suma+ 71
Artículos
Noviembre 2012
pp. 47-61

Matemáticas en el antiguo Egipto

José C. Illana Rubio

En Egipto se iniciaron las matemáticas mediante un sistema de numeración de base decimal, con las operaciones aritméticas elementales realizadas por los escribas de las primeras dinastías faraónicas. Se establecieron medidas de longitud, superficie, volumen y capacidad y se desarrollaron operaciones con fracciones aplicadas a situaciones prácticas de repartos iguales y desiguales. En los papiros Rhind y de Moscú se encontraron problemas de álgebra y geometría. La astronomía y la resolución de ecuaciones algebraicas lineales se afianzaron posteriormente junto a cálculos de progresiones aritméticas y geométricas.

Palabras clave: Sistema de numeración, Operaciones aritméticas, Unidades de medida, Fracciones, Papiro Rhind.

Mathematics in Ancient Egypt

In Egypt mathematics began through a numbering system on a decimal basis, with arithmetic operations carried out by elementary scribes of the first pharaonic dynasties. Measures were introduced in length, surface, volume and capacity and operations with fractions applied to practical situations of distributions equal and unequal were developed. Algebra and geometry problems were found in the Rhind and Moscow papyrus. The astronomy and the resolution of algebraic linear equations got firmed subsequently next to calculations of arithmetic and geometric progressions.

Key words: Numbering systems, arithmetic operations, Units of Measure, Fractions, Rhind Papyrus.

Egipto es un don del río Nilo»[1], rodeado de desiertos por el este y el oeste de su largo curso. Desde el décimo milenio a. C. un proceso paulatino de desecación condujo a la actual situación. Hacia el octavo milenio a. C. los habitantes nómadas del territorio, durante el Paleolítico, huyeron del desierto y fueron acercándose al gran río.

Estas poblaciones de las riberas fluviales mezclaron posteriormente la caza y la pesca, con el cultivo incipiente de cereales y la domesticación de animales dando comienzo al Neolítico.

El Egipto faraónico de la época histórica tuvo una etapa predinástica que corresponde a los años 5000 al 3100 a. C. Esta etapa presentó una separación geográfica y cultural entre el Bajo Egipto en el Delta del río y zonas limítrofes, al norte del país; y el Alto Egipto, en el curso fluvial desde Menfis hacia el sur.

La estructuración social y política de la población del valle del Nilo se realizó en pequeñas ciudades y su territorio circundante, «nomo», cuyo gobierno fue ejercido por un «nomarca», noble local que pervivió en la época faraónica.

En el año 3100 se hizo la unificación del Alto y del Bajo Egipto por el rey Narmer. Se conserva una estela en la que Narmer está representado con las co-

Artículo recibido en *Suma* en diciembre de 2011 y aceptado en julio de 2012

ronas de ambos territorios. En ella aparecen los primeros intentos de representación numérica de animales y prisioneros humanos (figura 1).

Similares representaciones se repiten en la base de una estatua del rey Jasejemuy, de la segunda dinastía para describir los enemigos muertos por el Faraón en la batalla (Maza, 2003)[2] (figura 2).

Figura 1

Figura 2

Sistema de numeración y escritura

En el antiguo Egipto el sistema de numeración jeroglífico era de base decimal. Cada unidad se representaba por una barra vertical (|), las decenas se indicaban con una (u) invertida (∩) y las centenas con una espiral (𓍢). El millar se escribía con una flor de loto (𓆼) y las decenas de millar con un dedo ligeramente flexionado (𓂭). Se continuaba con las centenas de millar representadas por un renacuajo, los millones por un hombre arrodillado, y los diez millones por la imagen del Sol, personificado en el dios Re (Ifrah, 1987)[3].

El periodo dinástico antiguo comprende las dos primeras dinastías llamadas tinitas, porque tuvieron a Tinis por capital, en el Alto Egipto. En la 1.ª dinastía destaca el rey Menes, que fundó la ciudad de Menfis, muy próxima al Delta, que sería la capital del Imperio Antiguo (Lara, 1991)[4]. En esta época se desarrolló la escritura jeroglífica, con signos iconográficos, que intentaban representar objetos reales. Con la escritura aparecieron los escribas y funcionarios que estructuraron la sociedad egipcia alrededor de la figura teocrática del Faraón.

Durante la segunda dinastía se articuló una escritura ideográfica, de base fonética, que se difundió sobre hojas prensadas de papiro (una planta acuática del Delta). Esta escritura tuvo cada vez más fines prácticos y administrativos, utilizados en el gobierno y la explotación económica del país.

Operaciones aritméticas

Los escribas de la época tinítica ya realizaban sencillas operaciones aritméticas. La suma consistía en la unión de las unidades correspondientes y del paso a una unidad superior cuando se sobrepasaba la base decimal:

$$26+19=(20+10)+(6+9)=$$
$$=30+15=45$$

∩∩|||||| + ∩||||||||| = ∩∩∩ + ∩||||| = ∩∩∩∩|||||

La resta suponía un procedimiento inverso quitando unidades cuando se podía de forma directa o cambiando una unidad de orden superior, de la manera siguiente:

$$33-18=(30-10)+(3-8)=$$
$$20+(3-8)=10+(13-8)=10+5=15$$

∩∩∩||| – ∩|||||||| = ∩∩ + ||| – |||||||| =
= ∩ + ||||||||||||| – |||||||| = ∩ + ||||| = ∩|||||

Se han encontrado tablas utilizadas para la suma y para la resta que usaban los escribas egipcios de épocas posteriores (Gillings, 1972)[5].

La multiplicación se realizaba mediante duplicaciones sucesivas. Así para multiplicar $17 \times 5 = 85$, se duplicaba 17 dos veces: $17 \times 2 = 34$; $34 \times 2 = 68$.

Como $5 = 2 + 2 + 1$; el resultado de la multiplicación sería: $34 + 34 + 17 = 85$

Un método opuesto se usaba para la división, considerada una multiplicación de la que se desconoce uno de los factores (Maza, 2000)[6]:

$$25 \times ? = 375;\ 25 \times 2 = 50;\ 50 \times 2 = 100;$$
$$100 \times 2 = 200;\ 375 = 200 + 100 + 50 + 25;$$
$$8 + 4 + 2 + 1 = 15$$
$$25 \times 15 = 375$$

Imperio Antiguo

El paso de la 2.ª a la 3.ª dinastía se inició con el reinado del faraón Zoser, que comenzó una etapa de grandes construcciones funerarias en la planicie de Saqqara, cerca de El Cairo. El poder del Faraón se hizo absoluto abarcando todas las áreas religiosas y económicas de la sociedad egipcia. El gobierno estaba totalmente centralizado y los funcionarios y escribas controlaban toda la actividad del país en nombre del Faraón.

