suma+ 71
Secciones
Noviembre 2012
pp. 97-104

Describir poliedros contando caras, aristas y vértices

David Barba y Cecilia Calvo

Tal como comentamos en la primera entrega de esta sección dedicada a las Matemáticas en Primaria, nuestra intención es la de analizar dinámicas de clase centradas en la conversación y la comunicación: ¿qué actividades podemos proponer para generar estas dinámicas en clase?, ¿qué preguntas podemos formular para fomentar las discusiones?, ¿qué modelos podemos presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus razonamientos?

En esta segunda entrega, continuamos haciendo propuestas en este sentido, ahora centrándonos en un tema del bloque «Espacio y Forma» con la misma intención de dar a nuestros alumnos y nuestras alumnas un papel protagonista en la construcción de su aprendizaje a partir de actividades en las que ell@s tienen la palabra.

Ell@s tienen la palabra

Describir el entorno

En el real decreto 1513/2006 en el que se establecen las enseñanzas mínimas (LOE) para la educación primaria podemos leer: «La geometría es des-

Artículo solicitado por *Suma* en junio de 2012 y aceptado en septiembre de 2012

cribir, analizar propiedades, clasificar y razonar y no sólo definir. El aprendizaje de la geometría requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades para clasificar, construir, dibujar, modelizar y medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas». Pero además especifica como un objetivo para la enseñanza de las matemáticas: «Identificar formas geométricas del entorno natural y cultural, utilizando el conocimiento de sus elementos y propiedades para describir la realidad y desarrollar nuevas posibilidades de acción». En ambas frases se insiste en considerar la descripción como el elemento fundamental del trabajo en geometría en un marco de competencias y en destacar como objetivo principal de ese trabajo dar herramientas a los alumnos para que ell@s puedan tener la palabra en el momento de describir su entorno.

Aunque una parte importante del tiempo que se dedica en la escuela a trabajar con figuras tridimensionales se invierte en poner etiquetas a un cierto grupo de estas figuras (cubos, esferas, pirámides, conos, …) el reto que tenemos como maestros está en que las descripciones del entorno no se limiten a asignar nombres a diferentes tipos de figuras geométricas. Es importante que se conozcan los nombres de las figuras, pero más importante es que se integren con normalidad esos términos matemáticos precisos en la comunicación cotidiana con el objetivo de informar más y mejor.

Describir poliedros

Aunque en el entorno no sólo hay poliedros creemos que, analizando la manera en que trabajamos este tema en el aula, podremos darnos oportunidades para reflexionar sobre qué tipo de descripciones queremos que nuestros alumnos realicen del mundo en tres dimensiones en el que vivimos. Por supuesto que queremos que no digan rectángulo cuando se trata de un prisma ni triángulo cuando se trata de una pirámide. Pero queremos mucho más:

a) Queremos que las etiquetas aprendidas no sólo sirvan para identificar, sino para describir objetos del entorno. Por ejemplo, ante una edificación como la mostrada en la imagen 1 podrían decir que está formada por dos módulos, un prisma de base cuadrada y sobre él una pirámide cuadrangular; ante la necesidad de describir una caja de chocolate como la de la imagen 2, alguien que jamás haya visto una podría presentarla como un prisma de base triangular; y podrían mencionarse los prismas cuadrangulares oblicuos al describir un edificio como el de la imagen 3.

Imagen 1

Imagen 2

Imagen 3

b) Queremos también que las etiquetas aprendidas no se apliquen únicamente a los casos más prototípicos sino a todos los que cumplen los requisitos para ello. Por ejemplo, deseamos que un alumno sea capaz de poner la etiqueta «prisma» a un poliedro que tiene dos caras iguales paralelas y todas las demás rectangulares, aunque no lo vea apoyado sobre una de las caras que jugarán el papel de bases (por ejemplo, los poliedros representados en las imágenes 4 y 5 corresponden a prismas de base trapezoidal y pentagonal respectivamente). Para que esto suceda deberíamos presentar a los alumnos los cuerpos en distintas posiciones: apoyados sobre diferentes caras, colgados del techo, haciendo equilibrio sobre una arista, etc.

