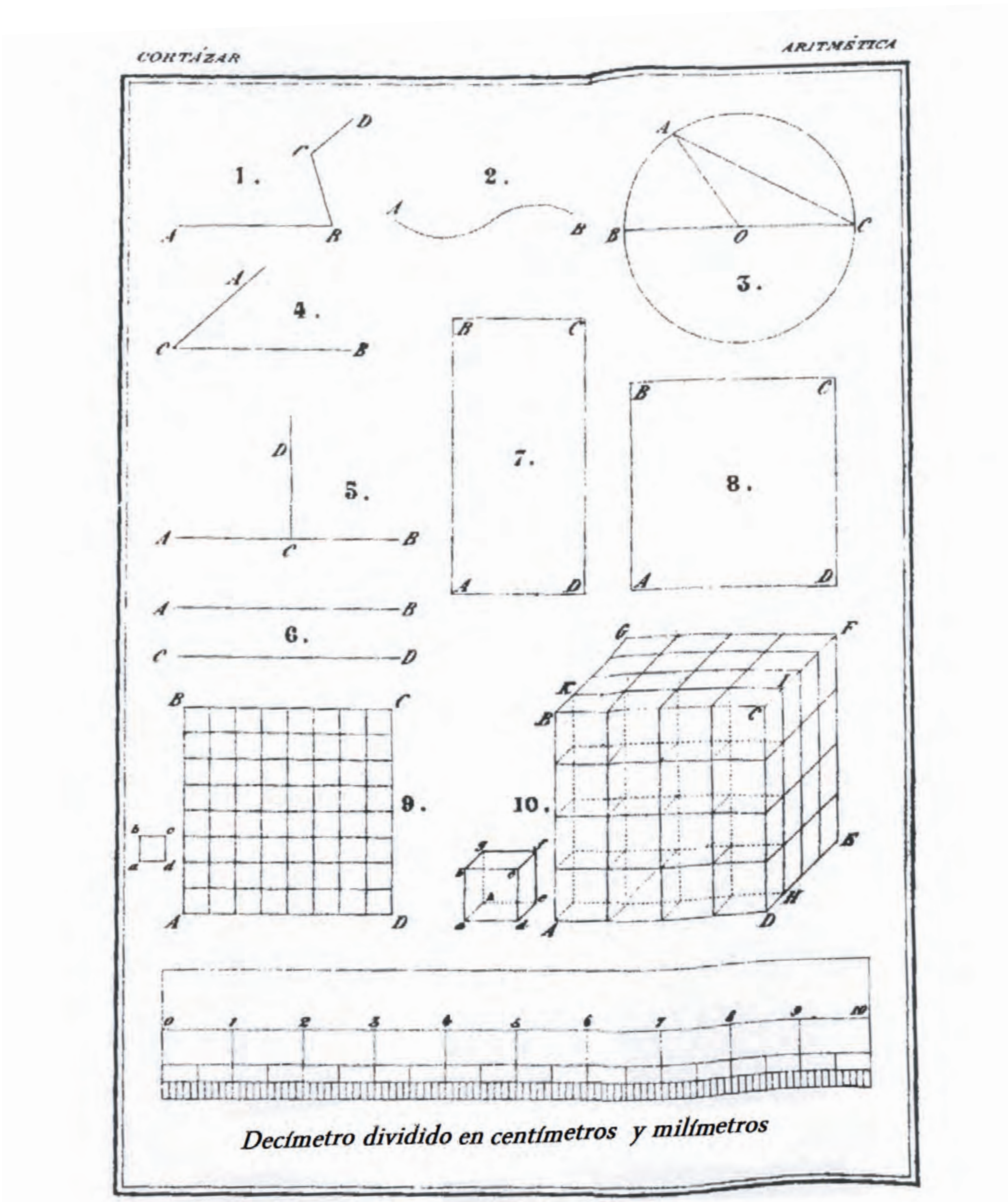


Figura 4. Inclusión de Elementos Geométricos (Cortázar, 1883, Apéndice)

No cabe duda que los libros de texto escolares, desde su concepción literaria, cumplen con una función difusora de información en las distintas áreas del conocimiento humano. Destinados al comercio, la educación, la ciencia, la política o al uso común de los individuos, esta característica ha hecho que los textos, a lo largo de la historia, se conciban como el medio o los instrumentos adecuados y eficientes para el cumplimiento y la propagación de múltiples disposiciones e información para una homogeneidad del conocimiento de las personas.

Referencias bibliográficas

AZNAR, V. (1997), *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX*, Tesis doctoral no publicada, Universidad de Valencia, España.

BAUMGART, J. (ed.) (1993): *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston.

BELL, E. T. (1992), *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura Económica, México.

BOYER, C. (2003), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

CARRILLO, D. (2005), *La Metodología de la Aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*, Tesis doctoral, Universidad de Murcia, Murcia.

CORTÁZAR, J. (1883), *Tratado de aritmética*, Librería de Hernando, Madrid. [34.ª ed.]

FAUVEL, J., y J. VAN MAANEN, (eds.) (2000), «History in Mathematics Education», *The ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

FILLOY, E., L. PUIG, y T. ROJANO, (2008), *Educational algebra: a theoretical and empirical approach*, Springer, Nueva York.

FURINGHETTI, F. (2004), «History and mathematics education: a look around the world with particular reference to Italy», *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*, 3(1-2), 1-20.

GÓMEZ, B. (2000), «Los libros de texto de matemáticas», en A. Martinón (ed.), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos*, Nivola, Madrid, 77-80.

GÓMEZ, B. (2003), «La investigación histórica en didáctica de la matemática», en E. Castro (coord.), *Investigación en educación matemática: séptimo simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Editorial Universidad de Granada, Granada, 79-86.

GÓMEZ, B. (2008), «Pasado y presente de los manuales escolares», en Associação de Professores de Matemáticas (eds.), *Actas do SIEM-2007. XVIII SIEM. Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Painel: Avaliação de Manuais Escolares, Lisboa, 1-8.

GÓMEZ, B. (2011), «El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas», *PNA,* vol. 5, n.º2, 49-65.

GORDON-CHILDE, V. (1979), *Los orígenes de la civilización*, Fondo de Cultura Económica, Madrid.

GUTHRIE, J. (ed.) (2003), *Encyclopedia of Education,* Vol. 7, Macmillan, Nueva York. [2.ª ed.]

GUTIÉRREZ, J., y J. PESET (1997), *Historia de la ciencia y de la técnica. Metro y kilo: el sistema métrico decimal en España*, Akal, Madrid.

HOFMANN, J. (1961), *Historia de la matemática*, UTEHA, México D.F.

MAZ, A. (2009): «Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas», en M. González, M. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en educación matemática. Decimotercer Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, Universidad de Cantabria, Santander, 5-20.

PERALTA, J. (2009), «La matemática española del siglo XIX», en Consejería de Educación, Universidades, Cultura y Deportes. Fundación Orotava de Historia de la Ciencia (eds.), *La Ciencia antes de la Gran Guerra. Actas Año XVII. Encuentros Educativos*, Imp. Reyes, S.L, Canarias, 211-236.

PICADO, M. (2009), *Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en el período 1849-1892*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

— (2012), *El sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892)*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Picado, M., y L. Rico, (2011*a*): «Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas», *PNA*, vol. 6. n.° 1 11-27.

— (2011*b*): «La selección de textos en la investigación histórica», *Epsilon*, 28(1), 99-112.

Prellezo, J. M. (dir.). (2009), *Diccionario de ciencias de la educación*, edición española coordinada por José Manuel Prellezo García, CCS, Madrid.

Rico, L. (2003): *Matemática y Educación en la Academia*, Academia de Ciencias de Granada, Granada.

Rico, L. (2012, en prensa): «Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática», *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1.

Rico, L., A. Marín, J. L. Lupiáñez y P. Gómez (2008): «Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales», *Suma*, n.º 58, 7-23.

Salvador, F., J. L. Rodríguez y A. Bolívar (dirs.) (2004): *Diccionario enciclopédico de didáctica*, vol. 2, Aljibe, Málaga.

Sánchez, S. (dir.) (1983): *Diccionario de las ciencias de la educación*, vol. 2, Santillana, Madrid.

Schubring, G. (2011): «Conceptions for relating the evolution of mathematical concepts to mathematics learning, epistemology, history, and semiotics interacting», *Educational Studies in Mathematics*, vol. 77, n.º 1, 79-104.

Sierra, M. (1997), «Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria», en L. Rico (coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, Horsori, Barcelona, 179-194.

Sierra, M., L. Rico y B. Gómez (1997), «El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría», en A. Escolano (ed.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del antiguo régimen a la segunda república*, vol. 2, Ediciones Pirámide, Madrid, 373-398.

Siu, M-K. y Tzanakis, C. (2004), «TSG 17: The role of the history of mathematics in mathematics education», en M. Niss (ed.), *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematics Education 2004*, Universidad de Roskilde, Copenhague, 363-367.

Vallejo, J. M. (1840), *Explicación del sistema decimal ó métrico francés*, Imprenta de Garrasayaza, Madrid.

Vea, F. (1995), «Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX», *Cuadernos de Historia de la Ciencia,* 9, I y II, Universidad de Zaragoza

Miguel Picado
Universidad de Granada
<miguepicado@hotmail.com>

Luis Rico
Universidad de Granada
<lrico@correo.ugr.es>

Agradecimientos. Este trabajo ha contado con el apoyo de la Junta de Becas de la Universidad Nacional (UNA) y el Fondo de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la República de Costa Rica.

Se ha realizado dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193), del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

1 El espacio textual se presenta como un sistema que impone una restricción semántica a quien lee el texto, tiene una existencia empírica.

suma+
Artículos
Noviembre 2012
71
pp. 19-26

La paradoja de Simpson

José M. Contreras, Carmen Batanero,
Gustavo R. Cañadas y M. Magdalena Gea

En Estadística y Probabilidad encontramos diferentes paradojas de solución asequible a los estudiantes que permiten organizar actividades didácticas en la enseñanza y aprendizaje. En este trabajo describimos la paradoja de Simpson, que produce múltiples errores en la interpretación de la asociación y correlación. Describimos la paradoja y su historia, algunas soluciones y ejemplos. También analizamos los contenidos estadísticos trabajados en su solución, así como los posibles razonamientos erróneos de los estudiantes.

Palabras clave: Estadística, Paradojas, Correlación.

The Simpson paradox

In statistics and probability we find different paradoxes, whose solution is attainable by the students and that serve to organize didactic activities for teaching and learning. In this paper we describe the Simpon's paradox, which produces many errors in interpreting association and correlation. We describe the paradox and its history, some solution and examples. We also analyze the statistical contents implicit in its solution and some possible erroneous reasoning on the part of the students.

Keywords: Statistics, Paradoxes, Correlation.

Aunque la enseñanza de la estadística en secundaria tiene ya una gran tradición, en las últimas orientaciones curriculares se recomienda reforzar las intuiciones de los estudiantes y el razonamiento estadístico.

Una herramienta didáctica posible es utilizar algunas de las paradojas clásicas para crear situaciones didácticas que sirvan para enfrentar a los estudiantes con sus intuiciones incorrectas y hacerlas evolucionar en forma positiva. La historia de la probabilidad presenta situaciones muy atractivas que pueden conducir a reflexionar sobre la presencia del azar en la cotidianidad además de servir de motivación hacia el estudio por parte de los alumnos, algunas de las cuáles hemos analizado en trabajos previos (Contreras, Batanero, Arteaga y Cañadas, 2011 *a* y *b*).

En este trabajo describimos la paradoja de Simpson, a la que se ha dado mucha importancia en la literatura sobre alfabetización estadística. En lo que sigue, comenzamos con una reflexión general sobre el interés de las paradojas en la clase de estadística, describimos algunas formulaciones de esta paradoja, analizamos los contenidos matemáticos que se trabajan con ella y posibles dificultades.

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2012 y aceptado en julio de 2012

Interés didáctico de las paradojas

Algunos autores sugieren el interés de utilizar algunas paradojas sencillas de estadística para plantear situaciones de aprendizaje en el aula que puedan beneficiar al desarrollar la motivación y meta cognición de los estudiantes y hacerles descubrir conexiones entre la historia y la vida cotidiana.

El uso inteligente de paradojas en la clase de matemáticas apoya una pedagogía constructivista, promoviendo un aprendizaje profundo a partir de las creencias previas y dando al profesor el papel de facilitador del aprendizaje (Lesser, 1998). A la vez, el análisis y discusión de las soluciones a las mismas exige al alumno una reflexión sobre sus propios procesos de pensamientos, lo que es tan importante como el aprendizaje de la solución correcta y un paso vital para alcanzar la capacidad matemática abstracta (Falk y Konold, 1992).

León (2009) indica que podemos servirnos de algunas de estas paradojas clásicas para crear situaciones didácticas que sirvan para provocar la reflexión matemática de los alumnos. Es sencillo encontrar este tipo de situaciones, ya que la historia de la probabilidad y estadística está repleta de ejemplos, pues su construcción no ha sido sencilla (Batanero, Henry y Parzysz, 2005). Un proceso similar se desarrolla en el aprendizaje de los alumnos que deben construir su conocimiento mediante un proceso gradual, a partir de sus errores y esfuerzo.

Historia de la paradoja

Esta paradoja toma su nombre de Edward H. Simpson, quien la describió en detalle en 1951 en relación con ciertas pruebas médicas, aunque también fue mencionada a principios del siglo XX por el estadístico británico G. Udny Yule, por lo que también es conocida como efecto de Yule-Simpson.

La paradoja es una de las muchas asociadas al estudio de la correlación y muestra que en determinados casos se produce un cambio en la asociación o relación entre un par de variables, ya sean cualitativas o cuantitativas, cuando se controla el efecto de una tercera variable; o, como indican Malinas y Bigelow (2009), dependiendo de los datos con los que trabajemos, la asociación entre dos variables se puede invertir cuando la población de estudio se divide en subpoblaciones. Esto ocurre, según Blyth (1972) cuando se analiza una variable dependiente respecto a otras variables independientes en algún estudio o experimento. Incluso algunas veces una de las variables (la que hace cambiar el tipo o intensidad de correlación entre las otras) es una variable extraña o no controlada, por lo que el investigador puede no ser consciente de este efecto y llegar a una conclusión incorrecta en su estudio.

Simpson (1951) describió la paradoja a partir de tres variables dicotómicas, aunque también se produce en el caso de variables continuas (Gaviria, 1999). Un ejemplo de una situación concreta donde puede darse viene dado por el enunciado del Problema 1.

Problema 1. Supongamos que se quiere realizar un estudio comparado de la efectividad de una cierta cirugía en dos hospitales A y B, para lo cuál se obtienen los datos presentados en la Tabla 1. Se pide analizar los datos y determinar cuál hospital da mayor tasa de supervivencia.

	Hospital A	Hospital B
Mueren	63	16
Sobreviven	2037	784
Total pacientes operados	2100	800

Tabla 1. Comparación de supervivencia a una cierta cirugía.

Si analizamos los datos de la Tabla 1, se puede observar que en el hospital A, muere el 3% (63/2100) de los pacientes que se somete a la cirugía y en el hospital B el 2% (16/800), por lo que inicialmente estos resultados nos podrían llevar a pensar que el hospital más seguro para someterse a dicha operación sería el hospital B. La paradoja aparece cuando controlamos los resultados teniendo en cuenta otras variables que influyen en la supervivencia, por ejemplo, el «estado de salud de los pacientes antes de la operación».

la clave está en que al sumar vectores la pendiente de la suma depende no solo de la pendiente de los sumandos, sino también de su longitud...

Problema 2. Estudiemos la efectividad de la misma cirugía en los hospitales A y B, controlando el estado de salud del paciente antes de ser hospitalizado. En las Tablas 2 y 3 se presentan los datos de supervivencia para pacientes de buena salud y salud delicada. Se pide analizar los datos y determinar cuál hospital da mayor tasa de supervivencia en cada tipo de enfermo.

Pacientes con buena salud	Hospital A	Hospital B
Mueren	6	8
Sobreviven	594	592
Total de pacientes operados	600	600

Tabla 2. Supervivencia de pacientes con buena salud inicial

Pacientes con salud delicada	Hospital A	Hospital B
Mueren	57	8
Sobreviven	1443	192
Total de pacientes operados	1500	200

Tabla 3. Supervivencia de pacientes con salud inicial delicada

Si analizamos ahora la tasa de mortalidad de personas que han sido operadas, para pacientes con buena salud (Tabla 2), se tiene que, del total de los que se operaron en el hospital A, fallecieron un 1% (6/600) y de los que se operaron el B un 1,3% (8/600). Por lo tanto, parece mejor el hospital A para los pacientes de buena salud.

Estudiemos ahora el caso de pacientes con salud delicada: Del total de los que se operaron en el hospital A un 3,8% (57/1500) murieron y en el hospital B el 4% (8/200), por lo que también podríamos concluir que el hospital A es preferible para los pacientes de salud delicada. Es aquí donde se presenta la paradoja, ya que sin tener en cuenta la variable estado de salud de los pacientes, hemos de recomendar el hospital B, pero si separamos los pacientes en dos grupos, los que tenían buena salud y los de salud delicada, en cada uno de estos dos grupos hay que recomendar el hospital A.

En esta paradoja observamos un propiedad contra intuitiva de las probabilidades condicionadas (Blyth, 1972). Para ciertos sucesos M, A (con A^C complementario de A) es posible que se dé que:

$$P(M / A) > P(M / A^c)$$

Y que al mismo tiempo, para otro suceso S y su respectivo complementario S^c:

$$P(M / A \cap S) \leq P(M / A^c \cap S)$$
$$P(M / A \cap S^c) \leq P(M / A^c \cap S^c)$$

En nuestro ejemplo, sea M = «Morir en la operación», A = «operarse en el hospital A» y S = «tener buena salud». Observamos que:

$$P(M / A) = 0,03 > P(M / A^c) = 0,02$$
$$P(M / A \cap S) = 0,01 \leq P(M / A^c \cap S) = 0,013$$
$$P(M / A \cap S^c) = 0,038 \leq P(M / A^c \cap S^c) = 0,04$$

Aunque esta propiedad sea contra intuitiva, la paradoja se resuelve observando la frecuencia total de pacientes que se opera en uno y otro hospital en las tablas 2 y 3. La mayoría de los pacientes que se operan en el hospital A tienen una salud delicada y es de esperar que este tipo de pacientes tenga mayor dificultad en sobrevivir tras una operación, por lo que la tasa de mortalidad en dicho hospital es mayor que en el hospital B, que tiene menos pacientes y la mayoría gozan de buena salud. Es decir el suceso S tener buena salud no es independiente del suceso A y de ahí la paradoja.

Razonamientos que pueden explicar la paradoja

Solución analítica

Probablemente al llegar a este punto, los alumnos se sentirán sorprendidos y querrán una justificación del cambio de signo de la asociación al controlar por una tercera variable. Un posible razonamiento que les puede convencer es el siguiente (Malinas y Bigelow, 2009): Supongamos que para ciertos números enteros se cumplen las condiciones:

$$\frac{a}{b} < \frac{A}{B};\ \frac{c}{d} < \frac{C}{D}$$

Es posible, a pesar de ello, que si sumamos los distintos numeradores y denominadores de las fracciones que aparecen en ambas desigualdades el orden varíe.

$$\frac{(a+c)}{(b+d)} > \frac{(A+C)}{(B+D)}$$

Este hecho, conocido como «reversión de las desigualdades de Simpson» se produce para un gran número de valores a, b, c, d, A, B, C, D. Un ejemplo citado por Malinas y Bigelow es el siguiente:

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{8}\ \text{y}\ \frac{6}{8} < \frac{4}{5}$$

Mientras que:

$$\frac{7}{13} > \frac{6}{13}$$

Solución gráfica

La paradoja puede explicarse gráficamente mediante vectores. Havil (2008) representa mediante letras en una tabla el número de pacientes de uno y otro sexo que se han curado cuando se les han aplicado dos medicamentos alternativos M_1 y M_2 (véase la tabla 4).

Havil explica la paradoja en un diagrama cartesiano (gráfico 1) mostrando en el eje de abcisas el número de curados y en el eje de ordenadas el número de pacientes al que se le ha administrado cada medicamento. Podemos representar las proporciones de curados con cada medicamente por las pendientes de los segmentos representados en trazo grueso.

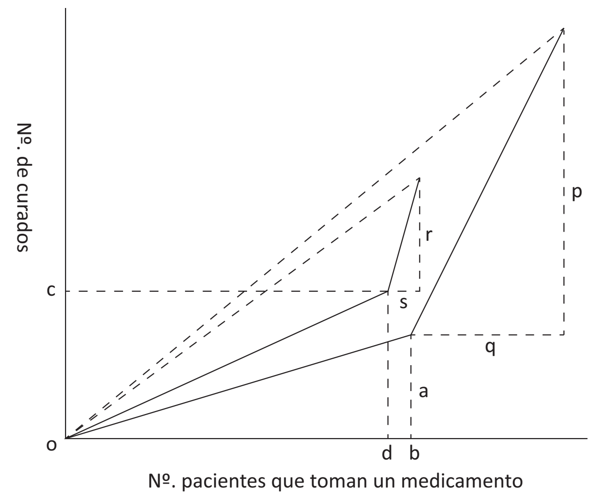


Gráfico 1. Representación gráfica correspondiente a la tabla 4 (Havil, 2008)

Observamos que dichas pendientes son menores entre los curados con el medicamento M_1 que entre los curados con medicamento M_2, tanto en el caso de hombres (es decir, $a/b<c/d$) como en el de mujeres (es decir, $p/q<r/s$). Sin embargo, cuando consideramos el porcentaje global de pacientes curados (con independencia de su sexo; que se representa por las pendientes de los segmentos con trazos) puede resultar paradójicamente mayor para el medicamento M_1 que para el M_2:

$$\frac{a+p}{b+q} > \frac{c+r}{d+s}$$

	Hombres curados	Mujeres curadas	Total personas curadas
Medicamento M_1	(a) de (b)	(p) de (q)	(a+p) de (b+q)
Medicamento M_2	(c) de (d)	(r) de (s)	(c+r) de (d+s)

Tabla 4. Tabla de pacientes curados

La clave está en que, al sumar vectores, la pendiente de la suma depende no sólo de la pendiente de los sumandos, sino también de su longitud (obviamente, si todas las pruebas se hicieran sobre el mismo número de pacientes no se podría dar la paradoja).

Trabajo en el aula

En el trabajo en el aula con esta paradoja se usarán implícita o explícitamente diferentes objetos matemáticos, que dependen de la solución. Por ejemplo, si se explica utilizando la probabilidad condicional se utilizarían los siguientes (en la clasificación de Godino, Font y Wilhelmi, 2008):

Lenguaje matemático. Se utilizan expresiones verbales, y numéricas de las frecuencias en las distintas celdas de la tabla y los sucesos implicados, así como las tablas de contingencia. También se usará lenguaje simbólico para calcular las probabilidades asociadas.

Conceptos. En esta paradoja los alumnos trabajan la idea de experimento aleatorio, suceso, espacio muestral, complementario, frecuencia absoluta y relativa, doble, marginal y condicional, probabilidad condicional, dependencia e independencia.

Propiedades. Algunas propiedades que aparecen en la resolución de estos problemas son: diferencia entre probabilidad condicionada y simple, relación entre probabilidad condicionada (conjunta y simple), complementario, regla de la unión y regla del producto.

Procedimientos. Algunos procedimientos que podemos encontrar en la resolución de estas paradojas son: cálculo de probabilidades simples, compuestas y condicionadas.

Argumentos. La actividad permite usar el razonamiento deductivo y empírico.

Obviamente estos objetos cambiarían notablemente si se utilizan otras soluciones; en la que hemos denominado «analítica» se trabajan predominantemente fracciones y desigualdades; y en la «gráfica», conceptos geométricos, vectores y pendientes de rectas.

También podemos observar los siguientes procesos matemáticos:

Procesos de materialización-idealización (pasar de algo que se percibe a algo que no se percibe). Por ejemplo, los hospitales, enfermos y situación de supervivencia a los que hacen referencia la paradoja son objetos imaginarios que podemos materializar si, por ejemplo, llevamos a cabo una simulación de la situación.

Procesos de particularización-generalización. Es cuando pasamos de un caso particular, generalizando a una propiedad de un conjunto; o viceversa, cuando una propiedad que sabemos que es general la aplicamos a un caso particular. Por ejemplo, sabemos que la suma total de todas las probabilidades de los sucesos en un experimento es la unidad. En cada ejemplo, particularizando llegamos a las probabilidades de los sucesos dados. Así sabemos que la suma de la probabilidad de supervivencia y muerte ha de ser una en cada caso sin tener que calcularla.

Procesos de representación-significación. Los procesos de representación y significación aparecen continuamente en el trabajo matemático, pues como no podemos operar directamente con objetos ideales representamos las operaciones sobre los mismos por medio de símbolos o por medio de otros objetos. Por ejemplo, el objeto «probabilidad» lo representamos por la letra P; la probabilidad de un suceso que denominamos A la representamos mediante $P(A)$.

Procesos de descomposición-reificación. El alumno que trata de resolver el problema tiene que pasar constantemente de considerar objetos elementales (unitarios) a considerar objetos compuestos de varios objetos elementales (sistémico). Así, cada suceso de un experimento aleatorio es elemental, pero el espacio muestral del experimento es sistémico.

Posibles dificultades en la actividad

Un razonamiento erróneo se comete cuando se interpretan los datos sin considerarlos globalmente, es decir, sin tener en cuenta todas las variables que aparecen en la situación. Posibles explicaciones de este razonamiento son las siguientes:

1. Al calcular la probabilidad no tenemos en cuenta todos los elementos del espacio muestral. Según tomemos las variables que afectan a la asociación entre «supervivencia» y «hospital» los sucesos toman una probabilidad u otra (Gras y Totohasina, 1995). Supone un fallo pasar de la idea espacio muestral (intensivo) al espacio muestral concreto (extensivo).

2. Con relación al estudio de la asociación entre las dos variables se olvida una condición necesaria en dicho estudio, que es el aislamiento de otras variables. Esto quiere decir que los pacientes que asisten a cada hospital, en el ejemplo, deberían suponerse elegidos al azar (lo cual evidentemente no se cumple, pues la tasa de pacientes con buena salud es muy diferente en cada uno de los hospitales). Si existe una variable no controlada que afecta de forma desigual a los dos grupos el valor real del coeficiente de asociación entre dos variables puede aumentar, disminuir o, incluso, cambiar de signo.

El trabajo con la paradoja de Simpson puede servir para aumentar la precaución de los estudiantes ante la interpretación precipitada de la correlación como causalidad.

Casos reales relacionados con la paradoja de Simpson

La paradoja de Simpson tiene una larga tradición en el mundo académico y ha aparecido en muchos casos célebres. Filósofos como Cohen y Nagel (1934) describieron los resultados paradójicos de diferentes tasas de mortalidad por tuberculosis de unos estudios realizados en ciudades americanas teniendo en cuenta la raza, preguntándose si las poblaciones del estudio realmente eran comparables, es decir, homogéneas, pues al agregar los datos cambiaron los resultados. Es también bien conocido por los responsables de políticas laborales, y no infrecuente, que los cambios en la composición del empleo hagan que el crecimiento global de los salarios y costes laborales difiera del de los distintos grupos laborales considerados individualmente.

Otro ejemplo, descrito por Bickel, Hammel y O'Connell (1975), se produjo en la Universidad de Berkeley cuando fue acusada de discriminar a las mujeres al comprobarse que solo aceptaba el 34% de las solicitudes de ingreso efectuadas por mujeres frente al 44% de las de los hombres. En un intento de averiguar la causa y ver si la aceptación dependía o no de los departamentos, se desglosaron las cifras de solicitudes y aceptaciones de hombres y mujeres por departamentos constatándose, con sorpresa, que en casi todos ellos el porcentaje de mujeres admitidas era superior al de los hombres. La explicación era que la proporción de mujeres que solicitaron la admisión era diferente en cada departamento.

Otro caso más reciente (Saari, 2001) fue cuando en 1999 el Estado de California estableció un sistema de primas para los profesores de los colegios públicos en los que se lograra mejorar el rendimiento de los estudiantes. La evaluación de los centros mostró (con satisfacción de las autoridades educativas) que el rendimiento de los alumnos había mejorado en la mayoría de los colegios, tanto para el grupo dominante, como para la minoría (hispanos).

Sin embargo, al mezclar los datos de los dos grupos, los valores del rendimiento global bajaron en casi todos los centros debido a una variación de la proporción de hispanos en los centros a lo largo del período.

Gaviria (1999) indica que es muy importante considerar la posibilidad de la aparición de la paradoja de Simpson al interpretar resultados de evaluación del rendimiento. No hacerlo así llevaría necesariamente a la mala interpretación de los datos.

Implicaciones para la enseñanza

Diferentes autores recomiendan precaución en la práctica estadística, para evitar los interrogantes que surgen de los datos paradójicos, y precaución antes de hablar de relaciones de causalidad, pues el concepto de causalidad es difícil desde el punto de vista filosófico y no es necesario, para los métodos científicos de investigación (Pearl, 2000). Cartwright (1979) por su parte afirma que la interpretación de las relaciones causales requeridas por la investigación científica y la toma de decisión racional han de ser cuidadosas, ya que la dependencia de las regularidades y las frecuencias en que los juicios de probabilidad se basan, no son suficientes para representar dichas relaciones.

El trabajo con la paradoja de Simpson puede servir para aumentar la precaución de los estudiantes ante la interpretación precipitada de la correlación como causalidad. Para finalizar, recordamos que González (2004) señala que el uso de la historia con fines didácticos depende del conocimiento histórico del profesor y su iniciativa para adaptar este saber a los intereses y necesidades del grupo, por lo que ha de exponer los avances de la disciplina junto con su estado actual teórico y de aplicabilidad. El estudio de la historia de la probabilidad y de las paradojas asociadas a la misma será entonces un componente importante en la preparación de formadores.

Referencias bibliográficas

BATANERO, C., M. HENRY y B. PARZYSZ (2005), «The nature of chance and probability», en G. B. Jones (ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, Springer, Nueva York, 15-37.

BICKEL, P. J., E. A. HAMMEL y J. W. O' CONNELL (1975), «Sex bias in graduate admissions: data from Berkeley», *Science,* n.º 187, 398-404.

BLYTH, C. R. (1972), «On Simpson's paradox and the sure-thing principle», *Journal of the American Statistical Association*, n.º 67, 364-366.

CARTWRIGHT, N. (1979): «Causal laws and effective strategies», *Noûs*, n.º 13, 419-437.

COHEN, M., y E. NAGEL (1934), *An introduction to logic and scientific method*, Harcourt, Nueva York.

CONTRERAS, J. M., C. BATANERO, P. ARTEAGA y G. CAÑADAS (2011*a*): «O dilema dos prisioneiros: valor de o paradoxos na clase da matemáticas», *Gamma*, n.º 11, 91-96.

— (2011*b*): «La paradoja de la caja de Bertrand: algunas formulaciones y cuestiones didácticas», *Epsilon*, n.º 28(2).

FALK, R., y C. KONOLD (1992): «The psychology of learning probability», en F. Gordon y S. Gordon (eds.), *Statistics for the twenty-first century*, Mathematical Association of America, Washington, 151-164.

GAVIRIA, J. E. (1999): «La paradoja de Simpson y la interpretación de los resultados de las evaluaciones del rendimiento académico en el sistema educativo», *Revista de educación*, n.º 318, 211-223.

GODINO, J. D., V. FONT y M. R.WILHELMI (2008), «Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico», *Publicaciones*, n.º 38, 25-48.

GONZÁLEZ, P. (2004), «La historia de la matemática como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza», *Suma*, n.º 45, 17-28.

Gras, R., y A. Totohasina (1995), «Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle», *Recherches en Didactique des Mathématiques*, n.º 15(1), 49-95.

Havil, J. (2008), *Impossible? Surprising solutions to counterintuitive conundrums*, Princeton University Press, Princeton.

León, N. (2009), «La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida», *Sapiens*, 1, 69-88.

Lesser, L. (1998), «Countering indifference-Using counterintuitive example», *Teaching Statistics*, 20(1), 10-12

Malinas, G., y J. Bigelow,(2009): «Simpson's paradox», en N. Edward (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, <http://plato.stanford.edu/archives/fall2009/entries/paradox-simpson>

MEC (2006), *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.*

National Council of Teachers of Mathematics (2000), *Principles and Standards for School Mathematics*, NCTM, Reston.

Pearl, J. (2000): *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, Cambridge University Press, Cambridge, New York.

Saari, D. (2001): *Decisions and Elections. Explaining the Unexpected.* Cambridge University Press.

Simpson, E. H. (1951): «The interpretation of interaction in contingency tables», *Journal of the Royal Statistical Society*, 13, 238–241.

José M. Contreras
Universidad de Granada
<jmcontreras@ugr.es>

Carmen Batanero
Universidad de Granada
<batanero@ugr.es>

Gustavo R. Cañadas
Universidad de Granada
<grcanadas@ugr.es>

M. Magdalena Gea
Universidad de Granada
<mmgea@ugr.es>

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MCIN), beca FPU-AP2009-2807 (MCIN) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 27-30

El problema de *Rencontre*

Miguel Barreras Alconchel

A mediados del siglo XVIII el prolífico y genial matemático suizo Leonhard Euler analizó y resolvió un juego de probabilidad con cartas llamado *Rencontre*. Como otros problemas probabilísticos, el enunciado es fácilmente comprensible, su análisis no es elemental y el resultado parece contrario a la intuición o, cuando menos, sorprendente. Euler utiliza, para la resolución del problema, la combinatoria y la suma de ciertas sucesiones. En este artículo se pretende llegar a la misma conclusión recurriendo a unas matemáticas más cercanas al alumno de bachillerato.

Palabras clave: Probabilidad, Resolución de problemas, Historia de las Matemáticas, Enseñanza y aprendizaje.

The *Rencontre*'s Problem

By the middle of the XVIIIth century, the prolific and brilliant Swiss mathematician Leonhard Euler analyzed and solved a probability cards game called Rencontre. As it happens with other probability problems, the game has an easily and understandable wording, its study is simple and the result seems to be surprising, far from the one expected. In order to solve the problem, Euler uses the Combinatorial Theory and the addition of sequences. This paper aims to reach the same conclusion using a kind of Mathemtics much closer to an average high school student.

Key words: Probability, Problem Solving, History of Mathematics, Teaching and Learning.

El problema

Leonhard Euler es, sin duda, el matemático más prolífico de la historia. Entre otros muchos textos (69 tomos son necesarios para contener todos los de su *Opera Omnia*), escribió diversos trabajos sobre Estadística y Probabilidad. En uno de ellos, *Calcul de la probabilité dans le jeu de rencontre*, publicado en las *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin* (1753)[1], abordó el siguiente problema:

> El Juego de *Rencontre* es un juego de azar en el que dos personas, con un mazo completo de cartas cada una, sacan a la vez una carta detrás de otra hasta que gana una de ellas si sacan la misma carta. Si no tiene lugar dicha coincidencia, entonces gana la otra persona. Con estos supuestos, se pregunta la probabilidad de ganar que tiene cada persona.

Este juego ya había sido planteado y resuelto unas décadas antes por Montmort[2]. Se llamó entonces *Treize*, puesto que se partía de un mazo de trece cartas (el número de cartas de un palo de una baraja francesa).

De Moivre también lo estudió en 1718[3]. Seguramente Euler no conocía esos resultados y por eso se aplicó a él y lo resolvió.

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en junio de 2011

El método de Euler

Sus razonamientos son claros y cercanos al lector actual. No olvidemos que Euler es, sin duda, uno de los mayores inventores de signos matemáticos. A él se deben las notaciones para los números e, el número π, la unidad imaginaria i, el símbolo de sumatorio, Σ, la expresión para una función, $f(x)$, tales como hoy los conocemos.

Euler explica su procedimiento:

> A tal efecto es necesario hacer algunas observaciones generales que nos conduzcan al conocimiento de las probabilidades para números grandes de cartas, conociendo las probabilidades para números más pequeños.

Con razonamientos combinatorios, llega a resolver casos sencillos para, después, generalizar los resultados usando sumas de sucesiones del tipo:

$$1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots\pm\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$$

Recordemos que Euler era especialista en este tipo de cálculos. Llega incluso al caso de infinitas cartas, sumando una serie que, curiosamente, involucra al número e. Un trabajo elegante, sin duda.

CALCUL DE LA PROBABILITE
DANS LE JEU DE RENCONTRE,
PAR M. EULER.

Portada del opúsculo de Euler

Nuestra solución

Antes de enfrentarnos al problema es interesante apelar a nuestra intuición: ¿Qué es más ventajoso, apostar a que va a haber coincidencia o al contrario? Habiendo apostado a la coincidencia, ¿qué resultará más favorable, jugar con 10 cartas (los 10 oros de una baraja española, por ejemplo), con 40 (una baraja completa española), o con 52 (una baraja francesa)? Es probable que la intuición viaje indecisa entre las distintas opciones, de igual manera que divaga en la contemplación de algunas imágenes ambiguas. Lo que, de entrada, tenemos claro es que con una carta la probabilidad de coincidencia es 1 y con dos, 1/2.

Vamos a analizar el problema con 7 cartas. La generalización posterior resultará obvia.

No hay pérdida de generalidad en suponer que el jugador A destapa sus cartas y que sus cartas están ordenadas en la mesa del 1 al 7. El jugador B juega a que va a haber alguna coincidencia. El jugador A despliega sus 7 cartas (sus 7 números) y el jugador B enfrenta el desorden desconocido de sus cartas tapadas en la mesa de juego. La suerte está echada. Habrá coincidencia o no.

Juego de *Rencontre*: situación 1 (posición inicial)

Antes de seguir, tenemos que coincidir en una cosa. Se levantarán las cartas del jugador B, el que las tiene tapadas y juega a que hay alguna coincidencia, y, si la hay, el jugador B ganará. De lo contrario, perderá. Pero *el orden en el que se vayan destapando las cartas del jugador B no importará en el análisis de la situación*.

Tomémonos un tiempo para reflexionar sobre esta última afirmación. Cuando ya hayamos aceptado ese lema, sigamos adelante, pues el problema casi está resuelto.

Hay que empezar a jugar por algún sitio. B levanta su primera carta tapada de la izquierda. Si sale 1 ya ha ganado. Ha tenido muy buena suerte. Una probabilidad de 1/7. No ganará, de momento, con un 6/7 de probabilidad. Pero no hay que desesperar. El juego sigue.

Pongamos que le salió el 5. B puede levantar la que quiera, pero el matemático, para el análisis, levanta la pareja del 5 de A.

Puede salir el 1. ¿Qué pasa si sale el 1? Que nos quedan, ya no 7 cartas enfrenta-

Juego de *Rencontre*: situación 2

das con sus números, sino 5. Y el problema se simplifica.

Llamaremos P_n a la probabilidad de ganar (que haya coincidencia) con n cartas. En el caso anterior nos plantaríamos en P_5. Y por ahí, podremos seguir tirando de forma recurrente. Ya veremos, echando cuentas un poco más tarde, cómo.

Pero sigamos con las cartas. Vamos a ver todas las posibilidades. Supongamos que la segunda carta no cerrara ciclo, que no fuera un 1; que fuera, por ejemplo, un 3.

Juego de *Rencontre*: situación 3

¿Qué haría el matemático analista? Levantar la pareja del 3. Si esa carta fuera un 1 se cerraría ciclo y el problema pasaría por calcular P_4: los destapados de *A,* 2, 4, 6 y 7, enfrentados a los mismos tapados de *B* en un orden incierto.

Juego de *Rencontre*: situación 4

Mediante un diagrama de árbol podemos desgranar las probabilidades que se nos plantean. No es difícil seguir el procedimiento del matemático decidido que quiere llegar a la solución final.

Así, la probabilidad de que haya coincidencia con 7 cartas, la que hemos llamado P_7 es:

$$P_7 = \frac{1}{7} + \frac{6}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot P_5 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot P_4 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot P_3 + $$
$$+\frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot P_2 + \frac{6}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot P_1 =$$
$$= \frac{1}{7}\cdot\left(1 + P_5 + P_4 + P_3 + P_2 + P_1\right)$$

Y, en general, para $n > 2$:

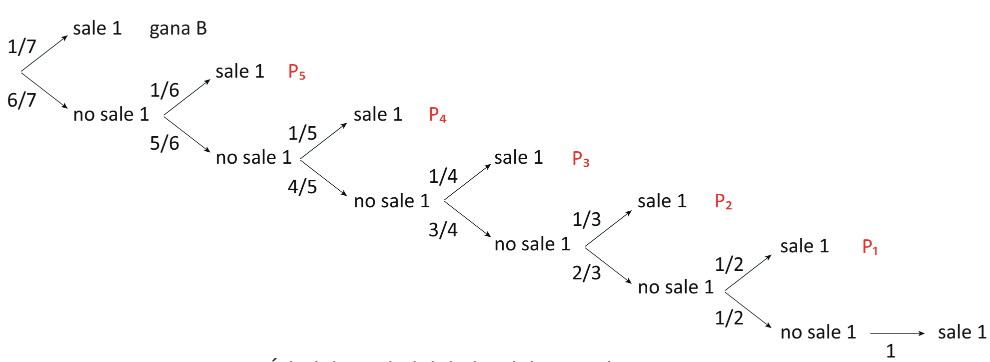
$$P_n = \frac{1}{n}\cdot\left(1 + P_{n-2} + P_{n-3} + \ldots + P_3 + P_2 + P_1\right)$$

siendo, obviamente, $P_1 = 1$ y $P_2 = 1/2$. De aquí se obtiene fácilmente la ley de recurrencia que nos proporciona todas las probabilidades:

$$P_{n+2} = \frac{1}{n+2}\cdot\left(1 + P_n + P_{n-1} + P_{n-2} + \ldots + P_2 + P_1\right) =$$
$$= \frac{1}{n+2}\cdot\left(1 + P_n + P_{n-1} + n\cdot P_n - 1\right)$$

Por tanto:

$$\left(n+2\right)\cdot P_{n+2} = (n+1)\cdot P_n + P_{n-1}$$



Árbol de probabilidades del juego de Rencontre

De donde se deriva la fórmula general:

$$P_{n+2} = \frac{(n+1)\cdot P_n + P_{n-1}}{n+2}$$

Dividiendo los términos de la igualdad anterior por P_{n+1} y tomando límites en el infinito obtenemos:

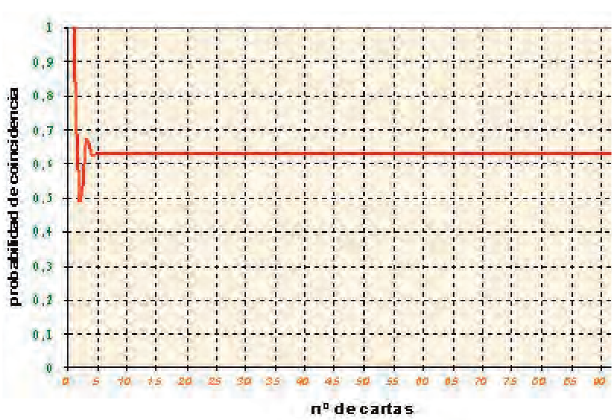
$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_{n+2}}{P_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)}\cdot\frac{P_n}{P_{n+1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)}\cdot\frac{P_{n-1}}{P_{n+1}}$$

Llamando w al límite buscado:

$$w = \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{P_{n+1}}{P_n}$$

Ha de cumplirse la igualdad: $w = 1/w$. Y así, $w = 1$, lo que quiere decir que la sucesión de probabilidades se estabiliza conforme aumenta el número de cartas. He aquí la primera conclusión sorprendente.

Para acabar, nos preguntamos cuánto vale ese límite y a partir de cuántas cartas la sucesión se hace estable. Ya se han comentado los primeros valores de la sucesión de probabilidades: $P_1 = 1$, $P_2 = 1/2$. Los restantes nos los da el programa *Excel* (tanto en gráfico como en tabla):



$P_1 = 1$

$P_2 = 0{,}5$

$P_3 = 0{,}6666...$

$P_4 = 0{,}625$

$P_5 = 0{,}6333...$

$P_6 = 0{,}6319444...$

$P_7 = 0{,}63214286$

$P_8 = 0{,}63211806$

$P_9 = 0{,}63212081$

$P_{10} = 0{,}63212054$

$P_{11} = 0{,}63212056$

Vemos que la probabilidad de coincidencia se estabiliza muy rápido. Puede observarse que el número de cartas es prácticamente irrelevante a partir de cinco. La probabilidad de que haya coincidencia es 0,63212056. ¿Sorprendente?

Como apuntábamos al principio este número está estrechamente relacionado con el número e, pues se trata, precisamente, de $1 - 1/e$.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. B. (1986), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.

Dunham, W. (2000), *Euler. El maestro de todos los matemáticos*, Nivola, Madrid.

Meavilla Seguí, V. (2007): «Leyendo a Leonhard Euler (1707-1783): Cálculo de Probabilidades en el juego de rencontre», *Sigma*, n.° 30, 189-203.

Miguel Barreras Alconchel
IES Matarraña, Valderrobres (Teruel)
<pelanium@yahoo.es>

1 En la revista *Sigma,* n.° 30, hay una traducción de Vicente Meavilla Seguí: *Leyendo a Leonhard Euler (1707-1783): Cálculo de Probabilidades en el juego de rencontre*. Puede accederse a ella directamente a través de la web:
<http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.net/r43-573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_30/17_ley_euler.pdf>

2 Montmort, Pierre Rémond (1708): *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*.

3 Moivre, Abraham de (1718): *The Doctrine of Chance*.

suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 31-38

Matemáticas y política. Las leyes electorales

Francisco Daniel Pérez Carretero

Se presenta un estudio comparativo que permite analizar, sobre los datos reales de los resultados electorales de varias circunscripciones durante un proceso electoral, el número de representantes elegidos de cada formación política en función de la ley electoral de reparto que se utilice. Para ello se exponen distintos modelos electorales de distintos países y se comparan los resultados.

Palabras clave: Experiencia de Aula, Secundaria, Legislación, Sistemas electorales, Política.

Politics and Mathematics. The Electoral systems

A comparative study about electoral systems is shown. So the number of elected members of parliaments depends on the electoral system applied by each country, we study the systems of different countries and we compare the results.

Key words: School Experience, High School, Legislation, Electoral system, Politics.

La ciencia en general y las matemáticas en particular son comúnmente utilizadas en aspectos muy diversos de la vida cotidiana. En el ámbito político, en España en concreto, el debate sobre la conveniencia de nuestra ley electoral está, cada vez más, a pie de calle. Sin embargo, y pese a ser un debate muy extendido, no son muchas las personas que conocen cómo funciona el reparto de representantes electos en función de los votos escrutados en nuestro país, y aún menos las que conocen cómo se realiza ese reparto en otros países de nuestro entorno.