La capital se trasladó a Menfis, a poca distancia del Delta. De esta época es el célebre médico y arquitecto Imhotep, que fue equiparado por los griegos con Asclepio, el iniciador de la medicina en Grecia. La 4.ª dinastía comenzó con el faraón Snefru, que inició una política expansionista con expediciones militares a Nubia y Libia.

Keops, hijo de Snefru, construyó la Gran Pirámide de Gizeh. En su época se puede considerar el máximo apogeo del Imperio Antiguo. Kefren levantó otra pirámide junto a la de su padre, ligeramente más pequeña. En su reinado se construyó la Esfinge, que tiene esculpida la cara del faraón. La tercera pirámide, la más pequeña, es la de Micerino, hijo de Kefren, que está revestida de granito.

Durante la 5.ª y 6.ª dinastías la centralización del poder fue disminuyendo y los «nomarcas» locales impusieron la herencia del cargo para sus hijos, y con ello la menor dependencia del poder del Faraón. Así se cuenta en el *Papiro Westcar,* aparecido durante el Imperio Medio, (Kemp, 1989)[7] y en la *Piedra de Palermo* (figura 3), ligeramente posterior. En ella se describe la situación política y social de Egipto durante la 5.ª y 6.ª dinastías. El poder del clero aumentó con los recursos económicos que los faraones proporcionaban a los templos para su mantenimiento.

Durante el Imperio Antiguo se completaron las operaciones aritméticas básicas, se introdujo la geometría de figuras planas en el cálculo de la superficie de los campos, y los volúmenes de los cuerpos sólidos, especialmente de las pirámides.

Figura 3

Medidas de longitud

Con los primeros tratamientos geométricos surgieron las medidas de longitud. Los escribas egipcios de esta época usaban el «codo» como unidad, y el «palmo» y el «dedo» como subunidades. Cada codo tenía 7 palmos y cada palmo 4 dedos. Un codo, por tanto, tenía 28 dedos. Aunque hubo diversos valores en el tamaño de estas unidades de longitud de base antropomórfica (codo corto, codo real) las equivalencias comúnmente más aceptadas eran las siguientes (Iversen, 1975)[8]:

1 codo	7 palmos	28 dedos	20,59 pulgadas	52,5 cm
	1 palmo	4 dedos	2,94 pulgadas	7,5 cm
		1 dedo	0,735 pulgadas	1,875 cm

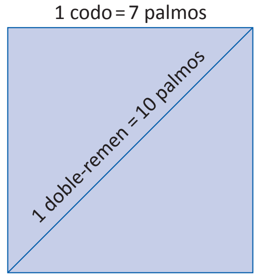
Tabla 1

Otra unidad intermedia entre el codo y el palmo, citada por algunos autores fue el «remen», equivalente a 5 palmos, correspondientes a la distancia media del hombro al codo en los brazos humanos. El «doble-remen» equivalente a 10 palmos ha sido definido por Gillings (1972)[9] como (figura 4):

> la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado era un codo...

El codo era una unidad de medida muy pequeña para grandes extensiones de terreno. Se utilizaba también un múltiplo llamado «khet», equivalente a 100 codos (Robins y Shute, 1998) [10].

$$1 \text{ khet} = 100 \text{ codos} = 52{,}5 \text{ metros}$$



$$7^2 + 7^2 = 49 + 49 = 98 \cong 100$$
$$d = \sqrt{98} \cong \sqrt{100} = 10 \text{ palmos}$$

Figura 4

Medida de superficies

Se ha escrito que el «doble-remen» se utilizaba en la medida de tierras, porque permitía duplicar o dividir a la mitad las superficies sin alterar las formas. Un campo cuadrado podía duplicar su superficie, con la aproximación calculada, haciendo otro cuadrado de lado la diagonal (figura 5).

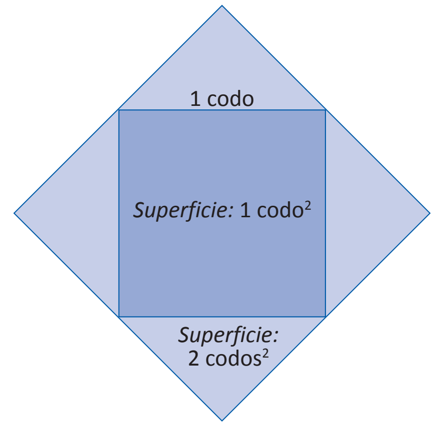


Figura 5

La delimitación de los campos cultivables era un tema conflictivo desde la época predinástica con las alteraciones producidas por las inundaciones anuales. En el Imperio Antiguo se produjeron a veces enfrentamientos jurídicos entre los templos y los particulares, y en otras situaciones era preciso el conocimiento lo más aproximado posible de la extensión de los campos de producción agrícola. Cualquier campo de forma poligonal, más o menos regular, podía descomponerse en triángulos de una u otra forma. Los egipcios después de la triangulación obtenían las dimensiones de un rectángulo de área equivalente para cada uno de los triángulos formados (figura 6).

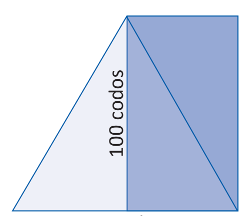


Figura 6

Ejemplo. Un triángulo de 100 codos de altura y 80 codos de base. ¿Qué superficie tendrá?

Transformado el triángulo en el rectángulo coloreado de 100 codos de longitud y 40 codos de anchura (la mitad de la base del triángulo) daría 4000 codos cuadrados de superficie.

Aunque hemos utilizado en el ejemplo anterior el codo cuadrado como unidad de superficie, los egipcios usaban una más grande, el «setat», llamado también «arura» en épocas posteriores por influencias griegas. También usaron el «codo de tierra».

Un «setat» era la superficie de un cuadrado de un «khet» de lado, por lo que equivaldría a 10000 supuestos codos cuadrados, unos 2755 metros cuadrados, (aproximadamente 27,5 áreas = 0,275 hectáreas).

El «codo de tierra» era la centésima parte del «setat», unos 27,5 metros cuadrados, equivalentes a la superficie de una franja de terreno de 1 «khet» de largo (100 codos) y 1 codo de ancho (supuestamente 100 codos cuadrados).

La extensión de las tierras de algunos templos medidas en «setat» (Gasse, 1988)[11] se expresaron de la siguiente forma:

— Parcela ribereña al noroeste: 5 setat
— Parcela al oeste del templo de Horus: 15 setat
— Parcela al oeste de Seger-chad: ½ y ¼ de setat

Medidas de volumen y capacidad

Las medidas de volumen no se diferenciaban de las de capacidad en el Antiguo Egipto. Los correspondientes codos cúbicos del cálculo de volúmenes se transformaban en «khar» (unidades de capacidad) multiplicando por 1,5. Así 200 unidades de volumen eran 300 khar.