Imagen 4

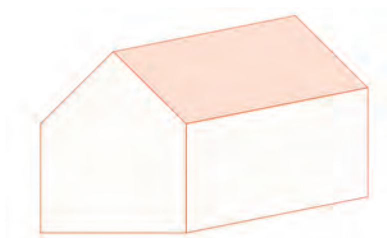

Imagen 5

En una posterior aproximación a la noción de prisma puede interesarnos que asignen a estos poliedros la etiqueta «prisma recto», ya que sus caras laterales no son paralelogramos cualesquiera. Pero aquí queremos enfatizar la importancia de independizar la identificación de figuras de la posición en la que éstas se presentan.

Tocar y mirar

Para promover estas respuestas no podemos usar en el aula únicamente los recursos que se comercializan en plástico o madera y menos aun restringirnos a las imágenes que sobre poliedros usuales incluyen los libros de texto, sino que debemos integrar el uso de figuras tridimensionales cotidianas como son los envases, fotografías de objetos conocidos por los alumnos, construcciones realizadas por ellos con diferentes materiales, etc. En resumen, debemos ofrecer a los alumnos un amplio y rico universo de ejemplos.

No sólo las familias de prismas y de pirámides han de formar parte del muestrario de poliedros de nuestra clase:

a) Porque en su entorno no se encontrarán únicamente este tipo de poliedros.

b) Porque aunque no sean tan corrientes en el entorno, en matemáticas hay otras familias importantes de poliedros como los regulares, las bipirámides o los antiprismas. En las imágenes 6 y 7 podemos ver representaciones planas de elementos de estas dos últimas familias provenientes de la galería de poliedros transparentes que se pueden encontrar en la *Wikipedia*.

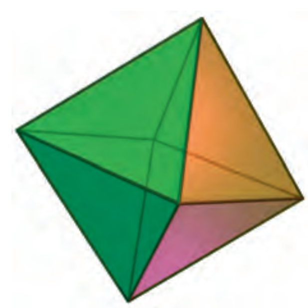

Imagen 6

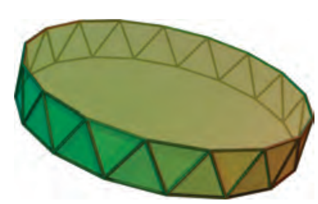

Imagen 7

c) Porque restringiéndose a prismas y pirámides se corre el riesgo de sobregeneralizar propiedades. Por ejemplo, los alumnos podrían llegar a pensar que no hay poliedros que tengan más caras que vértices.

Antes mencionábamos las imágenes de poliedros como integrantes del universo de ejemplos y creemos que vale la pena detenernos un momento en esta cuestión. Ni en el libro de texto, ni en las fichas que preparamos para nuestros alumnos, ni en sus libretas, ni en la pantalla del ordenador podemos tener figuras tridimensionales, sino sus representaciones planas. Es por este motivo que adquiere tanta importancia incluir en el trabajo de clase la interpretación y la elaboración de representaciones planas de poliedros.

Hay muchos aspectos relacionados con estas representaciones que creemos que vale la pena discutir con nuestros alumnos. Pongamos un ejemplo muy elemental. Lo que vemos en la imagen 8 son dos representaciones de un cubo, ¿qué tienen que decir nuestros alumnos respecto a los siguientes puntos?

1. Las 6 caras del cubo son cuadradas, pero en la representación no se ven todas y, de las que se ven, algunas (todas, en el segundo caso) aparecen deformadas. ¿Qué forma tienen los cuadriláteros que representan estas caras?

2. El cubo tiene 12 aristas pero en la representación no se ven todas. Si fuera transparente sí se verían y en la imagen aparecerían representadas de alguna manera en que podríamos diferenciarlas de las demás (por ejemplo, con líneas punteadas). ¿Dónde aparecerían estas líneas?, ¿serían paralelas a las líneas que representan a otras aristas?, ¿se conservaría también la perpendicularidad?

3. De los 8 vértices del cubo, en la representación solo se ven 7. Si el prisma fuera transparente, ¿dónde se ubicaría el octavo vértice?