Por ello, y para incrementar la capacidad crítica de nuestros jóvenes desde la asignatura de matemáticas, se pretende dar a conocer algunos de los sistemas más utilizados en el mundo para repartir representantes políticos (concejales, diputados, senadores, etc...) y comparar los resultados de éstos sobre un escrutinio real de algunas de las provincias más pobladas recogidos en las Elecciones Generales de noviembre de 2011. De esta forma se espera que los alumnos intenten entender qué tipo de gobiernos facilita cada uno de los sistemas estudiados. Por otra parte, la utilización de una enciclopedia al alcance de todos ellos, como Wikipedia, les permite tener acceso permanente a las fórmulas de cálculo de los sistemas electorales siempre que lo deseen

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2011 y aceptado en abril de 2012

El contenido del presente artículo se impartió en clases de 3.° y 4.° de Secundaria del Colegio La Inmaculada (MSJO) de Valladolid. Por otra parte, el Colegio ha estado inmerso, durante los cursos académicos 2010-2011 y 2011-2012 en un programa Comenius conjuntamente con otros 3 centros de otros tantos países de la Unión Europea, Italia, Alemania y el Reino Unido. Esta experiencia se enmarca dentro del programa Comenius con el fin de incrementar el conocimiento de nuestros alumnos de las características, políticas en este caso, de otros países. Por ello se hace especial hincapié en los sistemas electorales de los países que forman parte del programa Comenius del Colegio La Inmaculada (MSJO).

Fundamento teórico

En primer lugar, conviene aclarar a los alumnos que el reparto de representantes en función de los votos emitidos por los ciudadanos es un tema controvertido dado que la aplicación estricta de la proporción matemática (tantos votos, tantos escaños), no es posible debido a que los representantes electos no admiten la utilización de cifras decimales, son personas físicas y, por tanto, indivisibles. La realización de cualquier aproximación sobre los datos directos del escrutinio genera en sí un sesgo que altera la proporcionalidad entre unas fuerzas políticas y otras. Además, los distintos países han optado por sistemas de reparto que, de alguna forma, tengan una cierta intención política. Algunos sistemas electorales facilitan la gobernabilidad de una nación otorgando más poder del matemáticamente obtenido a los partidos más votados. Otros sistemas pueden potenciar la obtención de representación parlamentaria a los partidos con menos votos en aras a incrementar la presencia política de las minorías.

Balinski y Young, en su obra de 1982 demostraron que no existe ninguna forma de reparto que cumpla simultaneamente las siguientes cuatro premisas:

1. *Verificación de la cuota.* La diferencia entre el porcentaje de escaños obtenidos y el de votos recibidos no puede ser mayor a la unidad.
2. *Monotonía respecto de los escaños.* Si se incrementa el número de representantes a elegir, ningún partido podrá obtener menos de los que tenía antes del incremento.
3. *Monotonía respecto de los votos.* Si en dos elecciones consecutivas un partido incrementa sus votos y otro los reduce, no debe incrementarse el número de escaños del segundo y reducirse los del primero.
4. *Homogeneidad.* El número de representantes repartidos no debe cambiar si los votos de todos los partidos aumentan o disminuyen de forma proporcional.

En el presente artículo se han analizado algunos de los sistemas de reparto de representantes basados en métodos de divisor, métodos de cociente y métodos de mayoría relativa:

Métodos de divisor

Tienen su origen en una propuesta de T. Jefferson a finales del siglo XVIII para la elección de representantes a la cámara de Estados Unidos. La idea es la siguiente: si fijamos el número de votos necesario para obtener un representante, el número de representantes de cada partido puede obtenerse mediante la operación $n_i = V_i / d$, donde n_i es el número de representantes de cada partido, V_i es el número de votos obtenido por cada partido y d es el número de votos necesario para obtener un representante. Jefferson desprecia los decimales para calcular el número de representantes.

De esta manera, lo que queda sin determinar es el número de representantes totales, que se obtiene mediante la suma de los obtenidos por todos los partidos.

No obstante, suele darse el caso de que el tamaño de la cámara de representantes sea fijo, y, por tanto, es necesario ajustar d para obtener ese número preciso de miembros electos. Para proceder a la búsqueda del divisor adecuado se procede de la siguiente manera. Comenzamos utilizando como divisor el número de votantes del partido más votado. En esta situación este partido obtiene como cociente 1 y los demás obtienen cocientes menores que 1 y por tanto quedan sin representación parlamentaria. Pero solo hemos elegido un representante. Disminuimos el divisor para obtener un segundo representante. Este se obtendrá cuando el divisor sea o bien la mitad de los votos del partido más votado, o bien igual a los votos de alguno de los demás partidos. Tendremos elegidos 2 representantes y habrá que seguir disminuyendo el divisor hasta encontrar el más adecuado en función del número de representantes a elegir.

Para realizar este proceso de forma más sencilla, actualmente se calculan los cocientes del número de votos de cada partido (V_i) con respecto a una sucesión determinada de divisores. La asignación de representantes se realiza por orden decreciente de los cocientes obtenidos hasta completar el número total de representantes necesarios. Si esta sucesión de divisores es la de los números naturales (como en el caso de la Ley D'Hondt) el último cociente que se obtiene en la asignación del último escaño sería el divisor buscado y que nos habría dado el número exacto de representantes de la cámara.

Entre los sistemas de divisor, podemos encontrar los siguientes:

Ley D'Hondt

Es el sistema utilizado en España para el reparto de representantes en función de los votos emitidos en unas elecciones. Es además un sistema ampliamente utilizado en otros estados tanto europeos como sudamericanos, así como en Japón.

En el sistema D'Hondt se utilizan como divisores los números naturales 1, 2, 3, …, hasta el número de representantes que ha de elegirse en esa circunscripción.

Los cocientes se calculan, por tanto, según la fórmula $V_i/(n+1)$, donde V_i es el número de votos obtenidos por cada partido y n es un índice que va desde 0 hasta el número de representantes a elegir menos 1.

Método Saint Lagué puro

Es el sistema utilizado en algunos países europeos, entre ellos Alemania.

Este sistema es muy similar al D'Hondt. La diferencia entre ambos es que, en el método de Saint Lagué se utilizan como divisores los números impares: 1, 3, 5, … La fórmula utilizada en este caso para realizar la tabla de asignación del número de representantes electos es $V_i/(2n+1)$.

Método de Saint Lagué modificado

Es idéntico al sistema Saint Lagué puro excepto para la asignación del primer representante de cada partido, que se hace según el cociente $V_i/1{,}4$.

A partir del primer representante se retoma la fórmula del método Saint Lagué puro, es decir $V_i/(2n+1)$.

Métodos de cociente

Los métodos de reparto de representantes por cociente se basan en el mismo principio. En primer lugar se establece un divisor d para repartir los representantes. De esta manera, en una primera aproximación, cada formación política recibe un número de representantes que es igual al número de votos recibidos V_i dividido entre d, aproximándose el cociente por defecto. Estos serán los representantes por cociente (n_c). Tras realizarse este reparto, y como consecuencia de la aproximación por defecto realizada en cada formación política, quedan unos puestos *sobrantes,* es decir, sin cubrir por el reparto por cociente. Se procede a repartir estos puestos entre los grupos políticos en función de los restos de las divisiones realizadas, es decir, de los votos de cada formación que no han sido utilizados para conseguir los representantes por cociente. Estos serán los representantes por residuo (n_r).

Cociente Hare

En el caso del Cociente Hare, el divisor utilizado es el resultado de dividir el número de votos totales (V) y el número de representantes a elegir en el proceso (r): d/V, aproximando d al entero más próximo. En este caso, podemos interpretar d como el número de votos necesario para conseguir un representante.

Por ello, el número de representantes de cada partido por cociente será la parte entera del cociente $n_c = V_i/d$. Este sistema es similar al utilizado por Jefferson hace dos siglos. La diferencia estriba en el reparto de los representantes por residuo que se hace a continuación y que completa el número de personas electas de la cámara, que se considera fijo.

Los votos residuales serán $V_r = V_i - d \cdot n_c$, que serán los utilizados para conseguir o no representantes por residuo.

Cociente Droop

En el caso del Cociente Droop, el divisor utilizado es $d = 1 + V/(r+1)$, aproximando d al entero más próximo. Los cálculos de los representantes por cociente y por residuo son los mismos que en cociente Hare.

Cociente Imperiali

En el caso del cociente Imperiali, utilizado en Italia hasta las reformas electorales de 1991, el divisor utilizado es $d = V/(r+2)$, aproximando d al entero más próximo. Los cálculos de los representantes por cociente y por residuo son los mismos que en cociente Hare.

Método de la mayoría relativa

En el método de la mayoría relativa las circunscripciones utilizadas son mucho más pequeñas de lo que son en otros sistemas. En cada una de ellas solo ha de escogerse un representante. Este método, con alguna complicación añadida, se utiliza en algunos procesos electorales del Reino Unido.

En cada circunscripción se asigna el representante a elegir a la formación política que ha obtenido más votos en esa circunscripción. En el caso español, para utilizar este método sería preciso dividir cada circunscripción electoral en otras de menor tamaño en las que se elegiría un solo representante en cada una.

La utilización del método de la mayoría relativa tiene una repercusión especial en la composición final de la cámara. Los partidos minoritarios son eliminados de la misma salvo que sean los más votados en alguna circunscripción concreta en la que consigan algún representante. Este sistema favorece la composición bipartidista de los parlamentos.

Desarrollo

Se realiza un estudio comparativo entre los distintos métodos expuestos utilizando como datos los resultados electorales reales en algunas de las provincias más pobladas en las elecciones generales celebradas en España en noviembre de 2011, para el Congreso de Diputados.

En las tablas de la 1 a la 8, se van a mostrar todos los cálculos para el caso de la provincia de Madrid y, en las tablas de la 9 a la 12, se aportan resúmenes de estos cálculos para el resto de las provincias estudiadas.

Votantes	*Abstención*	*Votos nulos*	*Votos válidos*	PP (Vi)	PSOE (Vi)	UPyD (Vi)	IU-LV (Vi)	*Otros*	*Blanco*
3 409 331	12 444 483	35 526	3 373 805	161 154	124 332	108 111	69 111	10 429	7 162

Número de representantes a elegir $r = 36$

Tabla 1. Resultados electorales *Madrid Congreso de Diputados 2011*

	PP	*esc núm**	*PSOE*	*esc núm*	*UpyD*	*esc núm*	*IU-LV*	*esc núm*
Entre 1	1 719 709,00	1	878 724,00	2	347 354,00	7	271 209,00	11
Entre 2	859 854,50	3	439 362,00	5	173 677,00	17	135 604,50	22
Entre 3	573 236,33	4	292 908,00	9	115 784,67	26	90 403,00	34
Entre 4	429 927,25	6	219 681,00	13	86 838,50	36	67 802,25	
Entre 5	343 941,80	8	175 744,80	16	69 470,80		54 241,80	
Entre 6	286 618,17	10	146 454,00	20	57 892,33		45 201,50	
Entre 7	245 672,71	12	125 532,00	24	49 622,00		38 744,14	
Entre 8	214 963,63	14	109 840,50	28	43 419,25		33 901,13	
Entre 9	191 078,78	15	97 636,00	31	38 594,89		30 134,33	
Entre 10	171 970,90	18	87 872,40	35	34 735,40		27 120,90	
Entre 11	156 337,18	19	79 884,00		31 577,64		24 655,36	
Entre 12	143 309,08	21	73 227,00		28 946,17		22 600,75	
Entre 13	132 285,31	23	67 594,15		26 719,54		20 862,23	
Entre 14	122 836,36	25	62 766,00		24 811,00		19 372,07	
Entre 15	114 647,27	27	58 581,60		23 156,93		18 080,60	
Entre 16	107 481,81	29	54 920,25		21 709,63		16 950,56	
Entre 17	101 159,35	30	51 689,65		20 432,59		15 953,47	
Entre 18	95 539,39	32	48 818,00		19 297,44		15 067,17	
Entre 19	90 511,00	33	46 248,63		18 281,79		14 274,16	
Entre 20	85 985,45		43 936,20		17 367,70		13 560,45	
Entre 21	81 890,90		43 936,20		16 540,67		12 914,71	
Entre 22	78 168,59		43 936,20		15 788,82		12.327,68	
Escaños		19		10		4		3

En las columnas *esc núm* aparecen los 36 escaños otorgados a los partidos en el orden en que son asignados

Tabla 2. Resultados en aplicación de la Ley D'Hondt

	PP	*esc núm*	*PSOE*	*esc núm*	*UpyD*	*esc núm*	*IU-LV*	*esc núm*
Entre 1	1 719 709,00	1	878 724,00	2	347 354,00	4	271 209,00	7
Entre 3	573 236,33	3	292 908,00	6	115 784,67	14	90 403,00	19
Entre 5	343 941,80	5	175 744,80	10	69 470,80	23	54 241,80	30
Entre 7	245 672,71	8	125 532,00	13	49 622,00	33	38 744,14	
Entre 9	191 078,78	9	97 636,00	17	38 594,89		30 134,33	
Entre 11	156 337,18	11	79 884,00	21	31 577,64		24 655,36	
Entre 13	132 285,31	12	67 594,15	25	26 719,54		20 862,23	
Entre 15	114 647,27	15	58 581,60	28	23 156,93		18 080,60	
Entre 17	101 159,35	16	51 689,65	32	20 432,59		15 953,47	
Entre 19	90 511,00	18	46 248,63	36	18 281,79		14 274,16	
Entre 21	81 890,90	20	41 844,00		16 540,67		12 914,71	
Entre 23	74 769,96	22	38 205,39		15 102,35		11 791,70	
Entre 25	68 788,36	24	35 148,96		13 894,16		10 848,36	
Entre 27	63 692,93	26	32 545,33		12 864,96		10 044,78	
Entre 29	59 300,31	27	30 300,83		11 977,72		9 352,03	
Entre 31	55 474,48	29	28 345,94		11 204,97		8 748,68	
Entre 33	52 112,39	31	26 628,00		10 525,88		8 218,45	
Entre 35	49 134,54	34	25 106,40		9 924,40		7 748,83	
Entre 37	46 478,62	35	23 749,30		9 387,95		7 329,97	
Entre 39	44 095,10		22 531,38		8 906,51		6 954,08	
Entre 41	41 944,12		21 432,29		8 472,05		6 614,85	
Escaños		19		10		4		3

Tabla 3. Resultados en aplicación del Método Saint Lagué puro

	PP	*esc núm*	*PSOE*	*esc núm*	*UpyD*	*esc núm*	*IU-LV*	*esc núm*
Entre 1,4	1 228 363,57	1	627 660,00	2	248 110,00	6	193 720,71	8
Entre 3	573 236,33	3	292 908,00	5	115 784,67	14	90 403,00	19
Entre 5	343 941,80	4	175 744,80	10	69 470,80	23	54 241,80	30
Entre 7	245 672,71	7	125 532,00	13	49 622,00	33	38 744,14	
Entre 9	191 078,78	9	97 636,00	17	38 594,89		30 134,33	
Entre 11	156 337,18	11	79 884,00	21	31 577,64		24 655,36	
Entre 13	132 285,31	12	67 594,15	25	26 719,54		20 862,23	
Entre 15	114 647,27	15	58 581,60	28	23 156,93		18 080,60	
Entre 17	101 159,35	16	51 689,65	32	20 432,59		15 953,47	
Entre 19	90 511,00	18	46 248,63	36	18 281,79		14 274,16	
Entre 21	81 890,90	20	41 844,00		16 540,67		12 914,71	
Entre 23	74 769,96	22	38 205,39		15 102,35		11 791,70	
Entre 25	68 788,36	24	35 148,96		13 894,16		10 848,36	
Entre 27	63 692,93	26	32 545,33		12 864,96		10 044,78	
Entre 29	59 300,31	27	30 300,83		11 977,72		9 352,03	
Entre 31	55 474,48	29	28 345,94		11 204,97		8 748,68	
Entre 33	52 112,39	31	26 628,00		10 525,88		8 218,45	
Entre 35	49 134,54	34	25 106,40		9 924,40		7 748,83	
Entre 37	46 478,62	35	23 749,30		9 387,95		7 329,97	
Entre 39	44 095,10		22 531,38		8 906,51		6 954,08	
Entre 41	41 944,12		21 432,29		8 472,05		6 614,85	
Escaños		19		10		4		3

Tabla 4. Resultados en aplicación del Método Saint Lagué modificado

		PP	*PSOE*	*UpyD*	*IU-LV*	*OTROS*	*Total*
Votos	V_i	1 719 709	878 724	347 354	271 209	121 716	
Escaños por cociente	$n_c = V_i / d$	18	9	3	2	0	32
Residuo	V_r	32 803	35 271	66 203	83 775	121 716	
Escaños por residuo	$n_r = 4$	1	1	1	1	0	4
Escaños totales	$n_c + n_r$	19	10	4	3	0	36

$d = V / r = 3\ 373\ 805 / 36 = 93\ 717$

Tabla 5. Resultados en aplicación del Cociente Hare

		PP	*PSOE*	*UpyD*	*IU-LV*	*OTROS*	*Total*
Votos	V_i	1 719 709	878 724	347 354	271 209	121 716	
Escaños por cociente	$n_c = V_i / d$	18	9	3	2	0	32
Residuo	V_r	78 379	58 059	73 799	88 839	121 716	
Escaños por residuo	$n_r = 4$	1	1	1	1	0	4
Escaños totales	$n_c + n_r$	19	10	4	3	0	36

$d = 1 + (V / r + 1) = 1 + 3\ 373\ 805 / 37 = 91\ 185$

Tabla 6. Resultados en aplicación del Cociente Droop

		PP	*PSOE*	*UpyD*	*IU-LV*	*OTROS*	*Total*
Votos	V_i	1 719 709	878 724	347 354	271 209	121 716	
Escaños por cociente	$n_c = V_i / d$	19	9	3	3	0	34
Residuo	V_r	32 813	79 668	81 002	4 857	121 716	
Escaños por residuo	$n_r = 4$		1	1			2
Escaños totales	$n_c + n_r$	19	10	4	3	0	36

$d = V / r + 2 = 3\ 373\ 805 / 38 = 88\ 784$

Tabla 7. Resultados en aplicación del Cociente Imperiali

	PP	*PSOE*	*UPyD*	*IU-LV*	*Total*
Ley D'Hondt	19	10	4	3	36
Método Saint Lagué puro	19	10	4	3	36
Método Saint Lagué modificado	19	10	4	3	36
Cociente Hare	19	10	4	3	36
Cociente Droop	19	10	4	3	36
Cociente Imperiali	19	10	4	3	36

Tabla 8. Comparativa de resultados en la provincia de Madrid, según el método utilizado

	PSC-PSOE	*CiU*	*PP*	*ICV-EUIA*	*ERC*	*Total*
Ley D'Hondt	10	9	7	3	2	31
Método Saint Lagué puro	10	9	7	3	2	31
Método Saint Lagué modificado	10	9	7	3	2	31
Cociente Hare	9	9	7	3	3	31
Cociente Droop	9	9	7	3	3	31
Cociente Imperiali	10	9	7	3	2	31

Tabla 9. Comparativa de resultados en la provincia de Barcelona, según el método utilizado

	PP	*PSOE*	*EUPV-EV*	*Compromis*	*UPyD*	*Total*
Ley D'Hondt	9	4	1	1	1	16
Método Saint Lagué puro	9	4	1	1	1	16
Método Saint Lagué modificado	9	4	1	1	1	16
Cociente Hare	9	4	1	1	1	16
Cociente Droop	9	4	1	1	1	16
Cociente Imperiali	9	4	1	1	1	16

Tabla 10. Comparativa de resultados en la provincia de Valencia, según el método utilizado

	PSOE	*PP*	*IULV-CA*	*UPyD*	*Total*
Ley D'Hondt	6	5	1	0	12
Método Saint Lagué puro	6	5	1	0	12
Método Saint Lagué modificado	6	5	1	0	12
Cociente Hare	5	5	1	1	12
Cociente Droop	5	5	1	1	12
Cociente Imperiali	6	5	1	0	1

Tabla 11. Comparativa de resultados en la provincia de Sevilla, según el método utilizado

	PP-PAR	*PSOE*	*CHA-IU*	*UPyD*	*Total*
Ley D'Hondt	4	2	1	0	7
Método Saint Lagué puro	4	2	1	0	7
Método Saint Lagué modificado	4	2	1	0	7
Cociente Hare	3	2	1	1	7
Cociente Droop	4	2	1	0	7
Cociente Imperiali	4	2	1	0	7

Tabla 12. Comparativa de resultados en la provincia de Zaragoza, según el método utilizado

Resultados y discusión

Al finalizar el trabajo de cálculo se analiza y discute en clase las características de cada sistema desde el punto de gobernabilidad y representatividad, así como las intenciones inherentes a cada uno de los métodos y porqué unos países escogen unos y otros países otros. Los alumnos pueden constatar como la elección del sistema electoral puede no modificar el resultado en algunas provincias mientras que en otras puede subir o bajar el número de representantes de algunas formaciones políticas en una unidad. Esta circunstancia, que es aparentemente poco significativa, puede amplificarse cuando se tienen en cuenta las 50 provincias del estado, así como las dos ciudades autónomas, y, como consecuencia favorecer la existencia de minorías y de grupos parlamentarios nuevos o permitir que los partidos más votados gobiernen con mayorías más amplias. En clase pueden realizarse estimaciones del resultado suponiendo un número menor de representantes en la cámara, etc.

En el caso concreto de las elecciones cuyos resultados se presentan, se puede observar que la Ley d'Hondt es uno de los métodos estudiados que menor número de representantes otorga a los partidos minoritarios. El cociente Hare, por el contrario, es más beneficioso para los partidos menos votados. Por otra parte, conviene analizar, en el caso de los métodos de divisor que el primer escaño obtenido por el partido con menos votos (UpyD) se obtiene en los puestos 11, 7 y 8 para los métodos d'Hondt, Saint Lague y Saint Lague modificado respectivamente, con lo que, para parlamentos con menos representantes, el método d'Hondt es el que más beneficia a los partidos mayoritarios y por tanto a la gobernabilidad, siendo el método Saint Lague el que facilita una cámara más plural de entre los métodos de divisor.

Este estudio se presenta en clase en las proximidades de las jornadas electorales para aprovechar el ambiente electoral y que los alumnos se encuentren más motivados en un campo en el que, normalmente, no encuentran ningún atractivo. Para finalizar se estudia el concepto de circunscripción electoral y de listas abiertas o cerradas para completar una visión general de los sistemas electorales y la forma en que estas circunstancias afectan a la composición de los parlamentos.

Es tarea del profesor encontrar puntos de encuentro entre las matemáticas y la vida cotidiana y mostrarlas a los alumnos

En este estudio se presentan datos de un proceso electoral concreto en algunas provincias. No obstante, puede ser interesante realizarlo en cada lugar y momento con elecciones y circunscripciones de mayor interés para los alumnos a fin de fomentar el espíritu crítico de nuestros alumnos desde la clase de matemáticas.

Conclusiones

Las matemáticas están presentes en todos los ámbitos de nuestra vida. Es tarea del profesor encontrar puntos de encuentro entre las matemáticas y la vida cotidiana y mostrarlas a los alumnos para propiciar el gusto por las ciencias exactas.

Referencias bibliográficas

HERNÁNDEZ, E. (2001), *Matemáticas y sistemas electorales,* Universidad Autónoma de Madrid, Madrid.

BARCELÓ, B. (2007), *Sistemas electorales,* MATerials MATemàtics.

GIRÓN GONZÁLEZ-TORRE, F. J., y J. M. BERNARDO HERRÁNZ (2007), «Las matemáticas de los sistemas electorales», *Rev. R. Acad. Cienc. Exact. Fís. Nat.,* vol. 101, n.° 1, 21-33.

RAMÍREZ GONZÁLEZ, V. (1991), «Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores», *Suma*, n.° 7, 29-38

<http://es.wikipedia.org>

FRANCISCO DANIEL PÉREZ CARRETERO
Asociación Castellano Leonesa de Matemáticas «Miguel de Guzmán»
Colegio La Inmaculada, Valladolid
<pacoperezcarretero@gmail.com>

suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 39-46

Las Matemáticas y el Bachillerato a lo largo del tiempo

(1.ª parte: desde 1953 hasta la LOGSE)

Fernando Tébar Cuesta

En este trabajo se analiza cómo afectan a los estudios del Bachillerato y por tanto a las Matemáticas, las grandes leyes y disposiciones definidas en las sucesivas reformas educativas desde la LOEM hasta la LOGSE.

Los niveles de Enseñanza Primaria y los de la Universidad estuvieron claros, pero el de la Enseñanza Secundaria y el Bachillerato han sido la parte flexible del sistema, que se modifica en función del diseño de ambas.

Se analiza la repercusión de la Constitución en el modelo educativo general.

Palabras clave: Bachillerato, Legislación, Enseñanzas mínimas, Currículos, Reformas educativas.

Mathematics and High School studies
(1st part: From 1953 to LOGSE)

The aim of this paper is to analyze how the main laws and regulations defined in the educational reforms have affected the High School Studies and Mathematics studies from LOEM to LOGSE.

Primary and University studies were clear and defined from the beginning of the reforms, but Secondary and High Schools studies have been the flexible side of the system, which has been modified according to their design.

The influence of the Constitution on the general educational model is analyzed too.

Key words: High School Studies, Legislation, Minimum required contents, Curriculums, Educational Reforms.

Desde el diseño de nuestros primeros sistemas educativos, estuvieron claros los niveles inicial y final, el de la enseñanza primaria y el de la enseñanza superior, sin embargo, la enseñanza secundaria y/o el bachillerato ha sido el nivel educativo más problemático aunque también el más fundamental, como ya lo consideraba el ministro de Instrucción Pública de la II República don Fernando de los Ríos cuando expresaba que «La segunda enseñanza decidirá la cultura del país».

Utilizando como eje central del análisis la disciplina de las Matemáticas, partiremos de la consideración del Bachillerato como «la preparación de los naturalmente capaces», para pasar por diferentes etapas, desde las iniciales con barreras para seleccionar a los alumnos a base de exámenes de ingreso, reválidas etc, hasta llegar a la etapa democrática de extensión del Bachillerato después de conseguida la escolarización universal.

LOEM

La situación actual no se comprendería si no miramos al pasado de donde viene, así pues, debemos

Artículo recibido en *Suma* en febrero de 2011 y aceptado en marzode 2012

empezar recordando brevemente la *Ley de 26 de febrero de 1953* (BOE de 27) sobre la *Ordenación de la Enseñanza Media,* siendo Ruiz Jiménez ministro de Educación Nacional[1]. Dado que estuvo vigente casi veinte años, merece la pena destacar algunas de sus características, en especial en lo referente al tema que nos ocupa:

— Finalidad de la enseñanza media: «la formación humana de los jóvenes y la preparación de los naturalmente capaces para el acceso a los estudios superiores».
— Organización del Bachillerato: Bachillerato elemental de 4 cursos, y Bachillerato superior de 2 cursos.
— Personal docente: Catedráticos, Profesores Especiales, Adjuntos, Ayudantes.
— Centros docentes: Instituto[2] Nacional de Enseñanza Media, Colegios autorizados.
— Plan de estudios[3]: Grado Elemental (4 años), Grado Superior (2 años), Curso Preuniversitario, que sustituiría al «examen de Estado» del plan de 1938, y que tendría vigencia hasta su sustitución por el COU en 1970.
— Exámenes y títulos: de ingreso para acceder al Bachillerato Elemental, de curso para promocionar, de grado (reválidas) para obtener el título de Bachillerato Elemental y el de Bachillerato Superior.

Si importante y duradera fue esta ley, no lo fue menos la que la sustituyó, pues en la historia de la educación española ha marcado un hito en todos sus aspectos.

Ley 70

En la década de los 60, se producen en nuestro país una gran cantidad de cambios económicos, sociales y culturales, haciéndonos pasar de una sociedad tradicional a una sociedad industrial y de servicios.

Se produce un incremento demográfico paralelo conocido como *boom escolar*, triplicándose en dos décadas los centros (de 1.073 en 1950 a 3.140 en 1975), los alumnos matriculados en Bachillerato pasan de 200.000 a 1.500.000, y los profesores pasan de algo más de 16.000 a más de 62.000. Finalmente, como muy bien expresa V. García Hoz[4], «no pueden ser olvidadas las posibilidades de acceso a estudios medios y superiores, pues por Ley, se destinó a ayuda para estudiantes el producto de la totalidad del impuesto sobre la renta de las personas físicas, creándose el Patronato de Igualdad de Oportunidades»[5] para dar entrada a argumentos tales como capacidad y mérito, y que consideraba la igualdad de oportunidades en educación como uno de los elementos fundamentales para alcanzar la igualdad de oportunidades sociales.

Todo el movimiento económico, social y cultural, llevó al ministro José Luis Villar Palasí a abordar la reforma que dejara atrás la clásica consideración del bachillerato como suma de barreras y crear un sistema educativo moderno, utilizando un instrumento fundamental, una buena ley, la Ley General de Educación, en la que en su preámbulo observamos ya el cambio respecto de la anterior: «se trata de construir un sistema educativo permanente, no concebido como criba selectiva de los alumnos, sino capaz de desarrollar hasta el máximo, la capacidad de todos y cada uno de los españoles».

La elaboración de la ley se hizo con criterios técnicos y de planificación, elaborando previamente el llamado «Libro blanco» de la educación, con el título de «La educación en España: Bases para una política educativa», que dio como resultado una ley consensuada y duradera en el tiempo, que fue aprobada en agosto de *1970 con el nombre de Ley General de Educación y de Financiamiento de la Reforma Educativa* (Ley 14/1970, de 4 de agosto, BOE del 6), más conocida como Ley 70 o como homenaje a quien la impulsó Ley Villar.

Dada la trascendencia futura de la ley, en la que se contó con la participación de profesores, y con el asesoramiento de expertos educativos, conviene que nos detengamos en sus características principales.

Sistema educativo

La LGE establece los siguientes niveles educativos:

— Ed. Preescolar, Educación General Básica (EGB), de carácter obligatorio y gratuito, de 8 años de duración. La EGB engloba la anterior E. Primaria mas el Bachillerato elemental, con lo que desaparece éste. Se encargaría a los maestros, que a partir de entonces pasarían a llamarse profesores de EGB. Al final de la EGB el alumno obtenía el título de Graduado Escolar, o un certificado de escolaridad si la evaluación no era positiva.

— Bachillerato Unificado y Polivalente (BUP)[6], Formación Profesional (FP). El Bachillerato se reduce a tres cursos (14-16 años) con un único título. Su Plan de estudios deberá comprender materias comunes, materias optativas y, enseñanzas y actividades técnico-profesionales.

Aunque el BUP venía previsto en la ley, sin embargo no se implantó hasta 1975, con el Decreto 160/75, de 23 de enero por el que se aprueba el Plan de Estudios del Bachillerato, que concreta que las materias comunes se articulan en áreas de conocimiento, estando las Matemáticas incluidas en el *Área de Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza* y distribuidas en los tres cursos:

Primer Curso	*Segundo Curso*	*Tercer Curso*
Matemáticas Ciencias Naturales	Matemáticas Física y Química	Matemáticas

Tabla 1

Del desarrollo de lo dispuesto en el decreto, se ocupará la Orden Ministerial de 22 de marzo de 1975 por la que se desarrolla el decreto 160/75 y se regula el COU, estableciendo el horario de las materias:

Materia	*Horas en 1.°*	*Horas en 2.°*	*Horas en 3.°*
Matemáticas	5	4	4

Tabla 2. Horario de Matemáticas en el BUP

Se consolida según M. F. Enguita[7] la consideración del carácter *dual* generado por la LGE «el Bachillerato era académico, la FP profesionalizadora; aquél propedéutico, ésta terminal; el primero símbolo de éxito en los estudios, la segunda de fracaso escolar; uno la rama noble de las enseñanzas medias, la otra el basurero, …por no hablar ya de las no menos duales imágenes asociadas de orden y desorden, buenos y malos alumnos, etc.»; por otra parte, sin olvidar la planificación y la uniformidad desde el Ministerio de Educación, se constata la coexistencia de dos sistemas de enseñanza: público y privado, y mientras el sistema público tiene un nivel medio, la enseñanza privada oscila entre las academias y los colegios de élite.

Ordenación académica del COU

La superación del BUP daba paso al COU, correspondiendo su programación y pruebas de acceso a la Universidad, y dejando su impartición a los Centros de Bachillerato. Al final, el COU pasó a ser un curso más de Bachiller.

	Opción	*Materias*	*Horas*
Comunes	Lengua Extranjera, Filosofía, Lengua Española		3, 4, 3
Optativas	Opción A	Obligatorias: Literatura, Historia del mundo contemporáneo	4
		Optativas: Latín, Griego, Historia del Arte, Matemáticas	4
	Opción B	Obligatorias: Matemáticas, Física	5
		Optativas: Química, Biología, Geología, Dibujo Técnico	4

Tabla 3. Currículo del COU

Finalmente, no solo se atiende a la ordenación académica[8], sino que también se organizan los centros, así, se establecen las cátedras y agregadurías por

Orden de 16 de noviembre de 1976, en los Institutos Nacionales de Bachillerato, para las cátedras se establecen en las distintas disciplinas, en concreto en Matemáticas, y para las agregadurías, se establece una clasificación por módulos considerados como máximos:

Disciplina	*Módulo V*	*Módulo IV*	*Módulo III*	*Módulo II*	*Módulo I*
Matemáticas	8	5	4	3	2

Tabla 4. Plantilla del Cuerpo de Profesores Agregados en los diferentes módulos

Así por ejemplo, en capitales de provincia como Albacete, su INB tenía módulo III, mientras que a los pueblos medianos como La Roda, les correspondía módulo I, y en Madrid, los grandes INB como Isabel La Católica, Beatriz Galindo o Ramiro de Maeztu, módulo V, y en la periferia, en el cinturón industrial, INB como el Matemático Puig Adam de Getafe, también le correspondía módulo V.

Con respecto a la vigencia y trascendencia de la LGE, lo expresa de forma inmejorable el catedrático de la UNED, J. L. García Garrido, «la recién estrenada democracia de 1978 no tuvo inconveniente alguno en seguir contando todavía bastantes años con esta ley como marco fundamental de la política educativa».

La Constitución Española y la educación

Con el nombramiento de Adolfo Suárez como Presidente del Gobierno el 7 de julio de 1976, se inicia la «transición» del *franquismo* al estado democrático de la Monarquía. La transición, tiene su punto culminante con la aprobación de la Constitución española de 27 de diciembre de 1978. Nuestra norma básica dedica a la enseñanza los artículos 20, 27, 39, 43, 44, 103, 148, y 149, siendo el fundamental el Art 27 que contiene la declaración básica referida a educación.

Hasta la llegada de la LOGSE, la restauración democrática se limitó a adaptar la legislación derivada de la Ley 70 a los principios constitucionales de la Constitución de 1978. Así ocurrió con el COU, modificado en 1978[9] cuyo carácter servía por un lado de síntesis y ordenación de los cursos anteriores, y por otro, de preparación para el acceso a la enseñanza superior. Y puesto que desde el COU se podía acceder a diversos estudios (Matemáticas, Ciencias experimentales, Ingeniería), se aconsejaba que la enseñanza fuese adecuada a tan amplios fines, y se indicaban las semanas que parecía conveniente dedicar al estudio de los respectivos temas

Consenso	— Derecho a la educación como un derecho fundamental — Obligatoriedad y gratuidad de la enseñanza básica — Los fines de la educación — La consideración de la educación como algo que compete a los poderes públicos
Cesiones	— Religión • El grupo socialista acepta el derecho de los padres a que sus hijos reciban educación religiosa • El grupo centrista acepta la educación religiosa voluntaria — Concepto de escuela • El grupo socialista renuncia a la escuela única estatal y acepta la libertad de enseñanza (suponía aceptar la financiación de la escuela privada por el Estado) • El grupo centrista acepta la participación de la comunidad educativa en el control y gestión de los centros, y la programación general de la enseñanza.

Tabla 5. Elementos clave referidos a la Educación en la Constitución Española de 1978

En 1980, la Unión de Centro Democrático cuyo líder era el carismático Adolfo Suárez, aprobó la Ley Orgánica por la que se regula el Estatuto de Centros Escolares (*LOECE*), el 19 de junio de 1980, de escasa vigencia, no sólo por la inestabilidad de su partido (seis ministros de educación

Tema	*Núm. de semanas*
Sistemas de ecuaciones lineales. Discusión	6
Espacios afín y euclídeo tridimensionales	8
Ampliación del cálculo diferencial e integral	9
Ampliación del cálculo de probabilidades	4

Tabla 6. Contenidos de Matemáticas en COU y distribución temporal

entre 1976 y 1982[10]) sino porque al ganar las elecciones de octubre de 1982, el grupo socialista liderado por Felipe González, se iniciaron las reformas que llevarían a la LOGSE.

LOGSE, su desarrollo y el paréntesis de la LOCE

Mientras transcurría el proceso de elaboración de la siguiente gran ley educativa, los sucesivos gobiernos iban adaptando la normativa derivada de la LGE, y lo mismo que sucedió con el COU en 1978, se producía diez años más tarde, en 1987 nuevamente para el COU[11], y en 1988 con el BUP, la razón según el legislador era que los horarios de Matemáticas de 1º de BUP (también en otras materias) suponían un incremento respecto a los que se tenían en el último año de la EGB, lo que suponía unos horarios excesivamente prolongados para los alumnos, lo cual les exigía un importante esfuerzo que dificultaba el adecuado rendimiento académico y dificultaba además, la organización y desarrollo de otras actividades escolares distintas de las estrictamente académicas. Se reducen pues, en mayo del 1988[12] las horas de las materias que en el plan de estudios de 1975 tenían asignadas cinco horas semanales, en concreto las Matemáticas, y al ser solo de una hora se supone que no deberían tener incidencia en los programas, por lo que no se consideraba necesario modificar éstos, así pues, el horario semanal dedicado a las materias de Bachillerato quedaría:

Horas en 1.°	*Horas en 2.°*	*Horas en 3.°*
4	4	Opción A → 4 Opción B → 4

Tabla 7. Horario de Matemáticas en el BUP

De modo similar a como los cambios en la década de los 60 provocaron la adopción de medidas educativas para adaptarse a las nuevas condiciones de la sociedad, el cambio del régimen franquista a la democracia, el aumento del número de estudiantes de bachillerato y formación profesional, etc., hacía necesario abordar un cambio del sistema educativo del que la LOGSE sería el instrumento básico y fundamental.

La Ley Orgánica de Ordenación General de Sistema Educativo (*LOGSE*) se aprueba el 3 de octubre de 1990 (BOE del 4), tras un enorme trabajo iniciado en 1987 por el ministro Maravall, con el documento titulado «Proyecto para la reforma de la enseñanza».

El Bachillerato cambia en sus fines, las dos leyes anteriores se ven superadas, pues proporcionará a los alumnos una madurez intelectual y humana, los conocimientos y habilidades para desempeñar sus funciones sociales y, capacitarles para acceder a estudios superiores, bien universitarios, bien de FP de grado superior. En palabras de A. Viñao Frago[13], «la solución ya no es el Bachillerato para las clases directoras de 1938, ni los filtros intermedios de 1953 o las ramas paralelas de 1970, sino la escuela comprensiva con opciones y modalidades».

La Ley dedica el capítulo 3.º del título I a la educación secundaria: ESO y Bachillerato. A éste, dedica los artículos 25 al 29, indicando que comprenderá 2 cursos académicos y las modalidades de Artes, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Humanidades y Ciencias Sociales y Tecnología, organizados en materias comunes, propias de cada modalidad y optativas.

A pesar de sufrir el recorte temporal dejándolo reducido a solo dos años que, a todas luces resulta insuficiente para los objetivos que se pretenden con estos estudios, se incrementaron el número de opciones, y de asignaturas científicas y tecnológicas, permitiéndose mayor flexibilidad curricular para adaptarse a los alumnos.

La obtención del título de Bachiller cierra una etapa, la mal denominada de los estudios «no universitarios», pero cuya posesión faculta para presentarse a las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAUs), conocidas como Selectividad. Estas pruebas han sido denostadas por diversos medios, pues realmente una prueba que supera el 86% de los estudiantes presentados difícilmente puede considerarse como un proceso de selección. Al contrario de lo que se aplica en Europa, donde Francia e Inglaterra tienen pruebas más discriminatorias, aunque sin llegar al «númerus clausus» de Italia.

El calendario de aplicación de la nueva ordenación del sistema educativo establecida por la LOGSE, se aprueba por el Real decreto 986/1991, de 14 de junio, en él se establece el proceso de extinción gradual de los planes de estudios existentes así como la implantación sucesiva de los nuevos cursos, así en el año académico 1997-98 se implantarán, con carácter general, el primer curso del bachillerato y dejará de impartirse el 3.° curso del bachillerato unificado polivalente, en el año académico 1998-99 se implantará, con carácter general, el 2.° curso del bachillerato y dejará de impartirse el COU.

Hemos llegado a un sistema educativo complejo, por lo que para alcanzar los objetivos educativos expresados en las leyes, se ha de ir a una clarificación normativa donde se respete la Constitución y las leyes que la desarrollan. Intentaremos esquematizar la estructura para hacerla más clara y comprensible.

La normativa básica estatal, de carácter común, confiere unidad al sistema educativo, así pues, aprobadas por las Cortes las Leyes Orgánicas, corresponde al Gobierno, establecer mediante Reales Decretos la estructura de las modalidades del bachillerato, las materias específicas de cada modalidad y el número de estas materias que se deben cursar, así como fijar las enseñanzas mínimas.

Las Administraciones educativas competentes, mediante Decretos establecerán los currículos de las distintas enseñanzas reguladas en la Ley, que incluirán en todo caso las enseñanzas mínimas.

Procede por último, que se regule por Órdenes, la organización académica de las enseñanzas del Bachillerato, antes de su concreción por los centros en sus programaciones.

Éste fue el orden seguido en las publicaciones según sus competencias:

— En primer lugar, el *Real Decreto 1700/1991,* de 29 de noviembre, por el que se establece la *estructura* del bachillerato (BOE de 2 de diciembre), fijando sus distintas modalidades, y las materias comunes y propias de cada modalidad.
  Las Matemáticas se sitúan como materias de modalidad, con denominación y distribución según se refleja en la tabla siguiente:

Modalidad /curso	*Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología*	*Humanidades y Ciencias Sociales*
Primero	Matemáticas I	Matemáticas II
Segundo	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II

Tabla 8

— En segundo lugar corresponde determinar las enseñanzas mínimas del Bachillerato, lo cual se realiza por el *Real Decreto 1178/1992,* de 2 de octubre, por el que se establecen las *enseñanzas mínimas* del Bachillerato (BOE de 21 de octubre).
  Para cada materia se establecen los contenidos que son indispensables para alcanzar las capacidades propuestas como objetivos. Los contenidos se refieren a conceptos, conocimientos de hechos y de principios; a procedimientos, o modos de saber hacer en la correspondiente disciplina; y a actitudes relacionadas con valores y pautas de acción.

Matemáticas I	*Matemáticas II*
Estadística y probabilidad Geometría Funciones / Aritmética y algebra Resolución de problemas	Algebra lineal Análisis Geometría

Tabla 9. Contenidos de las materias Matemáticas I y II

Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales I	*Matemáticas aplicadas a las ciencias Sociales II*
Aritmética y álgebra Funciones Estadística y probabilidad Resolución de problemas	Algebra Análisis Estadística y probabilidad

Tabla 10. Contenidos de las materias Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II

— Por último, a las Administraciones educativas competentes se les reserva el desarrollo del currículo del Bachillerato, del que formarán parte, en todo caso, las enseñanzas mínimas. El *Real Decreto 1179/1992,* de 2 de octubre, por el que se establece el *currículo del Bachillerato* (BOE del 21) regula dicho currículo *para los centros de ámbito territorial de gestión del Ministerio de Educación y Ciencia.*

Todo lo relativo a las materias *optativas del Bachillerato* es competencia de las respectivas Administraciones educativas, y su currículo no forma parte de las enseñanzas mínimas.

Cronológicamente corresponde introducir el paréntesis que supuso la Ley Orgánica de Calidad de la Educación, veamos el porqué de dicha anomalía histórica:

En 1996 el Partido Popular gana las elecciones generales y, al no haber apoyado con sus votos la LOGSE, parecía en principio que una de sus prioridades educativas sería su derogación, pero al no obtener mayoría absoluta y tener que pactar con grupos nacionalistas que si apoyaron la ley, hizo que las anunciadas reformas no se plantearan. Habrá que esperar a la siguiente legislatura para que el PP apruebe el 23 de diciembre, la Ley Orgánica 10/2002, de Calidad de la Educación (*LOCE*), siendo ministra Pilar del Castillo.

Ni E. Aguirre ni su sucesor en 1999 M. Rajoy hicieron mucho por modificar ni sustituir la criticada LOGSE, más bien se les acusa de inacción educativa, y no sería hasta la segunda legislatura que se aprobaría la LOCE, la cual no daría tiempo a desarrollar en su totalidad al perder el PP las elecciones de 2004 y encontrarse la ley en pleno desarrollo.

El Bachillerato estaba contemplado en la LOCE en los artículos 33 al 37, no obstante, la publicación por el Gobierno del Real Decreto 1318/2004, de 28 de mayo, por el que se modifica el Real Decreto 827/2003, y en el que se establece el calendario de aplicación de la nueva ordenación del sistema educativo, establecida por la LOCE, supone la paralización de la implantación de la nueva ordenación de las enseñanzas.

Un tiempo de tranquilidad para el Bachillerato que no sufre modificaciones (aparte la definición de optativas en 92, 95 y 96) hasta el 2000, pero reformados los currículos de la Educación Secundaria Obligatoria, y asumidas las competencias en educación por las Administraciones educativas competentes, se realizan estudios sobre el funcionamiento del Bachillerato en los años transcurridos desde el 1991, como conclusión de los mismos, a instancias de la Conferencia de Educación y oídas valoraciones externas, se sugiere la introducción de nuevos planteamientos de algunos contenidos en las materias de modalidad así como la propia formulación de los currículos, actualizándolos desde el punto de vista científico y didáctico por medio del *Real Decreto 3474/2000,* de 29 de diciembre del Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (BOE del 16 de enero de 2001) que modifica el RD 1700/91 sobre la estructura y el RD 1178/92 de enseñanzas mínimas.

En lo referente a la materia de Matemáticas para las distintas modalidades, las modificaciones serán mínimas. El horario escolar que corresponde a las enseñanzas mínimas para cada materia de modalidad, y por tanto a las de Matemáticas, se establece en setenta horas para cada una de ellas y no sufre modificación respecto al horario establecido en 1991.

Pero la proximidad de la LOCE y el proceso legislativo llevado a cabo por las Comunidades Autónomas pertenecen al próximo artículo que nos llevará hasta la actualidad.

Referencias bibliográficas

CAPITÁN DÍAZ, A. (2000), *La educación en la España contemporánea*, Ariel, Barcelona.