Un «khar» era la capacidad de un cuerpo cuyo volumen son 2/3 de un codo cúbico (Maza, 2003) [12]. Según esta definición:

$$1 \text{ khar} = 2/3 \text{ codo cúbico} =$$
$$= 2/3 \cdot 52{,}3^3 = 95370 \text{ cm}^3$$

Otras medidas de capacidad utilizadas eran el «heqat» y el «hin». Un «khar» tenía 20 «heqat» o 200 «hin», por lo que 1 heqat equivalía a 10 hin. En unidades actuales:

$$1 \text{ hin} = 476{,}85 \text{ cm}^3$$
$$1 \text{ heqat} = 4768{,}50 \text{ cm}^3 = 4{,}7685 \text{ litros.}$$

En el *Papiro Rhind*[13] aparece también como medida de capacidad el «heqat-cuadruple», múltiplo del «heqat», con las equivalencias siguientes:

1 heqat-cuadruple = 4 heqat
1 khar = 5 heqats-cuadruples

Los múltiplos de «heqat» servían para medir la capacidad de los grandes graneros usados en Egipto para contener cereales, y para medidas más pequeñas se utilizaban divisores de «heqat»: 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 ó 1/64 de esta unidad. Para fracciones más pequeñas aún se usaba el «ro», equivalente a 1/320 de heqat, correspondiente a 14,90 cm^3.

La estructura agraria de la sociedad egipcia y las dificultades de alimentar a la población en épocas de escasez potenciaron la construcción de silos o graneros para almacenar el cereal. En el *Papiro Rhind* aparecen problemas directos e inversos sobre la capacidad o las dimensiones de estos graneros.

Calcular la capacidad de un granero de 10 codos de longitud, 10 codos de anchura y 10 codos de altura.

El cálculo del volumen del granero daría: $10 \times 10 \times 10 = 1000$ codos cúbicos, que se transformarían en medidas de capacidad según las relaciones:

1 khar = 2/3 codo cúbico
1 khar = 5 heqats-cuadruples

$$1000 \text{ codos cúbicos} \times 3/2 = 1500 \text{ khar} =$$
$$= 7500 \text{ heqats-cuadruples.}$$

¿Qué altura tendrá un granero de base cuadrada de 10 codos de lado si contiene 2500 heqats-cuadruples de grano?

$$2500 \text{ heqats-cuadruples} = 500 \text{ khar} =$$
$$= 500 \times 2/3 = 333{,}33 \text{ codos cúbicos.}$$

$$V = 10 \times 10 \times h = 333{,}33;$$
$$h = 333{,}33/100 = 3{,}33 = 3\ 1/3 \text{ codos}$$

Imperio medio

La pérdida del poder real durante la 6.ª dinastía, produjo lo que ha sido llamado el *Primer Periodo Intermedio* entre el Imperio Antiguo y el Imperio Medio, a partir del año 2160 a. C. El poder centralizado de los faraones del Imperio Antiguo dejó paso al aumento de poder de los «nomarcas» y del clero y a las dificultades económicas del reino.

En este periodo se desarrolló una pujante literatura que describía la situación cotidiana del país. Entre estos escritos destacan los «Textos de los Sarcófagos» y «Enseñanza para Merikara», un conjunto de consejos para el buen gobierno en una época de crisis política.

Los principes tebanos de de la XI dinastía iniciaron el Imperio Medio hacia el año 2060 a. C., consolidando de nuevo el poder real y restableciendo la economía conjunta del valle del Nilo. El Imperio Medio alcanzó su apogeo con Sesostris I que realizó una política territorial expansionista en Nubia, llegando hasta la tercera catarata del río Nilo. Sesostris III continuó la expansión por Siria y Palestina.

De esta época es la *Historia de Sinuhe,* obra cumbre de la literatura egipcia, y los *papiros de Kahum y Berlín*. También se inició la escritura hierática y se desarrolló la medicina (cirugía, curación de enfermedades oculares,...). El «papiro quirúrgico Edwin Smith» (Hornung, 2003)[14] detalla diagnósticos para diversas enfermedades y cita el corazón como centro del sistema vascular.

El Imperio Medio llegó a su final en el año 1786. De nuevo los visires y nomarcas tuvieron más poder efectivo que los propios faraones de la XIII y XIV dinastías. Se conoce esta etapa como *Segundo Periodo Intermedio,* con una duración de más de dos siglos

Durante el *Segundo Periodo Intermedio,* diversos pueblos asiáticos (hicsos) se fueron asentando pacificamente en la zona del Delta empujados por movimientos migratorios que afectaron a todo el Próximo Oriente. Entre ellos posiblemente se encontraban los hebreos. Los hicsos ocuparon poco a poco puestos de responsabilidad política y administrativa en el Estado egipcio. En el año 1644 a. C. consiguieron entronizar un faraón de origen asiático en la zona del Bajo Egipto.

De esta época son el *Papiro Rhind* y el *Papiro de Moscú*[15]. El *Papiro Rhind* fue escrito por Ahmes en el año 1640 a. C. Este escriba recopiló problemas matemáticos anteriores en escritura hierática que se utilizaban en la iniciación al cálculo de los nuevos escribas. El *Papiro Rhind* fue comprado en Luxor por Henry Rhind abogado inglés en 1858, del que ha tomado su nombre.

Operaciones con fracciones

El *Papiro Rhind* utiliza fracciones de unidades de medida de forma habitual, usadas en problemas concretos de repartos iguales o desiguales (alimentos, salarios de trabajadores,...). Las fracciones usadas por los egipcios tenían la unidad por numerador. Otras fracciones de numerador distinto de la unidad se solían distribuir en sumas de fracciones unitarias:

$$8/10 = 1/2 + 1/5 + 1/10 =$$

$$\overset{\frown}{\text{II}} + \overset{\frown}{\text{IIIII}} + \overset{\frown}{\cap} = \overline{2} + \overline{4} + \overline{10}$$

(Neugebauer, 1962)[16]

Una excepción a este planteamiento de fracciones de numerador unitario es el uso de la fracciones $2/3$ y $3/4$ en operaciones matemáticas habituales.

$$8/10 = 2/3 + 1/10 + 1/30$$

Los egipcios realizaban operaciones con fracciones. La suma se hacía de la forma siguiente:

$$1/4 + 1/4 = 1/2$$

(fracciones iguales de denominador par)

$$1/3 + 1/6 = 1/2$$

(denominadores doble uno de otro)

$$1/5+1/20=1/4$$
(denominadores multiplo uno de otro)