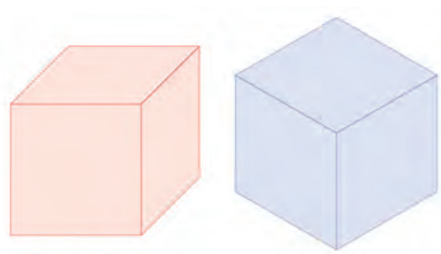

Imagen 8

Antes de continuar con las representaciones planas de poliedros, nos gustaría comentar una anécdota ilustrativa y que está impregnada de la motivación que nos impulsa a dar a los alumnos la palabra durante las clases de matemáticas. Una estudiante de Magisterio, durante sus practicas en una clase de cuarto de primaria, propuso en un examen escrito la tarea que aparece en la imagen 9.

Imagen 9

Al repasar con su tutor las anotaciones que había realizado a los exámenes recogidos, apareció el caso de un alumno que había clasificado los tres primeros cuadriláteros como cuadrados. La estudiante había indicado como errónea la clasificación de la tercera figura pero al verlo, su tutor, le sugirió que «hiciera hablar» al alumno sobre la respuesta que había dado para poder comprender qué lo había conducido al error. Así lo hizo y la justificación que recibió del alumno fue:

> Es un cuadrado como la cara de arriba de un cubo.

La anécdota nos alerta sobre lo cuidadosos que debemos ser en el momento de trabajar la interpretación de representaciones planas de poliedros cuando éstas se realizan utilizando dibujos en perspectiva.

Con relación a las imágenes que aparecen en la pantalla del ordenador vale la pena incluir en el universo de ejemplos de poliedros las imágenes animadas que dan una nueva perspectiva a la relación entre poliedros y sus representaciones planas.

En la imagen 10 hemos capturado un «instante» de estas imagenes animadas que pueden verse en:

www.wikimedia.org/wiki/
File:Icosidodecahedron.gif

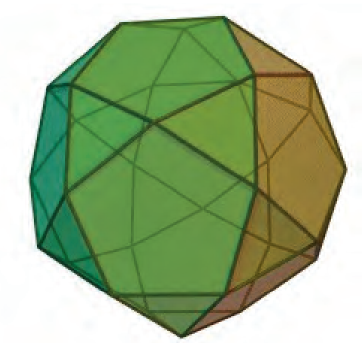

Imagen 10

Caras, aristas y vértices

Durante la descripción de poliedros podemos centrarnos en sus tres elementos fundamentales. En el caso de las caras no nos interesa únicamente cuántas son, sino también qué forman tienen.

La imagen 11 muestra una actividad en la que se propone a alumnos de segundo de primaria la identificación de la forma de las caras de diferentes poliedros (Barba, D. y M. Torra (1981), *Dado: Matemáticas 2º E.G.B*, Ilustraciones: Picanyol, Editorial Barcanova, Barcelona).

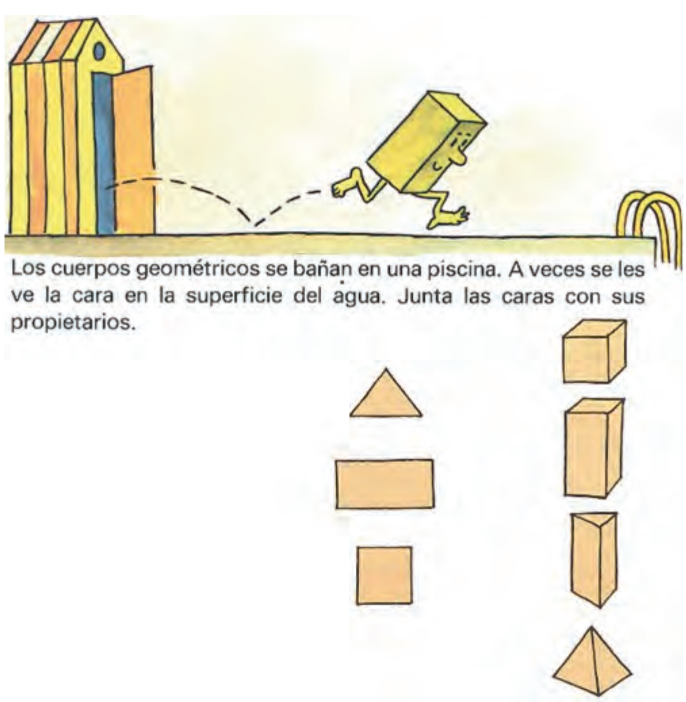

Imagen 11

Pero creemos que podemos ir más allá en el estudio de las caras en el momento de describir un poliedro. Dos ejemplos:

a) ¿Qué ángulo forman dos de sus caras?