EMBID IRUJO, A. (1983), L*as libertades en la enseñanza*, Tecnos, Madrid.

ESCAMILLA, A., y A. R. LAGARES (2006), *La LOE: Perspectiva pedagógica e histórica*, Graó, Barcelon.

ESCOLANO BENITO, A. (2002), *La educación en la España contemporánea,* Biblioteca Nueva, Madrid.

FERNÁNDEZ ORDÓÑEZ, F. (1980), *La España necesaria*, Taurus, Madrid.

GAMIR, L. (1986), *Política económica en España*, Alianza, Madrid.

Gómez F. (1988), «Educación secundaria no obligatoria», *Bordón. Revista de Pedagogía,* vol 40, n.º 3, 409-418

GARCÍA GARRIDO, J. L. (1984), *Sistemas educativos de hoy*, Dykinson, Madrid.

INSPECCIÓN GENERAL DE BACHILLERATO (1981, 1982, 1984), *Informe sobre el funcionamiento de los Institutos de Bachillerato,* MEC, Madrid.

Ley Orgánica 8/1985, de 3 de julio, reguladora del Derecho a la Educación.

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE del 4).

Ley Orgánica 10/2002, de 23 de diciembre, de Calidad de la Educación (BOE el 24).

Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (BOE del 4).

MARAVALL, J. M.ª (1984), *La reforma de la enseñanza,* Laia, Barcelona.

PUELLES BENÍTEZ, «Ocho leyes orgánicas de educación en 25 años», *Cuadernos de Pedagogía,* n.º 348, 12, 14.

— *Política y Educación en la España Contemporánea,* UNED.

— (2002), *Educación e ideología en la España contemporánea*, Tecnos, Madrid.

VIÑAO FRAGO, A. (1992), «Del bachillerato a la Enseñanza Secundaria (1938-1990)», *Revista Española de pedagogía,* año L, n.° 192, 322-339.

FERNANDO TÉBAR CUESTA
Inspector de Educación
Dirección de Área Territorial de Madrid Este
Servicio de Inspección Educativa
<fernando.tebar@madrid.org>

1 El Ministerio de Educación Nacional pasó a llamarse Ministerio de Educación y Ciencia por Decreto del 2 de febrero de1966.

2 «Este nombre, sin los aditamentos variables añadidos a lo largo de su historia, ha bastado para identificar el centro oficial dedicado a la segunda enseñanza» (Manuel Utande, «Reforma de las Enseñanzas medias. Un siglo y medio de segunda enseñanza (1820-1970), *Revista de Educación,* 36).

3 El Plan de estudios fue aprobado por Decreto de 12 de junio de 1953 (BOE de 2 de julio) (Planes de estudio de enseñanza media, Madrid, Ministerio de Educación nacional, 1964, pág 468). Posteriormente se reformaba el plan de estudios por Decreto de 31 de mayo de 1957 (BOE de 18 de junio) (Planes de estudio, p. 521).

4 Víctor García Hoz, *La educación en la España del siglo XX*, RIALP, Madrid.

5 El PIO se crea por norma legal de 23 de julio de 1960.

6 La Enseñanza Media quedó pues con una duración de 3 años, pasándose a llamar BUP. La eliminación del Bto Elemental de la Enseñanza Media movilizó a los profesores de Instituto y, se consiguió que el COU, que en principio se asignaba a la Universidad, se impartiera por los profesores de E. Media.

7 Mariano Fernández Enguita, *Las enseñanzas medias en el sistema de la Ley General de Educación*.

8 Por Real Decreto 2162/76, de 30 de julio, se aprueba el texto refundido de las normas orgánicas del Ministerio de Educación y Ciencia. En este Decreto se establece una Dirección General de Enseñanzas Medias, con competencias en el Bachillerato y la Formación Profesional.

«Existió el término Enseñanza Media aplicado en exclusiva al Bachillerato Elemental y Superior, y así, en 1953 se promulgó la Ley de Ordenación de la Enseñanza Media, y hasta época muy reciente, la Inspección de Bachillerato recibía el nombre de Inspección de Enseñanza Media», del texto *Las enseñanzas medias en España* (1981), Ministerio de Educación y Ciencia. Dirección General de Enseñanza Media, Madrid .

9 Resolución de la Dirección General de Enseñanzas Medias y de Universidades de 1 de marzo de 1978 por la que se establecen los contenidos y orientaciones metodológicas del Curso de Orientación Universitaria y se dictan instrucciones sobre el mismo (BOE del 17).

10 A pesar de la inestabilidad, hay que anotar que en 1977 se aprobaron los Pactos de la Moncloa, que en educación supusieron grandes inversiones públicas en la enseñanza.

11 En la Orden de 3 de septiembre de 1987 el Mº de Educación y Ciencia (BOE del 14), se establece la «modificación del COU» estructurando sus enseñanzas en 4 opciones. Las A y B se imparten en la asignatura Matemáticas I, y las C y D en la asignatura Matemáticas II, cuyo programa corresponde al establecido por las Órdenes del MEC de 1975, 76 y 78.

12 Orden de 19 de mayo de 1988 por la que se modifican las de 22 de marzo de 1975 y de 11 de septiembre de 1976 sobre el plan de estudios del Bachillerato Unificado y Polivalente (BOE del 25)

13 A. Viñao Frago, «Del Bachillerato a la Enseñanza Secundaria (1938-1990)», *Revista española de pedagogía*, n.° 192, 336.

suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 47-61

Matemáticas en el antiguo Egipto

José C. Illana Rubio

En Egipto se iniciaron las matemáticas mediante un sistema de numeración de base decimal, con las operaciones aritméticas elementales realizadas por los escribas de las primeras dinastías faraónicas. Se establecieron medidas de longitud, superficie, volumen y capacidad y se desarrollaron operaciones con fracciones aplicadas a situaciones prácticas de repartos iguales y desiguales. En los papiros Rhind y de Moscú se encontraron problemas de álgebra y geometría. La astronomía y la resolución de ecuaciones algebraicas lineales se afianzaron posteriormente junto a cálculos de progresiones aritméticas y geométricas.

Palabras clave: Sistema de numeración, Operaciones aritméticas, Unidades de medida, Fracciones, Papiro Rhind.

Mathematics in Ancient Egypt

In Egypt mathematics began through a numbering system on a decimal basis, with arithmetic operations carried out by elementary scribes of the first pharaonic dynasties. Measures were introduced in length, surface, volume and capacity and operations with fractions applied to practical situations of distributions equal and unequal were developed. Algebra and geometry problems were found in the Rhind and Moscow papyrus. The astronomy and the resolution of algebraic linear equations got firmed subsequently next to calculations of arithmetic and geometric progressions.

Key words: Numbering systems, arithmetic operations, Units of Measure, Fractions, Rhind Papyrus.

Egipto es un don del río Nilo»[1], rodeado de desiertos por el este y el oeste de su largo curso. Desde el décimo milenio a. C. un proceso paulatino de desecación condujo a la actual situación. Hacia el octavo milenio a. C. los habitantes nómadas del territorio, durante el Paleolítico, huyeron del desierto y fueron acercándose al gran río.

Estas poblaciones de las riberas fluviales mezclaron posteriormente la caza y la pesca, con el cultivo incipiente de cereales y la domesticación de animales dando comienzo al Neolítico.

El Egipto faraónico de la época histórica tuvo una etapa predinástica que corresponde a los años 5000 al 3100 a. C. Esta etapa presentó una separación geográfica y cultural entre el Bajo Egipto en el Delta del río y zonas limítrofes, al norte del país; y el Alto Egipto, en el curso fluvial desde Menfis hacia el sur.

La estructuración social y política de la población del valle del Nilo se realizó en pequeñas ciudades y su territorio circundante, «nomo», cuyo gobierno fue ejercido por un «nomarca», noble local que pervivió en la época faraónica.

En el año 3100 se hizo la unificación del Alto y del Bajo Egipto por el rey Narmer. Se conserva una estela en la que Narmer está representado con las co-

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2011 y aceptado en julio de 2012

ronas de ambos territorios. En ella aparecen los primeros intentos de representación numérica de animales y prisioneros humanos (figura 1).

Similares representaciones se repiten en la base de una estatua del rey Jasejemuy, de la segunda dinastía para describir los enemigos muertos por el Faraón en la batalla (Maza, 2003)[2] (figura 2).

Figura 1

Figura 2

Sistema de numeración y escritura

En el antiguo Egipto el sistema de numeración jeroglífico era de base decimal. Cada unidad se representaba por una barra vertical (|), las decenas se indicaban con una (u) invertida (∩) y las centenas con una espiral (𓍢). El millar se escribía con una flor de loto (𓆼) y las decenas de millar con un dedo ligeramente flexionado (𓂭). Se continuaba con las centenas de millar representadas por un renacuajo, los millones por un hombre arrodillado, y los diez millones por la imagen del Sol, personificado en el dios Re (Ifrah, 1987)[3].

El periodo dinástico antiguo comprende las dos primeras dinastías llamadas tinitas, porque tuvieron a Tinis por capital, en el Alto Egipto. En la 1.ª dinastía destaca el rey Menes, que fundó la ciudad de Menfis, muy próxima al Delta, que sería la capital del Imperio Antiguo (Lara, 1991)[4]. En esta época se desarrolló la escritura jeroglífica, con signos iconográficos, que intentaban representar objetos reales. Con la escritura aparecieron los escribas y funcionarios que estructuraron la sociedad egipcia alrededor de la figura teocrática del Faraón.

Durante la segunda dinastía se articuló una escritura ideográfica, de base fonética, que se difundió sobre hojas prensadas de papiro (una planta acuática del Delta). Esta escritura tuvo cada vez más fines prácticos y administrativos, utilizados en el gobierno y la explotación económica del país.

Operaciones aritméticas

Los escribas de la época tinítica ya realizaban sencillas operaciones aritméticas. La suma consistía en la unión de las unidades correspondientes y del paso a una unidad superior cuando se sobrepasaba la base decimal:

$$26+19=(20+10)+(6+9)=$$
$$=30+15=45$$

∩∩|||||| + ∩||||||||| = ∩∩∩ + ∩||||| = ∩∩∩∩|||||

La resta suponía un procedimiento inverso quitando unidades cuando se podía de forma directa o cambiando una unidad de orden superior, de la manera siguiente:

$$33-18=(30-10)+(3-8)=$$
$$20+(3-8)=10+(13-8)=10+5=15$$

∩∩∩||| − ∩|||||||| = ∩∩ + ||| − |||||||| =
= ∩ + ||||||||||||| − |||||||| = ∩ + ||||| = ∩|||||

Se han encontrado tablas utilizadas para la suma y para la resta que usaban los escribas egipcios de épocas posteriores (Gillings, 1972)[5].

La multiplicación se realizaba mediante duplicaciones sucesivas. Así para multiplicar $17 \times 5 = 85$, se duplicaba 17 dos veces: $17 \times 2 = 34$; $34 \times 2 = 68$.

Como $5 = 2 + 2 + 1$; el resultado de la multiplicación sería: $34 + 34 + 17 = 85$

Un método opuesto se usaba para la división, considerada una multiplicación de la que se desconoce uno de los factores (Maza, 2000)[6]:

$$25 \times ? = 375;\ 25 \times 2 = 50;\ 50 \times 2 = 100;$$
$$100 \times 2 = 200;\ 375 = 200 + 100 + 50 + 25;$$
$$8 + 4 + 2 + 1 = 15$$
$$25 \times 15 = 375$$

Imperio Antiguo

El paso de la 2.ª a la 3.ª dinastía se inició con el reinado del faraón Zoser, que comenzó una etapa de grandes construcciones funerarias en la planicie de Saqqara, cerca de El Cairo. El poder del Faraón se hizo absoluto abarcando todas las áreas religiosas y económicas de la sociedad egipcia. El gobierno estaba totalmente centralizado y los funcionarios y escribas controlaban toda la actividad del país en nombre del Faraón.

La capital se trasladó a Menfis, a poca distancia del Delta. De esta época es el célebre médico y arquitecto Imhotep, que fue equiparado por los griegos con Asclepio, el iniciador de la medicina en Grecia. La 4.ª dinastía comenzó con el faraón Snefru, que inició una política expansionista con expediciones militares a Nubia y Libia.

Keops, hijo de Snefru, construyó la Gran Pirámide de Gizeh. En su época se puede considerar el máximo apogeo del Imperio Antiguo. Kefren levantó otra pirámide junto a la de su padre, ligeramente más pequeña. En su reinado se construyó la Esfinge, que tiene esculpida la cara del faraón. La tercera pirámide, la más pequeña, es la de Micerino, hijo de Kefren, que está revestida de granito.

Durante la 5.ª y 6.ª dinastías la centralización del poder fue disminuyendo y los «nomarcas» locales impusieron la herencia del cargo para sus hijos, y con ello la menor dependencia del poder del Faraón. Así se cuenta en el *Papiro Westcar,* aparecido durante el Imperio Medio, (Kemp, 1989)[7] y en la *Piedra de Palermo* (figura 3)*,* ligeramente posterior. En ella se describe la situación política y social de Egipto durante la 5.ª y 6.ª dinastías. El poder del clero aumentó con los recursos económicos que los faraones proporcionaban a los templos para su mantenimiento.

Durante el Imperio Antiguo se completaron las operaciones aritméticas básicas, se introdujo la geometría de figuras planas en el cálculo de la superficie de los campos, y los volúmenes de los cuerpos sólidos, especialmente de las pirámides.

Figura 3

Medidas de longitud

Con los primeros tratamientos geométricos surgieron las medidas de longitud. Los escribas egipcios de esta época usaban el «codo» como unidad, y el «palmo» y el «dedo» como subunidades. Cada codo tenía 7 palmos y cada palmo 4 dedos. Un codo, por tanto, tenía 28 dedos. Aunque hubo diversos valores en el tamaño de estas unidades de longitud de base antropomórfica (codo corto, codo real) las equivalencias comúnmente más aceptadas eran las siguientes (Iversen, 1975)[8]:

1 codo	7 palmos	28 dedos	20,59 pulgadas	52,5 cm
	1 palmo	4 dedos	2,94 pulgadas	7,5 cm
		1 dedo	0,735 pulgadas	1,875 cm

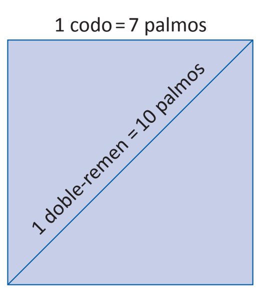
Tabla 1

Otra unidad intermedia entre el codo y el palmo, citada por algunos autores fue el «remen», equivalente a 5 palmos, correspondientes a la distancia media del hombro al codo en los brazos humanos. El «doble-remen» equivalente a 10 palmos ha sido definido por Gillings (1972)[9] como (figura 4):

> la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado era un codo...

El codo era una unidad de medida muy pequeña para grandes extensiones de terreno. Se utilizaba también un múltiplo llamado «khet», equivalente a 100 codos (Robins y Shute, 1998) [10].

$$1 \text{ khet} = 100 \text{ codos} = 52{,}5 \text{ metros}$$



$$7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98 \cong 100$$
$$d = \sqrt{98} \cong \sqrt{100} = 10 \text{ palmos}$$

Figura 4

Medida de superficies

Se ha escrito que el «doble-remen» se utilizaba en la medida de tierras, porque permitía duplicar o dividir a la mitad las superficies sin alterar las formas. Un campo cuadrado podía duplicar su superficie, con la aproximación calculada, haciendo otro cuadrado de lado la diagonal (figura 5).

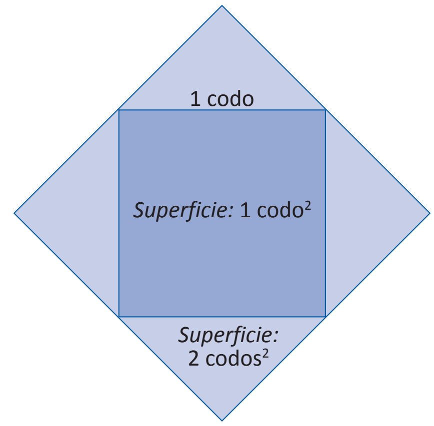


Figura 5

La delimitación de los campos cultivables era un tema conflictivo desde la época predinástica con las alteraciones producidas por las inundaciones anuales. En el Imperio Antiguo se produjeron a veces enfrentamientos jurídicos entre los templos y los particulares, y en otras situaciones era preciso el conocimiento lo más aproximado posible de la extensión de los campos de producción agrícola. Cualquier campo de forma poligonal, más o menos regular, podía descomponerse en triángulos de una u otra forma. Los egipcios después de la triangulación obtenían las dimensiones de un rectángulo de área equivalente para cada uno de los triángulos formados (figura 6).

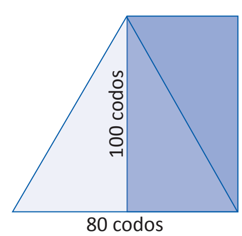


Figura 6

Ejemplo. Un triángulo de 100 codos de altura y 80 codos de base. ¿Qué superficie tendrá?

Transformado el triángulo en el rectángulo coloreado de 100 codos de longitud y 40 codos de anchura (la mitad de la base del triángulo) daría 4000 codos cuadrados de superficie.

Aunque hemos utilizado en el ejemplo anterior el codo cuadrado como unidad de superficie, los egipcios usaban una más grande, el «setat», llamado también «arura» en épocas posteriores por influencias griegas. También usaron el «codo de tierra».

Un «setat» era la superficie de un cuadrado de un «khet» de lado, por lo que equivaldría a 10000 supuestos codos cuadrados, unos 2755 metros cuadrados, (aproximadamente 27,5 áreas = 0,275 hectáreas).

El «codo de tierra» era la centésima parte del «setat», unos 27,5 metros cuadrados, equivalentes a la superficie de una franja de terreno de 1 «khet» de largo (100 codos) y 1 codo de ancho (supuestamente 100 codos cuadrados).

La extensión de las tierras de algunos templos medidas en «setat» (Gasse, 1988)[11] se expresaron de la siguiente forma:

— Parcela ribereña al noroeste: 5 setat
— Parcela al oeste del templo de Horus: 15 setat
— Parcela al oeste de Seger-chad: ½ y ¼ de setat

Medidas de volumen y capacidad

Las medidas de volumen no se diferenciaban de las de capacidad en el Antiguo Egipto. Los correspondientes codos cúbicos del cálculo de volúmenes se transformaban en «khar» (unidades de capacidad) multiplicando por 1,5. Así 200 unidades de volumen eran 300 khar.

Un «khar» era la capacidad de un cuerpo cuyo volumen son 2/3 de un codo cúbico (Maza, 2003) [12]. Según esta definición:

$$1 \text{ khar} = 2/3 \text{ codo cúbico} =$$
$$= 2/3 \cdot 52{,}3^3 = 95370 \text{ cm}^3$$

Otras medidas de capacidad utilizadas eran el «heqat» y el «hin». Un «khar» tenía 20 «heqat» o 200 «hin», por lo que 1 heqat equivalía a 10 hin. En unidades actuales:

$$1 \text{ hin} = 476{,}85 \text{ cm}^3$$
$$1 \text{ heqat} = 4768{,}50 \text{ cm}^3 = 4{,}7685 \text{ litros.}$$

En el *Papiro Rhind*[13] aparece también como medida de capacidad el «heqat-cuadruple», múltiplo del «heqat», con las equivalencias siguientes:

1 heqat-cuadruple = 4 heqat
1 khar = 5 heqats-cuadruples

Los múltiplos de «heqat» servían para medir la capacidad de los grandes graneros usados en Egipto para contener cereales, y para medidas más pequeñas se utilizaban divisores de «heqat»: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 ó 1/64 de esta unidad. Para fracciones más pequeñas aún se usaba el «ro», equivalente a 1/320 de heqat, correspondiente a 14,90 cm^3.

La estructura agraria de la sociedad egipcia y las dificultades de alimentar a la población en épocas de escasez potenciaron la construcción de silos o graneros para almacenar el cereal. En el *Papiro Rhind* aparecen problemas directos e inversos sobre la capacidad o las dimensiones de estos graneros.

Calcular la capacidad de un granero de 10 codos de longitud, 10 codos de anchura y 10 codos de altura.

El cálculo del volumen del granero daría: $10 \times 10 \times 10 = 1000$ codos cúbicos, que se transformarían en medidas de capacidad según las relaciones:

1 khar = 2/3 codo cúbico
1 khar = 5 heqats-cuadruples

$$1000 \text{ codos cúbicos} \times 3/2 = 1500 \text{ khar} =$$
$$= 7500 \text{ heqats-cuadruples.}$$

¿Qué altura tendrá un granero de base cuadrada de 10 codos de lado si contiene 2500 heqats-cuadruples de grano?

$$2500 \text{ heqats-cuadruples} = 500 \text{ khar} =$$
$$= 500 \times 2/3 = 333{,}33 \text{ codos cúbicos.}$$

$$V = 10 \times 10 \times h = 333{,}33;$$
$$h = 333{,}33/100 = 3{,}33 = 3\ 1/3 \text{ codos}$$

Imperio medio

La pérdida del poder real durante la 6.ª dinastía, produjo lo que ha sido llamado el *Primer Periodo Intermedio* entre el Imperio Antiguo y el Imperio Medio, a partir del año 2160 a. C. El poder centralizado de los faraones del Imperio Antiguo dejó paso al aumento de poder de los «nomarcas» y del clero y a las dificultades económicas del reino.

En este periodo se desarrolló una pujante literatura que describía la situación cotidiana del país. Entre estos escritos destacan los «Textos de los Sarcófagos» y «Enseñanza para Merikara», un conjunto de consejos para el buen gobierno en una época de crisis política.

Los principes tebanos de de la XI dinastía iniciaron el Imperio Medio hacia el año 2060 a. C., consolidando de nuevo el poder real y restableciendo la economía conjunta del valle del Nilo. El Imperio Medio alcanzó su apogeo con Sesostris I que realizó una política territorial expansionista en Nubia, llegando hasta la tercera catarata del río Nilo. Sesostris III continuó la expansión por Siria y Palestina.

De esta época es la *Historia de Sinuhe,* obra cumbre de la literatura egipcia, y los *papiros de Kahum y Berlín.* También se inició la escritura hierática y se desarrolló la medicina (cirugía, curación de enfermedades oculares,...). El «papiro quirúrgico Edwin Smith» (Hornung, 2003)[14] detalla diagnósticos para diversas enfermedades y cita el corazón como centro del sistema vascular.

El Imperio Medio llegó a su final en el año 1786. De nuevo los visires y nomarcas tuvieron más poder efectivo que los propios faraones de la XIII y XIV dinastías. Se conoce esta etapa como *Segundo Periodo Intermedio,* con una duración de más de dos siglos

Durante el *Segundo Periodo Intermedio,* diversos pueblos asiáticos (hicsos) se fueron asentando pacificamente en la zona del Delta empujados por movimientos migratorios que afectaron a todo el Próximo Oriente. Entre ellos posiblemente se encontraban los hebreos. Los hicsos ocuparon poco a poco puestos de responsabilidad política y administrativa en el Estado egipcio. En el año 1644 a. C. consiguieron entronizar un faraón de origen asiático en la zona del Bajo Egipto.

De esta época son el *Papiro Rhind* y el *Papiro de Moscú*[15]. El *Papiro Rhind* fue escrito por Ahmes en el año 1640 a. C. Este escriba recopiló problemas matemáticos anteriores en escritura hierática que se utilizaban en la iniciación al cálculo de los nuevos escribas. El *Papiro Rhind* fue comprado en Luxor por Henry Rhind abogado inglés en 1858, del que ha tomado su nombre.

Operaciones con fracciones

El *Papiro Rhind* utiliza fracciones de unidades de medida de forma habitual, usadas en problemas concretos de repartos iguales o desiguales (alimentos, salarios de trabajadores,...). Las fracciones usadas por los egipcios tenían la unidad por numerador. Otras fracciones de numerador distinto de la unidad se solían distribuir en sumas de fracciones unitarias:

$$8/10 = 1/2 + 1/5 + 1/10 =$$

$$\overset{\bigcirc}{\text{II}} + \overset{\bigcirc}{\text{IIIII}} + \overset{\bigcirc}{\cap} = \overline{2} + \overline{4} + \overline{10}$$

(Neugebauer, 1962)[16]

Una excepción a este planteamiento de fracciones de numerador unitario es el uso de la fracciones 2/3 y 3/4 en operaciones matemáticas habituales.

$$8/10 = 2/3 + 1/10 + 1/30$$

Los egipcios realizaban operaciones con fracciones. La suma se hacía de la forma siguiente:

$$1/4 + 1/4 = 1/2$$

(fracciones iguales de denominador par)

$$1/3 + 1/6 = 1/2$$

(denominadores doble uno de otro)

$$1/5+1/20=1/4$$
(denominadores multiplo uno de otro)

Los egipcios sumaban también tres o más fracciones:

$$1/6+1/6+1/6=3/6=1/2$$

$$1/7+1/14+1/28=$$
$$=4/28+2/28+1/28=7/28=1/4$$

En forma similar realizaban la resta de fracciones cuando tenían las mismas características que las tratadas en la suma. Gillings (1972)[17] aplica para casos de denominadores múltiplos unos de otros los siguientes cálculos:

$$1/2-1/6=3/6-1/6=2/6=1/3$$

$$1/4-1/12=3/12-1/12=2/12=1/6$$

La multiplicación de fracciones 1/n por números enteros cuando n es un número par estaba resuelta por el método de duplicaciones:

$$1/2\times 2=1;1/4\times 2=1/2;1/6\times 2=1/3$$

$$1/2\times 3=1/2\times 2+1/2\times 1=$$
$$=1+1/2=1\,1/2$$

$$1/4\times 3=1/4\times 2+1/4\times 1=$$
$$=1/2+1/4=3/4$$

$$1/2\times 5=1/2\times 2+1/2\times 2+1/2\times 1=$$
$$=1+1+1/2$$

Cuando n es impar los egipcios utilizaban la tabla $2/n$ (tabla 2):

2/5 = 1/3 + 1/15	2/21 = 1/14 + 1/42
2/7 = 1/4 + 1/28	2/25 = 1/15 + 1/75
2/9 = 1/6 + 1/18	2/27 = 1/18 + 1/54
2/15 = 1/10 + 1/30	2/33 = 1/22 + 1/66

Tabla 2

La multiplicación de dos números fraccionarios se realizaba de la forma siguiente:

Problema 9 del Papiro Rhind

$$8/14\times 7/4=(1/2+1/14)\times(1+1/2+1/4)$$

1 .... 1/2 + 1/14

1/2 .... 1/4 + 1/28

1/4 .... 1/8 + 1/56

1 + 1/2 + 1/4 .... 1/2 + 1/4 + 1/8 + + 1/14 + 1/28 + 1/56

$$1/2+1/4+1/8=7/8;$$
$$1/14+1/28+1/56=1/8;$$
$$7/8+1/8=8/8=1$$

Las divisiones de fracciones entre si eran menos habituales, aunque podían realizarse por métodos de duplicaciones inversas.

Repartos iguales

El planteamiento de los matemáticos egipcios en el reparto de 2 objetos en 5 partes iguales podría argumentarse de la siguiente forma:

La primera subdivisión de 2 cosas en 5 partes lo más grandes posible implicaría dividir el primer objeto en tres partes iguales (1/3), y el segundo objeto de la misma manera (1/3), hasta un total de (5/3), quedando sin repartir 1/3 de uno de los objetos. La continuación del tercio sobrante en 5 partes iguales produciría 1/15 correspondiente al producto de $1/3\times 1/5$. Por ello 2/5 sería igual a la suma de ambos repartos: $1/3+1/15$.

Repartos desiguales

Los egipcios resolvían también problemas de repartos desiguales. Así en el problema 65 del «Papiro Rhind» se reparten 100 hogazas de pan entre la tripulación de un barco (patrón, jefe de tripulación, portero, y siete marineros) en proporciones jerarquizadas: el patrón, el jefe de tripulación y el portero reciben doble ración que cada uno de los siete marineros.

La forma de resolución es como si fueran 13 personas, contando doble ración a patrón, jefe de tripulación y portero: $7+2+2+2=13$ raciones.

El «Papiro Rhind» da como resultado 7 hogazas, 2/3 y 1/39 para cada marinero y 15 hogazas, 1/3, 1/26 y 1/78 para el patrón, el jefe de tripulación y el portero [18].

El «Papiro de Berlín» (Menu, 1982) [19] cita otro ejemplo de repartos desiguales complejos, en relación a los salarios del templo de Illahun, realizados en especie alimenticia (pan y cerveza) en raciones que oscilan desde 10 para el Director a 1/3 para los trabajadores, y asignaciones intermedias para sacerdotes, escribas, policías o vigilantes. El problema consistía en el cálculo del número de hogazas de pan y de jarras de cerveza a cada uno de los beneficiarios (tabla 3).

	Ración	*Pan*	*Cerveza*
Director	10	10×(1+2/3)=16+2/3	8+1/3
Sacerdote	3	3×(1+2/3)=5	2+1/2
Escriba	1+1/3	4/3×(1+2/3)=2+1/6+1/18	1+1/9
Policía	1	1×(1+2/3)= 1+2/3	1/2+1/3=2/3+1/6
Vigilante	2/3	2/3×(1+2/3)=1+1/9	1/2+1/18
Trabajador	1/3	1/3×(1+2/3)=5/9=1/2+1/18	1/4+1/36
Total	42	70; 70/42=1+28/42=1+4/6=1+2/3	35

Tabla 3

La estructura agraria de la sociedad egipcia daba gran importancia a los problemas de repartos de pan y cerveza, alimentos básicos, y al control de su producción. Los escribas establecieron una relación matemática entre el número de panes o jarras de cerveza que podían obtenerse de cada «heqat» de grano de cereal. Esta relación se denominó «psw» (pesu):

«psw» (pan) = n.º de panes/«heqats» de grano

«psw» (cerveza) = n.º de jarras/«heqats» de grano

En el *Papiro Bulaq,* del Imperio Medio, el «psw» de cerveza tenía el valor igual a 2. Posteriormente llegó a valores 2 3/4, en el *Segundo Periodo Intermedio* (Papiro Rhind). El valor del «psw» del pan osciló entre valores de 4,5 y 5 en las diversas etapas de la historia egipcia. Un parámetro inverso, el «htr», relacionaba el número de «heqats» de grano por cada pan o jarra de cerveza producidos.

En el *Papiro Rhind* y en el *Papiro de Moscú*[20] han aparecido diversos problemas con cálculos de estas relaciones de la forma siguiente:

3 1/2 heqats de grano hacen 80 panes. Obtener la cantidad de grano para producir cada pan, y el valor del «psw».

Los egipcios calculaban el «psw» dividiendo los 80 panes entre los 3 1/2 «heqats» de grano de la forma siguiente:

1×3 1/2 .... 3 1/2

10×3 1/2 35

20×1/2 70

2×3 1/2 7

2/3×3 1/2=2/3×7/2=
=7/3= 2 1/3

1/7×3 1/2=1/7×7/2=
=7/14= 1/2

1/21×3 1/2=1/21×7/2=
=7/42= 1/6

«psw»=20+2+2/3+
+1/7+1/21 .... 70+7+2 1/3+
+1/2+1/6=
=80[21]

La cantidad de grano en cada pan sería la razón inversa al «psw», el «htr», que los escribas egipcios calculaban dividiendo los 3 1/2 «heqats» de grano entre los 80 panes.

Algebra y geometría

El «Papiro de Moscú» plantea un problema sobre la obtención de las dimensiones de un rectángulo conocida su superficie y la relación entre la longitud y la anchura.

Un rectángulo de área 12 tiene de anchura 1/2 más 1/4 de la longitud. Calcula los lados del rectángulo.

$$L \times A = 12;\ A = (1/2 + 1/4)L;$$
$$(1/2 + 1/4)L \times L = 12;\ 3/4\,L^2 = 12;$$
$$3L^2 = 48;\ L^2 = 48/3 = 16;$$
$$L = \sqrt{16} = 4;\ A = 3/4\,L = 3/4\ 4 = 3$$
$$\text{Area} = 4 \times 3 = 12$$

El tratamiento del área del círculo se indica en el *Papiro Rhind* de la siguiente forma:

Calcular el área de un campo redondo de 900 codos de diámetro.

La solución se plantea así:

1) Tomar 1/9 del diámetro: 100 codos. El resto son 800 codos.
2) Multiplicar 800 veces 800. Resultado 64 «setat de tierra» (figura 7).

$$800 \times 800 = 640000 \text{ codos cuadrados} =$$
$$= 64 \text{ setat (1 setat 10000 codos cuadrados)}$$

Se divide cada lado en 3 partes iguales. Cada pequeño cuadrado tendrá:

$$300 \times 300 = 90000 \text{ codos cuadrados} =$$
$$= 9 \text{ setat}$$

Las cuatro esquinas son 2 cuadrados pequeños = 18 setat:

$$81 \text{ setat} - 18 \text{ setat} = 63 \text{ setat} \cong 64 \text{ setat}$$

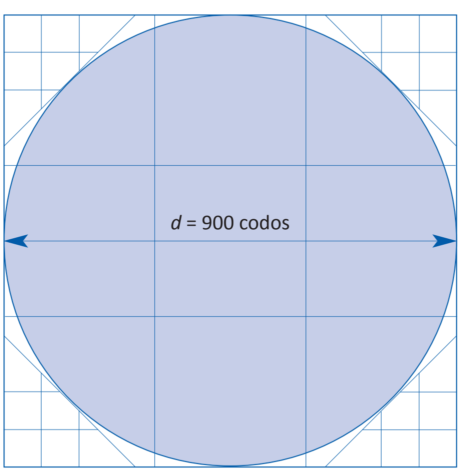


Figura 7

La cuadratura del círculo (medida de su área) era realizada por los egipcios de esta manera:

$$\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{63}{81} \cong \frac{(8)^2}{(9)^2}$$

$$\text{Área} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$$

Geometría de las pirámides

La geometría de los sólidos tuvo su aplicación en las dimensiones de las grandes pirámides del Imperio Antiguo. La falsa pirámide de Huni (faraón de la 3.ªª dinastía), construida en Maidum, cerca del oasis de El Fayum, fue una pirámide escalonada (figura 8). Snefru construyó la primera pirámide completa de base cuadrada, de 144 metros de lado y 95 metros de altura.

La pendiente de las caras laterales de las pirámides varía desde 43° 22' de la zona superior de la pirámide de Snefru a los 60° de la inconclusa pirámide de Djedefra, hijo de Keops, al norte de Gizeh. Las pendientes de las pirámides de Keops (51° 50'), Kefren (53° 7') y Micerinos (51° 20') son intermedias entre los valores extremos (Baines y Malek, 1992)[22].

Los egipcios medían la pendiente de las pirámides en «seked», correspondiente a la distancia horizontal de la mitad de la base respecto de la altura (número de palmos horizontales por cada codo de altura). (figura 9)

Un problema del *Papiro Rhind* calcula el «seked» de una pirámide de 360 codos de lado de la base y 250 codos de altura realizando las operaciones siguientes:

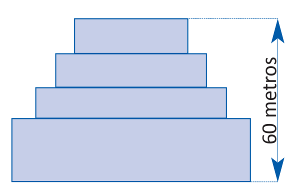


Figura 8

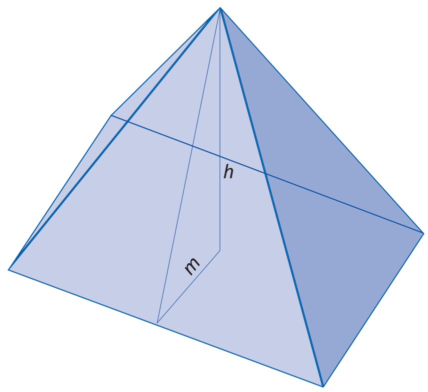


Figura 9

1) Divide el lado de la base por la mitad:

$$360 \times 1/2 = 180 \text{ codos}$$

2) Divide 180 entre la altura:

$$180/250 = 125 + 50 + 5/250 =$$
$$= 1/2 + 1/5 + 1/50 = 0{,}72$$

3) Multiplica $1/2 + 1/5 + 1/50$ por 7:

$$7/2 + 7/5 + 7/50 = 3{,}5 + 1{,}4 + 0{,}14 = 5{,}04$$

Los egipcios escriben 5 1/25

Otro problema del mismo Papiro calcula la altura de una pirámide cuyo lado de la base es 12 codos, si tiene un «seked» de 5 palmos y 1 dedo (5 1/4).

1) Multiplica por 2 el «seked» = 5 1/4 x 2 = 10 1/2
2) Divide 7 entre 10 1/2 = 7: 21/2 = 2/3
3) Multiplica 2/3 por 12 = 8 codos (altura de la pirámide)

Los dos problemas anteriores se resolverían desde los planteamientos actuales de la siguiente forma, teniendo en cuenta la definición egipcia del «seked» (figura 10)

seked = m/h (pendiente de la pirámide)

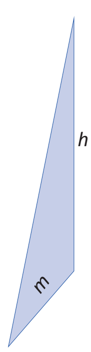


Figura 10

Problema 1

$l = 360$ codos; $h = 250$ codos

$m = 1/2 = 360/2 = 180$ codos

$m/h = 180/250 = 0{,}72$ codos

$0{,}73 \times 7 = 5{,}04 = 5\ 1/2$ palmos

Problema 2

$l = 12$ codos seked = 5 palmos y 1 dedo.

$m = 12$ codos$/2 = 6$ codos $= 42$ palmos

seked $= 5\ 1/4 = m/h = 42/\text{h}$

$h = 42/5\ 1/4 = 8$ codos

El volumen de las pirámides y su cálculo estaba relacionado con la cantidad de piedra necesaria para la construcción de estos monumentos funerarios, y con el número de trabajadores precisos para construirlos, además del alimento de estos trabajadores. Los escribas egipcios eran expertos en estas operaciones matemáticas.

Habían llegado a la conclusión de que el volumen de la pirámide era la tercera parte del volumen del paralelepípedo de igual base e igual altura (figura 11). Por ello el volumen de la pirámide era calculado igual que actualmente por 1/3 de la superficie de la base por la altura.

Los egipcios plantearon también los volúmenes de pirámides truncadas o troncos de pirámide, porque en muchos casos tenían interés especial por conocer el volumen hasta una cierta altura o el peso que debía soportar la cámara mortuoria del faraón, como en el caso de la pirámide de Keops, que estaba situada a los dos tercios de la altura total de la pirámide.

El Papiro de Moscú plantea el ejemplo del cálculo del volumen de un tronco de pirámide de 6 codos de altura y bases de 4 codos (inferior) y 2 codos (superior).

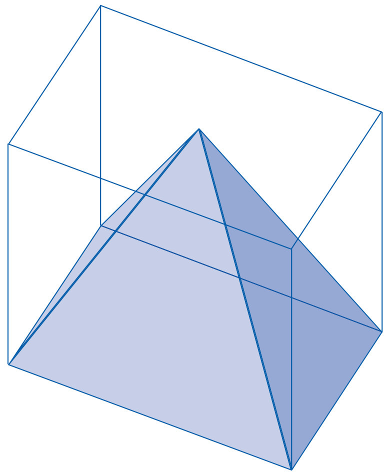


Figura 11

La solución se realiza de la siguiente manera:

1) Eleva 4 (base mayor) al cuadrado: resultado igual a 16.
2) Eleva 2 (base menor) al cuadrado: resultado igual a 4.
3) Toma 4 dos veces: resultado igual a 8.
4) Suma 16, 8 y 4: resultado igual a 28.
5) Divide 6 (altura) entre 3: resultado igual a 2.
6) Multiplica 28 por 2: resultado igual a 56 (volumen del tronco de pirámide).

Se ha supuesto que los egipcios calculaban el volumen de la pirámide truncada mediante la diferencia entre el volumen de la pirámide total y la pirámide pequeña, construida sobre la base menor (figura 12).

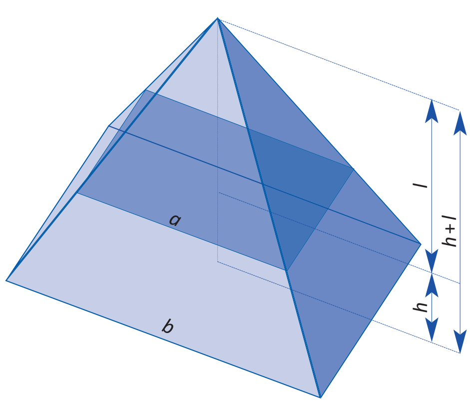


Figura 12

$$V = 1/3\, b^2(h+l) - 1/3\, a^2 l =$$
$$= 1/3\, b^2 h + 1/3\, b^2 l - 1/3\, a^2 l =$$
$$1/3\, b^2 h + 1/3\, l(b^2 - a^2)$$

En los casos en que la pirámide se truncara a la mitad de la altura: $h = l$ la formula general quedaría simplificada:

$$V = 1/3\, b^2 h + 1/3\, b^2 h - 1/3\, a^2 h = 1/3\, h(2b^2 - a^2)$$

como $b = 2a$

$$V = 1/3\, h\,(2 \cdot 4a^2 - a^2) = 1/3\, h(8a^2 - a^2) =$$
$$= 1/3\, h(7a^2) = 7/3\, ha^2$$

Esta expresión es la usada por los egipcios en el Papiro de Moscú.

Imperio nuevo

Hacia el año 1550 a. C. los príncipes tebanos se rebelaron contra los hicsos. Menfis y el Delta fueron conquistados en los años siguientes. El faraón Ahmosis unificó de nuevo el Alto y el Bajo Egipto y fundó la XVIII dinastía y con ella el Imperio Nuevo.

Se inició la expansión territorial por Nubia, Siria y Palestina, llegando hasta el río Eúfrates, en las fronteras del reino de Mitanni y el norte del actual Líbano y Siria (Aleppo, Karkemish, Qadesh). Se estabilizó la administración y se construyeron nuevos templos a los dioses. El constructor Inene dirigió las obras del templo de Amón en Karnak y de los lugares de enterramiento en el Valle de los Reyes, en las proximidades de la capital tebana.

En la corte de los faraones del Imperio Nuevo se reunió a constructores, artistas y científicos: el astrónomo Amenemhat construyó un reloj de agua, y se desarrolló un calendario con la fecha exacta de salida de la estrella Sirius, según se indica en el llamado «Papiro Ebers» (Hornung, 2003) [23]. También apareció una literatura sobre el «más allá», que cristalizó en el «Libro de los Muertos» y en la posterior revolución religiosa de Akhenaton.

Hacia 1350 a. C., llegó al poder Amenofis IV, que ha sido conocido con el nombre de Akhenaton.

Dio prioridad al dios solar Atón, iniciando la primera religión monoteísta de la Antigüedad. Akhenaton trasladó la capital a El Amarna, en el centro del país y produjo una revolución política y social sin precedentes en el valle del Nilo. (Aldred, 1983)[24] Su política interior y exterior fue totalmente pacifista, en comparación a la de sus antecesores.

Posteriormente se inició la XIX dinastía y un nuevo apogeo egipcio con Ramsés II, que se enfrentó a los hititas en la batalla de Qadesh (Siria). Después de esta batalla cada uno de los contendientes se consideró vencedor y se firmó un tratado de paz que fue respetado durante todo el reinado del faraón. Ramsés II aumentó el nivel de construcciones con nuevos templos en Karnak, Luxor y Abu Simbel, y gobernó Egipto hasta la edad de 90 años desde su nueva capital de Pi-Rameses, en el este del Delta. (Desroches Noblecourt, 1998)[25].

En esta época se plantearon problemas similares a los llamados de «pensar una cantidad», tal como aparecían en el *Papiro Rhind* (número 34), aunque con tratamiento más algebraico.

Los faraones posteriores a Ramsés II fueron llamados los «Ramesidas». El de mayor relevancia política fue Ramsés III, que contuvo las invasiones de los libios y de los «Pueblos del Mar». Posteriormente el país se hundió en la anarquía iniciándose el «Tercer Periodo Intermedio», que se mantuvo en Egipto durante cuatro siglos. En este tiempo el valle del Nilo fue ocupado por invasores libios y etíopes.

Matemáticas en el Imperio nuevo

La matemática egipcia del Imperio Nuevo no presentó grandes diferencias con etapas anteriores ni novedades técnicas en el conjunto de los problemas matemáticos desarrollados por los escribas egipcios.

En esta época se plantearon problemas similares a los llamados de «pensar una cantidad», tal como aparecían en el *Papiro Rhind* (número 34), aunque con tratamiento más algebraico (Maza, 2003)[26]:

Obtener una cantidad tal que ella, 1/2 de ella, y 1/4 añadidas juntas sean igual a 10.

Los egipcios lo resolvían en forma similar a los repartos desiguales a 1, 1/2 y 1/4, dividiendo 10 entre $(1+1/2+1/4)$:

La solución egipcia $5+1/7+4/7=5\ 5/7$ es la obtenida actualmente mediante un planteamiento algebraico:

En el *Papiro de Berlín* se han encontrado formas algebraicas similares a una ecuación de primer grado y otra de segundo grado. Transcritas de forma moderna serían expresadas así:

$$4x-3y=0$$
$$x^2+y^2=100$$

El conjunto de ambas establece un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelto daría los valores:

$$x=6$$
$$y=8$$

Los egipcios llegaron a plantear y resolver problemas de progresiones aritméticas (ejercicio 64 del Papiro Rhind):

Dividir 10 heqats de grano entre 10 hombres de forma que la diferencia entre cada uno sea de 1/8 de heqat.

10: 10 = 1 heqat por individuo;

diferencia = 1/8: 2 = 1/16;

$1/16 \times 9$ intervalos $= 9/16 = 1/2 + 1/16$.

Las soluciones obtenidas en el *Papiro Rhind* eran las siguientes:

$$1/4+1/8+1/16=7/16$$
$$1/2+1/16=9/16$$
$$1/2+1/8+1/16=11/16$$
$$1/2+1/4+1/16=13/16$$
$$1/2+1/4+1/8+1/16=15/16$$

$$1+1/16=17/16$$

$$1+1/8+1/16=19/16$$

$$1+1/4+1/16=21/16$$

$$1+1/4+1/8+1/16=23/16$$

$$1+1/2+1/16=25/16$$

$$7/16+9/16+11/16+13/16+15/16+ \\ +17/16+19/16+21/16+ \\ +23/16+25/16=160/16=10$$

La solución actual:

$$a+(a+1/8)+(a+2/8)+(a+3/8)+\ldots \\ \ldots+(a+9/8)=10$$

$$10a+45/8=10$$

$$a=(10-45/8)/10=1-45/80= \\ =1-9/16=7/16$$

y los valores de los diversos términos de la progresión:

$$7/16;\ 9/16;\ 11/16;\ \ldots;\ 25/16$$

igual que los obtenidos por los egipcios (Gheverghese, 1996)[27].