Los egipcios sumaban también tres o más fracciones:

$$1/6+1/6+1/6=3/6=1/2$$

$$1/7+1/14+1/28= =4/28+2/28+1/28=7/28=1/4$$

En forma similar realizaban la resta de fracciones cuando tenían las mismas características que las tratadas en la suma. Gillings (1972)[17] aplica para casos de denominadores múltiplos unos de otros los siguientes cálculos:

$$1/2-1/6=3/6-1/6=2/6=1/3$$

$$1/4-1/12=3/12-1/12=2/12=1/6$$

La multiplicación de fracciones 1/n por números enteros cuando n es un número par estaba resuelta por el método de duplicaciones:

$$1/2\times 2=1; 1/4\times 2=1/2; 1/6\times 2=1/3$$

$$1/2\times 3=1/2\times 2+1/2\times 1= =1+1/2=1\,1/2$$

$$1/4\times 3=1/4\times 2+1/4\times 1= =1/2+1/4=3/4$$

$$1/2\times 5=1/2\times 2+1/2\times 2+1/2\times 1= =1+1+1/2$$

Cuando n es impar los egipcios utilizaban la tabla $2/n$ (tabla 2):

2/5 = 1/3 + 1/15	2/21 = 1/14 + 1/42
2/7 = 1/4 + 1/28	2/25 = 1/15 + 1/75
2/9 = 1/6 + 1/18	2/27 = 1/18 + 1/54
2/15 = 1/10 + 1/30	2/33 = 1/22 + 1/66

Tabla 2

La multiplicación de dos números fraccionarios se realizaba de la forma siguiente:

Problema 9 del Papiro Rhind

$$8/14\times 7/4=(1/2+1/14)\times(1+1/2+1/4)$$

1 .... 1/2 + 1/14

1/2 .... 1/4 + 1/28

1/4 .... 1/8 + 1/56

1 + 1/2 + 1/4 .... 1/2 + 1/4 + 1/8 + + 1/14 + 1/28 + 1/56

$$1/2+1/4+1/8=7/8;$$
$$1/14+1/28+1/56=1/8;$$
$$7/8+1/8=8/8=1$$

Las divisiones de fracciones entre si eran menos habituales, aunque podían realizarse por métodos de duplicaciones inversas.

Repartos iguales

El planteamiento de los matemáticos egipcios en el reparto de 2 objetos en 5 partes iguales podría argumentarse de la siguiente forma:

La primera subdivisión de 2 cosas en 5 partes lo más grandes posible implicaría dividir el primer objeto en tres partes iguales (1/3), y el segundo objeto de la misma manera (1/3), hasta un total de (5/3), quedando sin repartir 1/3 de uno de los objetos. La continuación del tercio sobrante en 5 partes iguales produciría 1/15 correspondiente al producto de $1/3\times 1/5$. Por ello 2/5 sería igual a la suma de ambos repartos: $1/3+1/15$.

Repartos desiguales

Los egipcios resolvían también problemas de repartos desiguales. Así en el problema 65 del «Papiro Rhind» se reparten 100 hogazas de pan entre la tripulación de un barco (patrón, jefe de tripulación, portero, y siete marineros) en proporciones jerarquizadas: el patrón, el jefe de tripulación y el portero reciben doble ración que cada uno de los siete marineros.

La forma de resolución es como si fueran 13 personas, contando doble ración a patrón, jefe de tripulación y portero: $7+2+2+2=13$ raciones.

El «Papiro Rhind» da como resultado 7 hogazas, 2/3 y 1/39 para cada marinero y 15 hogazas, 1/3, 1/26 y 1/78 para el patrón, el jefe de tripulación y el portero [18].

El «Papiro de Berlín» (Menu, 1982) [19] cita otro ejemplo de repartos desiguales complejos, en relación a los salarios del templo de Illahun, realizados en especie alimenticia (pan y cerveza) en raciones que oscilan desde 10 para el Director a 1/3 para los trabajadores, y asignaciones intermedias para sacerdotes, escribas, policías o vigilantes. El problema consistía en el cálculo del número de hogazas de pan y de jarras de cerveza a cada uno de los beneficiarios (tabla 3).

	Ración	*Pan*	*Cerveza*
Director	10	10×(1+2/3)=16+2/3	8+1/3
Sacerdote	3	3×(1+2/3)=5	2+1/2
Escriba	1+1/3	4/3×(1+2/3)=2+1/6+1/18	1+1/9
Policía	1	1×(1+2/3)= 1+2/3	1/2+1/3=2/3+1/6
Vigilante	2/3	2/3×(1+2/3)=1+1/9	1/2+1/18
Trabajador	1/3	1/3×(1+2/3)=5/9=1/2+1/18	1/4+1/36
Total	42	70; 70/42=1+28/42=1+4/6=1+2/3	35

Tabla 3

La estructura agraria de la sociedad egipcia daba gran importancia a los problemas de repartos de pan y cerveza, alimentos básicos, y al control de su producción. Los escribas establecieron una relación matemática entre el número de panes o jarras de cerveza que podían obtenerse de cada «heqat» de grano de cereal. Esta relación se denominó «psw» (pesu):

«psw» (pan) = n.º de panes/«heqats» de grano

«psw» (cerveza) = n.º de jarras/«heqats» de grano

En el *Papiro Bulaq,* del Imperio Medio, el «psw» de cerveza tenía el valor igual a 2. Posteriormente llegó a valores 2 3/4, en el *Segundo Periodo Intermedio* (Papiro Rhind). El valor del «psw» del pan osciló entre valores de 4,5 y 5 en las diversas etapas de la historia egipcia. Un parámetro inverso, el «htr», relacionaba el número de «heqats» de grano por cada pan o jarra de cerveza producidos.

En el *Papiro Rhind* y en el *Papiro de Moscú* [20] han aparecido diversos problemas con cálculos de estas relaciones de la forma siguiente:

3 1/2 heqats de grano hacen 80 panes. Obtener la cantidad de grano para producir cada pan, y el valor del «psw».

Los egipcios calculaban el «psw» dividiendo los 80 panes entre los 3 1/2 «heqats» de grano de la forma siguiente:

1×3 1/2 .... 3 1/2

10×3 1/2 35

20×1/2 70

2×3 1/2 7

2/3×3 1/2=2/3×7/2=
=7/3= 2 1/3

1/7×3 1/2=1/7×7/2=
=7/14= 1/2

1/21×3 1/2=1/21×7/2=
=7/42= 1/6

«psw»=20+2+2/3+
+1/7+1/21 .... 70+7+2 1/3+
+1/2+1/6=
=80 [21]

La cantidad de grano en cada pan sería la razón inversa al «psw», el «htr», que los escribas egipcios calculaban dividiendo los 3 1/2 «heqats» de grano entre los 80 panes.