En el caso de los prismas rectos la respuesta es fácil, pero la medición del ángulo entre dos caras de otro tipo de poliedros merece atención.

Una manera de hacer estas mediciones es usando un medidor de ángulos casero: una especie de libro de dos hojas con el que «rodear» el poliedro a lo largo de una arista y que permite, resiguiendo las hojas de este «libro» sobre un papel, dibujar el ángulo y medirlo como se hace habitualmente (imagen 12).

Imagen 12

En este sentido, las experiencias que hemos realizado preguntando a alumnos qué ángulo forman dos caras de un tetraedro regular evidencian la necesidad de dedicar un tiempo explícito a este tipo de análisis. El primer problema que encontramos es diferenciar el ángulo entre dos caras del ángulo formado por dos lados de una misma cara triangular. Resuelto este primer escollo y previamente a hacer la medición, se presenta la dificultad de hacer una estimación de la medida del ángulo entre caras: ¿es mayor o menor a 60º? Por último, y posterior a la medición, sobreviene la sorpresa de que el ángulo obtenido no sea ningún entero[1] (entre 70º y 71º).

b) ¿Se puede apoyar el poliedro sobre cualquiera de sus caras?

Para los poliedros que tienen presencia habitual en el aula la respuesta es afirmativa. Pero si damos a los alumnos la posibilidad de construir libremente poliedros a partir de diferentes materiales, aparecen muchos poliedros para los cuales hay alguna cara sobre la que no se puede apoyar el cuerpo. Por ejemplo, el prisma en la imagen 13. Este tipo de prácticas favorece la discusión sobre la relación existente entre esta posibilidad y el hecho de que el poliedro sea convexo.

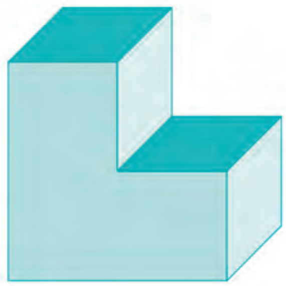

Imagen 13

Sobretodo, vemos en el estudio de las caras una primera aproximación a los desarrollos planos de los poliedros y vemos en los desarrollos otra manera de describir cómo es el cuerpo y no sólo un recurso para construir modelos de cartulina.

Por ejemplo, podemos imaginar y explicar como es el nuevo envase de un cierto producto a partir el desarrollo que aparece en la imagen 14.

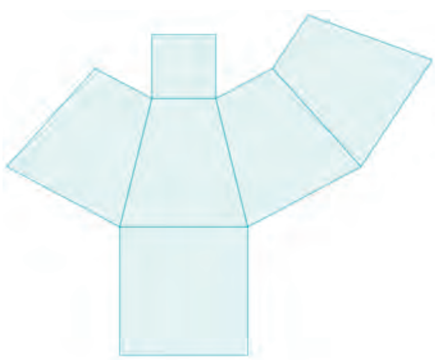

Imagen 14

En el caso de los vértices tampoco nos interesa únicamente su número. También importa el orden de cada vértice, o sea, la cantidad de aristas que llegan a él. Alguien podría considerar que no es importante discutir sobre el orden de un vértice en primaria, pero merece la pena considerar este concepto, ya que:

a) Es fundamental, por ejemplo, para entender por qué una bipirámide formada por 6 triángulos equiláteros no es un poliedro regular aunque todas sus caras sean polígonos regulares iguales.

b) Surge naturalmente cuando se trabaja con materiales manipulativos de construcción a partir de caras y vértices en que éstos tienen «patitas» que se meten en las aristas, como el de la imagen 15.

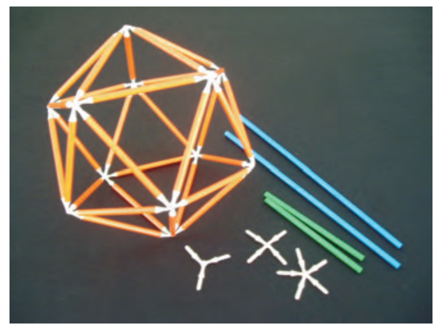

Imagen 15

Construir, imaginar, deducir

Para estudiar caras, aristas y vértices de un poliedro, además de mirarlos y tocarlos, es valioso que los alumnos los construyan. Históricamente, en las escuelas, esto se ha hecho a partir de sus desarrollos en cartulina (como mínimo el del cubo). Deberíamos mantener esta práctica, pero también extenderla y construir poliedros con otros materiales.