De igual forma en el ejercicio 79 del *Papiro Rhind* se plantean también otros tipos de progresiones:

Calcular la suma de los elementos de una progresión geométrica de 5 términos, razón 7 y primer término igual a 7.

Las soluciones que se indican son:

$$7,\ 49,\ 343,\ 2401 \text{ y } 16807$$

y la suma pedida es igual a:

$$7+49+343+2401+16807=19607$$

Últimos tiempos

El final del «Tercer Periodo Intermedio» se produjo con la invasión de Egipto por los asirios en el año 669 a. C. El rey asirio Assaradón conquistó Menfis y nombró gobernador del Bajo Egipto al príncipe saita Necao. Una revuelta iniciada en el Alto Egipto a la muerte de Assaradón expulsó temporalmente a los asirios, pero el nuevo monarca asirio Assurbanipal conquistó de nuevo la ciudad de Tebas. Psamético I, hijo de Necao, derrotó definitivamente a los asirios iniciando el esplendoroso «Periodo Saita».

Los faraones saitas reinaron en Egipto hasta el año 525 a. C. y realizaron una política de modernización del país, y de relaciones comerciales con fenicios y griegos. Durante los reinados de Psamético I, Necao II y Psamético II los marinos griegos fundaron la factoría comercial de Neucratis en el Delta occidental y la colonia de Cirene en Líbia. Necao II ocupó Siria y Palestina y derrotó a los israelitas en la batalla de Megiddo. Con el Imperio Neobabilónico de Nabucodonosor II mantuvo relaciones pacíficas y amistosas.

En la época saita se reformó el lenguaje de los contratos jurídicos y se inició la escritura demótica. La influencia científica de los griegos en el mar Mediterraneo produjo la geometría de Tales y Pitágoras, posibles viajeros en Egipto y Mesopotamia, y la medicina de la Escuela de Sais. Se han relacionado los conocimientos de Hipócrates con tratados ginecológicos de esta Escuela. También se produjo un incipiente desarrollo de conocimientos alquímicos que se aplicarían posteriormente en la época de los Ptolomeos (Pérez Largacha, 2006)[28].

A la muerte de Amasis el rey persa Cambises II invadió Egipto transformando el valle del Nilo en una satrapía persa. Egipto se independizó de los persas durante 60 años, después de las guerras entre griegos y persas (guerras médicas), y fue regido de nuevo por soberanos egipcios, entre los que destacaron Amirteo, Nectanebo I y Nectanebo II. En el año 343 a. C., los persas reconquistaron Egipto, aunque esta etapa sólo duró 10 años. Alejandro Magno entró en Egipto antes de la conquista definitiva de todo el Imperio Persa.

A la muerte de Alejandro Magno, después de sus incursiones guerreras en Bactria y la India, se desmembró el Imperio formado y se repartió entre sus generales. Egipto pasó a ser regido por Ptolomeo, inicialmente como gobernador y posteriormente como monarca absoluto. La capital pasó a la ciudad mediterránea de Alejandría, construida por Alejandro y depositaria de su mausoleo, que fue además la capital cultural de toda la época helenística, heredera de la cultura griega a través de sus dos grandes instituciones: el Museo y la Biblioteca.

La influencia científica de los griegos en el mar Mediterráneo produjo la geometría de Tales y Pitágoras.

La ciencia y la matemática florecieron en la helenística Alejandría desde los reinados de Ptolomeo III y Ptolomeo IV, durante los dos últimos siglos del mundo antiguo antes de nuestra Era, con Aristarco y Herón, aunque estas aportaciones han sido consideradas culturalmente pertenecientes al mundo griego y no egipcio.

Referencias bibliográficas

Baines, J., y J. Malek (1992), *Egipto, dioses, templos y faraones,* del Prado, Madrid.

Gasse, A. (1988), *Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l'organisation du domaine d'Amon,* vol. 1, Institute français d'archéologie du Caire, El Cairo.

Gherverhese, G. *(1996), La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas,* Pirámide, Barcelona.

Gillings, R. J. (1972), *Mathematics in the Time of the Pharaohs,* Dover Publications, Nueva York.

Ifrah, G. (1987), *Las cifras. Historia de una gran invención,* Alianza, Madrid.

Ivesen, E. (1975), *Canon and proportions in Egyptian art,* Aris and Phillips, Warminster.

Maza, C. (2000), *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico,* Universidad de Sevilla, Sevilla.

— (2003), *Las matemáticas en el antiguo Egipto,* Universidad de Sevilla, Sevilla.

Menu, B. (1982), *Recherches sur l'histoire juridique, economique et social de l'Ancienne Egypte,* Versalles, París.

Neugebauer, O. (1962), *The exact Sciences in Antiquity* (2.ª ed.), Harper Torchbook, Nueva York.

Robins, G., y C. Shute (1998), *The Rhind Mathematical Papyrus,* British Museum Press, Londres.

Sánchez Rodríguez, A. (2000), *Astronomía y Matemáticas en el antiguo Egipto,* Aldebarán, Madrid.

José C. Illana Rubio
Inspección de Educación de Madrid Capital
<joscleirubeta@yahoo.es>

1 Expresión citada por Herodoto en su viaje a Egipto en el siglo v a. C. (*Historia. Libro II,* 4-5). También la considera Arriano en Anabasis, pp. 6-5.

2 C. Maza, en *Las matemáticas en el antiguo Egipto,* p. 68, cita estos primeros intentos de representación simbólico-numérica de animales y prisioneros apresados en la estela de Narmer y en la estatua de Jasejemuy, algunos de los primeros faraones.

3 En «las cifras de la civilización de los faraones», capítulo 14 de *Historia Universal de las cifras*, p. 399, G. Ifrah describe ampliamente las cifras jeroglíficas, su origen religioso y su uso por los escribas desde el Imperio antiguo.

4 Se cita en un texto de Herodoto (*Historia. Libro II,* 99), sobre «Menes y la fundación de Menfis». Tomado de F. Lara, en *El Egipto faraónico,* p. 34.

5 Tablas para la adición, la multiplicación y la división pueden verse en *Mathematics in the time of the pharaohs,* p. 13, de R. J. Gillings.

6 C. Maza, en *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico,* p. 83, expone ejemplos sencillos de las operaciones aritméticas elementales.

7 El *Papiro Westcar* es citado por Barry J. Kemp al describir los faraones de la 4.ª y 5.ª dinastías. *El Antiguo Egipto: anatomía de una civilización*, p. 56.

8 El codo corto equivalía a 45 cm. Y el codo real a 52,3 cm. El codo corto correspondía a 6 palmos (longitud del antebrazo desde el codo a la punta del dedo medio). E. Iversen lo indica en *Canon and proportions in Egyptian art.*

9 R. J. Gillings considera la unidad de longitud «dobleremen» equivalente a diez palmos. *Mathematics in the time of the pharaohs,* p. 208.

10 En el problema n.º 51 del *Papiro Rhind* se utiliza la unidad de longitud «khet» equivalente a 100 codos y 52.5 m. G. Robins y C. Shute lo indican en *The Rhind Papyrus, an ancient egyptian text* en el que describen la historia del papiro, los diversos problemas resueltos, las unidades de medida, las operaciones aritméticas elementales, las operaciones con fracciones y cálculos algebraicos y geométricos.

11 A. Gasse usa la unidad de superficie «setat» en *Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l´organisation du domaine d'Amon,* en donde describe las extensas posesiones agrícolas de los templos egipcios.

12 Según C. Maza, op. cit. p. 84.

13 Rhind Mathematical Papyrus (RMP). British Museum. Citado por R. J. Gillings, op. cit. pg. 210.

14 Según E. Hornung en *Historia de Egipto,* p. 25.

15 *Moscow Mathematical Papyrus (MMP):* Moscow Museum of Fine Arts, n.º 4576.

16 O. Neugebauer ha descrito el uso y las operaciones con fracciones generalmente unitarias en *The exact Sciences in Antiquity.*

17 La sustracción de fracciones está tratada por R. J. Gillings, op. cit. p. 43.

18 Puede observarse que:

$$1/26+1/78=3/78+1/78=4/78=2/39$$
$$\text{y } (7+2/3)\times 2=14+4/3=15+1/3$$

19 B. Menu en *Recherches sur l'histoire juridique, economique et social de l'Ancienne Egypte* cita el *Papiro de Berlín* en el tratamiento específico de repartos de raciones en los templos egipcios. *Berlin Papyrus,* Staatliche Museum zu Berlin, Catalogue n.º 6619.

20 Citados por R. J. Gillings, op. cit. pp. 128-136.

21 Ya que:

$$70+7+2\ 1/3+1/2+1/6=77+7/3+1/2+1/6=$$
$$=77+14/6+3/6+1/6=77+18/6=77+3=780$$

y el «psw» obtenido 22 2/3 1/7 1/21 tal como lo escribían los egipcios; que corresponde al valor 22,857 calculado actualmente.

22 J. Baines y J. Malek en *Egipto, dioses, templos y faraones* citan los valores de las pendientes de las caras laterales de las pirámides de diversos faraones.

23 La primera aparición de la estrella Sotis (Sirio) y la cronología del Imperio Nuevo se describe en el *Papiro Ebers*. Citado por E. Hornung, op. cit. p. 96.

24 C. Aldred en *Akhenaton* ha recreado lo acontecido en Egipto durante el reinado del faraón monoteista.

25 La vida del faraón Ramsés II ha sido descrita en forma exhaustiva por la egiptóloga francesa C. Desroches Noblecourt en *Ramsés II. La verdadera historia*.

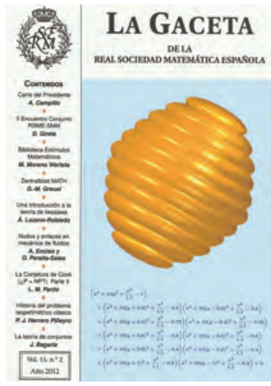
26 Problemas de ecuaciones lineales resueltos mediante divisiones en repartos desiguales, con un tratamiento algebraico más desarrollado que en el *Papiro Rhind* se han citado por C. Maza, op. cit. pg. 200.

27 George Gheverghese en *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas* describe problemas de progresiones aritméticas y geométricas desarrollados por los egipcios en el *Papiro Rhind.*

28 A. Pérez Largacha en *Historia antigua de Egipto y del Próximo Oriente* describe el «Renacimiento Saita» en Egipto entre los años 664 y 525 a. C.

Publicaciones recibidas (1)

La Gaceta
de la Real Sociedad
Matemática Española
RSME
Vol. 15, nº. 2, 2012
ISSN 1138-8927

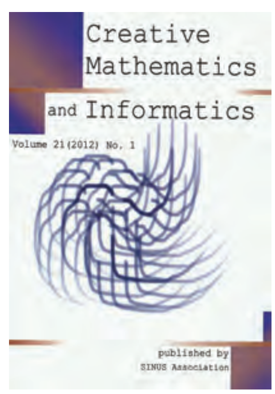


Nou Biaix
FEEMCAT-SCM
Núm. 31
Juny 2012
ISSN 1133-4282

Llull
Revista de la Sociedad Española
de las Ciencias y las Técnicas
Vol. 35 (nº. 75)
2012
SEHCYT
Zaragoza
ISSN 0210-8615

Epsilon
SAEM THALES
79, Vol. 28 (3)
2011
ISSN 1131-9321

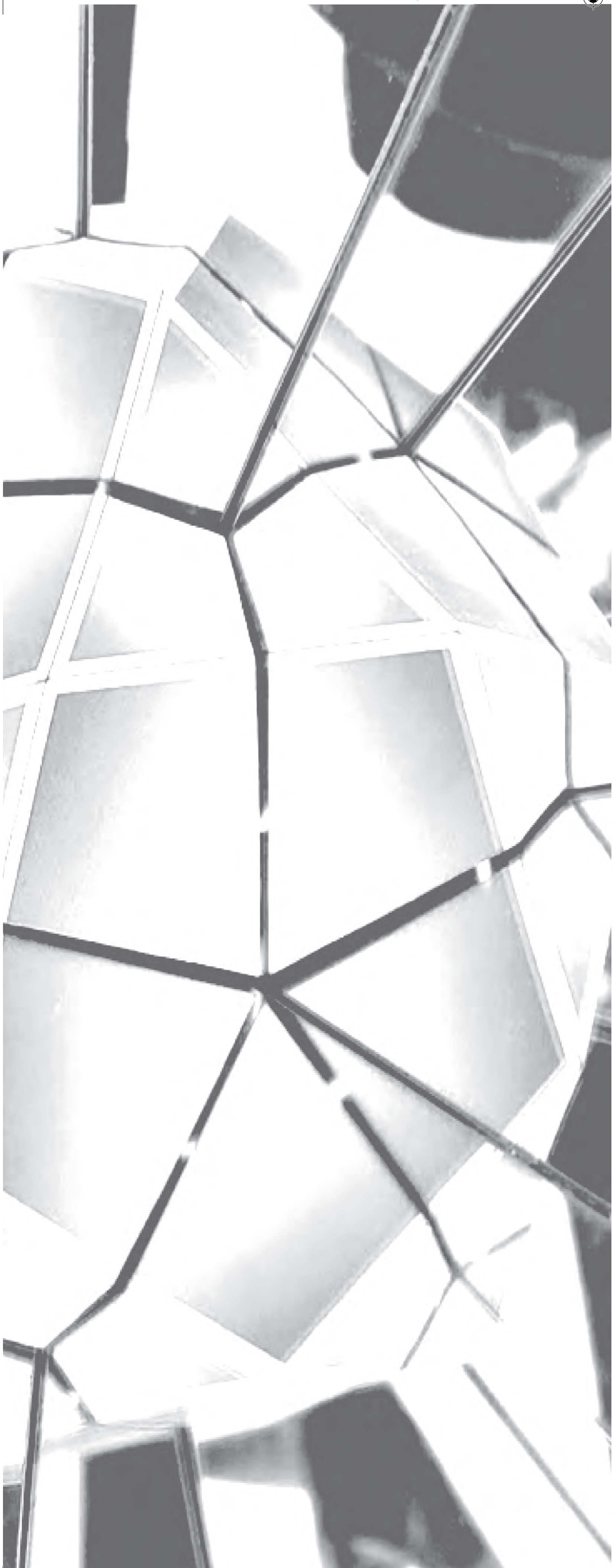
Boletín das ciencias
ENCIGA
Asociación dos Ensinantes
de Galicia
Vol. 74
Maio, 2012
Santiago de Compostela
ISSN 0214-7807



Creative Mathematics
and Informatics
Department of Mathematics
and Computer Science
North University
of Baia Mare
Romania
Vol. 21, nº. 1, 2012
ISSN 1584-286X

Educaçao e Matemática
Revista da Associaçao
de Professores de Matemática
Nº. 117
Março-Abril 2012
Lisboa
ISSN 0871-7222

Investigación
y Ciencia
Nº. 429
Junio 2012
Prensa Científica, SA
Barcelona
ISSN 02210136X



suma+ 71

secciones

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 65-74

Puzzles de equivalencias

Grupo Alquerque de Sevilla

Juegos

El estudio de la Geometría tiene la particularidad de que cuando encuentras respuestas a un problema éstas te plantean nuevas preguntas e investigaciones. El tema que traemos hoy aquí es continuación de otros artículos que hemos presentado ya en esta sección. En concreto, el encontrar puzzles de figuras con el mismo área y distinta forma ya lo trabajamos en los números 48 (en 2005), 65 (en 2010) y 66 (en 2011) (véase bibliografía) de esta revista.

Al terminar el trabajo de las cuadraturas se nos despertó la curiosidad por buscar diferentes polígonos que se pudieran dividir en un número finito de piezas y que al recomponerlas adecuadamente se obtuviese otro polígono distinto. Pero en este caso descartábamos que alguna de las dos figuras fuese un cuadrado, pues ese caso estaba ampliamente trabajado.

Como indicábamos en el anterior artículo de cuadraturas, el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein dice que:

> Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro[1].

Después de ver la web de Gavin Theobald, donde muestra que este tema es inagotable, limitamos la

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

investigación al intercambio entre triángulo, pentágono y hexágono.

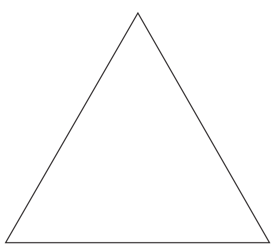
El punto de partida de este estudio fue: ¿Qué método de división o proceso de disección hay que seguir para obtener las piezas adecuadas de forma que partiendo de uno de los polígonos podamos construir el otro?

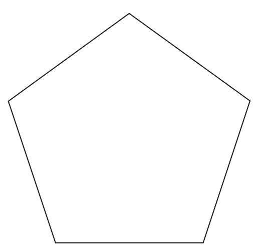
El método que hemos seguido es el de superposición de polígonos o trama de polígonos, con unos puntos de coincidencias y un ángulo de giro en uno de ellos, buscando que las divisiones que se producen entre los polígonos nos den las piezas necesarias, tratando de que sean las menos posibles.

En este proceso el rectángulo y el romboide son los polígonos más fáciles de superponer y de comparar sus áreas. Por eso, hemos transformado el triángulo, el pentágono y el hexágono en romboides.

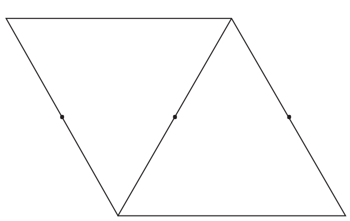
Triángulo-pentágono

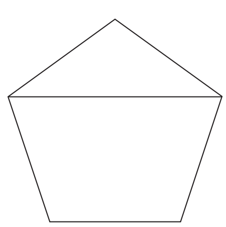
Partimos de un triángulo equilátero y un pentágono regular que tienen igual área.

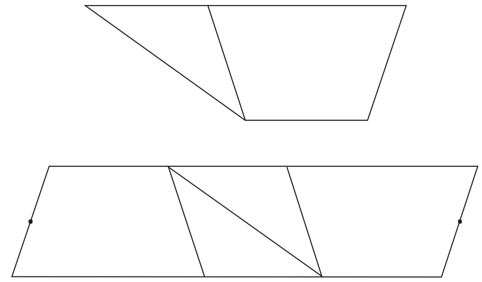




Para obtener un romboide a partir del triángulo hemos unido dos de ellos por un lado. Como hemos duplicado el área, tenemos que construir un romboide que provenga del pentágono, pero también con doble superficie.

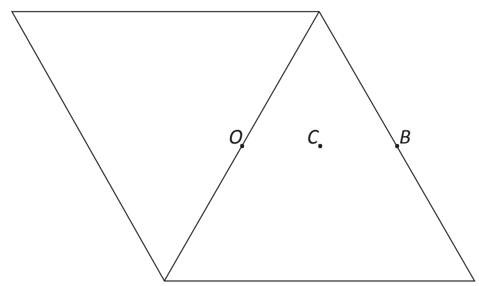




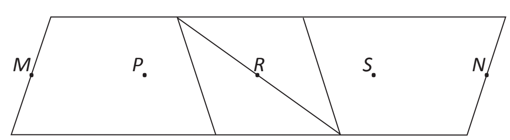


Y ahora viene la pregunta más importante en el proceso de esta investigación: ¿Al superponer los romboides, qué puntos hacemos coincidir y qué ángulo de giro les damos?

La respuesta anterior tiene infinidad de soluciones, por lo que hay que escoger alguna de ellas. Por eso, en el triángulo hemos señalado los puntos medios de dos lados contiguos (*O* y *B*) y el punto medio del segmento que forman (*C*).



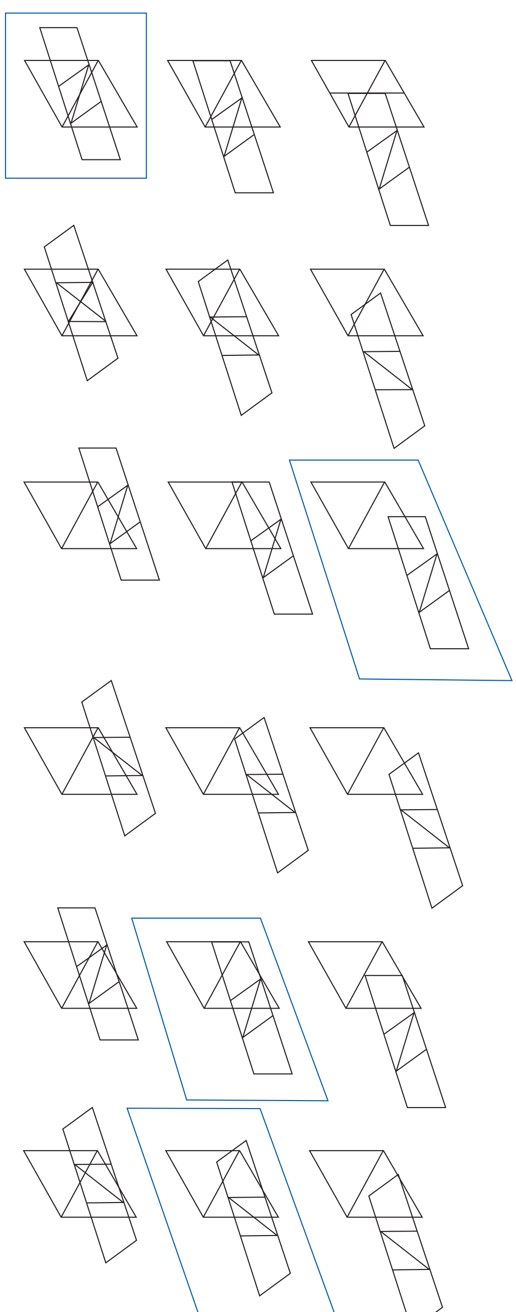
En los romboides que obtenemos a partir de dos pentágonos hemos hecho algo similar: se han señalado los puntos medios de los lados más cortos (*M, N*), el punto medio entre estos dos (*R*) y el punto medio entre este último y los dos primeros (*P, S*).



Nos falta por decidir el ángulo de giro. En nuestro estudio y después de algunas pruebas, decidimos escoger el de 72° (suplementario de 108º, ángulo interior del pentágono regular).

Estudiando todas las posibilidades de superponer los romboides y variando el sentido de orientación del romboide construido a partir del pentágono hemos encontrado 18 disposiciones distintas, haciendo coincidir en cada caso uno de los puntos *O, B, C* con uno de los puntos *R, P* y *M*.

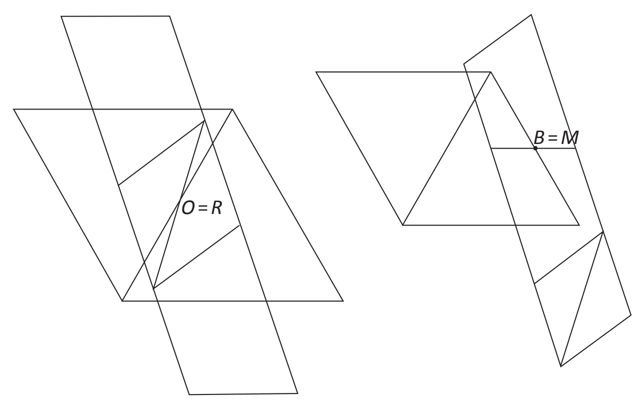
Están enmarcadas las imágenes que nos dan algunas de las soluciones que desarrollamos a continuación.



Superposición de romboides

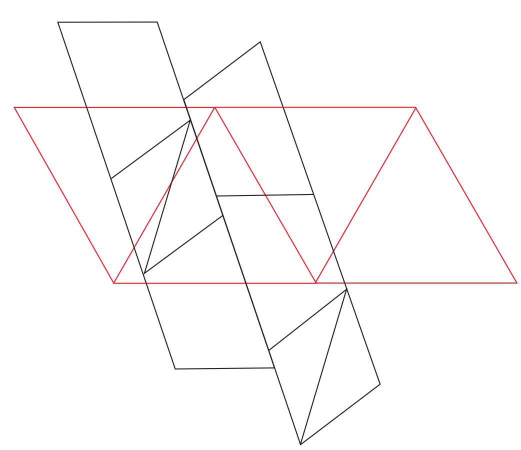
Primera disección

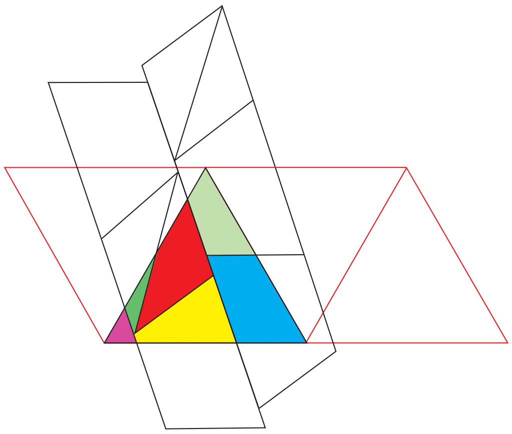
Observamos que al superponer los romboides coincidiendo en el punto *O*, cualquiera de los puntos *R, P* o *M* se divide la parte izquierda del triángulo (dibujos de primera y segunda fila) y al hacer coincidir en el punto *B* (dibujos de la tercera y cuarta fila) se divide la parte derecha, por lo que para dividir plenamente al triángulo se necesitará una división de cada lado. De esas 12 disposiciones nos dan solución al problema las dos que aparecen en la imagen siguiente.

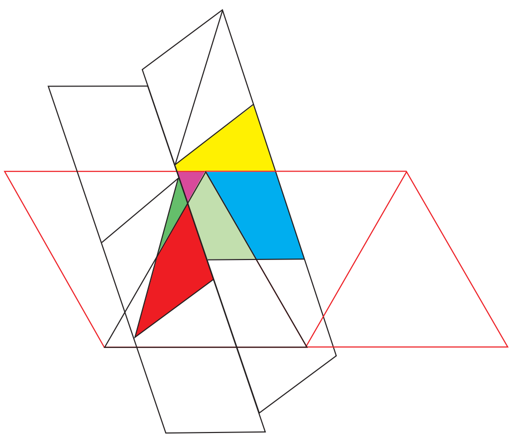


De la primera fila hemos tomado la superposición donde coinciden los puntos *O* y *R*. De la tercera fila aquella en que coinciden *B* y *M*. En este dibujo hemos cambiado de sitio uno de los trapecios para ver claramente la división que produce sobre la parte derecha del triángulo.

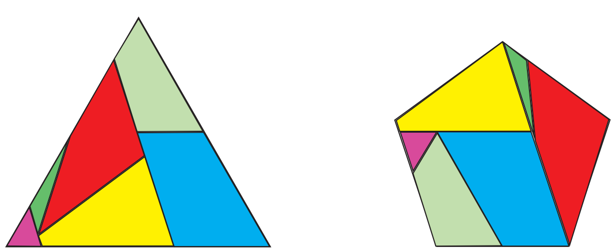
Unimos los dos dibujos en uno y tenemos el triángulo y el pentágono divididos en seis piezas que podemos ver claramente en las imágenes coloreadas.





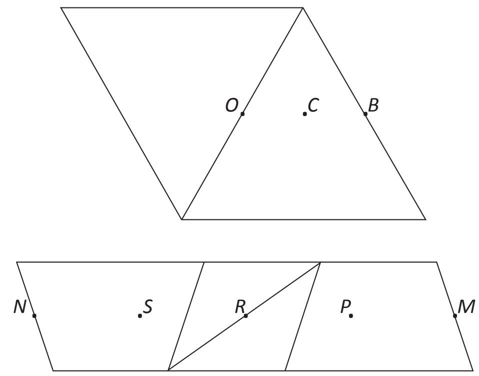


A continuación tenemos el triángulo equilátero y el pentágono regular de igual área divididos en las mismas piezas (seis):

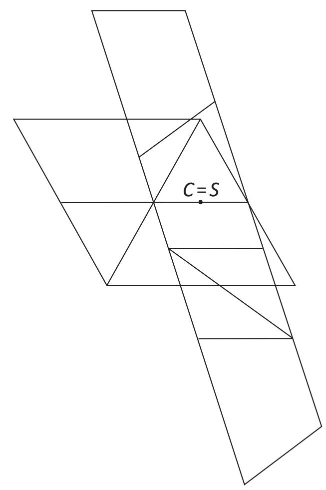


De las otras seis posibilidades, correspondientes a la superposición de romboides, haciendo coincidir el punto *C* del romboide de los triángulos con los puntos *S* o P del romboide de los pentágonos y girando el romboide de los pentágonos 72° con centro en el punto *C* y en sentido de las agujas del reloj, obtenemos otras dos nuevas disecciones.

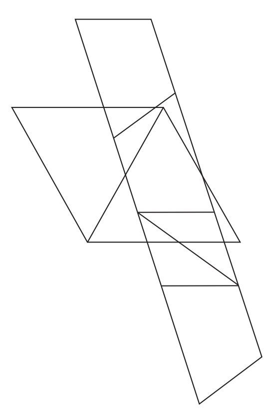
Segunda disección

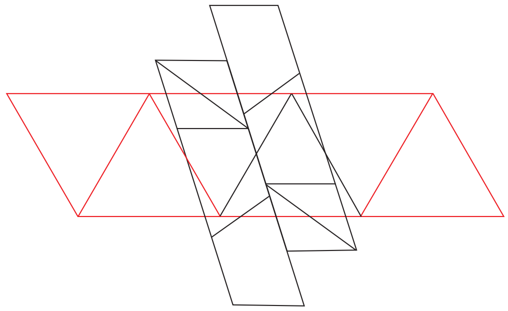


Hacemos coincidir el punto *C* con *S*.

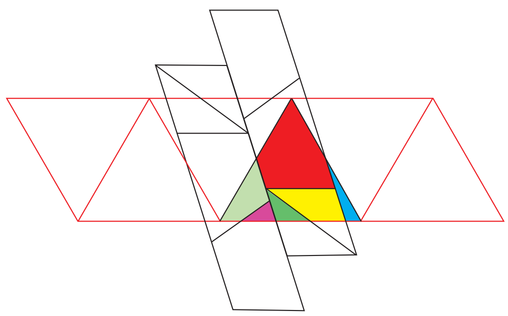


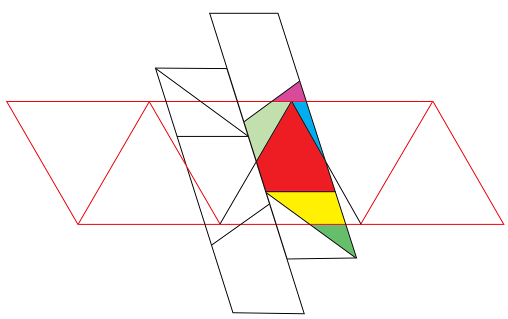
Los romboides del triángulo y del pentágono han quedado divididos en partes. Para ver bien las partes que se obtienen añadimos un trapecio en la parte superior y superponemos otro romboide de pentágono paralelo al anterior.



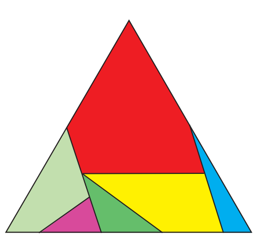


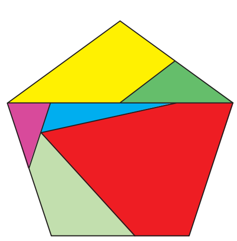
El triángulo y el trapecio que se obtuvo al dividir el pentágono han quedado divididos en seis piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.



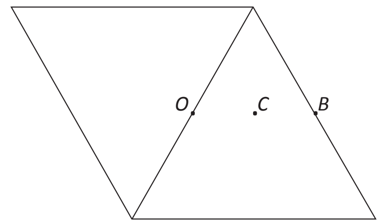


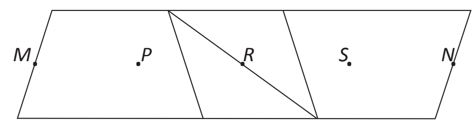
A continuación tenemos una nueva disección del triángulo equilátero y del pentágono regular de igual área divididos en las mismas piezas (seis):



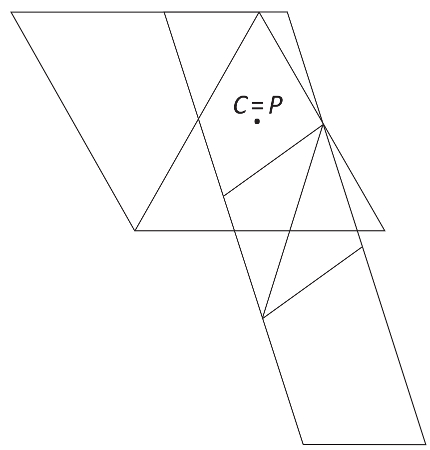


Tercera disección

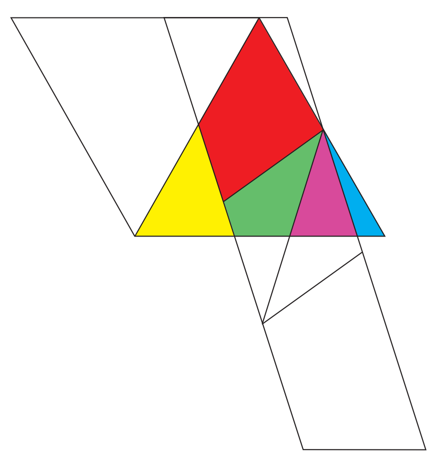


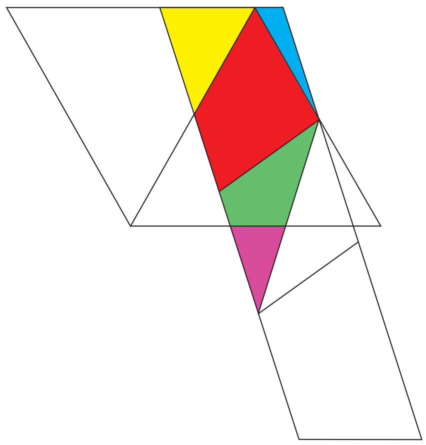


Si superponemos los dos romboides, haciendo coincidir el punto *C* del romboide de los triángulos con el punto *P* del romboide de los pentágonos y el romboide de los pentágonos lo hacemos girar 72° con centro en el punto *P* y en sentido de las agujas del reloj, obtenemos:

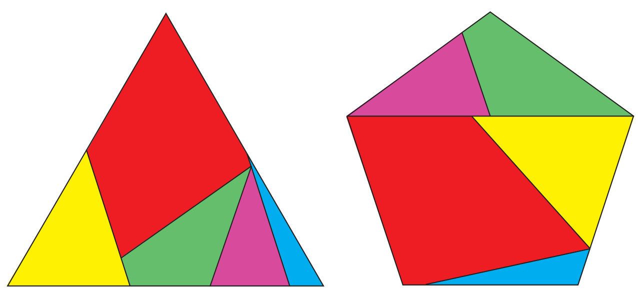


El triángulo y el trapecio que se obtuvo al dividir el pentágono han quedado divididos en cinco piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.



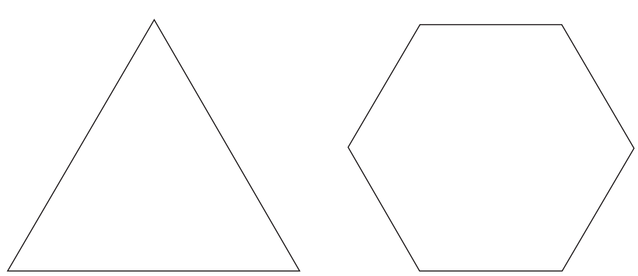


A continuación tenemos otra disección tanto del triángulo equilátero como del pentágono regular en las mismas piezas (en este caso cinco):

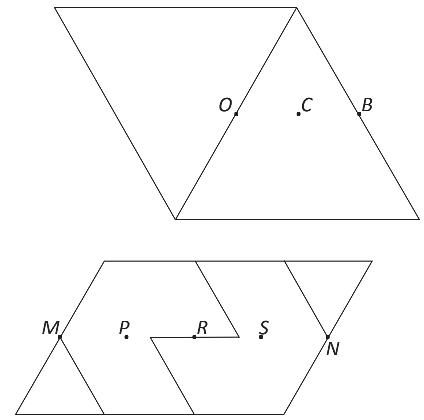


Triángulo-hexágono

Partimos de un triángulo equilátero y un hexágono regular que tienen igual área.



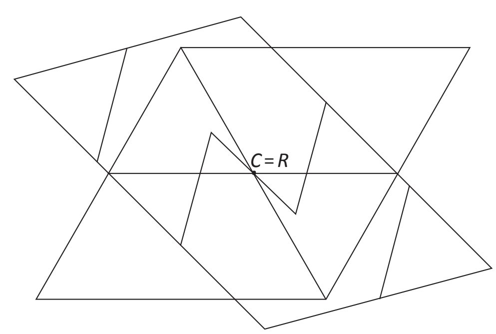
Convertimos tanto el triángulo como el hexágono en romboides. Para ello tomamos dos polígonos de cada tipo y formamos los siguientes romboides.



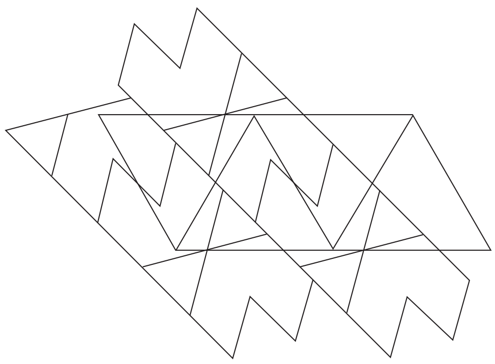
Siguiendo el mismo método de superposición de romboides, en el triángulo hemos señalado los puntos medios de dos lados contiguos (*O* y *B*) y el punto medio del segmento que ellos determinan (*C*); y en el romboide que obtenemos a partir de hexágonos, hemos hecho algo similar: se han señalado los puntos medios de los lados más cortos y enfrentados (*M, N*), el punto medio entre estos dos (*R*) y el punto medio entre este último y los dos primeros (*P* y *S*).

Después de muchas pruebas el mejor ángulo de giro que hemos encontrado es el de 45°.

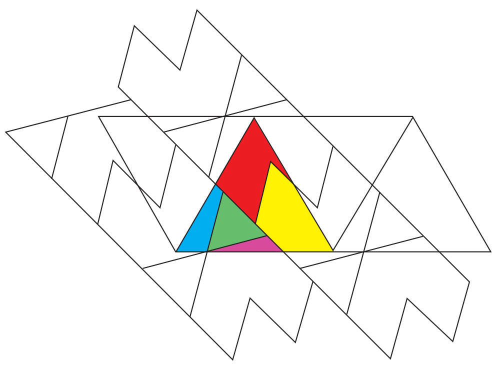
La solución más clara y con menos piezas la obtenemos al superponer y hacer coincidir el punto *C* del triángulo y el punto *R* del romboide de hexágonos.

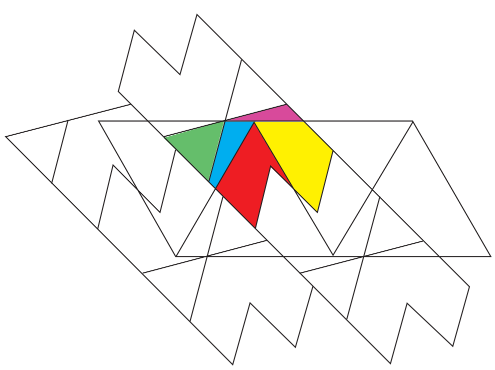


Para distinguir mejor las piezas en que queda la disección, añadimos algunos polígonos más.

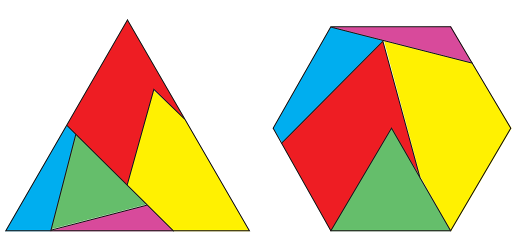


El triángulo y el hexágono quedan divididos en cinco piezas que podemos ver claramente en las siguientes imágenes coloreadas.



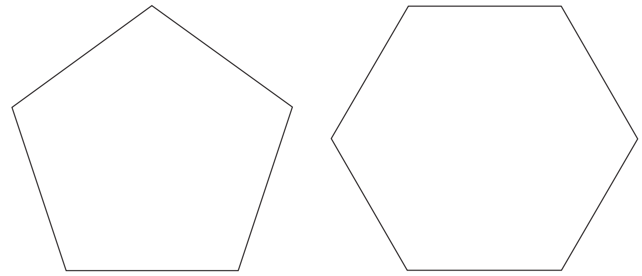


El triángulo queda dividido en cinco partes que colocándolas adecuadamente dan lugar al hexágono regular de igual área.



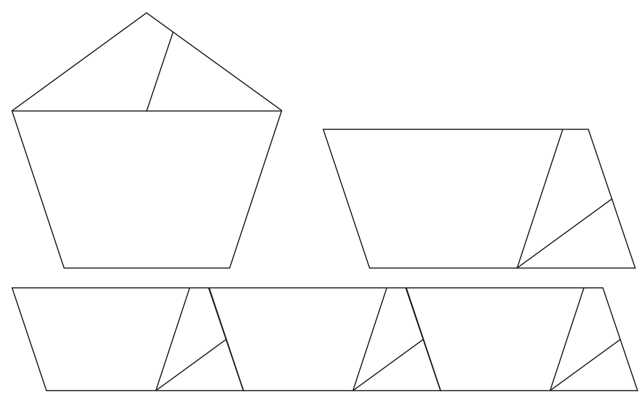
Pentágono-hexágono

Partimos de un pentágono regular y un hexágono regular que tienen igual área.

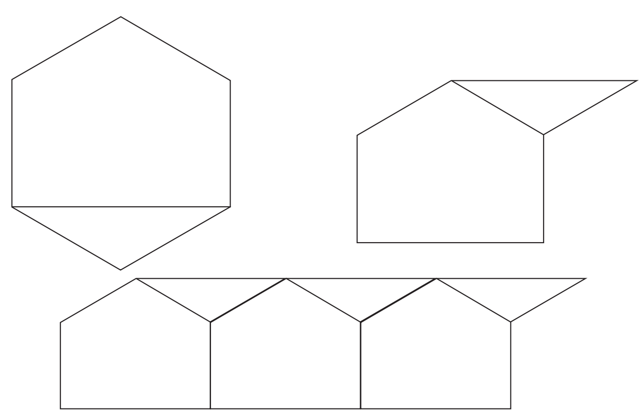


Dividimos el pentágono y el hexágono en las partes necesarias para crear unas tiras que teselen el plano. Para ello realizamos los siguientes pasos:

El pentágono lo dividimos en un trapecio isósceles y un triángulo también isósceles. El triángulo lo dividimos en dos partes trazando un segmento desde el punto medio de la base y paralelo a uno de los lados iguales del trapecio que nos ha salido anteriormente. Después reordenamos los tres polígonos obtenidos formando un romboide.



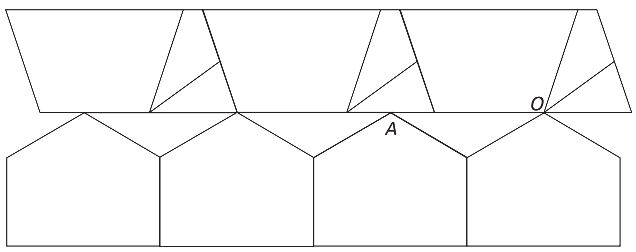
El hexágono lo dividimos en un pentágono (no regular) y un triángulo, que después reordenamos.



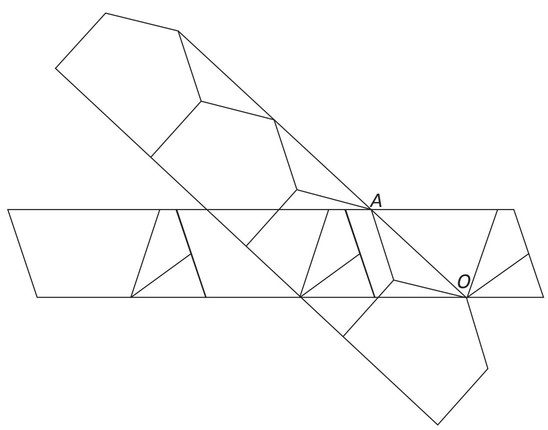
Con estas tiras de teselación podemos obtener dos tipos de disecciones.

Primera disección

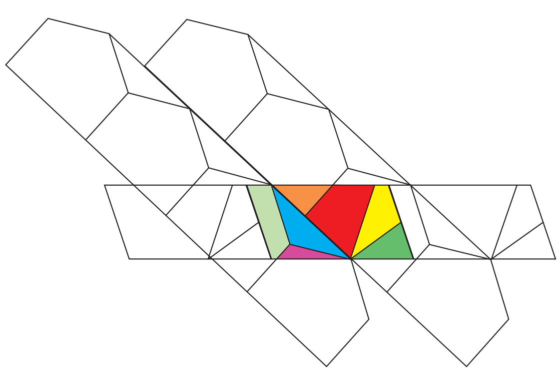
Colocamos las tiras como muestra la imagen, haciéndolas coincidir en el punto *O*, vértice en las tiras de teselación.

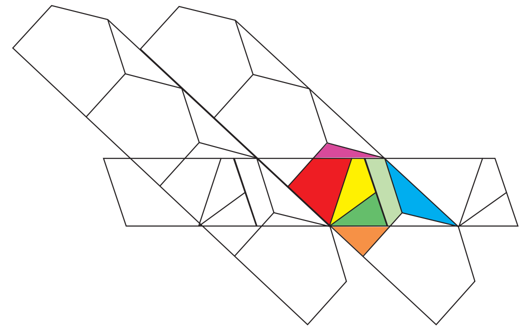


La tira de proveniente de los hexágonos la hacemos girar 43° con centro en el punto *O* y en sentido de las agujas del reloj, que es el ángulo que nos hace coincidir el punto *A* con un punto de la base mayor del trapecio que contiene las tiras de los pentágonos.

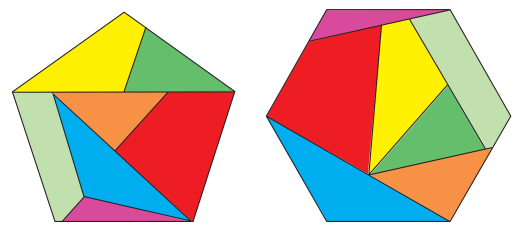


Para distinguir bien las partes en que se divide el pentágono, añadimos otra tira de hexágonos y coloreamos las piezas.

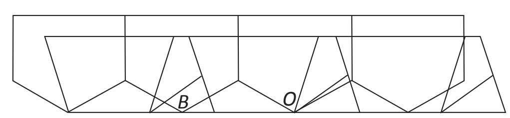




Se obtienen siete piezas que colocándolas adecuadamente dan lugar tanto a un pentágono regular como a un hexágono regular.