Algebra y geometría

El «Papiro de Moscú» plantea un problema sobre la obtención de las dimensiones de un rectángulo conocida su superficie y la relación entre la longitud y la anchura.

Un rectángulo de área 12 tiene de anchura 1/2 más 1/4 de la longitud. Calcula los lados del rectángulo.

$$L \times A = 12;\ A = (1/2 + 1/4)L;$$
$$(1/2 + 1/4)L \times L = 12;\ 3/4\,L^2 = 12;$$
$$3L^2 = 48;\ L^2 = 48/3 = 16;$$
$$L = \sqrt{16} = 4;\ A = 3/4\,L = 3/4\ 4 = 3$$
$$\text{Area} = 4 \times 3 = 12$$

El tratamiento del área del círculo se indica en el *Papiro Rhind* de la siguiente forma:

Calcular el área de un campo redondo de 900 codos de diámetro.

La solución se plantea así:

1) Tomar 1/9 del diámetro: 100 codos. El resto son 800 codos.
2) Multiplicar 800 veces 800. Resultado 64 «setat de tierra» (figura 7).

$$800 \times 800 = 640000 \text{ codos cuadrados} =$$
$$= 64 \text{ setat (1 setat 10000 codos cuadrados)}$$

Se divide cada lado en 3 partes iguales. Cada pequeño cuadrado tendrá:

$$300 \times 300 = 90000 \text{ codos cuadrados} =$$
$$= 9 \text{ setat}$$

Las cuatro esquinas son 2 cuadrados pequeños = 18 setat:

$$81 \text{ setat} - 18 \text{ setat} = 63 \text{ setat} \cong 64 \text{ setat}$$

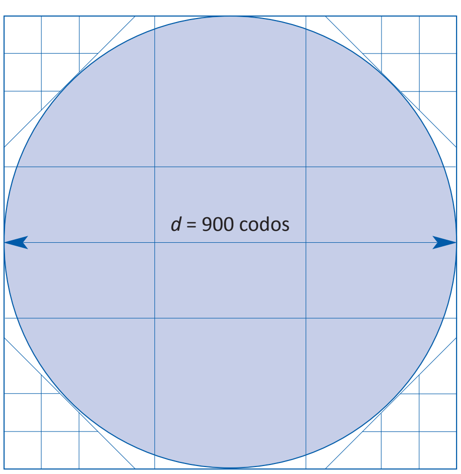


Figura 7

La cuadratura del círculo (medida de su área) era realizada por los egipcios de esta manera:

$$\frac{\text{Área del círculo}}{\text{Área del cuadrado}} = \frac{63}{81} \cong \frac{(8)^2}{(9)^2}$$

$$\text{Área} = \left(\frac{8}{9}\right)^2 d^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$$

Geometría de las pirámides

La geometría de los sólidos tuvo su aplicación en las dimensiones de las grandes pirámides del Imperio Antiguo. La falsa pirámide de Huni (faraón de la 3.ªª dinastía), construida en Maidum, cerca del oasis de El Fayum, fue una pirámide escalonada (figura 8). Snefru construyó la primera pirámide completa de base cuadrada, de 144 metros de lado y 95 metros de altura.

La pendiente de las caras laterales de las pirámides varía desde 43° 22' de la zona superior de la pirámide de Snefru a los 60° de la inconclusa pirámide de Djedefra, hijo de Keops, al norte de Gizeh. Las pendientes de las pirámides de Keops (51° 50'), Kefren (53° 7') y Micerinos (51° 20') son intermedias entre los valores extremos (Baines y Malek, 1992)[22].

Los egipcios medían la pendiente de las pirámides en «seked», correspondiente a la distancia horizontal de la mitad de la base respecto de la altura (número de palmos horizontales por cada codo de altura). (figura 9)

Un problema del *Papiro Rhind* calcula el «seked» de una pirámide de 360 codos de lado de la base y 250 codos de altura realizando las operaciones siguientes:

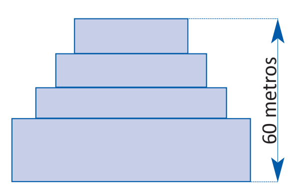


Figura 8

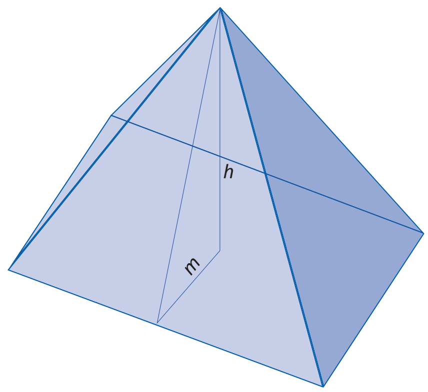


Figura 9

1) Divide el lado de la base por la mitad:
$360 \times 1/2 = 180$ codos
2) Divide 180 entre la altura:
$180/250 = 125 + 50 + 5/250 =$
$= 1/2 + 1/5 + 1/50 = 0{,}72$
3) Multiplica $1/2 + 1/5 + 1/50$ por 7:

$7/2 + 7/5 + 7/50 = 3{,}5 + 1{,}4 + 0{,}14 = 5{,}04$

Los egipcios escriben 5 1/25

Otro problema del mismo Papiro calcula la altura de una pirámide cuyo lado de la base es 12 codos, si tiene un «seked» de 5 palmos y 1 dedo (5 1/4).

1) Multiplica por 2 el «seked» = 5 1/4 x 2 = 10 1/2
2) Divide 7 entre 10 1/2 = 7: 21/2 = 2/3
3) Multiplica 2/3 por 12 = 8 codos (altura de la pirámide)

Los dos problemas anteriores se resolverían desde los planteamientos actuales de la siguiente forma, teniendo en cuenta la definición egipcia del «seked» (figura 10)

seked $= m/h$ (pendiente de la pirámide)

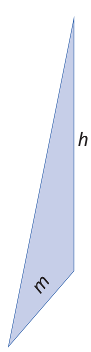


Figura 10

Problema 1

$l = 360$ codos; $h = 250$ codos

$m = 1/2 = 360/2 = 180$ codos

$m/h = 180/250 = 0{,}72$ codos

$0{,}73 \times 7 = 5{,}04 = 5\ 1/2$ palmos

Problema 2

$l = 12$ codos seked = 5 palmos y 1 dedo.