Dado un desarrollo se puede pedir a un alumno que lo recorte y construya el poliedro correspondiente; o se le puede pedir que lo copie en su cartulina primero, después lo recorte, y lo construya. Pero a partir de un desarrollo puede hacer más cosas que construir. Se le puede pedir que imagine el poliedro correspondiente y responda algunas preguntas. En las imágenes 16 y 17 se pueden ver un par de ejemplos de una actividad de este último tipo.

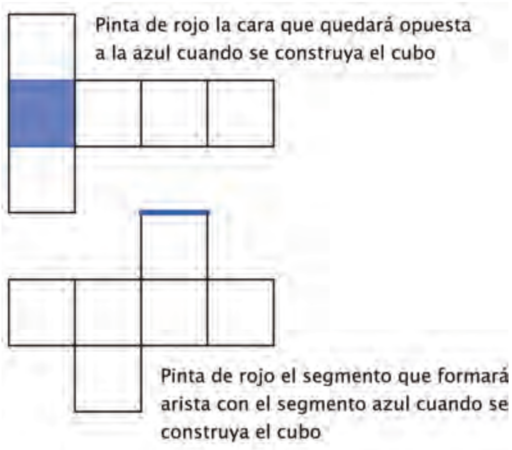

Imagen 16

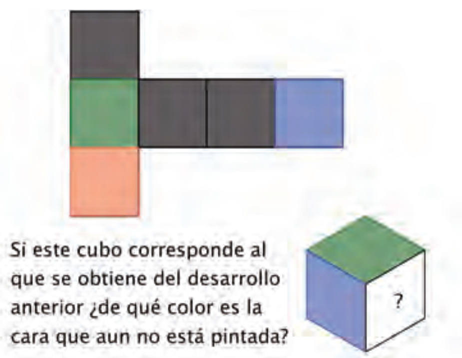

Imagen 17

Pedir a los alumnos que generen sus propios desarrollos es ir un paso más allá. Y aprender a hacerlo pasa por una serie de etapas, la primera de las cuales podría ser dibujar las caras «separadas» y unirlas de manera correcta utilizando cinta adhesiva para llegar después a dibujar un desarrollo con caras unidas y pestañas bien colocadas.

Además de la construcción de poliedros a partir de sus desarrollos también se pueden utilizar otros materiales, comerciales o caseros, de dos tipos.

Hay materiales que resaltan el papel de las aristas y los vértices. Ya mencionamos uno de ellos: *Volumes à construire* (imagen 15), pero no necesitamos restringirnos a materiales comerciales: podemos construir poliedros usando palillos para representar las aristas y guisantes para representar los vértices tal como se ve en la imagen 18. O se pueden usar trocitos de alambre y bolitas de plastilina u otros materiales que tengamos al alcance.

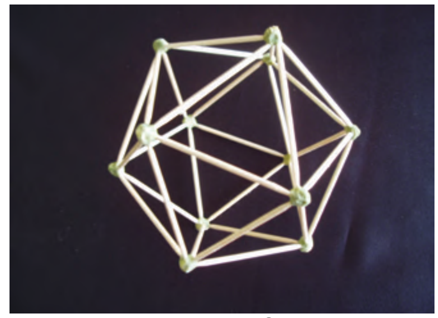
Imagen 18

También hay materiales que resaltan el papel de las caras. En este sentido, el *Polydron* (imagen 19) es un material comercial; y el *Plot* (imagen 20), es un material que podemos construir nosotros mismos para tener en el aula.


Imagen 19

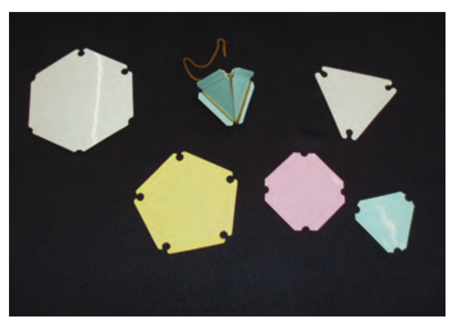
Imagen 20

Con estos materiales en el aula pueden organizarse actividades como la redacción de «albaranes» para solicitar al maestro los elementos necesarios para construir un poliedro determinado de manera que no tengan que pedir más material ni que les sobre. Por ejemplo, para obtener una pirámide hexagonal.