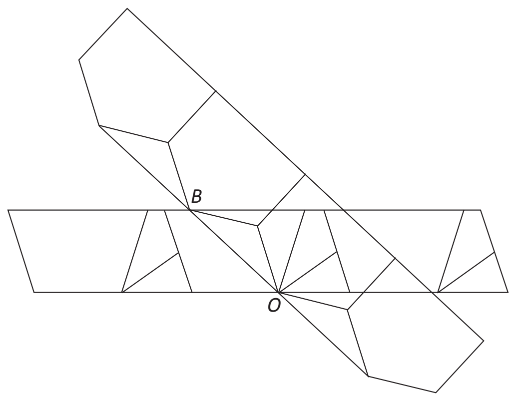


Segunda disección

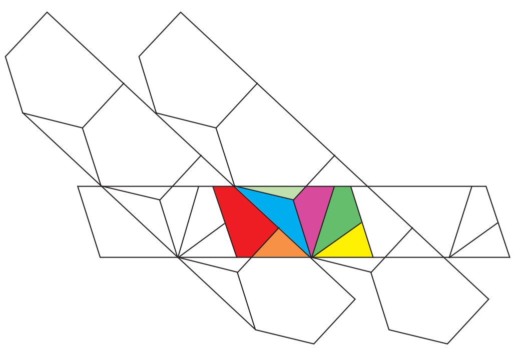


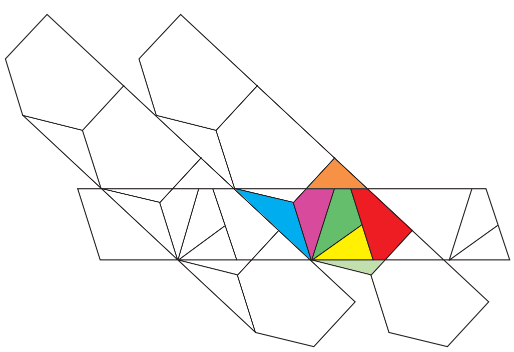
Disponemos las tiras como muestra la imagen, haciéndolas coincidir en el punto *O*. Como puede apreciarse lo que hacemos es situar las dos piezas anteriores de la misma forma, pero girando 180° la correspondiente a los hexágonos.

La tira de hexágonos la hacemos girar 43º con centro en el punto O y en sentido de las agujas del reloj, pues es el ángulo que nos hace coincidir el punto B con un punto de la base mayor del trapecio que contiene las tiras de los pentágonos.

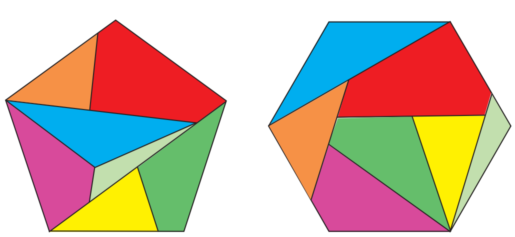


Para distinguir bien las partes en que se divide el pentágono, añadimos otra tira de hexágonos y coloreamos las piezas.





Se obtienen siete piezas que colocándolas adecuadamente dan lugar tanto a un pentágono regular como a un hexágono regular.



Trabajo en clase

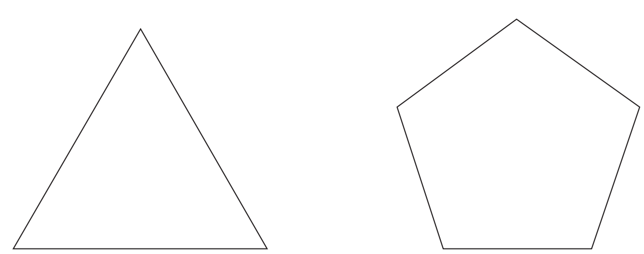
Volvemos a comentar que se puede poner la Tecnología al servicio de las Matemáticas o las Matemáticas al servicio de la Tecnología. Para nuestros compañeros tecnólogos puede ser un buen proyecto de trabajo el construir los puzzles a partir de una plantilla del polígono en papel.

Las plantillas pueden ser copiadas en cartulina, cartoncillo, cartón pluma, goma eva, panel, que es también muy fácil de cortar con un cutter o, mucho mejor, en madera, para su posterior corte con la sierra de marquetería, lijado, pintado y barnizado, quedando unos estupendos puzzles para su manipulación.

Al jugar con las piezas obtenidas en las disecciones del triángulo, pentágono y hexágono se puede plantear el siguiente cuestionario de trabajo o investigación:

— ¿Qué tipo de polígonos son las piezas obtenidas en cada disección?
— ¿Cuánto miden los ángulos interiores en un triángulo equilátero, un pentágono regular y un hexágono regular?
— ¿En un triángulo cuánto vale la suma de sus ángulos interiores? ¿Y en un pentágono regular? ¿Y en el hexágono regular?

Pero estos puzzles son también problemas en cuanto plantean un reto de transformación de un polígono en otro para el que de entrada no se conoce el camino de resolución más adecuado. Al jugar con ellos podemos comprobar su dificultad. Para evitar la frustración del alumno ante estos rompecabezas y que no abandone la resolución del problema que tiene delante, se le pueden dar como pistas unas plantillas con el contorno de los polígonos de área equivalente que intercambian sus piezas. Nos estamos refiriendo a que dispongan de la silueta, por ejemplo, en el caso del triángulo/pentágono sería:



La plantilla con el contorno sirve de ayuda, orienta y guía hasta la construcción que se debe realizar, al facilitar la medida del ángulo interior y del lado del polígono y poder medir comparando la amplitud de los ángulo y la longitud de las piezas con la longitud de los segmentos dibujados en la plantilla.

Aprovechando el puzzle se pueden trabajar en clase aspectos geométricos y numéricos planteando pregunta como la siguiente: ¿cuánto debe medir el lado del polígono regular para que tengan la misma área que otro dado?

En aquellas comunidades en las que los alumnos desde 5.° de Primaria a 2.° de Secundaria tienen su notebook personal con el programa *Geogebra* incorporado, como ha ocurrido hasta el momento en Andalucía, podemos interrelacionar las matemáticas manipulativas con la Geometría dinámica que nos permite dicho programa. Visiten las referencias web de la bibliografía.

Referencias bibliográficas

Fredrickson, G. (1997), *Dissections: Plane & Fancy,* Cambridge University Press. .

Boltianski, V. G. (1981), *Figuras equivalentes y equicompuestas,* Mir, Moscú.

Hans, J. A., J. Muñoz, A. Fernández-Aliseda, J. Blanco y J. Aldana (2003), «Rompecabezas del Teorema de Pitágoras», *Suma,* n.º 43, 119-122.

Hans, J. A., J. Muñoz y A. Fernández-Aliseda (2005): «Cuadraturas de polígonos regulares», *Suma,* n.º 48, 65-68.

— (2010), «Cuadraturas cruces, letras y estrellas», *Suma,* n.º 65, 49-52.

— (2011), «Puzzles de cuadraturas», *Suma,* n.º 66, 43-46.

Van Delft, P., y J. Botermans (1995), *Creative puzzles of the World*, Key Curriculum Press.

Referencias web
(consultadas en julio de 2012)

http://www.cabri.net/abracadabri/abraJava/Dissection/ListDiss.html

http://geometriadinamica.es/Geometria/Disecciones/

http//docentes.educacion.navarra.es/msadaall/geogebra/puzzles.htm

http://home.btconnect.com/GavinTheobald/Index.html [*Geometric Dissections.* Autor: Gavin Theobald.]

Grupo Alquerque de Sevilla
Constituido por

Juan Antonio Hans Martín
CC Santa María de los Reyes

José Muñoz Santonja
IES Macarena

Antonio Fernández-Aliseda Redondo
IES El Majuelo

<juegos@revistasuma.es>

1 En 1833, P. Gerwein, teniente del ejército prusiano dio la solución a la pregunta sobre las disecciones planteada por el matemático húngaro y experto en geometría Wolfang Bolyai (1775-1856). También llamado *Teorema de Bolyai-Gerwein* parece que sin embargo fue demostrado por primera vez en 1807 por el matemático escocés William Wallace (1768-1843). El teorema no se generaliza a tres dimensiones. En 1908 el matemático alemán Max Dehn (1878-1952) demostró que un cubo y un tetraedro regular del mismo volumen no son equivalentes por disección; aunque hay ejemplos de figuras que sí lo son.

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 75-80

Estudio de los movimientos en matemáticas (y 2)

Mariano Real Pérez

Si en la primera parte de este trabajo presentamos la aplicación «movimientos en el plano» para el tratamiento de la simetria axial en esta segunda parte, aunque no cambiemos de temática, vamos a centrarnos en una perspectiva más interactiva.

Geometría interactiva aplicada al estudio de los movimientos en el plano

Seguimos, pues, con otra aplicación también denominada «Movimientos en el plano». Se trata de un software creado por la profesora María José Sánchez, que en el año 2005 recibió el premio a materiales educativos interactivos del Ministerio de Educación. Está disponible en la siguiente dirección para ser utilizado directamente:

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2005/geometria_movimientos_plano/index.htm

También puede ser descargado para utilizarlo en el aula sin necesidad de conexión a internet desde:

http://descargas.pntic.mec.es/contenidos/gemopla/gemopla.zip

MatemásTIC

Artículo solicitado por *Suma* en febrero de 2012 y aceptado en abril de 2012

Esta Aplicación web es una unidad didáctica interactiva dedicada al tema de los «Movimientos en el plano».

Las animaciones Flash con las que cuenta y las posteriores en Cabriweb con las que está dotado pretenden que se puedan visualizar y manipular movimientos en el plano antes de llegar a conceptualizarlos. Se incluyen, además de animaciones que ayudan a comprender las explicaciones, applets interactivos en los que los estudiantes pueden manipular y observar los cambios en diversas figuras geométricas.

Al entrar en la aplicación aparece la pantalla que observamos en la imagen 1.

Imagen 1. Pantalla de inicio de «Movimientos en el plano», de Mª José Sanchez

En esa pantalla observamos que se pone a disposición del visitante una guía de utilización didáctica para el profesorado y otra para el alumnado con una presentación, la justificación didáctica, los objetivos, etc. Estas guías son interesantes, ya que aclaran bastante el uso didáctico de la aplicación. Ahora lo que nos interesa es acceder a la aplicación y dar algunas pinceladas sobre la misma. Para ello debemos pulsar sobre el botón «Entrar en la unidad», apareciéndonos la ventana que observamos en la imagen 2.

En ella aparece desplegado completamente el menú de navegación con el que cuenta la aplicación. Tras una introducción en la que se definen y clasifican los movimientos isométricos en el plano se aborda un estudio pormenorizado de cada uno de sus tipos: traslaciones, giros y simetrías. Posteriormente, se dedica otro apartado a las composiciones de movimientos, un amplio capítulo a su presencia en el mundo del arte (mosaicos nazaríes, Escher, etc.)

En la imagen 2 hemos desplegado también el esquema de la unidad para tener una perspectiva visual y clara de los contenidos que desarrolla. Sobre ellos vamos a hablar con más detalle. Animamos al lector o lectora a que descubra cada uno de sus rincones.

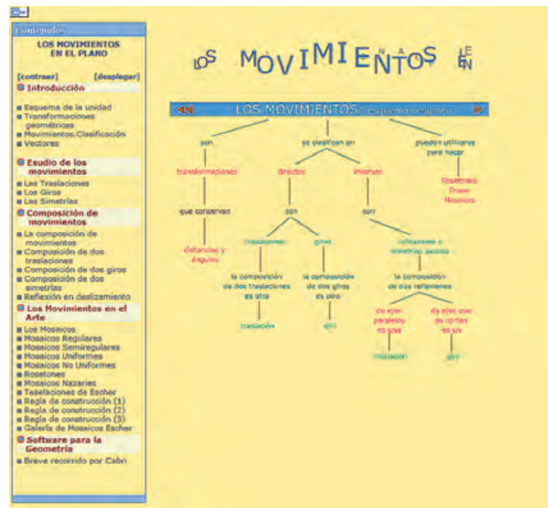


Imagen 2. Opciones de la aplicación

Para hacernos una idea de las posibilidades de esta aplicación, su autora cita algunas de las competencias que el alumnado puede desarrollar una vez finalizado el recorrido por la unidad. Debe ser capaz de:

- Identificar transformaciones geométricas.
- Identificar propiedades comunes entre una figura y la que se obtiene por una transformación.
- Identificar y clasificar movimientos en el plano.
- Identificar las propiedades de cada movimiento.
- Identificar los elementos invariantes en cada movimiento.
- Saber realizar cada uno de los movimientos.
- Realizar composiciones de movimientos.
- Obtener el movimiento inverso de uno dado.

Entender qué son los mosaicos y cuáles son las condiciones que se tienen que cumplir para construirlos.

Identificar en la construcción de mosaicos los distintos tipos de movimientos que se utilizan en su generación.

Conocer los distintos tipos de mosaicos que existen y cómo se generan.

Reconocer en la naturaleza y en el arte formas en las que se pueda identificar la relación con los movimientos.

Y todo ello, con un planteamiento basado en elementos interactivos que ayuden a la comprensión e identificación de cada uno de los movimientos y que ayuden a comprender cada uno de los conceptos que se trata en cada momento.

Entre estas pinceladas que vamos a dar sobre la aplicación nos vamos a parar en tres pantallas distintas a modo de ejemplo. La primera es la que observamos en la imagen 3, correspondiente al tratamiento de la simetría. Los puntos que desarrolla son: (i) características de la simetría axial; (ii) simetría axial de una figura; (iii) ejes de simetría de una figura; y (iv) simetrías en el plano cartesiano. Como venimos indicando, la introducción de conceptos se acompaña de animaciones en flash, como la que podemos comprobar en la zona

Imagen 3. Simetrías

central inferior de la imagen 3 y en la que se invita al alumnado a observar cómo se formaría la transformada de la imagen que aparece al aplicarle una simetría axial. Además de estas animaciones, la aplicación también está dotada de otras ventanas interactivas, como las dos que mostramos en la imagen 4. Ambas están realizadas con Cabri y pasadas a Cabriweb de forma que no se necesita el programa para que funcionen.

Concretamente, en la primera de las que aparecen en la imagen 4 se puede interactuar de forma que observemos directamente el efecto que le produce la aplicación en uno de sus puntos de la simetria axial que aparece. En la segunda observamos este mismo efecto, pero con una imagen. Podemos mover por la pantalla tanto el punto como la imagen y la recta que define la simetría axial observando el efecto causado en cada momento.

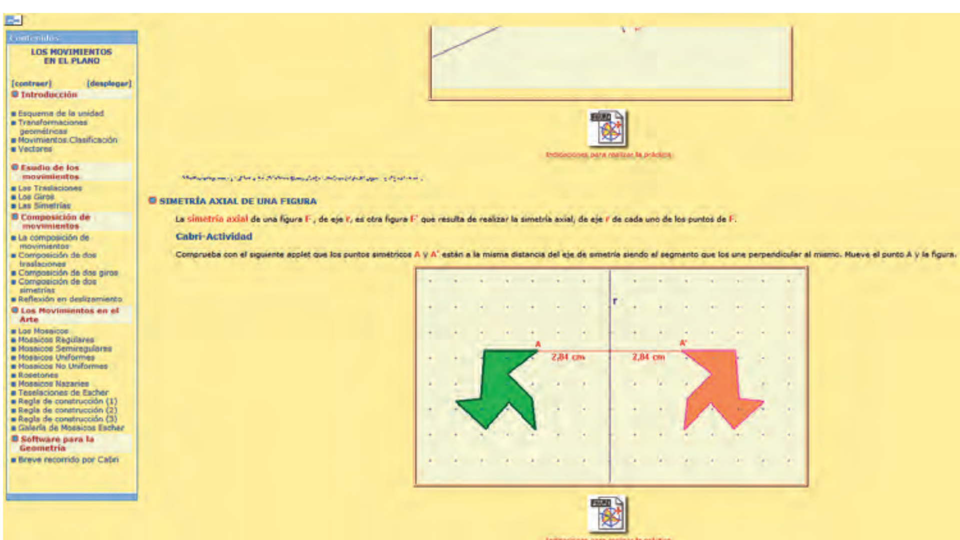


Imagen 4. Pantallas interactivas con Cabriweb

Una de las partes más interesantes con las que cuenta esta aplicación es la del desarrollo que se hace en los movimientos en el arte. En la imagen 5 hemos recogido una pantalla de esta fase de la aplicación.

Imagen 5. Movimientos en el arte

Esta zona no solamente es interesante por el desarrollo que se hace de los distintos mosaicos generales, los nazaríes, las teselaciones de Escher, etc., sino también por la cantidad de ejemplos reales que se recogen sobre los mismos y entre los cuales llama la atención la galería de mosaicos de Escher con la que cuenta y de los que se detalla, paso a paso y a través de animaciones didácticas, la construcción de cada uno de ellos. Véase a continuación la ficha educativo-técnica correspondiente a esta aplicación.

FICHA EDUCATIVO-TÉCNICA	
Nombre	Geometría interactiva aplicada al estudio de los movimientos en el plano
Sistema	Cualquier sistema operativo. Necesita plugin de Flash y de Java
Descarga	Directamente en la red: <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2005/geometria_movimientos_plano/index.htm> Descarga: <http://descargas.pntic.mec.es/contenidos/gemopla/gemopla.zip>
Licencia	Libre uso en educación
Contenido	Movimientos en el plano, frisos y mosaicos
Nivel	A partir de 3º ESO
Metodología	Aplicación para utilizar en la enseñanza de los movimientos y para la práctica por parte del alumnado. En esta última parte es aconsejable que el alumnado la utilice de forma individual

La simetría: celosías y mosaicos en educación secundaria

No podía faltar entre las aplicaciones que estamos citando una denominada «La simetría: celosías y mosaicos». Este software fue creado por el profesor José Antonio Mora Sánchez y en el año 2009 recibió el premio a materiales educativos interactivos del Ministerio de Educación.

Este material está disponible en la siguiente dirección para ser utilizado directamente:

http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/celosias_mosaicos/index.htm

También puede ser descargado para utilizarlo en el aula sin necesidad de conexión a internet. La dirección de descarga es:

http://descargas.pntic.mec.es/contenidos/premios_curriculares/2009/celosias_mosaicos/celosias_mosaicos.zip

El objetivo de esta aplicación es facilitar la visualización de los conceptos asociados a la comprensión de los movimientos en el plano y ponerlos en conexión con los hechos relevantes de la vida diaria en los que se manifiestan. Aborda contenidos como:

Isometrías: simetría, traslación, simetría axial, rotación y simetría central, simetría con deslizamiento, investigación en movimiento.

Celosías: la construcción de celosías, la baldosa, los movimientos, azulejos y simetría, simetría de la baldosa y método de colocación, el grupo de simetría del cuadrado.

Mosaicos: guía de trabajo para estudiar mosaicos, dos formas de analizar mosaicos, el nombre del grupo cristalográfico, análisis dinámico del mosaico y mosaicos dinámicos, mosaicos para practicar.

Al acceder a la aplicación observamos la pantalla que aparece en la imagen 6.

Imagen 6. Pantalla inicial de la aplicación «La simetría: celosías y mosaicos», de José Antonio Mora

Una de las características que distingue a esta aplicación, además del contenido, es la gran cantidad de ventanas interactivas con las que está dotada.

La mayoría de las páginas contiene una o varias figuras interactivas construidas con el programa informático GeoGebra, especialmente indicado para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría y las Matemáticas. Dispone de una amplia colección de recursos para la realización de movimientos en el plano muy sencillos de utilizar. Además, dispone también de otras herramientas que favorecen una presentación atractiva de los materiales para el alumnado.

Todos los applets van colocados sobre una línea de puntos de color verde para facilitar su reconocimiento y disponen de elementos interactivos que normalmente son deslizadores que hacen aparecer una secuencia de imágenes e interruptores, también llamados casillas de control, que presentan o hacen desaparecer ciertas zonas de la construcción cuando el alumnado lo solicite.

Los applets se complementan con:

- Sugerencias para la manipulación de los elementos.
- Aclaraciones de las ideas.
- Explicaciones de algunos conceptos implicados.
- Preguntas sobre la construcción que estamos manipulando.
- Propuestas de trabajo para la clase.

Si se dispone del programa GeoGebra instalado en el ordenador, es posible abrir el archivo a partir del cual se ha generado el applet con el fin de que el usuario pueda disponer de la construcción completa, comprobar su funcionamiento, revisar cómo se ha realizado y hacer las modificaciones que se crean oportunas para mejorar los resultados, tanto estéticos como en la presentación de los conceptos. Hay completa libertad para usar estos archivos con fines educativos; el único requisito es citar la procedencia.

En la imagen 7 podemos observar una de estos applets creados con GeoGebra que aparecen en la aplicación. Al software GeoGebra dedicaremos algún artículo en próximos números de *Suma*.

Imagen 7. Pantalla con GeoGebra

Llama la atención en esta aplicación la gran cantidad de construcciones interactivas que contiene y la utilidad didáctica que puede hacerse de ellas. En la imagen 8 (página siguiente) damos un ejemplo de ello. Dentro del apartado «Estudio de mosaicos en el plano» observamos los cinco apartados que se tratan y cuyo contenido, como hemos indicado, está

Imagen 8. Construcciones para practicar

respaldado con gran cantidad de construcciones interactivas. Ya en el último punto, el de mosaicos para practicar, hemos presentado en esta imagen 8 la cantidad de ejemplos con los que el alumnado puede practicar los conceptos tratados. Se trata de una aplicación que invita a adentrarse en todo su contenido de forma muy visual y atractiva, como destacamos más abajo en su ficha educativo-técnica.

Las transformaciones en el plano son un contenido al que las herramientas existentes para el desarrollo de la geometría dinámica pueden sacar mucho partido. Desde esta sección intentamos tratar una muestra de todo aquello que se pone a nuestra disposición en el aula, dando unas pinceladas sobre el funcionamiento y contenido de las mismas e invitando a los lectores a hacer un recorrido por ellas. Desde luego, si en el aula de matemáticas no se trata esta temática mediante applets interactivos, que atraen visualmente al alumnado y provocan una profundización en los contenidos y la práctica, no es porque no existan recursos, ya que la cantidad de referencias tanto conjuntas como las que hemos expuesto es enorme.

FICHA EDUCATIVO-TÉCNICA	
Nombre	La simetría: celosías y mosaicos en educación secundaria
Sistema	Cualquier sistema operativo. Necesita plugin de Flash y de Java
Descarga	Directamente en la red: <http://ntic.educacion.es/w3/eos/MaterialesEducativos/mem2009/celosias_mosaicos/index.htm> Descarga: <http://descargas.pntic.mec.es/contenidos/premios_curriculares/2009/celosias_mosaicos/celosias_mosaicos.zip>
Licencia	Libre uso en educación
Contenido	Movimientos en el plano, celosías y mosaicos
Nivel	A partir de 3º ESO
Metodología	La aplicación destaca por la cantidad de prácticas que se le proponen al alumnado, por su interactividad y por la gran cantidad de recursos con las que está dotada. Es una aplicación a la que se le puede sacar mucho partido trabajando por parejas.

Mariano real Pérez
CEP de Sevilla
<matemastic@revistasuma.es>

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 81-86

Cine y estadística (y 2)

José María Sorando Muzás

CineMateca

La Estadística en *Numb3rs*

Continuamos[1] con la presencia estadística en el cine y en las series de televisión, donde *Numb3rs* ocupa un lugar preferente. Diría que en los 119 episodios que componen sus seis temporadas hay casi tantas matemáticas como en todo el resto de la ficción cinematográfica y televisiva; y, desde luego, más solventes. Algunas escenas son utilizables en el aula y en la mayoría de los casos nos ofrecen ejemplos insospechados e interesantes de aplicación matemática, ejemplos de los que al profesorado le conviene estar provisto para poder utilizarlos en el momento oportuno.

Charlie, el protagonista matemático, recibe datos de cada caso policial, a veces en gran cantidad. Para su interpretación a menudo recurre al estudio estadístico y suele concluir haciendo predicciones en términos de probabilidad. Terminaba el anterior artículo con un inquietante caso orientado al control social. Hay otros más aceptables.

En «Punto de vista» (episodio 9 de la primera temporada), usa la regresión a la media para justificar qué disparos corresponden a un mismo francotirador.

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

En «Convergencia» (episodio 7 de la 2.ª temporada), recurre a la minería de datos, técnica de uso creciente que consiste en la extracción no trivial de información que reside de manera implícita en los datos. La explica así:

> —Yo diseño un algoritmo y, a partir de los datos de esos crímenes, el algoritmo busca correlaciones. Necesito las estadísticas de delitos del último año en el condado.
>
> —Pero ¿tantos datos no añadirán complejidad a la búsqueda?
>
> —Cuantos más datos, más probabilidad de encontrar algo. Es como cuando quieres armar un puzzle.... Pero resolver un problema de la vida real es como armar un rompecabezas cuando todas las piezas que necesitas están mezcladas con piezas de otros rompecabezas... Tienes que revisar la caja entera y separar las piezas que son de tu puzzle. El algoritmo revisa todas las piezas y entresaca aquellas que encajan.

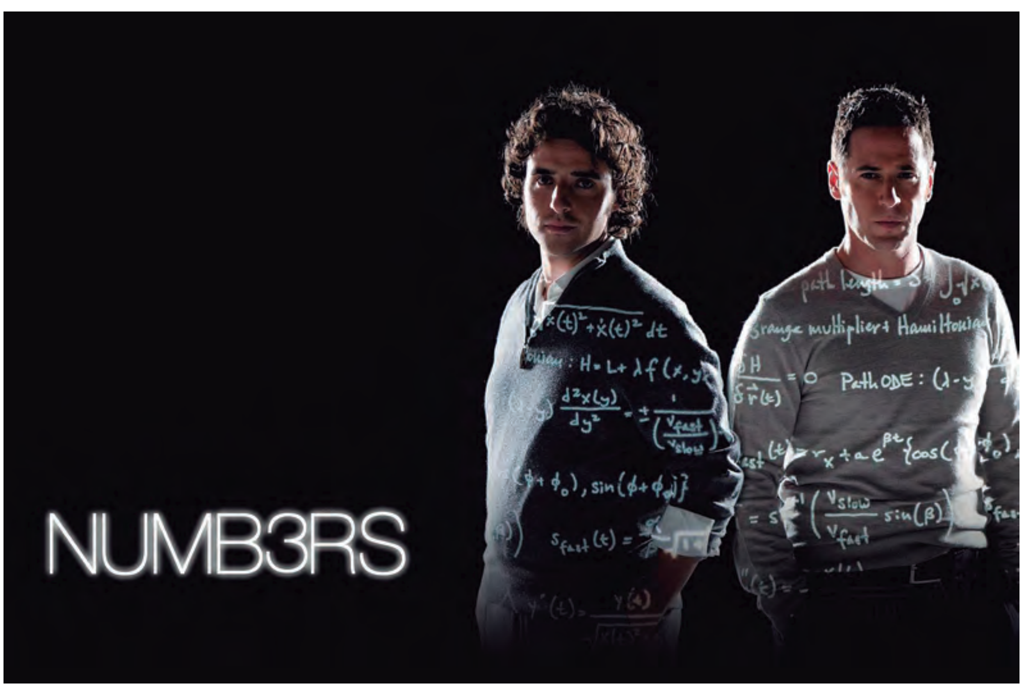
En «El corredor» (episodio 15 de la 2.ª temporada), considera que unos datos son muy improbables en base a la curiosa Ley de Benford:

> —Si observas cualquier tabla de valores de amplio espectro: datos del censo, tamaños de terrenos... el 1 aparece como primer dígito en más del 30% de los valores, el 2 aparece un 17,6%, el 3 un 12,5% y así sucesivamente (en orden decreciente).
>
> —Parece ser que Simon Newcomb lo descubrió ojeando libros de tablas de logaritmos. Observó que las primeras páginas están más desgastadas que las demás. La Ley de Benford no trata de toma consciente de decisiones, es un fenómeno estadístico.

Newcomb fue un astrónomo del siglo XIX y Frank Benford un físico del siglo XX que observaron el mismo fenómeno de manera independiente. Benford lo comprobó empíricamente sobre un total de 20 229 datos de procedencias diversas (sociales, naturales, de laboratorio, etc). Su formulación final fué que «la probabilidad de que n ($n = 1, 2, \dots 9$) sea la primera cifra no nula de un número tomado al azar, es $log(n + 1) - logn$».

Dicha ley concluye en la citada escala decreciente de probabilidades para los dígitos de 1 a 9 y de ella se deriva también la mayor probabilidad de que la primera cifra sea impar.

La extrañeza que provoca de entrada esta ley es menor cuando empezamos a revisar cuántas medidas, nuestra propia edad por ejemplo, o no alcanzan un dígito inicial alto o, si lo alcanzan, para



llegar a él debieron pasar antes por los anteriores, que eventualmente ostentaron la primacía.

En «El chat de la muerte» (episodio 11 de la 3.ª temporada), se aplica el análisis estadístico lingüístico para establecer el perfil de las intervenciones del sospechoso.

En «Democracia» (episodio 18 de la 3ª temporada), se detecta una falsificación de datos en base a un sorprendente criterio tras el análisis de frecuencias:

> —Hay demasiados 7 y 3 para que esta lista sea aleatoria. Por alguna razón, cuando la gente inventa informes que tienen números, siempre ponen demasiados 3 y 7 y muy pocos 1 y 2. Así, no puedes saber qué describen los números, pero puedes saber si alguien miente.

No he encontrado información que lo corrobore, pero dada la potente asesoría matemática con que ha contado *Numb3rs*, les concedo el beneficio de mi ignorancia[2].

La muestra perfecta

En cualquier investigación, policial o no, hay que saber escoger las muestras de datos. *Ciudad Mágica* (*Magic Town*, William A. Wellman,1947) es una película cuya trama gira en torno a la representatividad de dichas muestras.

Rip Smith (interpretado por James Stewart) dirige una empresa que se dedica a los sondeos de opinión. Al borde de la bancarrota, casualmente descubre que los resultados obtenidos en la pequeña ciudad de Grandview son una réplica exacta de los obtenidos para todos los Estados Unidos. Es lo que repetidamente llama el «milagro matemático», la salvación para su empresa, que le permitirá ofrecer resultados válidos con un coste y rapidez muy ventajosos frente a la competencia. Rip planea trasladarse con sus colaboradores a Grandview y establecerse bajo una falsa identidad de vendedores de seguros, para así conseguir información de forma permanente sin que los vecinos sospechen cuál es su finalidad.

Rip se integra rápidamente en la vida de la ciudad, llegando a ser muy apreciado y se enamora de una periodista (interpretada por Jane Wyman). Ésta descubre el propósito de Rip y lo publica en el diario local. La noticia corre por todo el país y Grandview pasa a ser conocida como la ciudad modelo de la nación. Nada volverá a ser lo mismo. La codicia de unos y otros traerán el rápido ascenso y la estrepitosa caída de la ciudad. Como no podía faltar en una película de Hollywood de posguerra, hay un final esperanzador.

Es ésta *una película de las de antes:* en blanco y negro, donde los personajes son elegantes y corteses, la honradez triunfa, el amor redime... En el aspecto social, llama la atención la democracia asamblearia que rige el destino de la comunidad. Pasemos a sus aspectos matemáticos.

Frente a la estadística descriptiva, que analiza los datos obtenidos de todos los elementos de una población, la estadística inferencial extrae conclusiones a partir de muestras de esa población, con un grado de confianza conocido. Se hace así cuando la observación destruye el objeto observado (por ejemplo, algunos controles industriales de calidad) o por economía de medios, que es el caso que corresponde a la película y también el de los habituales sondeos preelectorales. En la selección de las muestras es fundamental lograr que sean representativas de la población.

Es célebre el caso de las elecciones presidenciales de EE.UU. de 1936, en las que ganó Franklin D. Roosevelt. La revista *The Literary Digest* hizo una encuesta de intención de voto en la que participaron más de cuatro millones de sus lectores y se equivocó en el pronóstico. Otra encuesta realizada por George Gallup sólo a 5.000 personas anunció el éxito de Roosevelt con mucha exactitud. La razón era que en el primer caso la muestra no era representativa de la sociedad norteamericana, pues entre los lectores de esa revista había mayoría republicana, siendo además el método de encuesta el envío por correo de unos cupones, lo cual suponía un alto grado de implicación en la campaña. Sin embargo, en las 5 000 personas seleccionadas por Gallup estaban bien representados todos los sectores e ideologías de dicha sociedad.

Lograr esa representatividad exige conseguir una distribución geográfica y social de las encuestas muy cuidadosa y extensa, es decir, costosa. De ahí que localizar una muestra reunida de forma natural como Grandview fuera un «chollo» para la empresa de sondeos. En la película se dice que en dicha ciudad los porcentajes de hombres y mujeres, de blancos y negros, de republicanos y demócratas, etc. son réplicas exactas de los que se dan para el conjunto de la nación. De esta forma se justifica aceptablemente la coincidencia de opiniones.

Cuando la cámara se detiene en el estadillo de datos podemos comprobar que los porcentajes que atienden a cada criterio suman 100 (¡qué menos!... aunque, como ya hemos visto en otros casos, no siempre se cuidan esos detalles numéricos).

Sorprende en esta era digital ver que los cálculos se realizan sobre un gran cuadrante por un contable a la vieja usanza: a lápiz, con manguitos y visera. Pensemos que en 1947 todavía faltaban algunos años para la expansión del uso de las calculadoras mecánicas de oficina (con rollo de papel y manivela) y 25 años para las calculadoras electrónicas de bolsillo.

Las predicciones de la película se obtienen como porcentajes fijos (estimadores puntuales), cuando lo habitual en los estudios demoscópicos es darlas en forma de intervalos de confianza, acompañados de su fiabilidad en términos de probabilidad (nivel de confianza, habitualmente del 95% o el 99%).

Por último, el guión es acertado cuando plantea cómo la consciencia de estar siendo observados, en ese caso con una presión mediática excesiva, altera el comportamiento de los ciudadanos de Grandview. Es una traslación a las Ciencias Sociales del Principio de Incertidumbre de Heisemberg de la Física Cuántica.

La neutralidad de los cuestionarios

Claro que, además de una muestra representativa, es necesario que el cuestionario no sea inductor de las respuestas. En la serie de la BBC *Yes, Prime Minister*, traducida al catalán y emitida por TV3 bajo el título *Sí, Primer Ministre*, lo ejemplifica el siguiente diálogo entre asesores del Primer Ministro:

> —El Partido ha hecho una encuesta y se ve que los votantes están a favor de restablecer el Servicio Militar.
>
> —Tenemos otra encuesta que demuestra que los votantes están en contra del Servicio.
>
> —No pueden estar a favor y en contra.
>
> —Claro que sí, ¿es que no te han hecho nunca encuestas?
>
> —Sí, pero no una encuesta política. No sabría qué contestar.
>
> —Tú ya sabes cómo funciona eso. Te visita una señorita muy guapa y quieres quedar bien, no quieres hacer el ridículo.
>
> —No.
>
> —Y te comienza a hacer preguntas: ¿Le preocupa el gran número de jóvenes que están sin trabajo?
>
> —Sí
>
> —Y ¿le preocupa también el aumento de la delincuencia juvenil?
>
> —Sí.
>
> —¿Le parece que falta disciplina en las escuelas públicas?
>
> —Sí
>
> —¿Piensa que los jóvenes aceptarían un mayor nivel de liderazgo y de autoridad? ¿Qué son capaces de aceptar un reto?
>
> —Sí
>
> —¿Estaría a favor de restablecer el servicio Militar?
>
> —Sí
>
> —Está claro que sí, después de lo que me has dicho no puedes contestar que no. Ellos no publican las primeras preguntas y sólo mencionan la última.
>
> —¿Es eso lo que hacen realmente?
>
> —Hombre, los que son honrados tal vez no, pero no hay muchos de esos. Y la señorita habría conseguido el resultado opuesto si hubiera querido.
>
> —¿Cómo?
>
> —¿Le preocupa el peligro de una guerra?
>
> —Sí.
>
> —¿Le preocupa la carrera de armamentos?
>
> —Sí
>
> —¿Encuentra peligroso dar armas a jóvenes y enseñarlos a matar?

—Sí.

—¿Le parece mal obligar a la gente a usar armas si ellos no quieren?

—Sí.

—¿Usted se opondría al restablecimiento del Servicio Militar?

—Sí.

—Ya ve, es así como se encargan las encuestas para el Ministerio de Defensa.

El anterior diálogo sería jocoso sin más si no fuera porque se parece demasiado al tipo de encuestas que realizan algunos medios de comunicación políticamente beligerantes. Un caso notorio es el de un diario de tirada nacional cuyos sondeos de opinión son dudosos para el propio sector demoscópico. La razón es que han sido realizados, de forma reincidente, por empresas desconocidas.

Y otro sesgo no despreciable es el introducido por la presión de las empresas sobre los encuestadores, que conduce en ocasiones a muestras repletas de familiares y amigos. También lleva a veces a resultados que agraden a un cliente que no busca conocer la realidad para decidir, sino informes con números que justifiquen decisiones ya tomadas. En todos eso casos, no se culpe a la Estadística sino a quienes la usan de forma perversa.

Videos estadísticos para el aula

Con ocasión del Día Mundial de la Estadística (2010), el Instituto Nacional de Estadística (INE) publicó en la red un video divulgativo titulado «Un día en cifras» en el que se muestran las grandes di-

ferencias existentes según países entre los indicadores de diversas variables sociales. Por ejemplo: «Partos atendidos por personal cualificado por cada 100 personas: Cuba 99,9; Egipto 75; Pakistán 31». Es de mayor aplicación en la clase de Ciencias Sociales que en la de Matemáticas, pero queda muy bien plasmada la conexión entre ambas áreas.

En la misma línea está otro recomendable video del INE: «Si España fuese un pueblo de 100 habitantes» (febrero 2012). Concluye con este rótulo: «El objetivo de este video es transmitir de forma sencilla la utilidad de las estadísticas oficiales para reflejar la sociedad en la que vivimos». Loable propósito, cuyo logro precisa, como tantos otros esenciales, mantener un servicio público profesional y libre de presiones.

Los enlaces para ver en Internet las escenas de éste y anteriores artículos, se encuentran en:

http://catedu.es/matematicas_mundo/Cinemateca.htm

José María Sorando Muzás
IES Elaios, Zaragoza
<decine@revistasuma.es>

1 En *Suma* 70 nos extrañábamos de que no se estén aplicando las técnicas sabermétricas al fútbol. Hemos conocido un interesante blog que trabaja en esa dirección. Es obra del profesor Francisco J. García Cubero y se titula *Aspectos matemáticos del juego del* football.

URL: <http://www.futmath.blogspot.com>

2 En una reciente película de acción, *Safe* (Boaz Yakin, 2012), también se sospecha de la supuesta aleatoriedad de una lista de números «porque hay demasiados 7 y 3». Pero en ese caso no se alude al criterio de tipo psicológico citado en *Numbers,* sino que se supone que se trata de un mensaje en clave, donde la mayor frecuencia de esas cifras se correspondería con las frecuencias relativas de ciertas letras en el idioma, al estilo del célebre descifrado que narra Edgar Allan Poe en el relato *El escarabajo de oro.*

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 87-96

Laplace, matemático del azar

Santiago Gutiérrez Vázquez

Hace doscientos años se publicaba en París un libro titulado *Téorie analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades), que introducía en el estudio del azar un fuerte aparato matemático procedente del campo del análisis. Su autor, Laplace, era un reputado científico cuyo interés por la matemática había ido creciendo al hilo de las necesidades de sus investigaciones. Trabajaba en diversos campos, tanto de la Física como de la Astronomía o de las propias Matemáticas, incluyendo ya la Estadística. Su gran objetivo consistía en matematizar el tratamiento de los estudios científicos a los que se enfrentaba, cualesquiera que fuesen.

Pierre-Simon de Laplace había nacido el 23 de marzo de 1749 en Beaumont-en-Auge, pequeño pueblo de la Normandía, cercano a la desembocadura del río Sena. Hijo de Pierre Laplace y Marie Anne Sochon, tenía una hermana, Marie Anne, cuatro años mayor que él. Debían de gozar de una buena posición social y económica, ya que el padre se dedicaba al negocio de la sidra y era síndico de Beaumont.

Parece ser que las primeras letras las aprendió en su propia casa, seguramente tutelado por su tío Louis, hermano de su padre, sacerdote aficionado a las matemáticas. Ya desde estos tempranos mo-

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

mentos mostraba el pequeño Pierre-Simon una gran precocidad para el aprendizaje. A los siete años ingresa, como alumno externo, en el colegio que tenían los padres benedictinos en su convento, no lejos de la casa de los Laplace. En este centro sigue con provecho sus estudios hasta los dieciséis años.

En 1765 pasa a la Universidad, concretamente al Colegio de Artes de la Universidad de Caen. Allí entra con la idea de seguir la carrera eclesiástica, y cursa estudios de lenguas clásicas, literatura, filosofía, música, y teología. Sin embargo, en 1767, con solo dos años de estudios, abandona la Universidad sin haber obtenido la licenciatura en humanidades ni haberse ordenado sacerdote. ¿Qué ocurrió para haber tomado semejante decisión? ¿Se trataba de un giro radical en su vida, debido al descubrimiento de una nueva vocación, cual era la de científico? Desde luego, Laplace había tenido dos profesores, Christophe Gabled y Pierre Le Canu, que le habían influido a estudiar las ciencias, viendo las excelentes cualidades que mostrara el joven en las clases. En particular, Le Canu, gran aficionado a las matemáticas, jugaría un papel importante en su orientación definitiva.

Pierre Simon de Laplace

Destino: París

Cualquiera que fuese la razón de su abandono de la Universidad, el hecho es que tampoco elige un destino que lo justifique. Primero, se emplea de tutor particular en casa del marqués de Héricy, pero pronto lo deja para aceptar el puesto de profesor en el colegio de Beaumont, del que había sido alumno.

Tampoco dura mucho en este segundo empleo, y con diecinueve años, en 1768, encamina sus pasos a París, llevando consigo, eso sí, una carta de presentación, de su antiguo profesor Le Canu, dirigida nada menos que a D'Alembert, uno de los científicos más famosos de toda Europa en aquella época, secretario perpetuo de la Academia de Ciencias y persona de gran influencia en la corte parisina. La reacción del eminente matemático ante la carta de un desconocido profesor de provincias como era Le Canu no pudo ser más que despectiva, pues se negó a recibir al joven Laplace. Ante semejante situación, no se sabe cómo, pero Laplace logra hacer llegar a D'Alembert una muestra de sus conocimientos, como prueba de su talento. Según unos, le envió una carta con los conocimientos de mecánica que poseía, según otros, había resuelto en una noche el difícil problema que D'Alembert le había hecho llegar, con el fin de probarlo dándole una semana de plazo para resolverlo. De cualquier modo, algo tuvo que ocurrir para que D'Alembert le enviara la siguiente nota, de la que se tiene noticia cierta:

> Señor, ved que hago poco caso de las recomendaciones; usted no tenía necesidad de ella. Os habéis dado a conocer mejor por vos mismo y esto me basta. Os debo mi apoyo. (Bergasa, 2003: 21)

Pronto concreta D'Alembert su promesa de apoyo; le consigue un puesto de profesor de matemáticas en la Real Escuela Militar, y le introduce en los círculos de la Academia de Ciencias.

En 1770, el 28 de marzo, presenta Laplace su primera memoria a la Academia con el título de *Investigaciones sobre los máximos y mínimos de las líneas curvas*. El trabajo es muy bien valorado, y se recoge en la publicación de la *Academia Recueil* *des savants étrangers* (Recopilación de eruditos externos), aunque sus comentaristas, Borda y Bossut, le recomiendan que indique las expresiones que no eran de cosecha propia, como las que utilizaba de Euler y de Lagrange.

En 1770, el 28 de marzo, presenta Laplace su primera memoria a la Academia con el título de *Investigaciones sobre los máximos y mínimos de las líneas curvas.*

Objetivo: la Academia

Semejante señal de aprobación debió de animar al joven Laplace, y a sus 21 años se propne como objetivo llegar a ser un reconocido científico y conseguir el ingreso en la Academia como miembro de pleno derecho. Cuenta para ello con su propia capacidad y con el apoyo de D'Alembert.

Solo unos meses después de la primera memoria, en julio de 1770, presenta una segunda con el título de *Sobre algunos usos del cálculo integral aplicado a diferentes fines*. Tan bien valorada como la primera es merecedora del siguiente comentario de Borda y Bossut:

> Nos parece que la memoria del señor Laplace anuncia más conocimientos matemáticos y más inteligencia de los que ordinariamente se encuentran a esta edad. (Bergasa, 2003: 23)

A lo largo de ese mismo año de 1770, presenta Laplace otras dos nuevas memorias, una sobre la variación de la eclíptica y otra sobre los nodos de las órbitas planetarias. Continua presentando memorias el año siguiente, tres sobre cálculo integral y otra sobre la órbita lunar.

En mayo de 1771 se presenta por primera vez a la Academia. Se trata de una plaza de adjunto de geometría, a la que concurría también Vandermonde entre otros. La plaza es para éste, y Laplace queda segundo. Su juventud le permitía esperar, y el segundo puesto, ante un competidor catorce años mayor que él, le da esperanza. Continúa trabajando y presenta tres nuevas memorias sobre cálculo integral y otra sobre astronomía, antes de concursar por segunda vez a la Academia, cosa que ocurre en mayo del año siguiente, a una plaza de adjunto de geometría como la vez anterior. Pero, nuevamente queda segundo, por detrás de Cousin, diez años mayor, que es el ganador.

Tras otras ocho memorias a lo largo de 1772, presenta en marzo de 1773 una de muy largo alcance, con el significativo título de *Investigación sobre la integración de las ecuaciones diferenciales en diferencias finitas y sobre su aplicación al análisis del azar*. Esta memoria mereció, por parte de los informadores, tan buenos elogios como constatación de sus dificultades de comprensión. Solo un pequeño número de sabios, se decía, iban a ser capaces de entenderla.

Después de un nuevo intento fallido, al fin, el 31 de marzo de 1773, logra un puesto de adjunto en mecánica, y se convierte de este modo, con solo 24 años, en miembro de pleno derecho de la Academia. A partir de este momento, sigue produciendo varias memorias anuales sobre los diversos temas que le interesan, con especial atención a la mecánica. No obstante, el año 1776 cambia su plaza de adjunto en mecánica por otra de adjunto en geometría, que era la materia más valorada en la Academia.

Laplace va ganando prestigio desde su entrada en la Academia y consigue la confianza de otros científicos con los que realiza diversas colaboraciones. Así, hace estudios de población con Condorcet y experiencias sobre el calor con Lavoisier. En 1783, año en que muere su primer y gran protector, D'Alembert, consigue el puesto de asociado. Y el año siguiente sucede a Bézout como examinador de los cadetes de la Real Academia de Artillería. Por cierto, uno de esos cadetes es el joven José Napoleón Bonaparte, cosa que posteriormente va a tener su influencia en la vida de Laplace. Es elegido miembro de las principales comisiones que se forman en la

Academia con diversos fines de estudios. Resulta particularmente interesante la comisión para la supervisión del hospital L´Hôtel-Dieu, en el que debían hacer estudios estadísticos sobre los resultados de los tratamientos realizados con los enfermos.