$m = 12$ codos$/2 = 6$ codos $= 42$ palmos

seked $= 5\ 1/4 = m/h = 42/\text{h}$

$h = 42/5\ 1/4 = 8$ codos

El volumen de las pirámides y su cálculo estaba relacionado con la cantidad de piedra necesaria para la construcción de estos monumentos funerarios, y con el número de trabajadores precisos para construirlos, además del alimento de estos trabajadores. Los escribas egipcios eran expertos en estas operaciones matemáticas.

Habían llegado a la conclusión de que el volumen de la pirámide era la tercera parte del volumen del paralelepípedo de igual base e igual altura (figura 11). Por ello el volumen de la pirámide era calculado igual que actualmente por 1/3 de la superficie de la base por la altura.

Los egipcios plantearon también los volúmenes de pirámides truncadas o troncos de pirámide, porque en muchos casos tenían interés especial por conocer el volumen hasta una cierta altura o el peso que debía soportar la cámara mortuoria del faraón, como en el caso de la pirámide de Keops, que estaba situada a los dos tercios de la altura total de la pirámide.

El Papiro de Moscú plantea el ejemplo del cálculo del volumen de un tronco de pirámide de 6 codos de altura y bases de 4 codos (inferior) y 2 codos (superior).

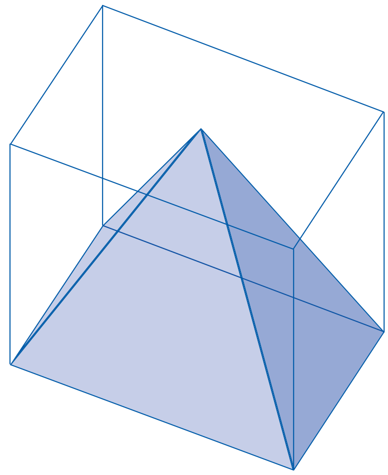


Figura 11

La solución se realiza de la siguiente manera:

1) Eleva 4 (base mayor) al cuadrado: resultado igual a 16.
2) Eleva 2 (base menor) al cuadrado: resultado igual a 4.
3) Toma 4 dos veces: resultado igual a 8.
4) Suma 16, 8 y 4: resultado igual a 28.
5) Divide 6 (altura) entre 3: resultado igual a 2.
6) Multiplica 28 por 2: resultado igual a 56 (volumen del tronco de pirámide).

Se ha supuesto que los egipcios calculaban el volumen de la pirámide truncada mediante la diferencia entre el volumen de la pirámide total y la pirámide pequeña, construida sobre la base menor (figura 12).

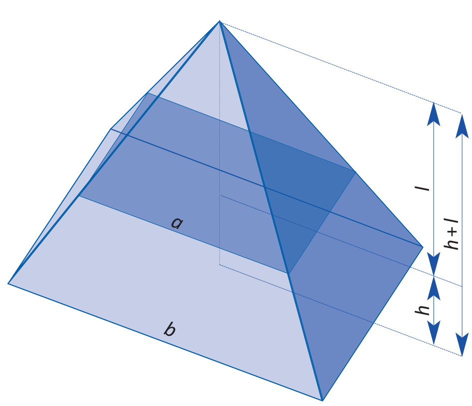


Figura 12

$$V = 1/3\, b^2(h+l) - 1/3\, a^2 l =$$
$$= 1/3\, b^2 h + 1/3\, b^2 l - 1/3\, a^2 l =$$
$$1/3\, b^2 h + 1/3\, l(b^2 - a^2)$$

En los casos en que la pirámide se truncara a la mitad de la altura: $h = l$ la formula general quedaría simplificada:

$$V = 1/3\, b^2 h + 1/3\, b^2 h - 1/3\, a^2 h = 1/3\, h(2b^2 - a^2)$$

como $b = 2a$

$$V = 1/3\, h\,(2 \cdot 4a^2 - a^2) = 1/3\, h(8a^2 - a^2) =$$
$$= 1/3\, h(7a^2) = 7/3\, ha^2$$

Esta expresión es la usada por los egipcios en el Papiro de Moscú.

Imperio nuevo

Hacia el año 1550 a. C. los príncipes tebanos se rebelaron contra los hicsos. Menfis y el Delta fueron conquistados en los años siguientes. El faraón Ahmosis unificó de nuevo el Alto y el Bajo Egipto y fundó la XVIII dinastía y con ella el Imperio Nuevo.

Se inició la expansión territorial por Nubia, Siria y Palestina, llegando hasta el río Eúfrates, en las fronteras del reino de Mitanni y el norte del actual Líbano y Siria (Aleppo, Karkemish, Qadesh). Se estabilizó la administración y se construyeron nuevos templos a los dioses. El constructor Inene dirigió las obras del templo de Amón en Karnak y de los lugares de enterramiento en el Valle de los Reyes, en las proximidades de la capital tebana.

En la corte de los faraones del Imperio Nuevo se reunió a constructores, artistas y científicos: el astrónomo Amenemhat construyó un reloj de agua, y se desarrolló un calendario con la fecha exacta de salida de la estrella Sirius, según se indica en el llamado «Papiro Ebers» (Hornung, 2003) [23]. También apareció una literatura sobre el «más allá», que cristalizó en el «Libro de los Muertos» y en la posterior revolución religiosa de Akhenaton.

Hacia 1350 a. C., llegó al poder Amenofis IV, que ha sido conocido con el nombre de Akhenaton.

Dio prioridad al dios solar Atón, iniciando la primera religión monoteísta de la Antigüedad. Akhenaton trasladó la capital a El Amarna, en el centro del país y produjo una revolución política y social sin precedentes en el valle del Nilo. (Aldred, 1983)[24] Su política interior y exterior fue totalmente pacifista, en comparación a la de sus antecesores.

Posteriormente se inició la XIX dinastía y un nuevo apogeo egipcio con Ramsés II, que se enfrentó a los hititas en la batalla de Qadesh (Siria). Después de esta batalla cada uno de los contendientes se consideró vencedor y se firmó un tratado de paz que fue respetado durante todo el reinado del faraón. Ramsés II aumentó el nivel de construcciones con nuevos templos en Karnak, Luxor y Abu Simbel, y gobernó Egipto hasta la edad de 90 años desde su nueva capital de Pi-Rameses, en el este del Delta. (Desroches Noblecourt, 1998)[25].

En esta época se plantearon problemas similares a los llamados de «pensar una cantidad», tal como aparecían en el *Papiro Rhind* (número 34), aunque con tratamiento más algebraico.