Si se dispone de un material como *Volumen à construire*, deben pedir 6 aristas de una medida, 6 de otra, 6 vértices de 3 patitas y un vértice de 6 patitas. Con el *Plot* deben pedir un hexágono, 6 triángulos isósceles iguales y 12 bandas elásticas para unirlos.

Pero para contar las caras, las aristas y los vértices de un poliedro no siempre es necesario tenerlo delante para mirarlo o para tocarlo (en ocasiones puede llegar a ser hasta contraproducente, basta imaginar a un alumno intentando contar los vértices de un icosaedro que tiene en las manos). También pueden contar estos elementos imaginando el poliedro o pueden deducir las cantidades a partir de los patrones que verifican estos números dentro de una misma familia. Veamos algunos ejemplos:

a) Se puede mostrar un cubo a un alumno y proponerle que con su imaginación trunque un vértice (haga un corte plano que lo elimine). El resultado es un nuevo poliedro del que se pueden contar sus elementos. Ha aparecido una nueva cara que en el cubo no estaba; por tanto, ahora hay 7 caras. Ha desaparecido uno de los vértices del cubo, pero han aparecido 3 nuevos dejando un total de 10 vértices. De la misma manera ha desaparecido una arista, pero se han generado otras 4 dejando un total de 15 aristas. Una actividad similar se puede realizar truncando más de un vértice o truncando aristas (y para aquellos alumnos a los que cuesta un poco más imaginar, siempre nos queda el recurso de «construir» un cubo con una patata y hacer los truncamientos sobre ella).

b) Se puede analizar que en las bipirámides triangulares hay 9 aristas; en las bipirámides cuadradas, hay 12 ; en las pentagonales, hay 15; y a partir del análisis de este patrón deducir que las bipirámides octagonales tendrán 24 aristas. Lo mismo puede hacerse con relación al número de vértices y caras de las bipirámides, prismas, pirámides y antiprismas (aunque este último caso seguramente sobrepasa las expectativas para Primaria).

Se pueden contar el número de aristas de un dodecaedro regular razonando de la manera siguiente. Un dodecaedro regular tiene 12 caras pentagonales. Como cada cara aporta 5 aristas, las 12 caras aportan $5 \cdot 12 = 60$ aristas. Pero cada una de ellas pertenece a dos caras por lo que en el 60 estamos contando dos veces cada arista, lo que nos permite deducir que un dodecaedro regular tiene 30 aristas[2].

Reflexión final

En la primera entrega de esta sección discutimos la manera en que un modelo como la línea numérica vacía permite a los alumnos pensar y comunicar sus razonamientos aritméticos. Ahora hemos desplazado nuestra atención al uso de material manipulativo como un catalizador para que los alumnos comuniquen sus razonamientos geométricos mediante descripciones. Hemos propuesto que el aprendizaje de vocabulario geométrico deje paso a actividades centradas en la descripción del entorno y que el estudio de una rica colección de poliedros se convierta en una oportunidad para que los alumnos hablen de Geometría en un ambiente de retos: imaginando nuevas figuras, contando sus elementos y buscando regularidades entre ellos.

DAVID BARBA URIACH
Universitat Autònoma de Barcelona

CECILIA CALVO PESCE
Escola Sadako, Barcelona
<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 Una manera de afrontar esta sorpresa es complementar la actividad de la medición de los ángulos entre las caras de un tetraedro regular con la medición del ángulo que forman dos caras del octaedro regular. En el segundo caso la medida obtenida tampoco es un número entero, pero sumado al valor obtenido en el tetraedro da exactamente 180°. Esto se puede comprobar poniendo un poliedro junto al otro y verificando que encajan perfectamente.

2 Se pueden complementar estos ejemplos en Calvo, C. (2011), «Reflexiones sobre la gestión de una clase de Matemáticas», *Actas del 3.er Congreso Uruguayo de Educación Matemática*.