Laplace subraya el interés de la probabilidad inversa, esto es, el análisis de las causas a partir de los resultados ...

La reforma del sistema métrico

La revolución francesa de 1789 no parece afectarle mucho a Laplace, más interesado por sus trabajos científicos que por los avatares políticos del país. La cosa llega a tal extremo que el 22 de julio, solo cuatro días después de la toma de la Bastillla, Laplace se dedica a presentar en la Academia una memoria sobre la inclinación de la Eclíptica. No se muestra muy interesado en las ideas surgidas de la revolución, simplemente acepta la nueva situación con tal de que le dejen trabajar y se manifiesten a favor del progreso científico. Así se desprende de la cantidad de nuevas comisiones para las que es requerido como miembro participante, y que él acepta de buen grado.

Pero, de todas las comisiones en que está interviniendo la que más satisface a Laplace es sin duda la encargada por la Asamblea Nacional, a finales del 89, para la reforma del sistema de medidas, tanto de longitud como de superficie, capacidad y peso. Era esta una cuestión importante, por cuanto la gran variedad de unidades de medida existentes en todo el país dificultaba enormemente las transacciones comerciales entre sus distintas regiones.

No fue fácil el camino de la comisión, pues las discusiones internas lo entorpecían sobre manera, y los cambios políticos no habían llegado a su fin. En efecto, mientras unos abogaban por un sistema decimal, otros preferían el duodecimal, argumentando estos últimos la facilidad que supondría, para albañiles, comerciantes, campesinos, profesionales en general y todo tipo de ciudadanos, la múltiple divisibilidad del número 12 a la hora de calcular mitades, tercios y cuartos. Semejantes discusiones hicieron intervenir a la Asamblea Constituyente, quien zanjó la cuestión al decidir, el 8 de mayo de 1790, que el nuevo sistema debía elaborarse sobre la base decimal. Se decidió además que se tuvieran en cuenta los siguientes criterios:

— La unidad de longitud debe dar origen a las correspondientes unidades de superficie y volumen.
— La unidad de longitud debe estar en relación con la longitud del meridiano.
— La unidad de peso debe relacionarse con un cierto volumen de agua en determinadas condiciones.

En cuanto a los cambios políticos hay que señalar que en 1793, con la llegada de Robespierre al poder, se suprime la Academia y los trabajos sobre la reforma del sistema métrico pasan a una Comisión creada al efecto por el nuevo gobierno. Esto lleva consigo varios cambios entre sus miembros, que caen en desgracia por ser considerados «insuficientemente dignos de confianza en lo que se refiere a sus virtudes republicanas y a su odio a los reyes» (sic). Entre los cesados está Laplace que además es desposeído de su plaza de examinador.

Laplace, se había casado el 15 de mayo de 1788 en París con Marie-Charlotte de Courty, 20 años más joven, y tenía ya dos hijos, la niña Sophie-Suzanne y el niño Charles-Émile. Así que, temiendo tanto por él como por su familia, decidió alejarse de París, por primera vez desde su llegada en 1768. Fue una especie de exilio voluntario, eso sí, en una ciudad, Melun, no lejos de París, a menos de 50 kilómetros, desde donde pudiera seguir de cerca el curso de los acontecimientos revolucionarios.

No dura mucho la época del terror, algo más de un año. Pues el 27 de julio de 1794, Robespierre es apresado y ajusticiado. En 1795, se aprueba una nueva Constitución, que confía el poder al Directorio. Y éste reorganiza las antiguas instituciones, de modo que la Escuela Politécnica sustituye a la Academia de Artillería; y el Instituto Nacional de las Ciencias y de las Artes agrupa a las distintas Academias, en lo que se denominan Clases. Así mismo, se crea una novedosa institución, la Escuela Normal, destinada a la formación de los profesores que deberían impartir sus enseñanzas en las escuelas de primaria y secundaria.

Homenaje a Condorcet

Puede entonces Laplace regresar a París y reiniciar sus actividades científicas. En julio de 1795, es reintegrado a su puesto de examinador en la Escuela Politécnica, y en octubre de ese mismo año, a la Clase de Ciencias del recién creado Instituto. Una de las tareas que retoma Laplace es la reforma del sistema métrico, a falta de la determinación de la unidad básica, el metro, pues no se hallaban concluidos aún los trabajos de medición del meridiano. Asímismo, Laplace interviene en la puesta en marcha de la Escuela Normal, definiendo el programa de matemáticas y colaborando en dar clases directas a los alumnos. Señala como finalidad de las matemáticas la de constituir un recurso útil para la resolución de problemas reales.

El problema del azar

Desde muy joven se sintió Laplace atraído por el problema de la probabilidad. Lo que le preocupaba era el análisis del azar. En sucesivas memorias lo había ido estudiando, cada vez con mayor profundidad. En la memoria titulada *Sobre la probabilidad de las causas por los sucesos* afirma que, en cualquier situación a estudio sólo puede darse uno de los dos siguientes tipos:

A. Conociendo las condiciones iniciales de un suceso, estudiar el resultado. Esto es, conocidas las causas determinar las probabilidades de los resultados.
B. Conociendo el resultado, estudiar las causas. O, lo que es lo mismo, a partir de los hechos determinar las probabilidades de sus posibles causas.

El ejemplo más sencillo es quizá el de considerar una urna que contiene bolas blancas y negras. En el tipo A) se trata de extraer una bola y averiguar la probabilidad de que sea de cierto color, sabiendo cuántas bolas contiene la urna de cada color. En el tipo B) se trata de averiguar la probabilidad de composición de la urna, conociendo el color de la bola extraída.

Afirma Laplace además que el tipo B) es el más frecuente en las ciencias experimentales, ya que es en éstas donde lo que se conoce son datos, hechos, y la cuestión reside en preguntarse acerca de por qué se producen, cuáles son sus causas.

Consigue así varios resultados interesantes. Uno de ellos es el que hoy conocemos como teorema de Bayes, muy probablemente desconocido entonces por Laplace, y que enunciaba con esta complicada redacción:

> Si un suceso puede ser producido por un número n de causas diferentes, las probabilidades de la existencia de esas causas, conocido el suceso, son cada una como las probabilidades del suceso, dadas las causas: y la probabilidad de cada causa es igual a la probabilidad del suceso, dada la causa, dividida por la suma de todas las probabilidades del suceso, dada cada una de las causas. (Bergasa, 2003: 29)

El otro gran tema de estudio de Laplace, la astronomía, le da pie para llevar la probabilidad a terrenos más originales. Así, se plantea la cuestión de averiguar la posición de una estrella en un instante determinado a partir de las observaciones realizadas en diferentes instantes. En este caso, la posición real de la estrella es la causa desconocida y los resultados de las observaciones son los sucesos. Considera las diferencias de los instantes de cada una de las observaciones con respecto al instante de la posición real, es decir, los errores cometidos en tales observaciones. Construye la curva de distribución de los errores. Y sostiene entonces que si se toma como verdadera posición de la estrella el valor dado por la media de los resultados de las observaciones se minimiza el error cometido.

Esta distribución de los errores es una función $y=f(x)$ de la distancia x entre el instante de una observación y el instante de la posición real del objeto observado. Demuestra incluso, mediante complejos razonamientos, que esta función verifica la ecuación diferencial:

$$\frac{df(x)}{dx} = -kf(x)$$

de donde deduce, teniendo en cuenta la simetría de la distribución, que:

$$f(x) = \frac{k}{2}e^{-kx}$$

Laplace subraya el interés de la probabilidad inversa, esto es, el análisis de las causas a partir de los resultados, de gran importancia en muchos aspectos de la vida social, como es el de la demografía. En este sentido, había hecho estudios sobre población, en colaboración con Condorcet, respondiendo así a las necesidades de los gobiernos de conocer la evolución de los nacimientos, matrimonios, defunciones, etc, de la población.

La teoría analítica de las probabilidades

Corren nuevos tiempos políticos por la Francia de fines de siglo. Y Napoleón, que se había dedicado a tareas científicas y de enseñanza, en 1798, obedeciendo a su carácter de militar, se va a la campaña de Egipto. Vuelve al año siguiente, y, tras el golpe de estado del 9 de noviembre, se hace con el poder, derroca el Directorio, establece una nueva Constitución y crea el Consulado, formado por un triunvirato que debe regir los nuevos destinos del país. La realidad es que es el propio Napoleón el que gobierna de hecho.

En su primer gobierno, Napoleón nombra ministro del interior a su amigo Laplace, conocido y admirado suyo, desde los primeros momentos de alumno de la escuela militar hasta los de compañero de trabajos en el Instituto de Ciencias. Pero, no era la tarea política lo más idóneo para la personalidad de Laplace, y el caso es que no llegó a dos meses su permanencia en el cargo.

Así, pues, volvió a sus trabajos, en los que le quedaba aún mucho por hacer. A lo largo de su vida no había cesado de trabajar Laplace sobre el problema de la probabilidad. Había presentado a la Academia múltiples memorias sobre el tema, ampliando cada una de ellas notablemente sobre las anteriores.

El objetivo de sus estudios era tratar todos los temas con el instrumental matemático. Esto hizo con la física, por lo que está considerado como el iniciador de la física matemática. Y, como no podía ser menos, esto era también así en el caso de la teoría de la probabilidad. Esa fue precisamente su gran aportación en este campo.

En el prólogo de la Memoria sobre las integrales definidas, dada a conocer el año 1811, decía Laplace lo siguiente:

> El cálculo de las funciones generatrices es el fundamento de una teoría que me propongo publicar pronto sobre probabilidad. (Bergasa, 2003: 176)

Pues, efectivamente, el año 1812, cuyo bicentenario celebramos, ve la luz una obra titulada *Teoría analítica de las probabilidades*, en la que vierte todos los conocimientos que poseía debidamente estructurados. La obra consta de dos volúmenes presentados en el Instituto con unos tres meses de diferencia, que ocupaban un total de 464 páginas.

Hubo una segunda edición en 1814, sensiblemente cambiada y con una introducción de 169 páginas, de carácter divulgador, en el que había suprimido todas las fórmulas, titulada *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*. El Ensayo es importante porque en él aparecen todas las ideas que presidían sus nociones sobre la probabilidad. Llama la atención del lector sobre el enorme interés de la probabilidad tanto para la ciencia como para la sociedad en general. Y muestra su idea de que la probabilidad se refiere en parte a nuestra ignorancia y en parte a nuestros conocimientos. Si un suceso no es determinista, es decir, que de él no tenemos un conocimiento total, entonces se trata de un suceso de azar y es el estudio de las probabilidades lo que nos permite un mejor análisis del mismo porque las probabilidades, dice, acaban siempre por imponerse. Dada la importancia del Ensayo como obra de divulgación, pronto apareció una edición como libro independiente.

En el primer volumen demuestra todas las fórmulas que necesita de cálculo diferencial e integral para desarrollar sus ideas sobre la probabilidad. Pero el libro está dedicado a las funciones generatrices. Tras unos resultados de análisis funcional dedica 189 páginas a desarrollar la teoría de funciones generatrices.

Define la función generatriz de una función $y = f(x)$ como una función de la variable t dada por la expresión:

$$y = \sum_{0}^{\infty} y_n t^n = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots$$

Donde los y_n son los valores obtenidos en f para los distintos valores naturales de n.

La función generatriz no es una bonita especulación en el terreno del análisis. Laplace la aplica a cuestiones como la solución de ecuaciones en diferencias finitas, la interpolación y transformación de series o la expresión de funciones en términos de integrales definidas.

En el segundo volumen aborda ya de una manera directa el tema de la probabilidad tratado con todo el aparato analítico expuesto en el primer volumen. Comienza este segundo volumen con las siguientes palabras:

> Se vio en la introducción que la probabilidad de un suceso es la relación del número de casos que le son favorables respecto del número de todos los casos posibles, cuando nada lleva a creer que alguno de los casos debe ocurrir antes que los otros, lo que los hace para nosotros igualmente posibles.

Y añade aún:

> Si todos los casos no son igualmente posibles, se determinarán sus posibilidades respectivas, y, entonces, la probabilidad del suceso será la suma de las probabilidades de cada caso favorable. (Bergasa, 2003: 179)

Queda claro, desde el principio, lo que hoy conocemos como regla de Laplace para el cálculo de la probabilidad de un suceso. Como se ve, su noción de probabilidad es claramente cuantitativo, puramente subjetivo, sin apuntar siquiera hacia una concepción objetiva, a partir de la frecuencia relativa. ¿Cómo era posible esto?

Laplace era radicalmente determinista. Lo dice con las siguientes palabras:

> Una inteligencia que para un instante dado conociera todas las fuerzas que actúan en la naturaleza, así como la posición relativa de los elementos que la componen, y además fuese suficientemente amplia como para someter a análisis estas magnitudes dadas, encerraría en una misma fórmula los movimientos tanto de los mayores cuerpos celestes como de los átomos más insignificantes; nada le resultaría dudoso y tanto el futuro como el pasado se mostrarían al descubierto ante sus ojos. (Wussing y Arnold, 1989: 353)

Es decir, que todo suceso está predeterminado por unas condiciones iniciales y de contorno que si se conocen es posible calcular su estado en cualquier momento.

Pues bien, como señala Bergasa, haciéndose eco de las palabras de Cournot:

> ...su determinismo le impedía pasar del modelo subjetivo de probabilidad que él postulaba y que era inherente al desconocimiento del individuo en tanto que observador de la realidad, a otro modelo, digamos que objetivo, que admitiera una concepción estadística del fenómeno. (Bergasa, 2003: 180)

En cuanto al sentido de la probabilidad, se aleja de la idea inicial de Pascal, de considerarla para las situaciones aleatorias que se presentan en los juegos. Lo importante en Laplace es el conocimiento y tratamiento de la realidad. La probabilidad como instrumento capaz de prever resultados y encontrar causas, a partir de las observaciones realizadas, y, lo que resulta más novedoso, capaz de poder estimar los márgenes de error cometidos en cada caso.

Por lo que se refiere a problemas concretos resueltos en el segundo volumen, resulta particularmente interesante, entre otros varios, el tratamiento y aplicaciones del problema de Pascal-Fermat. Laplace lo formaliza bajo el modelo de extracción de bolas de una urna. Lo plantea así:

> Imaginemos una urna que contiene dos bolas, una blanca y otra negra, marcadas ambas con el número 1; la blanca corresponde al jugador A y la negra al jugador B. Se extrae una bola de la urna y se devuelve para proceder a una nueva extracción. Se continúa así hasta que la suma de los números obtenidos favorables a un jugador alcance un número previamente fijado. Tras un cierto número de extracciones, al jugador A le falta un número x mientras que al jugador B le falta x´. Acuerdan entonces los dos jugadores retirarse del juego, repartiéndose la apuesta realizada al comienzo. Se trata de saber cómo debe hacerse el reparto. (Bergasa, 2003: 184)

La diferencia con Pascal reside no solo en el contexto, concreto en este y más abstracto en aquel, sino en que Laplace lo primero que hace, antes de meterse a resolverlo, es generalizar el problema. Plantea así la siguiente primera generalización:

> 1º: suponiendo en la urna una bola blanca favorable a A, con el número 1, y dos bolas negras favorables a B, una con el número 1 y la otra con el número 2; cada bola disminuirá según su número el número de puntos que le faltan al jugador a quien le sea favorable.
>
> 2ª: suponiendo en la urna dos bolas blancas, con los números 1 y 2, y dos bolas negras, con los mismos números. (Bergasa, 2003: 186)

A continuación, propone una segunda generalización: Supone que ambos jugadores tienen distinta pericia y comienzan con un número diferente de monedas, apostando una moneda por partida y perdiendo el que se quede sin monedas. ¿Cuál es entonces la probabilidad de que gane A o B en la enésima partida? ¿Y qué ocurre si ambos jugadores poseen la misma pericia?

Aún se plantea una tercera generalización: Se trata de que intervengan $n+1$ jugadores, que juegan de dos en dos, de modo que el ganador de una partida pasa a jugar con un tercero, y así sucesivamente. El juego se termina cuando un jugador haya ganado a todos los demás. ¿Cuál es la probabilidad de que se termine el juego después de n partidas? ¿Y cuál es la probabilidad de que gane un jugador determinado al cabo de esas n partidas?

Todos estos supuestos son analizados y resueltos mediante las funciones generatrices, siempre en el caso de que los jugadores apuesten la misma cantidad. El caso de que las apuestas de los jugadores sean diferentes tardaría más de un siglo en resolverse. Lo lograron G. Barnard y A. Wald en 1945.

Por lo demás, Laplace acaba aplicando a cuestiones reales los resultados obtenidos en la resolución de estos problemas, como es a la distribución de errores que resultan de una serie de observaciones, o a la probabilidad de un veredicto justo por parte de los tribunales de justicia.

Los últimos años

Lo importante en Laplace es el conocimiento y tratamiento de la realidad.

El mismo año de 1814, en que Laplace publicaba su *Teoría analítica,* volvían a Francia los conflictos políticos. El fracaso de las campañas de Napoleón en Rusia, seguido de la invasión del país por las tropas rusas, prusianas y austriacas, provocó el hundimiento del emperador. El 2 de abril el senado pone fin al imperio, y cuatro días después aprueba una nueva Constitución por la que se nombra nuevo rey de Francia a Luís XVIII, hermano de Luís XVI. En esta situación, Laplace se hallaba ilocalizable. ¿No quería contribuir con su voto a la expulsión del poder de su antaño amigo y protector Napoleón? ¿No estaba seguro de cómo iba a evolucionar la situación, y prefería esperar a ver el resultado final?

El caso es que, una vez aclarados los acontecimientos, Laplace apoya a la restaurada monarquía, goza del favor del nuevo rey, se convierte en miembro de la Cámara de los Pares, sustituta del antiguo Senado, y, en agradecimiento por su adhesión, no tardaría Luis XVIII en concederle el título de Marqués de Laplace. Su cambio de posición con respecto al anterior apoyo al emperador llega a tal extremo que, en la reedición de su Teoría analítica de 1814, comenta en el prólogo que la caída de los imperios se podría predecir con gran probabilidad por alguien entendido en el cálculo de probabilidades.

El marqués de Laplace

En 1816, el Instituto de Francia es sustituido por cuatro instituciones, a saber, la Academia Francesa, la Academia de Ciencias, la Academia de Bellas Artes y la Academia de Letras. Laplace es nombrado miembro de las Academias Francesa y de Ciencias, siendo elegido el año siguiente Presidente de esta última. Se muestra agradecido al rey, que tanto le ha distinguido, y manda eliminar de sus obras las frases que dedicara en ellas a Napoleón, así la de «heroico pacificador de Europa», en el tercer volumen de su *Mecánica celeste*, o la de «Napoleón el Grande», en su *Teoría analítica de las probabilidades.*

Queda de manifiesto una de las características de la personalidad de Laplace, adaptarse a todas las situaciones políticas por las que atravesaba el país en esta época: monarquía, república, bonapartismo, y nuevamente monarquía. Su único interés era tener la posibilidad de realizar su trabajo científico y garantizar los medios económicos suficientes como para llevar una subsistencia desahogada.

Semejante actitud le valió no pocas críticas de sus colegas, sobre todo los jóvenes, porque los mayores habían tenido que soportar las mismas circunstancias y eran más capaces de comprender lo difícil de su postura. Por otro lado, en el terreno personal dio buenas muestras de su sentido social, tanto en los objetivos de sus trabajos, dirigidos al bien de la sociedad, como en la ayuda a personas concretas que lo necesitaban, sobre todo a los jóvenes científicos a los que procuraba suministrar los medios necesarios para irse abriendo camino en su profesión.

Laplace sigue sus trabajos, aunque su rendimiento va bajando a medida que avanza en edad. Se dedica a temas físicos pero sin la carga matemática de otras veces. Ya se ha comentado su escaso interés por la matemática en sí mima, que concebía solo en función de su utilidad como instrumento al servicio de las Ciencias de la Naturaleza. Quizá por eso, cuando necesitaba algún resultado matemático para sus escritos científicos, omitía el proceso de deducción. En este sentido, el matemático americano N. Bowditch, traductor al inglés de su *Mecánica celeste*, se quejaba de que cada vez que se encontraba con la frase «es fácil ver que» le esperaban varias horas de trabajo hasta que conseguía completar el proceso. Incluso cuenta Biot que, habiéndose ofrecido a repasar los cálculos de la *Mecánica celeste* para su edición, al pedir a Laplace que aclarase los puntos oscuros, éste necesitó en algún caso más de una hora de trabajo para resolverlo.

Su categoría científica ha llegado a la cumbre, y se convierte en el lider del importante grupo de científicos de la época. No es menor la influencia que ejerce en las instituciones. Llega incluso a permitirse el lujo de elegir al excelente matemático J. Fourier para el puesto de Secretario perpetuo de la Academia de Ciencias en contra del deseo de Louis XVIII, que le había expresado su disconformidad con tal nombramiento.

En 1825, aparece una nueva edición de la *Teoría analítica de las probabilidades* con un nuevo suplemento, así como la 5ª edición del *Ensayo filosófico sobre las probabilidades*, que ya anteriormente se había publicado como texto independiente de la Teoría.

Finalmente, unos días después de presentar una memoria sobre los fenómenos atmosféricos a la Oficina de Longitudes, moría Pierre-Simon de Laplace a comienzos de marzo de 1827. El astrónomo Bouvard, que le acompañaba en los últimos momentos, trataba de tranquilizarle en sus delirantes fiebres recordándole sus descubrimientos en materia de astronomía, a lo que, según se cuenta, Laplace respondió:

> Lo que conocemos es muy poco, lo que ignoramos es inmenso. (Bergasa, 2003: 214)

Tras su muerte, la fama como científico de primera línea continuó de tal manera que sus obras completas fueron reeditadas por la Asamblea Nacional, entre 1843 y 1847, en siete volúmenes, por iniciativa del científico François Arago, que defendió la propuesta con un patriota discurso, cuyas primeras palabras eran suficientemente significativas de la huella dejada por Laplace. Decían así:

> Señores, Laplace, ha dotado a Francia, a Europa, al mundo sabio, de tres magníficas composiciones: Tratado de Mecánica celeste, Exposición del sistema del mundo y Teoría analítica de las probabilidades. Hoy ya no existe en las librerías de Paris ningún ejemplar de esta última obra. La edición de la Mecánica celeste pronto estará agotada. Se ve, pues, llegar el momento en que las personas dedicadas al estudio de las matemáticas trascendentes se verían forzadas, a falta de la obra original, a pedir a Filadelfia, a Nueva York o a Boston la traducción inglesa, que el hábil geómetra Bowditch ha hecho del tratado de nuestro compatriota. (Bergasa, 2003: 216)

Hubo aún otra reedición de las obras completas, en catorce volúmenes, finalizada en 1912, y financiada por su hijo.

Referencias bibliográficas

Bergasa, J. (2003), *Laplace. El matemático de los cielos*, Nivola, Madrid.

Wussing, H., y W. Arnold (1989), *Biografías de grandes matemáticos*, Prensas Universitarias de Zaragoza, Zaragoza

Collette, J. P. (1985): *Historia de las matemáticas*. Siglo XXI de España Editores, Madrid.

Santiago Gutiérrez Vázquez
Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas «Emma Castelnuovo»
<hace@revistasuma.es>

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 97-104

Describir poliedros contando caras, aristas y vértices

David Barba y Cecilia Calvo

Tal como comentamos en la primera entrega de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar estas dinámicas en clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta segunda entrega, continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Espacio y Forma» con la misma intención de dar a nuestros alumnos y nuestras alumnas un papel protagonista en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

Describir el entorno

En el real decreto 1513/2006 en el que se establecen las enseñanzas mínimas (LOE) para la educación primaria podemos leer: «La geometría es des-

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

cribir, analizar propiedades, clasificar y razonar y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar, construir, dibujar, modelizar y medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas». Pero además especifica como un objetivo para la enseñanza de las matemáticas: «Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción». En ambas frases se insiste en considerar la descripción como el elemento fundamental del trabajo en geometría en un marco de competencias y en destacar como objetivo principal de ese trabajo dar herramientas a los alumnos para que ell@s puedan tener la palabra en el momento de describir su entorno.

Aunque una parte importante del tiempo que se dedica en la escuela a trabajar con figuras tridimensionales se invierte en poner etiquetas a un cierto grupo de estas figuras (cubos, esferas, pirámides, conos, …) el reto que tenemos como maestros está en que las descripciones del entorno no se limiten a asignar nombres a diferentes tipos de figuras geométricas. Es importante que se conozcan los nombres de las figuras, pero más importante es que se integren con normalidad esos términos matemáticos precisos en la comunicación cotidiana con el objetivo de informar más y mejor.

Describir poliedros

Aunque en el entorno no sólo hay poliedros creemos que, analizando la manera en que trabajamos este tema en el aula, podremos darnos oportunidades para reflexionar sobre qué tipo de descripciones queremos que nuestros alumnos realicen del mundo en tres dimensiones en el que vivimos. Por supuesto que queremos que no digan rectángulo cuando se trata de un prisma ni triángulo cuando se trata de una pirámide. Pero queremos mucho más:

a) Queremos que las etiquetas aprendidas no sólo sirvan para identificar, sino para describir objetos del entorno. Por ejemplo, ante una edificación como la mostrada en la imagen 1 podrían decir que está formada por dos módulos, un prisma de base cuadrada y sobre él una pirámide cuadrangular; ante la necesidad de describir una caja de chocolate como la de la imagen 2, alguien que jamás haya visto una podría presentarla como un prisma de base triangular; y podrían mencionarse los prismas cuadrangulares oblicuos al describir un edificio como el de la imagen 3.

Imagen 1

Imagen 2

Imagen 3

b) Queremos también que las etiquetas aprendidas no se apliquen únicamente a los casos más prototípicos sino a todos los que cumplen los requisitos para ello. Por ejemplo, deseamos que un alumno sea capaz de poner la etiqueta «prisma» a un poliedro que tiene dos caras iguales paralelas y todas las demás rectangulares, aunque no lo vea apoyado sobre una de las caras que jugarán el papel de bases (por ejemplo, los poliedros representados en las imágenes 4 y 5 corresponden a prismas de base trapezoidal y pentagonal respectivamente). Para que esto suceda deberíamos presentar a los alumnos los cuerpos en distintas posiciones: apoyados sobre diferentes caras, colgados del techo, haciendo equilibrio sobre una arista, etc.

Imagen 4

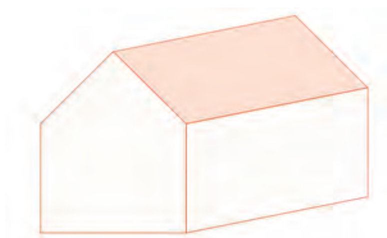


Imagen 5

En una posterior aproximación a la noción de prisma puede interesarnos que asignen a estos poliedros la etiqueta «prisma recto», ya que sus caras laterales no son paralelogramos cualesquiera. Pero aquí queremos enfatizar la importancia de independizar la identificación de figuras de la posición en la que éstas se presentan.

Tocar y mirar

Para promover estas respuestas no podemos usar en el aula únicamente los recursos que se comercializan en plástico o madera y menos aun restringirnos a las imágenes que sobre poliedros usuales incluyen los libros de texto, sino que debemos integrar el uso de figuras tridimensionales cotidianas como son los envases, fotografías de objetos conocidos por los alumnos, construcciones realizadas por ellos con diferentes materiales, etc. En resumen, debemos ofrecer a los alumnos un amplio y rico universo de ejemplos.

No sólo las familias de prismas y de pirámides han de formar parte del muestrario de poliedros de nuestra clase:

a) Porque en su entorno no se encontrarán únicamente este tipo de poliedros.

b) Porque aunque no sean tan corrientes en el entorno, en matemáticas hay otras familias importantes de poliedros como los regulares, las bipirámides o los antiprismas. En las imágenes 6 y 7 podemos ver representaciones planas de elementos de estas dos últimas familias provenientes de la galería de poliedros transparentes que se pueden encontrar en la *Wikipedia*.

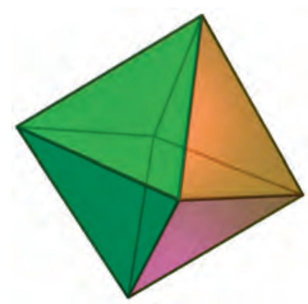


Imagen 6

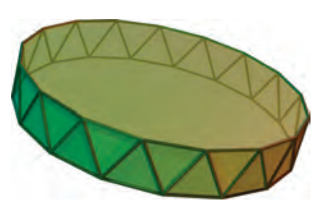


Imagen 7

c) Porque restringiéndose a prismas y pirámides se corre el riesgo de sobregeneralizar propiedades. Por ejemplo, los alumnos podrían llegar a pensar que no hay poliedros que tengan más caras que vértices.

Antes mencionábamos las imágenes de poliedros como integrantes del universo de ejemplos y creemos que vale la pena detenernos un momento en esta cuestión. Ni en el libro de texto, ni en las fichas que preparamos para nuestros alumnos, ni en sus libretas, ni en la pantalla del ordenador podemos tener figuras tridimensionales, sino sus representaciones planas. Es por este motivo que adquiere tanta importancia incluir en el trabajo de clase la interpretación y la elaboración de representaciones planas de poliedros.

Hay muchos aspectos relacionados con estas representaciones que creemos que vale la pena discutir con nuestros alumnos. Pongamos un ejemplo muy elemental. Lo que vemos en la imagen 8 son dos representaciones de un cubo, ¿qué tienen que decir nuestros alumnos respecto a los siguientes puntos?

1. Las 6 caras del cubo son cuadradas, pero en la representación no se ven todas y, de las que se ven, algunas (todas, en el segundo caso) aparecen deformadas. ¿Qué forma tienen los cuadriláteros que representan estas caras?

2. El cubo tiene 12 aristas pero en la representación no se ven todas. Si fuera transparente sí se verían y en la imagen aparecerían representadas de alguna manera en que podríamos diferenciarlas de las demás (por ejemplo, con líneas punteadas). ¿Dónde aparecerían estas líneas?, ¿serían paralelas a las líneas que representan a otras aristas?, ¿se conservaría también la perpendicularidad?

3. De los 8 vértices del cubo, en la representación solo se ven 7. Si el prisma fuera transparente, ¿dónde se ubicaría el octavo vértice?

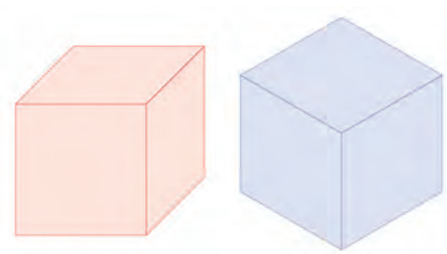


Imagen 8

Antes de continuar con las representaciones planas de poliedros, nos gustaría comentar una anécdota ilustrativa y que está impregnada de la motivación que nos impulsa a dar a los alumnos la palabra durante las clases de matemáticas. Una estudiante de Magisterio, durante sus practicas en una clase de cuarto de primaria, propuso en un examen escrito la tarea que aparece en la imagen 9.

Imagen 9

Al repasar con su tutor las anotaciones que había realizado a los exámenes recogidos, apareció el caso de un alumno que había clasificado los tres primeros cuadriláteros como cuadrados. La estudiante había indicado como errónea la clasificación de la tercera figura pero al verlo, su tutor, le sugirió que «hiciera hablar» al alumno sobre la respuesta que había dado para poder comprender qué lo había conducido al error. Así lo hizo y la justificación que recibió del alumno fue:

> Es un cuadrado como la cara de arriba de un cubo.

La anécdota nos alerta sobre lo cuidadosos que debemos ser en el momento de trabajar la interpretación de representaciones planas de poliedros cuando éstas se realizan utilizando dibujos en perspectiva.

Con relación a las imágenes que aparecen en la pantalla del ordenador vale la pena incluir en el universo de ejemplos de poliedros las imágenes animadas que dan una nueva perspectiva a la relación entre poliedros y sus representaciones planas.

En la imagen 10 hemos capturado un «instante» de estas imagenes animadas que pueden verse en:

www.wikimedia.org/wiki/File:Icosidodecahedron.gif

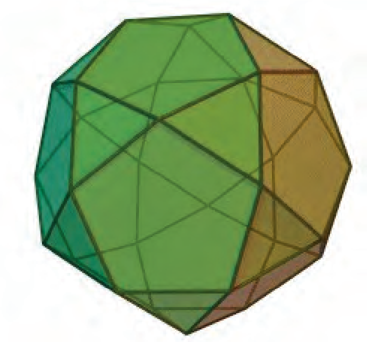


Imagen 10

Caras, aristas y vértices

Durante la descripción de poliedros podemos centrarnos en sus tres elementos fundamentales. En el caso de las caras no nos interesa únicamente cuántas son, sino también qué forman tienen.

La imagen 11 muestra una actividad en la que se propone a alumnos de segundo de primaria la identificación de la forma de las caras de diferentes poliedros (Barba, D. y M. Torra (1981), *Dado: Matemáticas 2º E.G.B*, Ilustraciones: Picanyol, Editorial Barcanova, Barcelona).

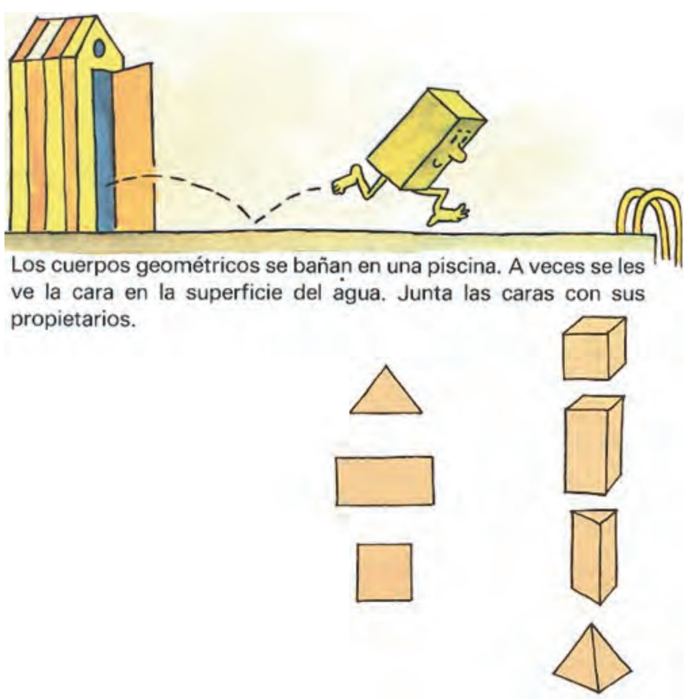


Imagen 11

Pero creemos que podemos ir más allá en el estudio de las caras en el momento de describir un poliedro. Dos ejemplos:

a) ¿Qué ángulo forman dos de sus caras?

En el caso de los prismas rectos la respuesta es fácil, pero la medición del ángulo entre dos caras de otro tipo de poliedros merece atención.

Una manera de hacer estas mediciones es usando un medidor de ángulos casero: una especie de libro de dos hojas con el que «rodear» el poliedro a lo largo de una arista y que permite, resiguiendo las hojas de este «libro» sobre un papel, dibujar el ángulo y medirlo como se hace habitualmente (imagen 12).

Imagen 12

En este sentido, las experiencias que hemos realizado preguntando a alumnos qué ángulo forman dos caras de un tetraedro regular evidencian la necesidad de dedicar un tiempo explícito a este tipo de análisis. El primer problema que encontramos es diferenciar el ángulo entre dos caras del ángulo formado por dos lados de una misma cara triangular. Resuelto este primer escollo y previamente a hacer la medición, se presenta la dificultad de hacer una estimación de la medida del ángulo entre caras: ¿es mayor o menor a 60º? Por último, y posterior a la medición, sobreviene la sorpresa de que el ángulo obtenido no sea ningún entero[1] (entre 70º y 71º).

b) ¿Se puede apoyar el poliedro sobre cualquiera de sus caras?

Para los poliedros que tienen presencia habitual en el aula la respuesta es afirmativa. Pero si damos a los alumnos la posibilidad de construir libremente poliedros a partir de diferentes materiales, aparecen muchos poliedros para los cuales hay alguna cara sobre la que no se puede apoyar el cuerpo. Por ejemplo, el prisma en la imagen 13. Este tipo de prácticas favorece la discusión sobre la relación existente entre esta posibilidad y el hecho de que el poliedro sea convexo.

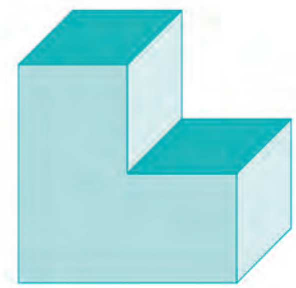


Imagen 13

Sobretodo, vemos en el estudio de las caras una primera aproximación a los desarrollos planos de los poliedros y vemos en los desarrollos otra manera de describir cómo es el cuerpo y no sólo un recurso para construir modelos de cartulina.

Por ejemplo, podemos imaginar y explicar como es el nuevo envase de un cierto producto a partir el desarrollo que aparece en la imagen 14.

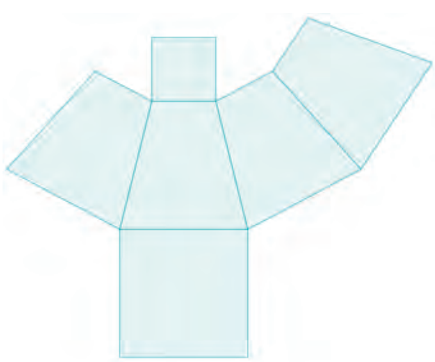


Imagen 14

En el caso de los vértices tampoco nos interesa únicamente su número. También importa el orden de cada vértice, o sea, la cantidad de aristas que llegan a él. Alguien podría considerar que no es importante discutir sobre el orden de un vértice en primaria, pero merece la pena considerar este concepto, ya que:

a) Es fundamental, por ejemplo, para entender por qué una bipirámide formada por 6 triángulos equiláteros no es un poliedro regular aunque todas sus caras sean polígonos regulares iguales.

b) Surge naturalmente cuando se trabaja con materiales manipulativos de construcción a partir de caras y vértices en que éstos tienen «patitas» que se meten en las aristas, como el de la imagen 15.

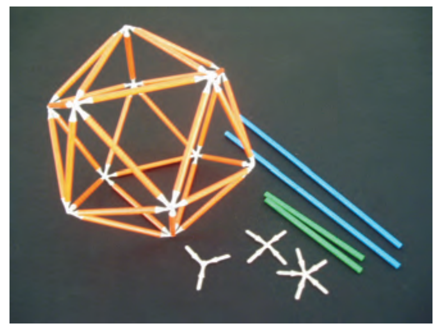


Imagen 15

Construir, imaginar, deducir

Para estudiar caras, aristas y vértices de un poliedro, además de mirarlos y tocarlos, es valioso que los alumnos los construyan. Históricamente, en las escuelas, esto se ha hecho a partir de sus desarrollos en cartulina (como mínimo el del cubo). Deberíamos mantener esta práctica, pero también extenderla y construir poliedros con otros materiales.

Dado un desarrollo se puede pedir a un alumno que lo recorte y construya el poliedro correspondiente; o se le puede pedir que lo copie en su cartulina primero, después lo recorte, y lo construya. Pero a partir de un desarrollo puede hacer más cosas que construir. Se le puede pedir que imagine el poliedro correspondiente y responda algunas preguntas. En las imágenes 16 y 17 se pueden ver un par de ejemplos de una actividad de este último tipo.

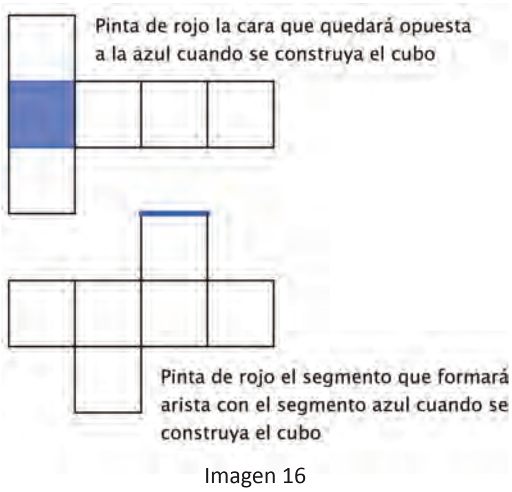


Imagen 16

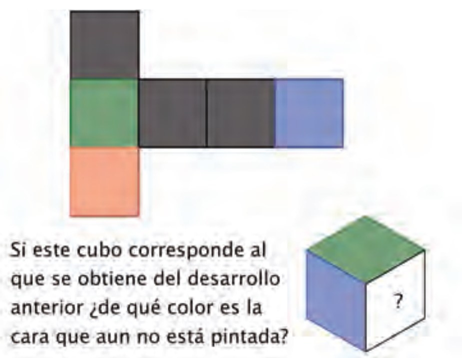


Imagen 17

Pedir a los alumnos que generen sus propios desarrollos es ir un paso más allá. Y aprender a hacerlo pasa por una serie de etapas, la primera de las cuales podría ser dibujar las caras «separadas» y unirlas de manera correcta utilizando cinta adhesiva para llegar después a dibujar un desarrollo con caras unidas y pestañas bien colocadas.

Además de la construcción de poliedros a partir de sus desarrollos también se pueden utilizar otros materiales, comerciales o caseros, de dos tipos.

Hay materiales que resaltan el papel de las aristas y los vértices. Ya mencionamos uno de ellos: *Volumes à construire* (imagen 15), pero no necesitamos restringirnos a materiales comerciales: podemos construir poliedros usando palillos para representar las aristas y guisantes para representar los vértices tal como se ve en la imagen 18. O se pueden usar trocitos de alambre y bolitas de plastilina u otros materiales que tengamos al alcance.

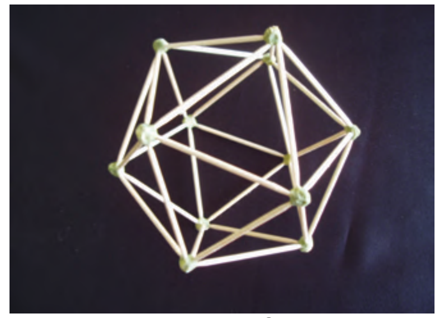


Imagen 18

También hay materiales que resaltan el papel de las caras. En este sentido, el *Polydron* (imagen 19) es un material comercial; y el *Plot* (imagen 20), es un material que podemos construir nosotros mismos para tener en el aula.

Imagen 19

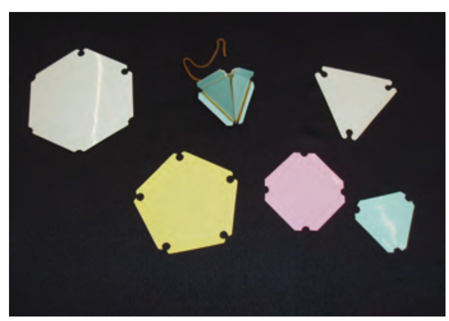


Imagen 20

Con estos materiales en el aula pueden organizarse actividades como la redacción de «albaranes» para solicitar al maestro los elementos necesarios para construir un poliedro determinado de manera que no tengan que pedir más material ni que les sobre. Por ejemplo, para obtener una pirámide hexagonal.

Si se dispone de un material como *Volumen à construire*, deben pedir 6 aristas de una medida, 6 de otra, 6 vértices de 3 patitas y un vértice de 6 patitas. Con el *Plot* deben pedir un hexágono, 6 triángulos isósceles iguales y 12 bandas elásticas para unirlos.

Pero para contar las caras, las aristas y los vértices de un poliedro no siempre es necesario tenerlo delante para mirarlo o para tocarlo (en ocasiones puede llegar a ser hasta contraproducente, basta imaginar a un alumno intentando contar los vértices de un icosaedro que tiene en las manos). También pueden contar estos elementos imaginando el poliedro o pueden deducir las cantidades a partir de los patrones que verifican estos números dentro de una misma familia. Veamos algunos ejemplos:

a) Se puede mostrar un cubo a un alumno y proponerle que con su imaginación trunque un vértice (haga un corte plano que lo elimine). El resultado es un nuevo poliedro del que se pueden contar sus elementos. Ha aparecido una nueva cara que en el cubo no estaba; por tanto, ahora hay 7 caras. Ha desaparecido uno de los vértices del cubo, pero han aparecido 3 nuevos dejando un total de 10 vértices. De la misma manera ha desaparecido una arista, pero se han generado otras 4 dejando un total de 15 aristas. Una actividad similar se puede realizar truncando más de un vértice o truncando aristas (y para aquellos alumnos a los que cuesta un poco más imaginar, siempre nos queda el recurso de «construir» un cubo con una patata y hacer los truncamientos sobre ella).

b) Se puede analizar que en las bipirámides triangulares hay 9 aristas; en las bipirámides cuadradas, hay 12 ; en las pentagonales, hay 15; y a partir del análisis de este patrón deducir que las bipirámides octagonales tendrán 24 aristas. Lo mismo puede hacerse con relación al número de vértices y caras de las bipirámides, prismas, pirámides y antiprismas (aunque este último caso seguramente sobrepasa las expectativas para Primaria).

Se pueden contar el número de aristas de un dodecaedro regular razonando de la manera siguiente. Un dodecaedro regular tiene 12 caras pentagonales. Como cada cara aporta 5 aristas, las 12 caras aportan $5 \cdot 12 = 60$ aristas. Pero cada una de ellas pertenece a dos caras por lo que en el 60 estamos contando dos veces cada arista, lo que nos permite deducir que un dodecaedro regular tiene 30 aristas[2].

Reflexión final

En la primera entrega de esta sección discutimos la manera en que un modelo como la línea numérica vacía permite a los alumnos pensar y comunicar sus razonamientos aritméticos. Ahora hemos desplazado nuestra atención al uso de material manipulativo como un catalizador para que los alumnos comuniquen sus razonamientos geométricos mediante descripciones. Hemos propuesto que el aprendizaje de vocabulario geométrico deje paso a actividades centradas en la descripción del entorno y que el estudio de una rica colección de poliedros se convierta en una oportunidad para que los alumnos hablen de Geometría en un ambiente de retos: imaginando nuevas figuras, contando sus elementos y buscando regularidades entre ellos.

DAVID BARBA URIACH
Universitat Autònoma de Barcelona

CECILIA CALVO PESCE
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Una manera de afrontar esta sorpresa es complementar la actividad de la medición de los ángulos entre las caras de un tetraedro regular con la medición del ángulo que forman dos caras del octaedro regular. En el segundo caso la medida obtenida tampoco es un número entero, pero sumado al valor obtenido en el tetraedro da exactamente 180°. Esto se puede comprobar poniendo un poliedro junto al otro y verificando que encajan perfectamente.