Los faraones posteriores a Ramsés II fueron llamados los «Ramesidas». El de mayor relevancia política fue Ramsés III, que contuvo las invasiones de los libios y de los «Pueblos del Mar». Posteriormente el país se hundió en la anarquía iniciándose el «Tercer Periodo Intermedio», que se mantuvo en Egipto durante cuatro siglos. En este tiempo el valle del Nilo fue ocupado por invasores libios y etíopes.

Matemáticas en el Imperio nuevo

La matemática egipcia del Imperio Nuevo no presentó grandes diferencias con etapas anteriores ni novedades técnicas en el conjunto de los problemas matemáticos desarrollados por los escribas egipcios.

En esta época se plantearon problemas similares a los llamados de «pensar una cantidad», tal como aparecían en el *Papiro Rhind* (número 34), aunque con tratamiento más algebraico (Maza, 2003)[26]:

Obtener una cantidad tal que ella, 1/2 de ella, y 1/4 añadidas juntas sean igual a 10.

Los egipcios lo resolvían en forma similar a los repartos desiguales a 1, 1/2 y 1/4, dividiendo 10 entre $(1+1/2+1/4)$:

La solución egipcia $5+1/7+4/7=5\ 5/7$ es la obtenida actualmente mediante un planteamiento algebraico:

En el *Papiro de Berlín* se han encontrado formas algebraicas similares a una ecuación de primer grado y otra de segundo grado. Transcritas de forma moderna serían expresadas así:

$$4x-3y=0$$
$$x^2+y^2=100$$

El conjunto de ambas establece un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resuelto daría los valores:

$$x=6$$
$$y=8$$

Los egipcios llegaron a plantear y resolver problemas de progresiones aritméticas (ejercicio 64 del Papiro Rhind):

Dividir 10 heqats de grano entre 10 hombres de forma que la diferencia entre cada uno sea de 1/8 de heqat.

10: 10 = 1 heqat por individuo;

diferencia = 1/8: 2 = 1/16;

$1/16\times 9$ intervalos $= 9/16 = 1/2 + 1/16$.

Las soluciones obtenidas en el *Papiro Rhind* eran las siguientes:

$$1/4+1/8+1/16=7/16$$
$$1/2+1/16=9/16$$
$$1/2+1/8+1/16=11/16$$
$$1/2+1/4+1/16=13/16$$
$$1/2+1/4+1/8+1/16=15/16$$

$$1+1/16=17/16$$

$$1+1/8+1/16=19/16$$

$$1+1/4+1/16=21/16$$

$$1+1/4+1/8+1/16=23/16$$

$$1+1/2+1/16=25/16$$

$$7/16+9/16+11/16+13/16+15/16+ \\ +17/16+19/16+21/16+ \\ +23/16+25/16=160/16=10$$

La solución actual:

$$a+(a+1/8)+(a+2/8)+(a+3/8)+\ldots \\ \ldots+(a+9/8)=10$$

$$10a+45/8=10$$

$$a=(10-45/8)/10=1-45/80= \\ =1-9/16=7/16$$

y los valores de los diversos términos de la progresión:

$$7/16;\ 9/16;\ 11/16;\ \ldots;\ 25/16$$

igual que los obtenidos por los egipcios (Gheverghese, 1996)[27].

De igual forma en el ejercicio 79 del *Papiro Rhind* se plantean también otros tipos de progresiones:

Calcular la suma de los elementos de una progresión geométrica de 5 términos, razón 7 y primer término igual a 7.

Las soluciones que se indican son:

$$7,\ 49,\ 343,\ 2401 \text{ y } 16807$$

y la suma pedida es igual a:

$$7+49+343+2401+16807=19607$$

Últimos tiempos

El final del «Tercer Periodo Intermedio» se produjo con la invasión de Egipto por los asirios en el año 669 a. C. El rey asirio Assaradón conquistó Menfis y nombró gobernador del Bajo Egipto al príncipe saita Necao. Una revuelta iniciada en el Alto Egipto a la muerte de Assaradón expulsó temporalmente a los asirios, pero el nuevo monarca asirio Assurbanipal conquistó de nuevo la ciudad de Tebas. Psamético I, hijo de Necao, derrotó definitivamente a los asirios iniciando el esplendoroso «Periodo Saita».

Los faraones saitas reinaron en Egipto hasta el año 525 a. C. y realizaron una política de modernización del país, y de relaciones comerciales con fenicios y griegos. Durante los reinados de Psamético I, Necao II y Psamético II los marinos griegos fundaron la factoría comercial de Neucratis en el Delta occidental y la colonia de Cirene en Líbia. Necao II ocupó Siria y Palestina y derrotó a los israelitas en la batalla de Megiddo. Con el Imperio Neobabilónico de Nabucodonosor II mantuvo relaciones pacíficas y amistosas.

En la época saita se reformó el lenguaje de los contratos jurídicos y se inició la escritura demótica. La influencia científica de los griegos en el mar Mediterraneo produjo la geometría de Tales y Pitágoras, posibles viajeros en Egipto y Mesopotamia, y la medicina de la Escuela de Sais. Se han relacionado los conocimientos de Hipócrates con tratados ginecológicos de esta Escuela. También se produjo un incipiente desarrollo de conocimientos alquímicos que se aplicarían posteriormente en la época de los Ptolomeos (Pérez Largacha, 2006)[28].

A la muerte de Amasis el rey persa Cambises II invadió Egipto transformando el valle del Nilo en una satrapía persa. Egipto se independizó de los persas durante 60 años, después de las guerras entre griegos y persas (guerras médicas), y fue regido de nuevo por soberanos egipcios, entre los que destacaron Amirteo, Nectanebo I y Nectanebo II. En el año 343 a. C., los persas reconquistaron Egipto, aunque esta etapa sólo duró 10 años. Alejandro Magno entró en Egipto antes de la conquista definitiva de todo el Imperio Persa.

A la muerte de Alejandro Magno, después de sus incursiones guerreras en Bactria y la India, se desmembró el Imperio formado y se repartió entre sus generales. Egipto pasó a ser regido por Ptolomeo, inicialmente como gobernador y posteriormente como monarca absoluto. La capital pasó a la ciudad mediterránea de Alejandría, construida por Alejandro y depositaria de su mausoleo, que fue además la capital cultural de toda la época helenística, heredera de la cultura griega a través de sus dos grandes instituciones: el Museo y la Biblioteca.

La influencia científica de los griegos en el mar Mediterráneo produjo la geometría de Tales y Pitágoras.

La ciencia y la matemática florecieron en la helenística Alejandría desde los reinados de Ptolomeo III y Ptolomeo IV, durante los dos últimos siglos del mundo antiguo antes de nuestra Era, con Aristarco y Herón, aunque estas aportaciones han sido consideradas culturalmente pertenecientes al mundo griego y no egipcio.