2 Se pueden complementar estos ejemplos en Calvo, C. (2011), «Reflexiones sobre la gestión de una clase de Matemáticas», *Actas del 3.er Congreso Uruguayo de Educación Matemática*.

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 105-111

Cristóbal Vila, ideas matemáticas en 3D

Francisco Martín Casalderrey

Cristóbal Vila
Ginebra (Suiza), 1966
Licenciado en Bellas Artes por la Facultad Sant Jordi (Barcelona), director de *Etérea*, empresa, en la que él es el único trabajador, dedicada a la ilustración, la animación 3D y la formación en relación con estos campos. Es autor, entre otros trabajos, de dos estupendos cortos: *Nature by Numbers,* basado en los números, la geometría y la naturaleza, e *Inspirations,* sobre los trabajos de M. C. Escher.

La entrevista

Hace unos años, recibí en mi correo un mensaje de un colega, como otros muchos que llegan a la carpeta de entrada cada día, con un enlace a un vídeo. Normalmente no suelo abrir estos enlaces y mando el mensaje a la papelera, pero en esta ocasión el colega añadía, «no dejes de ver este vídeo, es una maravilla», lo que me decidió a hacer click.

El comentario era cierto, el vídeo, titulado *Nature by Numbers* (www.vimeo.com/9953368), era una auténtica maravilla. En la pantalla, acompañadas por una música minimalista de Win Mertens, se sucedían imágenes de una belleza increíble y a un ritmo trepidante que abordaban y desarrollaban conceptos matemáticos: la serie de Fibonacci, la espiral áurea desde donde se reconstruía en 3D la concha de un nautilo, el rectángulo de oro, el ángulo de oro que nos lleva a la flor de girasol, las teselaciones de Voronoi terminando en la retícula de las alas de una libélula.

Literalmente me quedé con la boca abierta al final de estos escasos 4 minutos del vídeo. Pero aún quedaban sorpresas. El vídeo terminaba con un rótulo que decía:

CRISTÓBAL VILA
ZARAGOZA SPAIN 2010

Artículo solicitado por *Suma* en julios de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

Un par de años más tarde me llegó otro mensaje. En esta ocasión simplemente ponía: «Nuevo vídeo matemático de Cristóbal Vila, imprescindible...» y el enlace a un nuevo corto de 3:41 minutos de duración, *Inspirations*, que podéis ver en:

www.vimeo.com/36296951

con música, esta vez, de Ólafur Arnalds.

Éstas son sobradas razones para traer a Cristóbal Vila a las páginas de *Suma*. La entrevista se desarrolla en el Levante, uno de esos cafés históricos de Zaragoza. Tras las presentaciones y los saludos, antes de entrar, posa para las fotografías quitándose las gafas de sol y la gorra con la que cubre su cabeza afeitada y hace un primer comentario: *¿Me queda bien así el pelo?*, que marca su fino sentido del humor, que se mantendrá durante toda la conversación. Ya sentados en el interior, y ante un pincho de tortilla y unas cañas, me fijo en el tono de su voz, cordial y profunda. Cristóbal Vila es hablador y afable, buen comunicador.

Me gustaría empezar haciéndote una pregunta inicial que es común para todos los entrevistados y que guarda relación con el nombre de nuestra revista: ¿quién te enseñó a sumar?

La verdad es que no lo recuerdo. Imagino que fue mi madre, pero no lo sé con exactitud. Lo que sé de esa época es una anécdota que mi madre me ha recordado muchas veces. En el colegio en el que estudiaba, había una monja buena y otra mala. La monja mala me recriminaba que no sabía hacer bien la letra O y eso me suponía un problema hasta el punto de no querer ir a clase. La O nos la hacían dibujar uniendo cuatro puntos para cerrar el círculo. Quién iba a decirme que después mi vida profesional se dedicaría al dibujo y a unir puntos con líneas y estas en redes para formar imágenes 3D.

Naciste, según he podido ver, en Suiza, ¿qué te vincula a ese país?

La verdad es que nada en especial. Nací allí porque mis padres residían en esa época en Ginebra, pero a los pocos meses mi madre y yo volvimos a Zaragoza y al cabo de no mucho tiempo también mi padre. Mi vida se ha desarrollado casi por completo aquí, salvo los años de la carrera que hice en Barcelona, en la Facultad de Bellas Artes Sant Jordi.

¿Qué te ha llevado a tomar temas tan matemáticos como los presentes en *Nature by Numbers* como base de inspiración para tus vídeos? ¿Qué tienen las matemáticas de sugerente para crear imágenes y animaciones?

Las matemáticas, y más concretamente la geometría, siempre me han parecido muy inspiradoras, creo que toda la vida me han atraído de algún modo. De hecho recuerdo que desde que era un crío mis dibujitos en los cuadernos o en los márgenes de los libros muchas veces tenían que ver con estructuras y patrones geométricos. Cuando estudiaba el último curso de Bellas Artes hice un trabajo sobre el uso de la ornamentación geométrica empleado como canon de belleza en el arte y la arquitectura islámica (tema que elegí yo, no me vino impuesto). Y poco tiempo después, cuando viajé por primera vez a Granada y visité La Alhambra me quedé impresionado con la belleza y perfecta armonía que transmitían sus elementos decorativos.

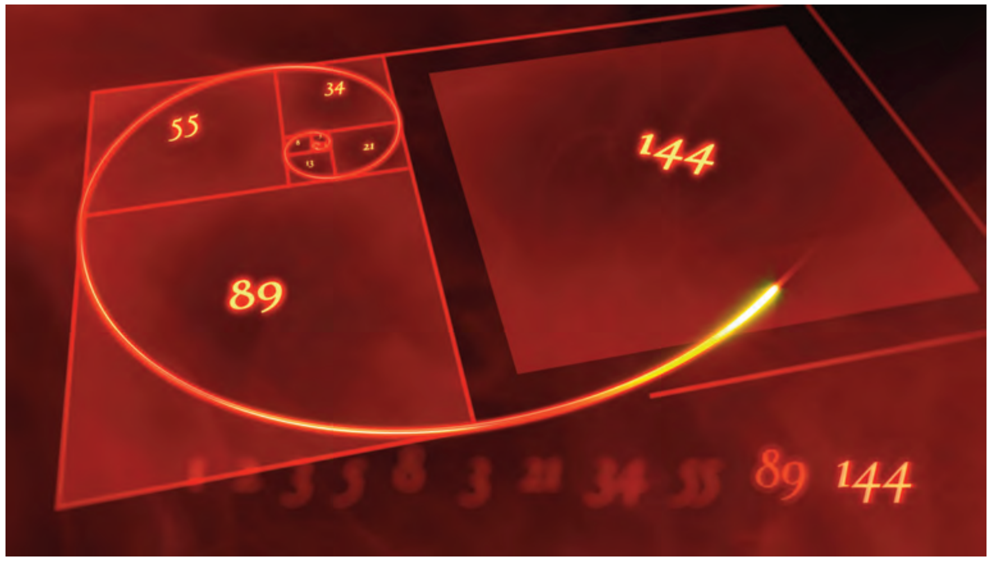
Por otro lado, al margen del hecho de que la geometría y los patrones matemáticos se han utilizado desde siempre como elemento inspirador y articulador del arte o la arquitectura, también me ha parecido muy interesante la presencia de muchas de esas estructuras en la propia Naturaleza. De tal modo que no ha sido la mano del hombre quien las ha modelado, sino el conjunto de *leyes* o reglas físicas que rigen el Universo (un creyente diría que ha sido Dios, pero ese no es mi caso...)

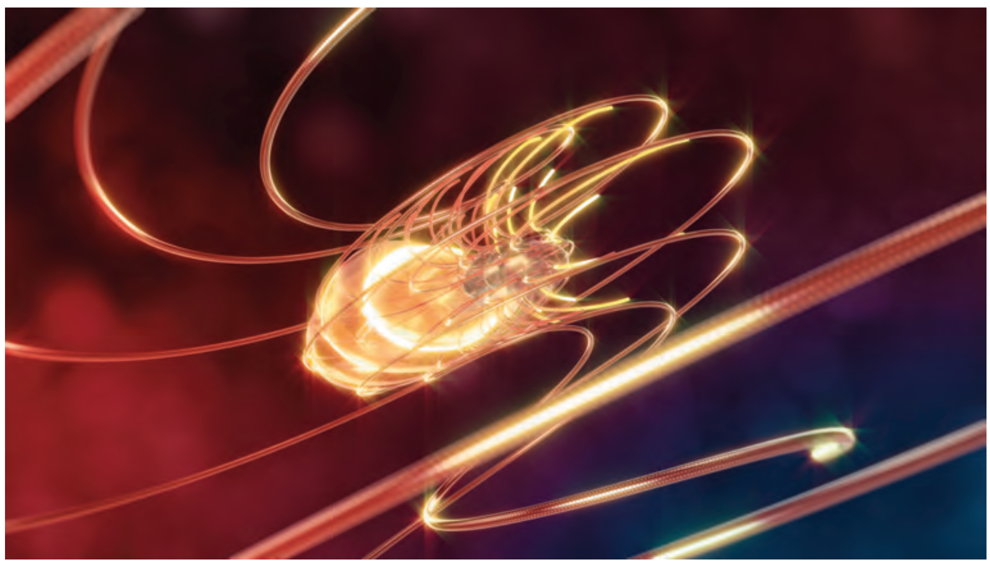
De cualquier forma, tengo que decir que mi interés por las matemáticas y la geometría es especialmente *visual*. La matemática, como asignatura en el colegio y el instituto tampoco es que fuera una de mis temáticas favoritas (probablemente porque no siempre se enseñaba de una forma que la hiciera atractiva, de hecho recuerdo que había muchas cosas que se me atra-

Noviembre 2012

Tres imágenes del vídeo *Nature by Numbers,* Cristóbal Vila (2010), Etérea Estudios,

<www.vimeo.com/ 9953368>





gantaban, como la teoría de conjuntos, o el cálculo de probabilidades...).

Cuando comienzas a concebir un vídeo me imagino que empleas un cierto tiempo en documentarte, ¿cuáles son tus fuentes de información, por ejemplo a la hora de concebir un corto como *Nature by Numbers*?

Cuando estoy empezando con un trabajo como este lo primero que hago es recopilar muchas imágenes. Imágenes que busco en Internet. En *Nature by Numbers* yo tenía claro que quería hacer una animación donde se viera la presencia de la Geometría y las Matemáticas en la Naturaleza, pero no sabía de qué iba a hablar, por eso descargaba muchas imágenes de *Google images* o en *FlickR*, luego las voy categorizando y así voy eligiendo los temas de los que hablar. Naturalmente, se quedan cosas en el camino, porque siempre hay que elegir. En este caso por ejemplo los helechos. Sabes que en la estructura espiral de los helechos cada rama es una repetición del helecho completo, es una estructura fractal. Luego está la coliflor romanescu, que cuando uno la contempla parece que no sea una cosa natural. Éstos fueron algunos de los temas que analicé, pero que luego no pude incluir, porque en un corto nunca cabe todo. Y más cosas, como la *Calzada de los gigantes*, en Irlanda del Norte, que está formada por prismas hexagonales creo que de basalto, que parecen tallados por la mano del hombre en vez de por la Naturaleza. En resumen, recopilo muchas fotos y voy dándole vueltas al tema. Si algo he aprendido con el tiempo es que es mejor no tratar de meterlo todo. Es mejor hacer poco y bien, que mucho y mal. Decidí que tenía que centrarme en tres cosas. Descarté las demás y opté por la concha del nautilo, las pipas del girasol y las alas de la libélula.

Con respecto a la concha del nautilo, la espiral aparece como una estructura muy evidente y en todos los sitios se habla de ella en relación con la espiral áurea. Pero realmente pocos saben que esto es falso. En el vídeo me he permitido la licencia artística de identificarlas, pero no coinciden. Me di cuenta un poco tarde y me dio pereza rectificar lo que ya tenía preparado. Para el asunto de las pipas de girasol y el ángulo áureo me fue muy útil una página web de un matemático inglés, Ron Knott, profesor de la Universidad de Surrey:

www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/

La página no tiene un diseño muy bonito, pero contiene cantidad de información interesante sobre éste y otros temas.

Con respecto al tercer asunto, la relación entre la estructura de las alas de la libélula y las teselaciones de Voronoi, fue una cosa muy curiosa: Yo trabajo mucho con *Photoshop* para el tratamiento de imágenes y allí hay un filtro que cuando lo aplicas te genera estructuras de Voronoi. Siempre que lo veía me decía *qué raro, para qué será esto* y un día hojeando el *blog* de un amigo que vive en Japón y que no tiene nada que ver con las matemáticas, leí un artículo que había dedicado a las teselaciones de Voronoi, explicando lo útiles que son, por ejemplo, para distribuir las antenas de los teléfonos móviles, o para situar en una ciudad los restaurantes de una cadena de pizzerías. Como tenía en la cabeza las imágenes de las estructuras celulares de la plantas, relacioné las cosas y de ahí salieron las ideas para ese tercer bloque de contenidos.

Tus vídeos están disponibles en Internet y me he fijado que aunque firmados por ti, están producidos por Etérea Estudios, empresa que tú diriges. Cuéntame un poco qué es Etérea.

Poco antes de terminar la carrera, todavía en Barcelona, empecé a trabajar en una empresa como diseñador gráfico y maquetador. Luego, ya en Zaragoza, trabajé para otra empresa en la maquetación de publicaciones. Pero a la vez hacía trabajos como *freelance* y en el 2006 me decidí a crear mi propia empresa a la que llamé Etérea Estudios.

De esa empresa tú eres el factótum, director, propietario y único trabajador. ¿Nunca has pensado en hacerla crecer?

Sí, así es, yo soy el único empleado de Etérea, eso me permite trabajar en mi pro-

Tres imágenes
del vídeo
Inspirations,
Cristóbal Vila (2012),
Etérea Estudios,

*<www.vimeo.com/
36296951>*

pia casa, lo cual exige una cierta disciplina. Trabajo con un horario regular todos los días, empezando y terminando a determinadas horas fijas, pero con la comodidad de hacerlo en mi propia casa. Con respecto al crecimiento de la empresa, alguna vez me lo he planteado, pero he desechado la idea. Ahora mi trabajo se dedica en un porcentaje muy alto a la creación que es lo que más me gusta y sólo un porcentaje pequeño a las tareas administrativas y de gestión propias de una empresa. Si Etérea creciera, mi trabajo poco a poco tendría que centrarse en la gestión y, de verdad, no me veo.

En tu trabajo diario como ilustrador 3D y como grafista ¿qué matemáticas usas como herramienta auxiliar? El software ayuda, sin duda pero aparte de los cálculos que hacen los programas ¿hay métodos, conceptos o algoritmos matemáticos que te son útiles en tu trabajo?

Pues la verdad es que el nivel de las matemáticas que empleo en mi trabajo diario como infografista es muy básico y sencillo, contra lo que quizá pudiera parecer. Mis conocimientos de matemáticas se reducen a lo poco que recuerdo de lo que se impartía en el colegio. Al terminar COU hice un año de Ingeniería Industrial, donde el Cálculo y el Álgebra eran dos asignaturas muy importantes, sin embargo confesaré que no se me daban nada bien. En cambio la Geometría Descriptiva la aprobé con sobresaliente.

Hay que pensar que los programas de modelado y animación ya incorporan multitud de herramientas que hacen casi innecesario al usuario lidiar con cuestiones matemáticas. Aparte de unos básicos conocimientos de Geometría, poca cosa: Las operaciones de cálculo más sencillas, donde tiras de calculadora y la imprescindible *regla de tres*; raíces cuadradas y potencias; por supuesto hay que manejarse con π en cuanto tienes que calcular cualquier cosa relativa a circunferencias; de vez en cuando recurro a algunas operaciones muy sencillas de trigonometría (senos, cosenos y tangentes) para calcular ciertas estructuras y también para controlar movimientos cíclicos en animación —de hecho ésta es una de las funciones más típicas: cuando tenemos un elemento que se está comportando cíclicamente (una luz que parpadea, una pieza que sube y baja...) el uso de las curvas sinusoidales es habitual—; los *ruidos* también son muy empleados, para muchas cosas: hay *shaders* (patrones matemáticos de texturizado) que emplean ruidos fractales, aunque el usuario únicamente se limita a variar ciertos parámetros sin necesitar conocer los cálculos que tienen lugar internamente; también, cuando deseas introducir variaciones de aleatoriedad en un movimiento aplicas un nodo tipo *noise*…

Cristóbal Vila. Foto FMC

Lamentablemente no tengo conocimientos de programación, lo cual es algo que me vendría muy bien para poder construirme mis propias herramientas de apoyo en diferentes áreas. Y en ese caso sí, tendría que echar mano de muchos más conceptos y algoritmos matemáticos.

En tus vídeos, especialmente en *Nature by Numbers* y en *Inspirations*, pero también en los demás, recreas una realidad 3D con imágenes muy bellas. Aparecen formas complejas, texturas muy reales, reflejos en superficies alabeadas, luces y sombras. Recreas animales y plantas, y *humanizas* objetos (por ejemplo en *El proyecto*), pero nunca o casi nunca aparecen figuras humanas ¿cuál es el porqué de esa ausencia?

La animación de personajes es una de las disciplinas más complejas que existe, si pretendes hacerlo realmente bien y creíble. Tampoco es algo que yo rechace hacer, de hecho quizás en el futuro me anime con ello. Pero al final la vida, los días, son bastante cortos y uno no tiene tiempo para todo. Si ahora pretendiera lanzarme a preparar una animación con personajes tendría que dedicar una cantidad de tiempo enorme a aprender nuevos conceptos, propios de la animación de personajes.

Y por otro lado encuentro que existen muchas cosas, muchísimas ideas en las que se puede profundizar sin necesidad de utilizar personajes más o menos humanizados. En fin, quizá tenga algo que ver con eso que antes comentaba: cuando era niño no solía dibujar monigotes y caricaturas en los márgenes de los libros, sino que más habitualmente eran rombos, hexágonos o círculos.

Desde el punto de vista del Arte, ¿cuáles son tus referentes, además de M.C. Escher, al que has dedicado tu vídeo *Inspirations*?

Tengo muchas y muy diversas. Me gusta muchísimo Velázquez, me gusta muchísimo todo el Renacimiento italiano, Leonardo da Vinci. Cuando me dedicaba más al diseño gráfico, en la firma Vila Diseño, mi tarjeta de visita era el *Hombre de Vitruvio* sobre un fondo azul oscuro, me gusta muchísimo esa imagen y, en general, los dibujos de esa época. Los de Leonardo, pero también los de Miguel Ángel y los de Rafael. Me interesa también mucho el Impresionismo. El Impresionismo me encanta. Y luego cosas sueltas: Gustav Klimt y Egon Schiele y el expresionismo alemán. Me atraen también los prerrafaelistas. Del arte actual hay muchas cosas que me gustan, aunque creo que a la vez hay otras que rozan la tomadura de pelo. A ver, no es que afirme que el arte actual sea todo una tomadura de pelo, tenemos a Picasso, por ejemplo, que aunque alguno de sus cuadros no consigan emocionarme, mirando toda su trayectoria uno ve todo un universo, una coherencia que lo alejan de otros que son de algún modo sólo farsantes.

Por último, me gustaría que me dijeras a qué personaje te hubiera gustado entrevistar o, al menos, con que personaje te hubiera gustado tener una conversación. Puedes elegirlo en 4D, es decir, de cualquier momento y de cualquier lugar.

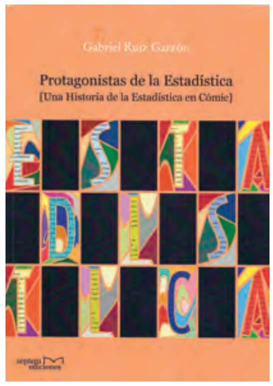
Entrevistarlo no sé... pero lo que sí me hubiera gustado es ver como trabajaban algunas personas, mirarlos desde detrás mientras estában dibujando o creando. Por ejemplo a Escher. Y si de lo que se trata es de mantener una conversación, pues con mucha gente. Hay un chaval español, Jorge Seva, más conocido por el seudónimo de Alex Román, que es un diseñador 3D al que admiro profundamente. Le interesa mucho la arquitectura y el cine y los mezcla. Yo lo considero un genio. Os recomiendo ver su trabajo *The Third and the Seventh*. Nada en ese vídeo es real y sin embargo todo lo parece. Es magnífico. Me encantaría poder preguntarle montones de cosas.

Tras casi dos horas de conversación, dejamos a Cristóbal Vila, con la sensación de que la conversación se nos ha hecho corta y de que sería estupendo continuarla en otro momento. Mientras, estaremos a la espera de otro trabajo que nos haga de nuevo emocionarnos, visualizando con imágenes en movimiento, en 3D, conceptos e ideas matemáticas.

Francisco Martín Casalderrey
IES Juan de la Cierva
<fmc@revistasuma.es>

Publicaciones recibidas (2)

Protagonistas de la Estadística
Una historia de la Estadística en cómic
Gabriel Ruiz Garzón
Ilustraciones de David Garrido
Septem Ediciones
2007
Oviedo
ISBN 978-84-96491-75-5

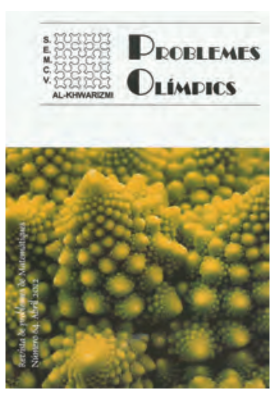


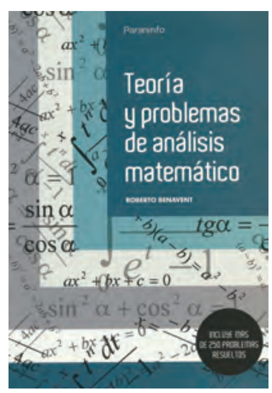
Matemáticas con calculadora
1º de Bachillerato
Ciencias y Tecnología
VVAA
Ed.: Manuel Torralbo
y Agustín Carrillo
SAEM THALES
y División Didáctica
CASIO
2012
IBSN 978-84-15641-00-1

Aprendizaje cooperativo
Una metodología con futuro.
Principios y aplicaciones
Paloma Gavilán
y Ramón Alonso
Editorial CCS
Madrid
2010
ISBN 978-84-9842-446-1

Investigación y Ciencia
Nº. 433
Octubre 2012
Prensa Científica, SA
Barcelona
ISSN 02210136X

Problemes olímpics
Revista de problemes de matemàtiques
SEMCV Al Khwärizmi
Vol. 64
Abril 2012
València
ISSN 1578-1771





Teoría y problemas de análisis matemático
Roberto Benavente
Ediciones Paraninfo, SA
Madrid
2012
ISBN 978-84-9732-062-7

Teoría, crítica y práctica de la Educación Matemática
Núria Planas (coord.)
Coección Crítica y fundamentos
Nº. 41
2012
Editorial Graó
Barcelona
ISBN 978-84-9980-448-4

Los pliegues del libro
Construcciones geométricas doblando papel
Jesús García Gual
Ed. Aviraneta
Madrid
2012
ISBN 978-84-938047-4-9

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 113-117

Common Core Standards for Mathematics (Estados Unidos)

Carme Burgués Flamarich

En esta ocasión presentaré a los lectores de SUMA una iniciativa, no federal, iniciada en el verano del 2010, y llevada adelante por la mayoría de estados de USA bajo la dirección del *National Governors Association Center for Best Practices* (NGA Center) y el *Council of Chief State School Officers* (CCSSO).

El foco de la iniciativa, en el caso de las matemáticas, es el documento «The Common Core State Standards for Mathematics» (CCSSM), que pueden encontrar en la dirección[1]:

http://www.corestandards.org/about-the-standards/key-points-in-mathematics

y cuya presentación e información general se encuentra en:

http://www.corestandards.org/

En primer lugar, me parece necesario razonar la elección de esta iniciativa. En España, la publicación de las traducciones de las propuestas y materiales del *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), «Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática» en el 1991, las series Addenda en 1993 y 1996, así como «Principios y Estándares para la Educación Matemática en 2003» llevadas a término por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES han sido para mu-

Vale la pena...

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

chos de nosotros una fuente de reflexión y conocimiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Y, por otro lado, ha provocado que nos convirtiéramos en seguidores atentos de las publicaciones e iniciativas del NCTM.

Los alumnos deberán hacer dos pruebas, una a final de curso sobre contenidos matemáticos (estándares de contenidos) y otra unos meses antes sobre razonamiento y modelización.

Después de los Principios y Estándares del 2000 vinieron los *Focal Points* en un intento de ayudar a los docentes norteamericanos a potenciar lo que era fundamental que los alumnos aprendieran. Hay que tener en cuenta la baja formación matemática y didáctica de los docentes en ese país, lo que hace necesarias actuaciones de formación adaptadas a las circunstancias.

Actualmente el NCTM, junto con otras organizaciones estatales y profesionales, promueve la implantación de estándares de aprendizaje matemático por niveles educativos (CCSSM) con demandas muy concretas y con el objetivo de que sean comunes a todos los estados que los adopten. Como en los casos anteriores, los estándares vienen acompañados de un gran número de publicaciones, especialmente del NCTM, dedicadas al desarrollo profesional de los docentes.

Es bien sabido que las iniciativas USA en educación tienen influencia en otros países y, en esta ocasión, antes de aceptarlas a ojos cerrados me gustaría comentar algunos aspectos.

En el último congreso anual del NCTM, celebrado en abril en Filadelfia (*Philly*, para los amigos), con diez mil asistentes mayoritariamente del país, se ofrecía un buen número de presentaciones sobre los CCSSM.

Este hecho me interesaba especialmente, pues ya tenía en mente presentar esta iniciativa a los lectores de *Suma*, pero la asistencia al congreso me ha hecho reflexionar sobre las consecuencias que puede tener sobre la evaluación del aprendizaje matemático en otros países y, en particular, en España.

Para empezar, en la conferencia inaugural del congreso, Diane Ravich cargó contra los numerosos tests estatales de matemáticas a que se someten a los alumnos de los Estados Unidos. Dijo que el dinero que se gasta en la confección de las pruebas, en su administración y en los textos editados para prepararlas seria de gran ayuda en la formación continuada del profesorado.

En lugar de eso las pruebas se usan para regular sus salarios y contratos, especialmente en la educación pública. El temor expuesto en la conferencia era que con el CCSSM esta situación se agravara todavía más o bien que solamente fueran tomados en cuenta los estándares que pudieran evaluarse fácilmente (tests de elección múltiple administrados por ordenador). Las numerosas interrupciones para aplaudir las críticas de la conferenciante me convencieron de que algo iba mal.

Hacia el encuentro anual de los NCTM

Las comunicaciones sobre el CCSSM trataban principalmente de aspectos como el razonamiento matemático, la modelización, el uso de la tecnología, los aspectos esenciales de los diversos temas matemáticos y, especialmente, el paso de los estándares de cada estado a los comunes.

La aceptación de los estándares por parte de la comunidad educativa es desigual. Por un lado es una cuestión de mentalidad, un currículo «obligatorio» no es bien recibido. Las razones son de independencia, no se quiere la intervención del gobierno del país en temas estatales o locales. Por otro lado, no es bien vista la comparación entre los alumnos que las pruebas comunes puedan proporcionar. Se opina también que se ha politizado excesivamente el tema. Un par de estados, Texas y Virginia, no se han sumado a la iniciativa y Massachussets lo ha hecho después de una larga controversia.

Uno puede preguntarse qué es lo que ha hecho que la mayoría de estados se hayan sumado con gran entusiasmo a la iniciativa. Seguramente una razón es el *Race to the Top*[1]. 4,35 millares de millones de dólares para estimular la innovación y las reformas en los estados que Barak Obama puso sobre la mesa en 2009. Los criterios de concesión pueden verse en las páginas anteriormente citadas.

La evaluación de los estándares CCSSM está siendo elaborada por dos consorcios: *SMARTER Balanced Assessment Consortium* (SBAC) y *Partnership for Assessment of Readiness of College and Careers* (PARCC). Según parece, aunque los tests se administren por ordenador, una parte será corregida personalmente. Hay el acuerdo previo de que los ítems sean de tipos diversos como de respuesta razonada, de tareas que impliquen algún tipo de actividad (representación, uso de materiales virtuales,…) y de seleccionar una respuesta entre varias. Las pruebas no empezaran hasta el curso 2014-2015, se aplicaran a partir de tercer curso de Primaria hasta el undécimo grado. Los alumnos deberán hacer dos pruebas, una a final de curso sobre contenidos matemáticos (estándares de contenidos) y otra unos meses antes sobre razonamiento y modelización.

Todo ello, a mi parecer, hace que debamos estar atentos y aprovechar lo que tienen de positivo los nuevos estándares y los materiales que los acompañan. Por esta razón, de modo resumido y según mi criterio, comentaré aquello que pueda ser sumamente interesante para los que están implicados en la educación matemática.

En el documento encontramos dos tipos de estándares: los que se refieren al contenido y los de las prácticas matemáticas.

Una de las 704 presentaciones del congreso

Los estándares de contenido definen lo que los alumnos deberían entender y ser capaces de hacer en su aprendizaje matemático. Ejemplos de estándares y sub-estándares de contenido matemático son los siguientes.

Quinto curso:

> Write and interpret numerical expressions.
>
> 1. Use parentheses, brackets, or braces in numerical expressions, and evaluate expressions with these symbols.
>
> 2. Write simple expressions that record calculations with numbers, and interpret numerical expressions without evaluating them.

Sexto curso:

> Compute fluently with multi-digit numbers and find common factors and multiples.
>
> 2. Fluently divide multi-digit numbers using the standard algorithm.
>
> 3. Fluently add, subtract, multiply, and divide multi-digit decimals using the standard algorithm for each operation.

4. Find the greatest common factor of two whole numbers less than or equal to 100 and the least common multiple of two whole numbers less than or equal to 12. Use the distributive property to express a sum of two whole numbers 1-100 with a common factor as a multiple of a sum of two whole numbers with no common factor.

La secuencia de los estándares, que pretende integrar los resultados de numerosas investigaciones sobre trayectorias de enseñanza y aprendizaje, es detallada y progresiva. Puede ser útil para los educadores españoles para diseñar o replantear la aparición de los contenidos matemáticos desde la educación infantil hasta el final de la Educación Secundaria Obligatoria.

Ahora bien, una mirada atenta hace ver que dominan los algoritmos y la formalización sobre la aplicación de contenidos a la realidad u otras disciplinas. Cada nivel tiene entre 20 y 30 estándares. Sin embargo, los que se refieren a la aplicación de las matemáticas al entorno no llegan a cuatro.

Los *Standard for Math Practices* describen aquellas prácticas que los educadores matemáticos de todos los niveles deberían procurar que desarrollen sus alumnos. Son ocho:

1) Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución.

2) Razonar abstractamente y cuantitativamente.

3) Construir argumentaciones correctas y criticar el razonamiento de otros.

4) Modelizar usando matemáticas.

5) Usar herramientas estratégicamente.

6) Atender a la precisión.

7) Buscar y usar estructuras.

8) Buscar y expresar regularidades en razonamientos parecidos.

Según consta en los documentos son una síntesis entre los Estándares del 2000 (NCTM) y los que constan en el documento *Adding it Up* (Jeremy Kilpatrick, Jane Swafford, Bradford Findell, (Ed); National Research Council). Si revisan esta parte del documento, solamente encontrarán referencias a posibles contextos no matemáticos en el segundo y el cuarto de los estándares.

En resumen, el documento «respira» contenido y procesos matemáticos sin aplicación, es decir, tiene poco de competencial tal como lo entendemos en el contexto español y PISA. Ahora bien, teniendo en cuenta la gran cantidad de publicaciones, documentos en webs estatales, cursos de formación,… ya en marcha o en preparación estoy segura que el tiempo nos proveerá de gran cantidad de materiales que contribuirán de manera importante a la mejora de la actividad matemática en las aulas.

Algunas de las publicaciones recientes y mas interesantes del NCTM relacionadas con el fenómeno CCSSM son:

El presidente del NCTM, J. Michael Shaughnessy, dando la bienvenida al congreso

Por una parte, la serie *Developing Essential Understanding* sobre diversos temas de aritmética, fracciones, proporcionalidad, pensamiento algebraico, razonamiento, geometría, funciones, ecuaciones, estadística,… en diversos niveles.

El giro hacia una matemática descontextualizada en la educación obligatoria me parece un retroceso.

Por otra, los libros dedicados al diseño de actividades como *Rich and Engaging Mathematical Tasks*, *Good Questions: Great Ways to Differentiate Mathematics* y *Reasoning and Sense-Making Problems and Activities*.

Y por último, un pequeño gran libro dedicado a la preparación y gestión de las discusiones para compartir y elaborar matemáticas es *5 Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions de Mary Kay Stein y Margaret Schwan Smith*.

Se están elaborando también los *Progressions Documents for the Common Core Math Standards*. Son textos que describen la progresión de un tema a través de los diversos grados teniendo en cuenta el desarrollo cognitivo de los alumnos así como la estructura lógica de las matemáticas. Los borradores relativos a diversos temas pueden bajarse de la página de la Universidad de Arizona:

http://ime.math.arizona.edu/progressions/

También pueden obtenerse de:

http://jmforadori.weebly.com/progressions-and-trajectories.html

En esta segunda dirección hay otros documentos de apoyo a los docentes como, por ejemplo, *What Does it Mean for a Student to Understand Mathematics?* Es decir, ¿qué significa que un alumno entienda las matemáticas? *What is Thinking Through a Lesson Protocol (TTLP)?* Es decir, ¿cómo preparar una lección y su desarrollo? También contiene ejemplos de como llevar a cabo evaluación formativa del departamento de educación de West Virginia.

Philadelfia skyline

Según una buena amiga estadounidense, en USA, cada 20 años hay una revolución educativa. Me dice que el éxito no conviene, pues según, sus propias palabras: «los fondos del gobierno caen como lluvia solamente en tiempos de grandes problemas».

Desde mi perspectiva, no seria conveniente trasladar sin más los estándares a nuestra realidad. El giro hacia una matemática descontextualizada en la educación obligatoria me parece un retroceso. Ahora bien, teniendo en cuenta la gran cantidad de producciones interesantes para el aula y para el desarrollo profesional que se derivan, demos gracias. ¡Vinieron las lluvias!

Carme Burgués Flamaric
Universidad de Barcelona
<valelapena@revistasuma.es>

1 De este documento existe una traducción al catalán de este disponible en la web de CREAMAT (*Centre de Re?cursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques*) http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla/

XVI JAEM

Jornadas
sobre el aprendizaje
y la enseñanza
de las matemáticas

Palma 2013

2-5 julio

Societat Balear de Matemàtiques

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

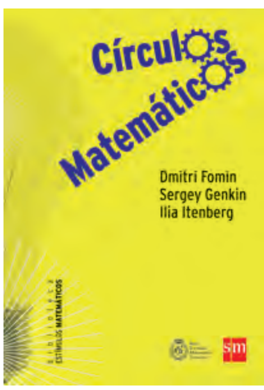
Núcleos temáticos

1 Infantil y primaria: ahí empieza todo
2 Didáctica y formación del profesorado
3 Modelización y formalización
4 Resolución de problemas
5 Materiales y recursos en el aula de matemáticas
6 Conexiones y contextos
7 Comunicación y divulgación

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 119-121

Círculos matemáticos y Magia matemática

Lluís Albarracín Gordo



Reseñas

Círculos matemáticos

Autores: Dimitri Fomin, Sergey Genkin e Ilia Itenberg

Editado por: RSME y Ediciones SM, Colección Biblioteca Estímulos Matemáticos

Año de edición: 2012

Traducción del original inglés de 1996: Enrique Hernando Arnáiz

ISBN: 978-84-675-5227-0

Círculos matemáticos trata sobre el noble arte de proponer problemas. En sus páginas los hay de todo tipo, pero no encontraremos muchos como los que pueblan las secciones de problemas de los libros de texto de matemáticas que estamos acostumbrados a utilizar en las aulas.

Está repleto de problemas que son un auténtico desafío matemático para el lector, ya sea el alumno o el profesor.

Esta primera traducción al castellano ha sido posible por iniciativa de la *Real Sociedad Matemática Española*, lo que lo hace mucho más accesible para el público que el original en ruso, aunque ya existiera una versión en lengua inglesa editada en 1996. Los autores recogen en esta obra la tradición rusa en educación matemática que ha potenciado el aprendizaje de las matemáticas a partir de la resolución de problemas en grupo, lo que los autores denominan un círculo matemático.

El texto se dirige a todas aquellas personas que tienen intereses en la enseñanza de las matemáticas que se salen de los currículos formales, en la misma línea en la que se preparan competiciones como las *Olimpiadas Matemáticas*. El libro está orientado al trabajo con alumnos de 12-14 años, presentando una estructura pensada para dos cursos resolviendo problemas en uno de estos «círculos». Aún así, encontramos una gran cantidad de problemas que pueden proponerse en clases de matemáticas de cualquier curso de la *E.S.O.* o de Bachillerato, ya sea como complemento a las tareas habituales o como forma de introducir nuevos contenidos.

La obra se estructura en capítulos en los que se presenta una secuenciación de problemas que tratan un tema concreto. Los primeros problemas de cada capítulo son bastante accesibles, pero su dificultad se va incrementando paulatinamente y los últimos de cada bloque son realmente difíciles. De esta forma, el profesor tiene un amplio abanico de problemas entre los que escoger y puede crear su propia secuenciación y adaptarse a sus objetivos o a los estudiantes a los que los problemas vayan dirigidos.

El primer capítulo contiene problemas de temática variada que pueden utilizarse para realizar un primer contacto y para detectar las habilidades matemáticas y lógicas de los alumnos. Por ejemplo, el siguiente:

> Borra 10 cifras del número
> 1234512345123451234512345
> de forma que el número que quede
> sea lo más grande posible.

Los capítulos siguientes tratan sobre temas de matemáticas que no se suelen abordar de forma directa en el currículum actual. Tenemos un capítulo centrado en la paridad, otro en el principio del palomar, un par de ellos sobre grafos, uno sobre invariantes y otro sobre sistemas de numeración.

También encontramos capítulos que tratan temas más cercanos a los que se desarrollan en el currículo, como la combinatoria, la divisibilidad, la geometría o las desigualdades. En estos capítulos se encuentran problemas que pueden ayudar a mostrar la potencia del razonamiento matemático mientras profundizamos en los conceptos trabajados. Una muestra sería el siguiente problema:

> ¿Puede un número escrito con cien ceros, cien unos y cien doses ser un cuadrado perfecto?

Una vez trabajados el teorema fundamental de la aritmética, el tipo de descomposición de un cuadrado perfecto y el criterio de divisibilidad entre nueve, un problema como este puede abrir la mente de los alumnos a las bondades de los razonamientos matemáticos que, por ejemplo, permiten demostrar determinadas propiedades de números que no nos atreveríamos a intentar escribir.

Pero aún hay más. La obra cuenta también con explicaciones introductorias para cada capítulo que nos permiten visualizar mejor lo expuesto y un apéndice con las soluciones de todos los problemas presentados. Dicho apéndice es sencillo y directo, ya que no se ahonda en los detalles de las soluciones y permite una fácil lectura, lo que hace del libro en una herramienta útil y ágil para los profesores y una obra de referencia, sobre todo para aquellos que pretendan potenciar la resolución de problemas en sus clases.

Magia matemática

Autor: Miquel Capó Dolz
Editado por: Ediciones B
Año de edición: 2012
ISBN: 978-84-666-5049-6

A todos nos gusta que nos sorprendan. Y un buen truco de magia, bien ejecutado, siempre nos sorprende. También nos obliga a fijarnos en el mago y activar nuestros sentidos para descubrir el engaño. Sutilmente, el mago nos invita a centrar nuestra atención en una parte del proceso y aprovecha este hecho para despistarnos y efectuar la parte central del truco por otro lado.

Pero, ¿y si no hay engaño?, ¿y si aquello que nos sorprende se basa en algún tipo de regularidad matemática? *Magia Matemática*, de Miquel Capó Dolz, nos presenta una amplia colección de trucos de magia basados en conceptos matemáticos y pensados para realizar en una clase o en cualquier otro sitio. El libro se estructura en tres grandes bloques: el primero, con la descripción de los trucos; el segundo, con breves recomendaciones de posibles pistas para ofrecer a la audiencia; y el tercero, con las respuestas y justificaciones necesarias para cada uno de los trucos o problemas.

Los trucos están organizados por temáticas, como los basados en el 9 (que como se comenta en el libro es un número interesante porque nosotros utilizamos base 10), los relacionados con el calendario o los que se basan en propiedades numéricas, como las de la sucesióne de Fibonacci o la notación posicional.

Un breve capítulo trata los trucos basados en probabilidades en una especie de magia que el autor denomina «magia que funciona casi siempre» y otro se centra en juegos que poseen estrategias que son siempre ganadoras y con las que el mago puede sorprender a su audiencia. Las herramientas y temáticas tratadas son diversas, desde los números de *DNI* (con su correspondiente letra) a las cartas, monedas, fichas de dominó o calendarios. En total, disponemos de algo más de 90 trucos pensados para retar intelectualmente a nuestra audiencia.

El libro está escrito en un tono desenfadado y contiene algunas recomendaciones sobre los momentos en los que añadir un poco de teatralidad a la actuación. Puestos a utilizar la magia como recurso didáctico, revestir los trucos con una puesta en escena adecuada parece indispensable para conseguir que el efecto atrayente sea efectivo. En el segundo bloque de contenidos podemos encontrar indicaciones que nos permiten transformar los trucos en actividades de aula y nos propone algunas preguntas que pueden actuar como desafios para nuestros espectadores.

Un ejemplo de lo que podemos encontrar en el libro: el truco de Kaprekar se basa en crear una sucesión a partir de escoger un número de 4 cifras y realizar un pequeño algoritmo que debemos ir repitiendo. Cuando iteramos el algoritmo, el resultado se estabiliza en un valor concreto, que es el que el mago utilizará para sorprender a su público. En la sección de respuestas se explica el proceso con su base matemática, su historia y una variante de este truco utilizando otro algoritmo distinto.

De hecho, la esencia de la obra se encuentra en adaptar diversos conocimientos al formato de los trucos de magia.

Si intentamos explicar a nuestros alumnos qué es la succesión de Fibonacci, como se construye, que si dividimos dos términos consecutivos el resultado es un valor próximo a la razón áurea y que nos podemos acercar a este valor eligiendo términos muy grandes de la succesión, posiblemente perdamos la atención de buena parte de los asistentes a medio camino.

La otra opción es abrir *Magia matemática* por la página 27 y olvidarnos por un rato de la clase convencional. Ponernos un gorro ayudaría, y la recomendación de imprimirnos una camiseta con la inscripción 1.618 la he apuntado en un *post-it*.

Lluís Albarracín Gordo
Universitat Autònoma de Barcelona
<reseñas@revistasuma.es>

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas

Sociedades Federadas

Federació d'Entitats per l'Ensenyament de les Matemàtiques a Catalunya (FEEMCAT)
Presidenta: Iolanda Guevara Casanova
Facultat de Matemàtiques i Estadística (UPC)
C/Pau Gargallo, 5. 08028 Barcelona

Sociedad Aragonesa *Pedro Sánchez Ciruelo* de Profesores de Matemáticas
Presidente: Daniel Sierra Ruiz
Instituto Universitario de Matemáticas y Aplicaciones
Edificio de Matemáticas, 1ª planta. Universidad de Zaragoza
C/Pedro Cerbuna s/n. 50009 Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas *Isaac Newton*
Presidenta: Ana Alicia Pérez
Apdo. de Correos 329. 38200 La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas
Presidente: Serapio García Cuesta
Avda. España, 14, 5ª planta. 02002 Albacete

Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea *Tornamira*
Presidente: J. Javier Jiménez Ibáñez
IES *Alhama,* Avda. Villar, 44. 31591 Corella (Navarra)

Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Coordinador: Manuel Rodríguez Mayo
Apdo. de Correos 103. Santiago de Compostela

Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas *Emma Castelnuovo*
Presidente: Juan A. Martínez Calvete
IES Villablanca. C/ Villablanca, 79. 28032 Madrid

Sociedad Melillense de Educación Matemática
Presidente: Luis Serrano Romero
Facultad de Educación y Humanidades.
Ctra. Alfonso XIII, s/n. 52005 Melilla

Sociedad Riojana de Profesores de Matemáticas *A prima*
Presidenta: Elena Ramirez Ezquerro
CPR. Luis de Ulloa, 37. 26004 Logroño

Sociedad Andaluza de Educación Matemática *Thales*
Presidente: Manuel Torralbo Rodríguez
Facultad Matemáticas. Apdo. de Correos 1160. 41080 Sevilla

Sociedad Asturiana de Educación Matemática *Agustín de Pedrayes*
Presidente: Juan Antonio Trevejo Alonso
Apdo. de Correos 830. 33400 Avilés (Asturias)

Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática *Miguel de Guzmán*
Presidente: Antonio Bermejo Fuertes
IB Comuneros de Castilla. C/Batalla Villalar, s/n. 09006 Burgos

Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia
Presidente: Bienvenido Espinar Cepas
CPR Murcia II. Calle Reina Sofía n.º1. 30007 Murcia

Sociedad Extremeña de Educación Matemática *Ventura Reyes Prósper*
Presidente: Ricardo Luengo González
Apdo. de Correos 590. 06080 Badajoz

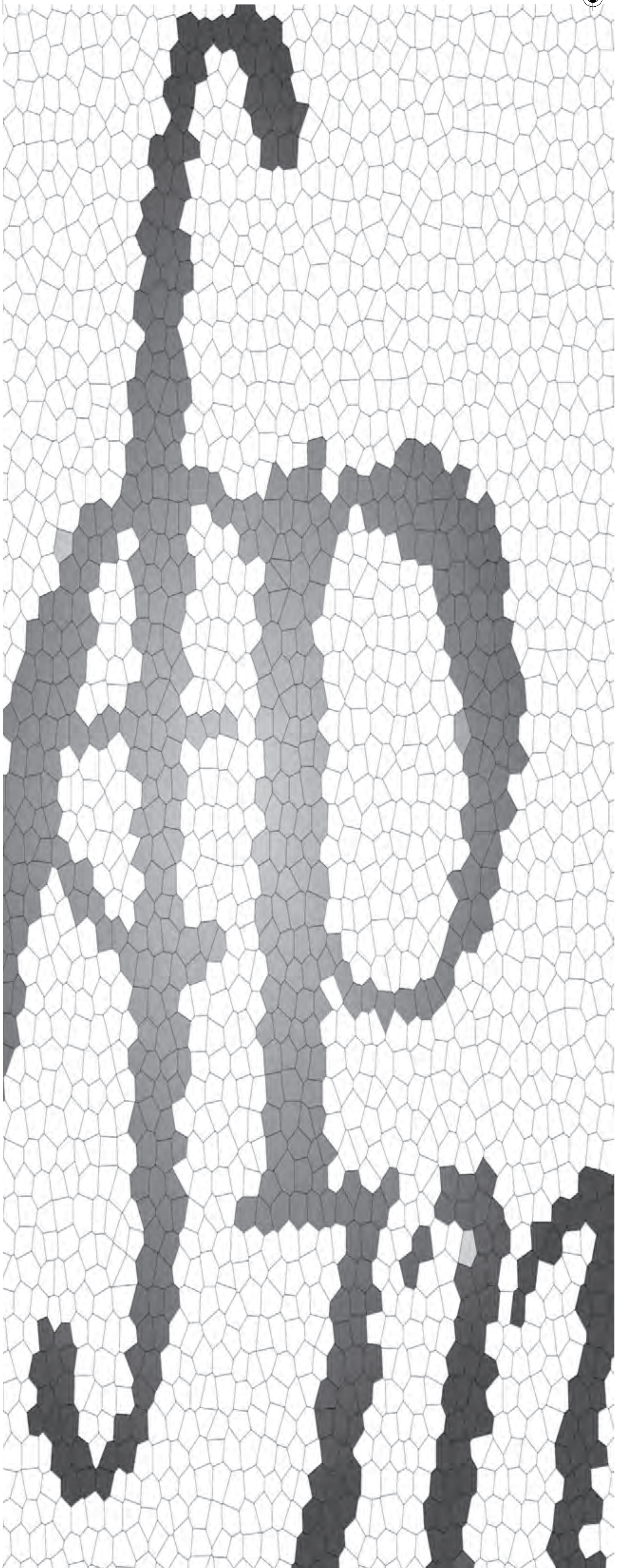
Sociedad Matemática de Profesores de Cantabria
Presidenta: María José Señas Pariente
Avda. del Deporte s/n. 39012 Santander

Sociedad *Puig Adam* de Profesores de Matemáticas
Presidente: José Javier Etayo Gordejuela
Facultad de Educación. (Sec. Deptal. Álgebra). Despacho 3005.
C/ Rector Rollo Villanova, s/n. 28040 Madrid

Sociedade Galega do Profesorado de Educación Matemática (AGAPEMA)
Presidente: Julio Rodríguez Taboada
CPI Dos Dices
C/ Dos Dices, s/n. 15911 Rois (A Coruña)

Societat d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana *Al-Khwarizmi*
Presidente: Onofre Monzó del Olmo
Departamento de Didáctica de la Matemática.
Apdo. 22045. 46071 València

Societat Balear de Matemàtiques *Xeix*
Presidente: Josep Lluís Pol i Llompart
C/Martí Rubí 37/alts. 07141 Sa Cabaneta (Marratxí). Illes Balears



suma+ 71

FESPM & Cía

suma+

XVI JAEM de Palma 2013: un poquito más cerca

Societat Balear de Matemàtiques SBM-XEIX

2.º Anuncio

Avanza el curso y las JAEM de Mallorca se divisan ya sobre el horizonte cercano. Desde el Comité Local y el Comité Científico estamos intensificando los esfuerzos para que el encuentro sea fructífero como lo han sido hasta ahora todas las ediciones anteriores.