Referencias bibliográficas

Baines, J., y J. Malek (1992), *Egipto, dioses, templos y faraones,* del Prado, Madrid.

Gasse, A. (1988), *Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l'organisation du domaine d'Amon,* vol. 1, Institute français d'archéologie du Caire, El Cairo.

Gherverhese, G. *(1996), La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas,* Pirámide, Barcelona.

Gillings, R. J. (1972)*, Mathematics in the Time of the Pharaohs,* Dover Publications, Nueva York.

Ifrah, G. (1987), *Las cifras. Historia de una gran invención,* Alianza, Madrid.

Ivesen, E. (1975), *Canon and proportions in Egyptian art,* Aris and Phillips, Warminster.

Maza, C. (2000), *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico,* Universidad de Sevilla, Sevilla.

— (2003), *Las matemáticas en el antiguo Egipto,* Universidad de Sevilla, Sevilla.

Menu, B. (1982), *Recherches sur l'histoire juridique, economique et social de l'Ancienne Egypte,* Versalles, París.

Neugebauer, O. (1962), *The exact Sciences in Antiquity* (2.ª ed.), Harper Torchbook, Nueva York.

Robins, G., y C. Shute (1998), *The Rhind Mathematical Papyrus,* British Museum Press, Londres.

Sánchez Rodríguez, A. (2000), *Astronomía y Matemáticas en el antiguo Egipto,* Aldebarán, Madrid.

José C. Illana Rubio
Inspección de Educación de Madrid Capital
<joscleirubeta@yahoo.es>

1 Expresión citada por Herodoto en su viaje a Egipto en el siglo v a. C. (*Historia. Libro II,* 4-5). También la considera Arriano en Anabasis, pp. 6-5.

2 C. Maza, en *Las matemáticas en el antiguo Egipto,* p. 68, cita estos primeros intentos de representación simbólico-numérica de animales y prisioneros apresados en la estela de Narmer y en la estatua de Jasejemuy, algunos de los primeros faraones.

3 En «las cifras de la civilización de los faraones», capítulo 14 de *Historia Universal de las cifras*, p. 399, G. Ifrah describe ampliamente las cifras jeroglíficas, su origen religioso y su uso por los escribas desde el Imperio antiguo.

4 Se cita en un texto de Herodoto (*Historia. Libro II,* 99), sobre «Menes y la fundación de Menfis». Tomado de F. Lara, en *El Egipto faraónico,* p. 34.

5 Tablas para la adición, la multiplicación y la división pueden verse en *Mathematics in the time of the pharaohs,* p. 13, de R. J. Gillings.

6 C. Maza, en *Las matemáticas de la antigüedad y su contexto histórico,* p. 83, expone ejemplos sencillos de las operaciones aritméticas elementales.

7 El *Papiro Westcar* es citado por Barry J. Kemp al describir los faraones de la 4.ª y 5.ª dinastías. *El Antiguo Egipto: anatomía de una civilización*, p. 56.

8 El codo corto equivalía a 45 cm. Y el codo real a 52,3 cm. El codo corto correspondía a 6 palmos (longitud del antebrazo desde el codo a la punta del dedo medio). E. Iversen lo indica en *Canon and proportions in Egyptian art.*

9 R. J. Gillings considera la unidad de longitud «doble-remen» equivalente a diez palmos. *Mathematics in the time of the pharaohs,* p. 208.

10 En el problema n.º 51 del *Papiro Rhind* se utiliza la unidad de longitud «khet» equivalente a 100 codos y 52.5 m. G. Robins y C. Shute lo indican en *The Rhind Papyrus, an ancient egyptian text* en el que describen la historia del papiro, los diversos problemas resueltos, las unidades de medida, las operaciones aritméticas elementales, las operaciones con fracciones y cálculos algebraicos y geométricos.

11 A. Gasse usa la unidad de superficie «setat» en *Données nouvelles administratives et sacerdotales sur l´organisation du domaine d'Amon,* en donde describe las extensas posesiones agrícolas de los templos egipcios.

12 Según C. Maza, op. cit. p. 84.

13 Rhind Mathematical Papyrus (RMP). British Museum. Citado por R. J. Gillings, op. cit. pg. 210.

14 Según E. Hornung en *Historia de Egipto,* p. 25.

15 *Moscow Mathematical Papyrus (MMP):* Moscow Museum of Fine Arts, n.º 4576.

16 O. Neugebauer ha descrito el uso y las operaciones con fracciones generalmente unitarias en *The exact Sciences in Antiquity.*

17 La sustracción de fracciones está tratada por R. J. Gillings, op. cit. p. 43.

18 Puede observarse que:

$$1/26+1/78=3/78+1/78=4/78=2/39$$
$$\text{y } (7+2/3)\times 2=14+4/3=15+1/3$$

19 B. Menu en *Recherches sur l'histoire juridique, economique et social de l'Ancienne Egypte* cita el *Papiro de Berlín* en el tratamiento específico de repartos de raciones en los templos egipcios. *Berlin Papyrus,* Staatliche Museum zu Berlin, Catalogue n.º 6619.

20 Citados por R. J. Gillings, op. cit. pp. 128-136.

21 Ya que:

$$70+7+2\ 1/3+1/2+1/6=77+7/3+1/2+1/6=$$
$$=77+14/6+3/6+1/6=77+18/6=77+3=780$$

y el «psw» obtenido 22 2/3 1/7 1/21 tal como lo escribían los egipcios; que corresponde al valor 22,857 calculado actualmente.

22 J. Baines y J. Malek en *Egipto, dioses, templos y faraones* citan los valores de las pendientes de las caras laterales de las pirámides de diversos faraones.

23 La primera aparición de la estrella Sotis (Sirio) y la cronología del Imperio Nuevo se describe en el *Papiro Ebers*. Citado por E. Hornung, op. cit. p. 96.

24 C. Aldred en *Akhenaton* ha recreado lo acontecido en Egipto durante el reinado del faraón monoteista.

25 La vida del faraón Ramsés II ha sido descrita en forma exhaustiva por la egiptóloga francesa C. Desroches Noblecourt en *Ramsés II. La verdadera historia*.

26 Problemas de ecuaciones lineales resueltos mediante divisiones en repartos desiguales, con un tratamiento algebraico más desarrollado que en el *Papiro Rhind* se han citado por C. Maza, op. cit. pg. 200.

27 George Gheverghese en *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas* describe problemas de progresiones aritméticas y geométricas desarrollados por los egipcios en el *Papiro Rhind.*

28 A. Pérez Largacha en *Historia antigua de Egipto y del Próximo Oriente* describe el «Renacimiento Saita» en Egipto entre los años 664 y 525 a. C.