A continuación encontraréis algunas informaciones que pueden ser de utilidad y que, de cualquier modo, podéis encontrar en todo momento en la web oficial:

http://xvi.jaem.es

FESPM

Una vez más, y ya vamos por la XVI edición, nos disponemos a celebrar nuestras queridas JAEM. Las JAEM nacieron antes de crearse la *Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas* (FESPM). En diciembre de 1980, en una reunión celebrada en Sevilla, se decidió organizar «una serie de encuentros periódicos para profesores de EGB, BUP, FP y Universidad, destinados a potenciar el intercambio de experiencias, la renovación metodológica y la reflexión sobre su quehacer».

Con este objetivo nacieron las *Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (JAEM), cuya primera edición tuvo lugar en Barcelona en mayo de 1981. Las ediciones siguientes se celebraron en en Sevilla (1982), Zaragoza (1983) y Tenerife (1984). Ahí se produjo una interrupción de siete años hasta que la FESPM, creada en 1988 en Sevilla, propuso su reanudación con la quinta edición de Castellón (1991). Entonces se decidió su celebración bianual y así ha sido hasta ahora: Badajoz (1993), Madrid (1995), Salamanca (1997), Lugo (1999), Zaragoza (2001), Tenerife y Las Palmas (2003), Albacete (2005), Granada (2007), Girona (2009) y Gijón (2011).

La Seu, catedral de Palma (Foto: JLPL)

Pocos imaginaban que 30 años después las JAEM seguirían vivas y con la consolidación e importancia que ahora tienen, ya que podemos decir que son el más importante congreso sobre enseñanza y educación matemática de los que se organizan en toda España.

Ahora la XVI edición recalarán por primera vez en las *Illes Balears*, en Palma, del 2 al 5 de julio de 2013. Desde hace tiempo, el Comité Científico, el Comité Organizador y toda la *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX están trabajando con esmero y dedicación para conseguir un evento de máximo nivel profesional. Seguro que conseguirán con la ilusión y el esfuerzo que dedican que estas sean unas JAEM importantes y útiles para el profesorado y la sociedad. Es para mí un honor, como presidente de la FESPM, presentar a todo el profesorado estas Jornadas que constituyen una actividad emblemática de la Federación y que debemos utilizar como foro para la reflexión, el debate, la formación, así como lugar de encuentro e intercambio en la Educación Matemática.

La FESPM nos invita a todos a participar activamente en nuestras XVI JAEM, las de todos los profesores que pensamos que las matemáticas han de jugar un papel fundamental en la formación de las personas. Animaos a participar con el convencimiento de que la ciencia que nos acoge y con cuya enseñanza tanto disfrutamos, crecerá. Nos vemos en Palma.

Serapio García Cuesta
Presidente de la FESPM

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Núcleos temáticos

I. Infantil y Primaria: ahí empieza todo

El proceso enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en edades tempranas tiene una gran importancia para que el alumno sea capaz de construir su aprendizaje. Este proceso debe realizarse en continuo contacto con la realidad que le envuelve, es decir, tiene que partir de situaciones relacionadas con sus intereses, debe incluir la manipulación de objetos matemáticos y debe otorgar un papel activo a los alumnos en situaciones que permitan el afloramiento de la creatividad.

Concurso fotográfico XVI JAEM
Esperanza Teixidor: Flor esférica

Todo ello favorece y potencia un aspecto primordial del aprendizaje en esas edades como es que resulte significativo. Caben en este bloque:

1) Investigaciones llevadas a cabo

2) Experiencias realizadas en el aula

3) Grupos de trabajo de maestros y maestras

4) Creación de juegos y experiencias

5) Todo tipo de materiales didácticos y su uso

6) Proyectos entorno a las matemáticas

II. Didáctica y formación del profesorado

En los últimos años ha habido cambios sustanciales en la formación inicial del profesorado. La adaptación al marco de Bolonia ha supuesto, en general, un cambio positivo en los planes de estudio, tanto a nivel de magisterio, como a nivel de grado en la rama de especialización didáctica o en el máster de formación del profesorado. La formación continua es la otra gran clave de bóveda en nuestro quehacer profesional, donde las perspectivas actuales no son nada halagüeñas. Tienen cabida en este bloque:

1) Aportaciones y experiencias en didáctica en los planes de estudio universitarios

2) Grupos de investigación

3) Técnicas de dinamización de grupos

4) Trabajo cooperativo

5) Atención a la diversidad

6) Evaluación

III. Modelización y formalización

El conocimiento es o bien un modelo, no siempre compartido, de lo que llamamos realidad, o bien un modelo de otro modelo. Sea como sea, el conocimiento de la realidad pasa indefectiblemente por la construcción de modelos, lo que en el caso de las matemáticas implica necesariamente el desarrollo de procesos lógico-matemáticos de abstracción, formalización y demostración, y para los que se

Palma 2013

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

hace necesario definir, analizar, categorizar, conjeturar, razonar, generalizar o sintetizar. Las comunicaciones de este bloque versarán en torno a las ideas siguientes:

1) Sin comprensión no hay aprendizaje. ¿Cómo lograr entonces que el niño comprenda como paso previo a que aprenda?

2) ¿Cómo pasar del lenguaje natural al lenguaje simbólico y formal propio de las matemáticas y viceversa?

3) La construcción efectiva de un modelo matemático sobre un fenómeno de interés mostrando los diferentes pasos de su creación poniendo especial énfasis en las etapas habituales de validación, análisis crítico, refinamiento...

4) Análisis e interpretación de la fundamentación de modelos ya existentes, y de sus correspondientes ámbitos de aplicación y validez.

5) Interpretar y representar (a través de palabras, gráficos, símbolos, números y materiales) expresiones, procesos y resultados matemáticos.

6) ¿Hasta qué punto y en qué momento de su formación los estudiantes deben utilizar la notación científica y entender la naturaleza y las reglas de los sistemas formales matemáticos, tanto sintácticos como semánticos?

7) Demostración no es sinónimo de explicación. Si el aprendizaje en las primeras edades debe ser significativo y basarse en la explicación-comprensión, ¿cómo y cuando hacer surgir las demostraciones en clase de matemáticas?

8) ¿Cómo pasar del caso particular a la generalización? ¿Cómo conseguir que los estudiantes distingan y construyan definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, comprobaciones, demostraciones, ejemplos, afirmaciones condicionadas y los usen de manera adecuada?

IV. Resolución de problemas

El planteamiento y la resolución de problemas es uno de los componentes esenciales de la actividad matemática y de su aprendizaje. Es importante que estén presentes de forma continuada a lo largo de todo el periodo formativo del estudiante y no constituir una pieza aislada de los diferentes currículos. Por eso en este bloque se incluirán comunicaciones que presenten experiencias y reflexiones en torno a:

1) Heurística: ¿en qué consiste resolver problemas desde una perspectiva matemática?

2) Problemas vs ejercicios. Diferentes tipologías de problemas: puros vs aplicados; abiertos vs cerrados.

Concurso fotográfico XVI JAEM
Antonio Bueno: Catedral de Granada

3) Un aspecto esencial de la creatividad es la de formular preguntas sobre un determinado fenómeno. En matemáticas las preguntas suelen plantearse como problemas a resolver. Por ello interesa conocer estrategias para incentivar, motivar y organizar a los alumnos de los diferentes niveles educativos para que identifiquen, propongan y resuelvan problemas intere-

santes susceptibles de ser resueltos usando las matemáticas.

4) Experiencias metodológicas y de gestión de aula para resolver problemas en pequeño grupo en clase de matemáticas.

5) Otro aspecto primordial de la creatividad matemática es la selección. No todas las preguntas sobre un fenómeno son igual de interesantes o relevantes. De todos los teoremas posibles nos interesan unos más que otros. He aquí una cuestión importante sobre el arte de preguntar: ¿cómo seleccionar y proponer buenos problemas?

Concurso fotográfico XVI JAEM
José María Sorando: Fractal (Los Monegros)

V. Materiales y recursos en el aula de matemáticas

Decía Maria Montessori que el niño tiene la inteligencia en las manos. El desarrollo tecnológico pone a nuestra disposición múltiples y variadas herramientas y recursos que se añaden a la gran cantidad de materiales de calidad que a lo largo de la historia han sido utilizados para facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Caben en este bloque todo tipo de recursos didácticos vinculados a la actividad matemática de cualquier nivel educativo. Entre otros:

1) Herramientas que se aplican con éxito en el proceso de aprendizaje de las matemáticas, junto con el análisis crítico de los contextos en que resultan aplicables, y de los procesos cognitivos que pretenden estimular.

2) Cambios metodológicos y de gestión de aula vinculados al uso de determinadas herramientas. Análisis crítico de los cambios experimentados en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3) Materiales manipulativos, juegos, TIC, nuevos recursos en fase de experimentación, historia de las matemáticas, fotografía matemática...

4) Materiales del mundo físico/natural y del mundo sociocultural/cotidiano: papel que pueden desempeñar objetos naturales en el desarrollo del aprendizaje matemático mediante la manipulación, descripción, observación, reflexión y expresión de propiedades matemáticas.

VI. Conexiones y contextos

Para que un aprendizaje sea significativo debe conectar con aquello que ya se sabe y resultar útil a quien lo aprende. Esto es, conectar con los conocimientos adquiridos anteriormente, ya sea en el ámbito de las matemáticas o en otros campos. En este sentido, los contextos constituyen el marco indispensable para dar sentido a las aplicaciones de las matemáticas en el entorno vital y esencialmente cotidiano de la persona, donde se manifiesta su competencia. Los contextos son además focos de creatividad matemática, pues permiten la creación de problemas nuevos o de enfoques nuevos a viejos problemas que la diversidad de los entornos sociales y culturales representados en las aulas nos ofrecen y dan sentido y significado a esos nuevos contextos.

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

En este bloque caben aportaciones relacionadas con:

1) Conexiones entre contenidos matemáticos

2) Conexiones de las matemáticas con otras disciplinas

3) Estrategias para reconocer contextos de la vida cotidiana en que son aplicables las matemáticas

4) Estrategias para reconocer contextos de la vida cotidiana en los que se pueden crear matemáticas, ya sea mediante el planteamiento y resolución de problemas nuevos o de nuevos enfoques y resoluciones alternativas a problemas ya conocidos

5) Matemáticas en el mundo laboral: competencia matemática vs competencia laboral

6) Las matemáticas en el contexto de las ciencias y la tecnología, en la historia del conocimiento, en la vida cotidiana y en la naturaleza, en el arte...

7) El aprendizaje a partir de proyectos.

VII. Comunicación y divulgación

El proceso de enseñanza-aprendizaje es un proceso de comunicación. Como dice Paul Watzlaswick, toda comunicación tiene un nivel de contenido y un nivel de relación que no podemos obviar ya que condiciona el primero. En este bloque tienen cabida propuestas como:

1) El arte de preguntar: ¿cómo preguntar?, ¿cómo generar discusiones y conducirlas en clase para conseguir un aprendizaje colaborativo?

2) ¿Cómo conseguir que nuestros estudiantes sean capaces de comunicar de forma rigurosa –ya sea oral, escrita o gráfica– sobre contenidos matemáticos? ¿Qué grado de formalización es más adecuado en cada nivel educativo en estas comunicaciones?

3) ¿Cómo conseguir que los estudiantes comprendan textos –en forma oral, escrita o gráfica- con contenido matemático presentados en diferentes registros lingüísticos?

4) Ejemplos de comunicación matemática entre alumnos, en grupos reducidos, y en exposiciones dentro y fuera de la clase.

5) Divulgación y popularización de las matemáticas.

6) Las matemáticas en los medios de comunicación.

Concurso fotográfico XVI JAEM
Berta Vila: Art

Conferencias plenarias

Habrá cuatro conferencias plenarias:

Cristóbal Vila (diseñador gráfico e industrial)

Carme Aymerich (*Escola Maria-Mercè Marçal* de *Mataró* y formadora *PFZ* de la *Generalitat*) y Manel Barrios (director del programa *Una mà de contes* de Televisió de Catalunya)

Marta Macho (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, Euskal Herria Unibersitatea, EHU)

Cesc Roselló (*Departament de Ciències matemàtiques i Informàtica*, UIB)

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Ponencias

Las ponencias se vinculan a los núcleos temáticos y habrá al menos una por cada uno de ellos:

I. María Luisa Novo Martín (Universidad de Castilla y León).

II(a). Bernardino del Campo López (Castilla-La Mancha).

II(b). Rosalía BIlbao (*Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX).

III. Luis Puig (*Universitat de València*, SEMCV «Al Khwarizmi»).

IV. Jordi Deulofeu (*Universitat Autònoma de Barcelona*).

V. David Barba y Cecilia Calvo (*Universitat Autònoma de Barcelona*, FEEMCAT).

VI. Raúl Ibáñez (Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencia y Tecnología, EHU).

VII(a). Joaquín Comas (IES Sierra Minera, La Unión, Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia).

VII(b). Pere Estelrich (UIB, *Societat Balear de Matemàtiques* SBM-XEIX).

Espacios de debate

Se desarrollarán cuatro espacios de debate cuyos temas y coordinadores serán:

Calculadora: José María Chacón (IES LLanes de Sevilla)

Formación del profesorado: Tomás Queralt (IES les Alfàbegues (Bétera), Universitat de València, SEMCV «Al-Khwarizmi»)

Matemáticas 2.0: Eva María Perdiguero (IES Ribera del Bullaque, Ciudad Real)

GeoGebra: Pep Bujosa (formador y presidente de l'*Associació Catalana de Geogebra*, FEEMCAT)

Concurso fotográfico XVI JAEM
Gabriel Ivorra: *Funció constant*

Normas para la presentación de trabajos

Normas generales

Todos los participantes en las XVI JAEM Palma 2013 que quieran presentar una comunicación, taller, exposición en el zoco o clip de aula, deberán tener en cuenta las siguientes consideraciones:

1. El plazo de envío finaliza el 15 de marzo de 2013.

2. La solicitud de participación y el envío de la documentación requerida tendrá que hacerse necesariamente desde la página web de las XVI JAEM.

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

3. La aceptación de los trabajos queda supeditada a la decisión inapelable del Comité Científico. En caso de no aceptación no se mantendrá comunicación alguna acerca de las causas de dicho rechazo.

4. La admisión de los trabajos queda condicionada también a que al menos uno de los autores o proponentes haya formalizado su inscripción en las XVI JAEM antes del 15 de mayo de 2013.

5. En caso de multiplicidad en la autoría de una comunicación o taller o en la petición de participación en el zoco solo se certificará a aquellos autores inscritos en las JAEM (certificados individuales especificando coautor). El resto de autores no inscritos tendrán que esperar a la publicación de las actas para justificar como mérito la autoría de un trabajo.

6. Las actividades aceptadas se publicarán en las Actas de las XVI JAEM siempre que el formato del texto a publicar se adapte a los requerimientos de la plantilla que se publicará en la página web oficial y se hayan remitido antes del 15 de marzo de 2013.

Normas para las comunicaciones

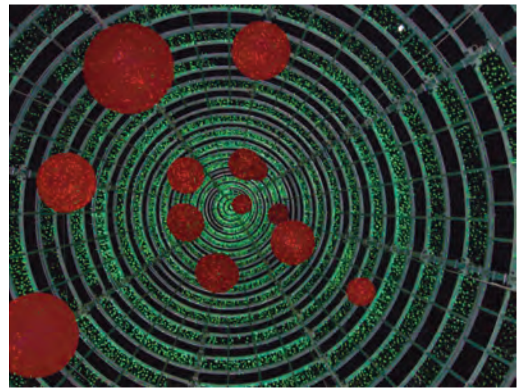
1. Han de referirse a alguno de los siete núcleos temáticos que contemplan las XVI JAEM y que están publicados en la web.

2. Han de ser inéditas, no habiendo sido publicadas con anterioridad.

3. Al solicitar la admisión de una comunicación deberá adjuntarse el texto completo de la misma.

4. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.

5. Las comunicaciones aceptadas se presentarán oralmente, en el lugar y el tiempo que fije el Comité Organizador. Se dispondrá de 15 minutos para la presentación, más otros 10 minutos para debate y puesta en común con los asistentes.



Concurso fotográfico XVI JAEM
Juan Antonio Salgueiro: Matemáticas navideñas

Normas para los talleres

1. Para solicitar la presentación de un taller se adjuntará una descripción detallada del mismo. Esto es, de los materiales que se utilizarán y de las actividades que realizarán todos los maestros o profesores asistentes.

2. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.

3. Los talleres aceptados se desarrollarán en el lugar y el tiempo que fije el Comité Organizador. Dispondrá cada uno de una hora y quince minutos.

Normas para el zoco

1. Los interesados en participar en el zoco adjuntarán a su solicitud una descripción detallada de lo que se quiera exponer.

2. Con la solicitud de la presentación se indicarán claramente las necesidades técnicas y de infraestructura que se precisen. El Comité Organizador pondrá todo su empeño en dar respuesta a esas demandas, pero si no fuera posible satisfacerlas se pondrá en contacto con el interesado para consensuar una solución.

3. Los solicitantes se comprometen a montar y desmontar su material en los espacios y tiempos asignados por el Comité Organizador, así como a estar presentes en el lugar de su respectiva exposición en los períodos de tiempo que se les asigne, con el fin de que puedan dialogar con el resto de los congresistas acerca de los materiales expuestos.

Normas para los clips de aula

1. Los interesados en ofrecer un clip de aula deberán tenerlos publicados en alguna de las habituales plataformas distribuidoras de videos en línea.

2. En la propuesta de participación deberán indicar la dirección URL en la que esté publicado.

3. Los clips de aula se mostrarán también a través de la web de las XVI JAEM.

4. Los videos se podrán mostrar con garantías de protección de la imagen de las personas que aparecen en el vídeo.

Normas de funcionamiento y participación en los espacios de debate

1. Los espacios de debate estarán abiertos a la participación a través de la web de las XVI JAEM a partir de mediados de marzo de 2013.

2. La inscripción a una comunidad es voluntaria y requiere de la persona que lo hace el compromiso a participar de manera constructiva en aquella.

3. La organización del funcionamiento de cada comunidad es responsabilidad exclusiva del coordinador de la misma.

4. Durante la celebración de las XVI JAEM la Organización proporcionará un espacio y un tiempo a cada comunidad, para que los miembros de cada una de ellas puedan continuar de manera presencial los intercambios de opiniones previos realizados vía web.

Cuotas de inscripción

En la tabla siguiente podéis ver las cuotas de inscripción a las XVI JAEM. Como en otras ocasiones hay descuentos para miembros de las sociedades federadas y para aquellos que formalicen su participación con suficiente antelación.

¡Animaos y participad!

CUOTAS XVI JAEM Palma	Hasta el 15 de mayo	Del 16 de mayo al 15 de junio
Miembros de sociedades federadas o que han firmado convenio con la FESPM	120,00 €	150,00 €
General	180,00 €	220,00 €

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

Síguenos en Twitter y Facebook

A través de estas dos redes sociales podréis tener la información actualizada de las Jornadas. Estos espacios pueden servir para compartir impresiones, ideas, sugerencias y mucho más. Nuestra página de Facebook es:

http://www.facebook.com/JAEM2013

Para obtener las noticias actualizadas de las XVI Jaem Palma debéis pulsar «Me gusta». Os animamos también a compartir los contenidos con vuestros contactos. En Twitter nos podréis seguir a través de nuestro usuario:

@JAEM2013

con el que podréis seguir las últimas noticias de las *Jornadas* así como del concurso fotográfico. El *hashtag* que para las jornadas será:

#jaem2013

Viajes y alojamiento

Las fechas en que se celebran las JAEM marcan un pico de ocupación en la temporada turística de las Islas Baleares. Por eso es muy aconsejable que los congresistas que vayan a gestionar por su cuenta desplazamiento y alojamiento lo hagan con la máxima antelación. Las personas que quieran viajar con su vehículo, tienen ferry desde Barcelona y Valencia a Palma.

Las JAEM terminan en viernes, cosa que anima a quedarse en la isla hasta el domingo. Mallorca tiene infinidad de recónditos lugares de los que podéis encontrar información práctica en el apartado correspondiente de nuestra web:

http://xvi.jaem.es/turisme-per-l-illa/

Concurso fotográfico

Sigue su camino y a buen ritmo el concurso fotográfico que empezó en julio de 2011 y que terminará en abril de 2013. Se presenta un tema cada mes hasta un total de 22. Recordad que el premio consiste en la matrícula gratuita para las XVI JAEM. Hasta abril cualquier momento es bueno para incorporar imágenes sugerentes que nos abran horizontes y que nos permitan conocer lugares, personas, materiales, ...

Concurso fotográfico XVI JAEM
Germán Albiol: Centre Niemeyer (Avilés)

Hemos ilustrado este segundo anuncio de las XVI JAEM con algunas de las fotografías recibidas hasta ahora. Podéis verlas todas en la sección *Concurso fotográfico* de nuestra página web:

http://xvi.jaem.es/concurso-fotografico/convocatoria-del-concurso.html

Matemáticas y creatividad: un mundo en construcción

suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 135-138

VII Escuela de educación matemática «Miguel de Guzmán» FESPM-RSME

Sixto Romero Sánchez

Siempre que enseñes, enseña a la vez
a dudar de lo que enseñas.
José Ortega y Gasset

El Informe PISA analiza por separado la competencia lectora y la competencia matemática dando, en el caso español, resultados comparables. Parece evidente que estas dos competencias están relacionadas: los alumnos que leen mejor entienden los enunciados de los ejercicios, son más capaces de extraer información y tienen a priori mejor disposición para afrontar un problema de matemáticas; asimismo los alumnos más competentes matemáticamente son más precisos, más rigurosos y más creativos, en principio tienen una mejor disposición para afrontar la lectura de un texto. En el curso de verano que se ha ofrecido ha querido ahondar en la interrelación entre estas dos competencias y reflexionar sobre los procesos comunicativos que se establecen en el contexto de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

La amplia visión de las matemáticas y su enseñanza que tenía Miguel de Guzmán fue el punto de partida para la séptima edición de la Escuela de educación matemática «Miguel de Guzmán» organizada conjuntamente por la Federación Española de Sociedades de Matemáticas, FESPM (en esta ocasión a través de la Sociedad Thales) y la Real Sociedad Matemática Española, RSME.

El curso, dirigido por la Dra. Raquel Mallavibarrena, de la Universidad Complutense de Madrid y

Presidenta de la Comisión de Educación de la RSME, y el Dr. Sixto Romero, de la Universidad de Huelva y Vocal de Relaciones Internacionales con Iberoamérica y Europa de la FESPM, estuvo orientado fundamentalmente a docentes de matemáticas de los niveles educativos de Secundaria y Universidad, así como a profesores de Lengua y materias relacionadas.

Daniel Cassany

Programa

Conferencias

Más vidas que un gato, Alberto Vázquez Figueroa, escritor.

Conferencia Inaugural Curso de la UNIA: *Primavera Árabe*, para todos los cursos y a cargo de Sami Naïr, filósofo y politólogo francés y director del Centro Mediterráneo Andalusí (CMA).

La lengua de las matemáticas. Algunas reflexiones sobre la interacción de ambos aprendizajes desde la perspectiva de PISA, Francisco Martín.

Conferencia y debate: *La traducción de las matemáticas al lenguaje común*, Enrique Gracián, periodista científico, director del proyecto Sangakoo.

Ponencias

Usos del discurso en el aula de matemáticas, Nuria Planas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Del alfabetismo a las matemáticas, Daniel Cassany, Universidad Pompeu Fabra.

Ponencia y Taller: *Recursos para estimular la lectura en matemáticas: lenguaje gráfico de los cómics y el humor*, Pablo Flores, Universidad de Granada.

Talleres

Análisis de conversaciones en clases de matemáticas, Nuria Planas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Comprender y componer matemáticas, Daniel Cassany, Universidad Pompeu Fabra.

Recursos para introducir la lectura en el aula de matemáticas, Rafael Ramírez, Colegio El Carmelo, Granada.

Las redes sociales en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, Julio Ruiz Palmero, Universidad de Málaga.

Mesa redonda

La comunicación a través de las revistas de las sociedades matemáticas, moderada por Sixto Romero y con la intervención de Francisco Martín (ex-director de la revista *Suma* de la FESPM), Adolfo Quirós (revista *La Gaceta* de la RSME) y Teresa Braicovich (revista *Unión*).

Partiendo inicialmente de un breve bosquejo histórico por parte del moderador, sobre el nacimiento y evolución de las revistas, y con el pensamiento de Joos Kircz: « ..el objetivo de la comunicación científica es el registro, evaluación, diseminación y acumulación del conocimiento, hechos y percepciones humanas…», se plantearon a modo de pentálogo cinco cuestiones:

a) ¿Por qué las Matemáticas que no tenían aplicaciones fuera de la física, de la ingeniería, se ha convertido en un elemento fundamental del humanismo contemporáneo y en un instrumento indispensable de comunicación en la mayor parte de los dominios del pensamiento, de la ciencia y de la técnica? ¿Ha habido poca difusión de las Matemáticas, y si es así cuál ha sido el rol de las Sociedades Matemáticas?

b) ¿Responden las Sociedades Matemáticas al reto de los canales de comunicación entre autores, productores, editores, bibliotecarios, …?

c) Las revistas con soporte en papel tienen cada vez tiradas menores y los costos sufren incrementos significativos todos los años… La pugna entre quienes mantienen el sistema y quienes desean ampliar las posibilidades de acceso que las nuevas tecnologías ofrecen, ¿no ha hecho más que empezar?

Algunos alumnos de la VII Escuela MdG.

d) ¿Edición electrónica o en papel? ¿O ambas? Ventajas e inconvenientes para las sociedades matemáticas ante la elección de uno u otro modelo.

e) ¿Son la preservación de contenidos, la calidad del contenido, posibilidad de plagio, la calidad del sitio las únicas preocupaciones de las revistas matemáticas? En el caso concreto de los *e-journal*, ¿el acceso debe ser cerrado o abierto? Cuestiones que fueron respondidas por cada uno de los componentes de la mesa.

A modo de conclusiones

En la última jornada, tras una completa sesión de debate con participación activa de todos los alumnos, los directores de la escuela de verano elaboraron el Documento de conclusiones de la VII escuela de educación matemática Miguel de Guzmán: *Procesos comunicativos y enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*. Un texto del que cabe destacar:

La realidad del multilingüismo, tanto de alumnos como de los profesores en el proceso de E/A, o de la educación en inglés en varias comunidades autónomas no es algo neutro o irrelevante, hay interacciones entre la lengua en la que nos expresamos habitualmente y las Matemáticas que queremos aprender y enseñar. El conocimiento de la situación sin ideas preconcebidas facilitará el encuentro de soluciones adecuadas a los retos que se plantean y de los cuales deberían ser conscientes los responsables educativos.

Desde el ámbito de la Lingüística podemos acercarnos a la comprensión de las Matemáticas reflexionando sobre los enfoques comunicativo (la formulación matemática es un discurso con propósito) y contextualizado (relacionando Matemáticas con el entorno, motivación e identidad del sujeto) y cognitivo (asumiendo que saber Matemáticas es comprender y producir formulaciones escritas).

Las novelas y la literatura matemática en general son una fuente de recursos y actividades para el aula; no solamente como motivación para los estudiantes y para aumentar su cultura matemática, sino también para favorecer un aprendizaje «complementario» al habitual que fomenta la creatividad y la madurez en formación.

El lenguaje gráfico de los comics y el humor es también un recurso educativo especialmente creativo con gran poder de atracción para los estudiantes como elemento motivador y de estímulo de la lectura en Matemáticas.

El mundo interactivo «2.0» y el avance espectacular de las redes sociales y otros mecanismos de comunicación muy familiares a nuestros estudiantes ofrecen un reto muy importante para el proceso de E/A de las matemáticas. El uso de ese aparataje como recurso educativo, sin perder de vista su mero carácter instrumental, requiere una preparación previa en la que el profesor debe tener muy claro qué objetivos persigue y qué metodología va a emplear.

Con el trasfondo de los informes PISA y las competencias lectora y matemática se constatan las dificultades del aprendizaje del lenguaje formal, para lo que es importante el proceso de verbalización previo en el lenguaje cotidiano.

Un paseo relajante al finalizar la VII Escuela MdG.

Las revistas de las sociedades matemáticas que tienen un carácter formativo, de difusión del conocimiento y de intercambio de experiencias educativas ofrecen un gran potencial para mejorar el proceso de E/A de las Matemáticas y para cohesionar a la comunidad matemática vinculada a las sociedades.

La divulgación persigue transformar la información en conocimiento. Por tanto, la línea que la separa de la educación es difusa y se puede ver como una forma de divulgación que añade formación a la información.

El éxito en el aula será mayor si el docente consigue despertar el entusiasmo en el estudiante para que tenga una posición activa. En las distintas ponencias que se han presentado en esta *VII Escuela* se han dado varios ejemplos en los que se han puesto de manifiesto escenarios en los que el alumno no solo es capaz de gestionar sino también de generar la información.

En definitiva, podemos afirmar que la reflexión y debate conjuntos entre profesores de Matemáticas de los distintos niveles educativos e investigadores en Didáctica de las Matemáticas que tienen lugar en cada edición de la Escuela de Educación Matemática «Miguel de Guzmán» permiten abordar las problemáticas tratadas con una visión más completa y enriquecedora, siempre con el objetivo de fondo de mejorar y dotar de mayor calidad al proceso de E/A de las Matemáticas e impulsando el intercambio de experiencias entre las etapas educativas.

Sixto Romero Sánchez
SAEM Thales
<sixto@uhu.es>

1 Este texto se ha tomado, en parte, de la documentación elaborada para la VII Escuela de Verano «Miguel de Guzmán» por Agustín Carrillo, Roberto Muñoz, Juana Navas, Raquel Mallavillabarrena y Sixto Romero.

Ludens mathematica

JORDI COMELLAS I BLANCHART

Dicen que nuestras sociedades están en buena parte dominadas por el *Homo Ludens*. Efectivamente, ¿a quién no le gusta el aspecto más lúdico de la vida? ¿A quién no le gusta jugar y divertirse?

En la *Federación Española de Sociedades de Profesoresde Matemáticas* (FESPM) creemos que también es importante que las matemáticas lleguen al aula en su aspecto más lúdico y divertido. Por esta razón reinvindicamos la matemática lúdica, la matemática juguetona, la que es a la vez profunda y rigurosa (incluso quizás difícil), pero con la que podemos jugar, entretenernos, manipular, divertirnos.

Desde la *Secretaría de Actividades con alumnos* de la FESPM os animamos a que durante un trimestre de cada curso dediquéis un espacio y un tiempo a *Ludens Mathematica*, una actividad que propondremos anualmente para resaltar los aspectos más juguetones de las matemáticas. Queremos que los alumnos manipulen, jueguen, se diviertan... y razonen matemáticamente.

Entendemos esta actividad como una concreción más de los encuentros G4G (*Gathering for Gardner*) que se organizan ya de forma regular y periódica en muchos países. Los G4G pretenden recordar al mayor divulgador de nuestra ciencia, al admirado Martin Gardner, en alguna fecha cercana al 21 de octubre, aniversario de su nacimiento.

Y la mejor forma de recordarlo es pasándolo bien realizando alguna actividad en la que se pomga de manifiesto uno de los aspectos que más le gustaban de las matemáticas: el carácter lúdico. Las diferentes propuestas irán apareciendo en el enlace correspondiente a *Ludens mathematica* de la web de la FESPM:

www.fespm.es

Flexágonos

El tema de este curso ha sido propuesto por el profesor Fernando Blasco, de la Universidad Politécnica de Madrid. Su propuesta es trabajar con *flexágonos*. Un flexágono es una figura de papel compuesta de triangulos cuya esencia consiste en la facultad de poder plegarse de múltiples formas. Se trata, por tanto, de una figura geométrica dinámica.

Los flexágonos peden hacerse con papel u otro material flexible (cartulina, plástico) que se plieguan para formar figuras poligonales, generalmente cuadrados, rectángulos y hexágonos. El resultado es un objeto geométrico en el que pueden verse más caras de las dos (anverso y reverso) que posee un poligono «tridimensional».

Todo ello ha convertido a los flexágonos en una forma de pasatiempo y en objeto de estudio de una rama de las matemáticas como la Topología.

Creados de forma accidental por Arthur Stone, un estudiante de matemáticas de la universidad de Princeton (USA) en 1939, los flexágonos pertenecen al grupo de cuerpos geométricos denominados caleidociclos. Su nombre proviene de las palabras flexible y hexágono, ya que el primero de ellos tenía seis lados. Sin embargo, posteriormente se han creado modelos de cuatro lados, cuadrados o rectangulares.

Ludens mathematica

Harold V. McIntosh describe dos tipos de flexágonos no-planos formados a partir de pentágonos y de heptágonos a los que llama, respectivamente, pentaflexágonos y heptaflexágonos. Pero fue Martin Garner quien difundió entre el gran público los flexágonos a mediados del siglo XX.

Explicar por escrito qué es un flexágono supondría reproducir toda la serie de dibujos que Martin Gardner realizó para ilustrar los hexaflexágonos de los que habló en su libro *Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions* y que está disponible en el siguiente enlace de la *Mathematical Association of America*:

http://maa.org/pubs/focus/
Gardner_Hexaflexagons12_1956.pdf

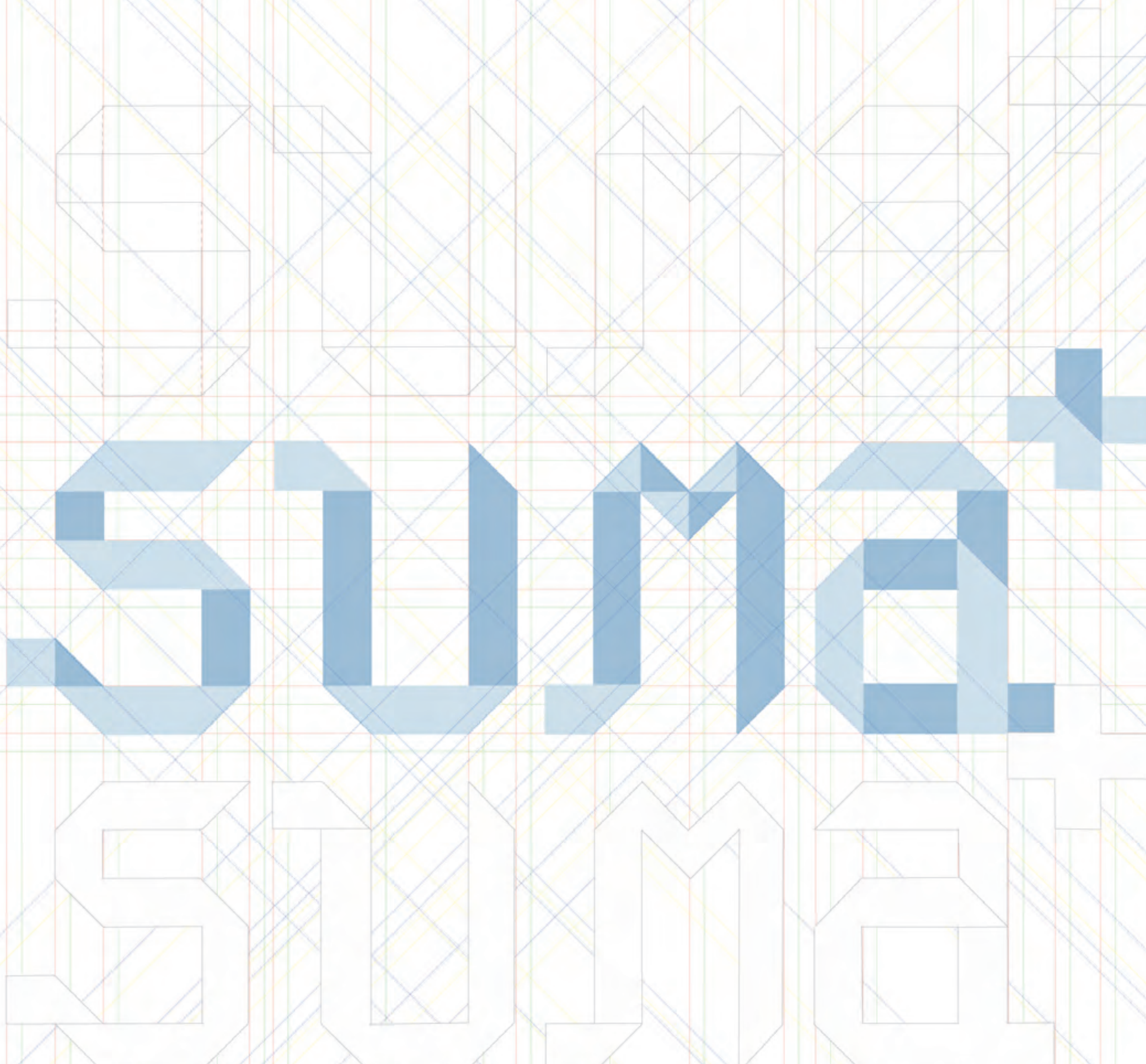
Pero la mejor manera de aproximarse a los flexágonos quizá sea ver algunos videos de la colección que sobre esas figuras pueden encontrarse en *Vi Hart*. En particular, el siguiente video contiene una idea muy interesante sobre cómo hacerse un esquema de las vías para ir de una configuración a otra:

http://www.youtube.com/user/Vihart

JORDI COMELLAS I BLANCHART
Actividades con alumnos (FESPM)
<saa@fespm.es>

La portada (*making off*)

Àngels González Fernández
Josep Moreno Fernández



Normas de publicación

1. Para el envío de artículos o cualquier consulta sobre su contenido se utilizará el correo electrónico de la redacción de *Suma* <articulos@revistasuma.es> o su dirección postal:
   Revista *Suma*
   Apartado de Correos 286
   08911 Badalona
2. Si los trabajos, imágenes incluidas, ocupan más de 5 Mb sólo se enviaran por correo postal en soporte magnético (CD-ROM, DVD-ROM o *pen drive*).
3. Los trabajos deben ser enviados como archivo en formato MS Word o RTF —fuente Times New Roman y cuerpo 12— adjunto a un mensaje de correo electrónico en el que deben figurar:
   1) El título del trabajo, los nombres y apellidos de todos los autores, su lugar de trabajo y su dirección completa así como la sociedad federada a la que pertenecen (si se desea).

   Y a efectos de comunicación:
   2) El correo electrónico, teléfono y dirección postal del autor de contacto.
4. Se debe enviar una segunda versión del original en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para identificarlos (por ejemplo, institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión se reemplazarán las citas y referencias bibliográficas por «Autor, 2012» o «Autor y otros, 2012». En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.
5. Se admiten diversos tipos de trabajos: teóricos, informes de investigaciones, divulgación, innovación didáctica…
6. Junto con el artículo se remitirá un resumen (máximo de 600 caracteres incluyendo espacios), una traducción del mismo y del título en inglés, y cinco palabras clave jerarquizadas (en castellano e inglés).
   Ejemplo: Investigación didáctica, Álgebra, Modelización y dificultades, Enseñanza y aprendizaje, Secundaria y bachillerato.
7. El texto irá una sola columna y tendrá una longitud máxima de 25 000 caracteres sin contar espacios pero incluyendo las tablas, las figuras y los anexos.
8. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes serán enviados preferentemente en formato TIF o EPS, aunque será admisible el formato JPEG, de modo que, a una resolución mínima de 300 ppp, la imagen tenga un tamaño mínimo de 7 × 7 cm, y en color original. Se adjuntarán en una carpeta aparte del documento del texto, ya que las imágenes incrustadas en el texto no son válidas para su posterior edición. Cada archivo estará claramente identificado y se indicará en el texto el lugar donde se ubica. De igual forma, si tiene que llevar un pie de ilustración, éste se reseñará en la hoja donde aparece la ilustración.
9. Si alguna expresion no se puede escribir con los caracteres disponibles en la fuente Times New Roman, se incluirá, con un editor de ecuaciones, fuera del texto. Si esto no fuera posible, se incorporará como imagen. En tales casos se indicará el lugar que ocupan las fórmulas en el texto, haciendo referencia al nombre del archivo que las contiene.
10. Las referencias bibliográficas se dispondrán al final del artículo, por orden alfabético de apellidos, indicando autor(es), año, título del libro (en cursiva), editorial y lugar de edición.
    Ejemplos:
    Gómez, E. (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E. (1990*a*), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., y J. Pérez (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.
    Gómez, E., J. Pérez y D. Hernández (1990), *Título,* Editorial, Lugar de edición.

    En los artículos de revistas y capítulos de libro se seguirá la pauta que se muestra a continuación:
    Gómez, E. (1990), «Título», *Revista,* n.° 31, 35-56.
    Gómez, E. (1990), «Título», en J. Pérez (ed.), *Título,* Editorial, Lugar de edición, 13-23.
11. Dentro del texto, las referencias a la bibliografía se indicarán con el apellido del autor y el año entre paréntesis. Por ejemplo: «[…] supone un gran avance (Hernández, 1992)». Si el autor aparece explícitamente en el texto, tan sólo se pondrá entre paréntesis el año. Por ejemplo: «[…] según Rico (1993)».
12. Si se cita una referencia de más de tres autores se puede citar el primero seguido de la expresión *y otros.* Por ejemplo: «Bartolomé y otros (1982)», «Gelpi y otros (1987)». Pero en la bibliografía deben aparecer todos los autores.
13. Todas las referencias bibliográficas deben corresponder a menciones hechas en el texto.
14. Las notas a pie de página deben ir numeradas correlativamente con superíndices a lo largo del artículo y se incluirán al final del texto.
15. A la recepción del trabajo se enviará un correo electrónico como acuse de recibo.
16. Cada trabajo será remitido a dos asesores para ser evaluado. Estos no serán informados de la identidad del autor o autores del trabajo, aconsejarán la conveniencia o no de la publicación del trabajo o recomendarán posibles modificaciones acordes con las normas y criterios de *Suma*.
17. Si los dos informes son positivos, el artículo será publicado. Si los dos informes son negativos, se desestimará su publicación. Si existe discrepancia entre los informes, se solicitará un tercer informe que decidirá su publicación o no.
18. Posteriormente, se notificará a los interesados la aceptación o no del artículo, así como —en caso afirmativo— la posible fecha de su publicación. En ese momento los autores se comprometerán a retirar el artículo de otras publicaciones a las que lo hayan remitido.
19. No se mantendrá correspondencia sobre las causas de no aceptación de un artículo.

Boletín de suscripción

Tarifas	Suscripción anual	Número suelto	Monografía
Particulares	25 €	10 €	15 €
Centros	40 €	15 €	15 €
Europa	50 €	20 €	15 €
Resto del mundo	60 €	22 €	15 €

Fotocopiar esta hoja y enviar:

por correo a: Revista *Suma*. Apartado de correos 286
08911 Badalona (Barcelona)
por Fax al: (+34) 912 911 879
por correo-e a: administracion@revistasuma.es

Deseo suscribirme a la revista *Suma*:

Nombre y apellidos: NIF/CIF:

Dirección: Teléfono:

Población: CP:

Provincia: País:

Correo electrónico: Fax:

Importe (€)

☐ Suscripción a partir del año (3 números) ___________

☐ N.os sueltos ______________________________

Total

☐ Domiciliación bancaria (rellenar boletín adjunto)

☐ Transferencia bancaria (CC 0081-0024-83-0001496357)

☐ Talón nominativo a nombre de FESPM-Revista SUMA

☐ Giro postal dirigido a Revista SUMA

Fecha y firma:

Nombre y apellidos:

Código Cuenta Cliente: Entidad: Oficina: DC: Cuenta:

Banco/Caja:

Agencia n.º: Dirección:

Población: Provincia:

Señores, les ruego atiendan, con cargo a mi cuenta/libreta y hasta nueva orden, los recibos que, periódicamente, les presentará la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM) para el pago de mi suscripción a la revista *Suma*.

Atentamente (fecha y firma):