suma+ 70
Secciones
Julio 2012
pp. 115-122

Calcular saltando sobre la línea numérica vacía

David Barba
Cecilia Calvo

Ell@s tienen la palabra

La idea central de esta sección, dedicada a las Matemáticas en Primaria, es la de mirar las dinámicas de clase centrándonos en la conversación y la comunicación. Creemos que estos aspectos deben tener un papel fundamental, no sólo en los momentos iniciales de introducir una actividad, sino a lo largo de toda ella: en la presentación de diferentes estrategias por parte de los alumnos para abordar el problema que la actividad involucra, en la comparación entre las diferentes estrategias presentadas, en su justificación, en la discusión sobre la mejor manera de registrar los procedimientos y de presentar los resultados.

¿Qué tipo de preguntas podemos hacer los maestros para fomentar estas discusiones? ¿Qué modelos conviene presentar a los alumnos para ayudarlos a pensar y a comunicar sus pensamientos? ¿Qué actividades creemos que son propicias para generar este ambiente de clase? En las diferentes entregas de esta sección intentaremos hacer propuestas en este sentido teniendo presente que la mejor manera para que nuestros alumnos y nuestras alumnas se apropien de sus aprendizajes es darles un papel protagónico y para ello debemos generar dinámicas donde *ell@s tengan la palabra*.

Artículo solicitado por *Suma* en febrero de 2012 y aceptado en abril de 2012

Introducción a la línea numérica

Es de todos conocida la línea numérica como representación de los números naturales (imagen 1a) y que en ocasiones aparece en una versión «muda» (imagen 1b) o en una versión «vacía». A partir de ahora nos referiremos a esta versión vacía (imagen 1c) como *LNV* (línea numérica vacía). Todas estas versiones de la línea numérica tienen un papel importante en la clase de Matemáticas y cubren aspectos distintos del aprendizaje.

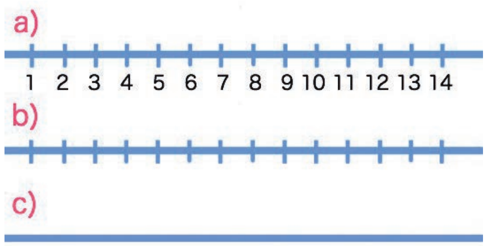

Imagen 1

La *LNV*, que será la representación a la que nos referiremos en profundidad más adelante, es un modelo que utiliza la recta para representar cálculos aritméticos prescindiendo de la proporcionalidad entre las cantidades representadas [1].

Primera aproximación a la línea numérica: el collar de bolas

Al inicio de Primaria la *LNV* es un modelo demasiado abstracto parar trabajar con él. Empezamos pues a acercarnos a la línea numérica a través de un material manipulable que la representa: los collares. Primero, con el de 10 bolas (imagen 2a); y, después, con el de 20 (imagen 2b).

Imagen 2

Estos collares son un material estructurado, ya que sus bolas están agrupadas de 5 en 5 usando dos colores, lo que sugiere una organización de los números relacionada con el carácter decimal de nuestro sistema de numeración y de la importancia del número 5 como referencia en los cálculos con números pequeños.

La actividad central que haremos con este tipo de materiales es la localización de números en el collar basándose en las estrategias que poseen para contar objetos.

Por ejemplo, pedimos a los alumnos que indiquen donde está el 14. Puede hacerse colectivamente, manipulando un collar de grandes dimensiones o repartiendo un collar a cada alumno y pidiendo que indiquen la ubicación de este número con una pinza. También puede hacerse repartiendo a los alumnos imágenes impresas de collares donde pueden marcar donde colocarían la pinza.

Usando una pinza «real» no es complicado indicar la posición de un número: el alumno identifica la 14ª bola y coloca la pinza en el espacio entre la bola elegida y su siguiente. Pero cuando los alumnos intentan registrar la misma idea sobre un collar impreso les hemos visto hacerlo bajo diferentes formatos[2] (imagen 3).

A partir de las representaciones realizadas por los alumnos podemos promover una

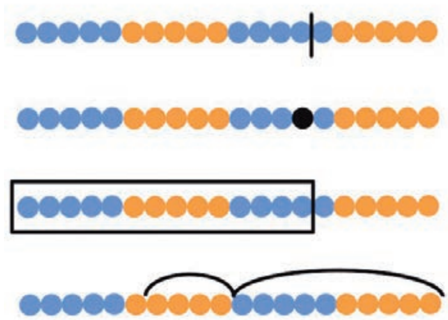

Imagen 3

discusión grupal: ¿todas son correctas? y entre ellas ¿cuáles son las preferidas por el grupo? ¿por qué?

Creemos que es importante que la maestra intervenga para desestimular el uso de representaciones como la que aparece en segundo lugar de la imagen anterior donde el alumno identifica como el número 14 a una bola y no a un espacio entre bolas. La justificación de esta preferencia se puede llevar a cabo delante de los alumnos en base a la semejanza de las otras representaciones con el uso de la pinza.

Pero la razón de fondo para no promover que indiquen una bola es que si pedimos ubicar el 19 en un collar de veinte bolas nos encontramos con alumnos que para identificar la bola en cuestión señalan la 2ª bola contando desde el final.

Este proceder, que es absolutamente correcto, entrará en conflicto cuando hagamos saltos sobre la línea y nos interese que identifiquen como equivalentes los resultados de dar un salto de 19 unidades hacia delante o de dar un salto de 20 hacia delante y luego retroceder una (¡y no dos!) unidades.

Dejando a un lado estas interesantes discusiones sobre la representación, podemos encontrar que muchos alumnos han indicado correctamente dónde está el 14, pero si les preguntamos cómo lo han hecho veremos que sus recorridos pueden haber sido muy diferentes:

— Hay alumnos que para llegar al 14 cuentan de uno en uno.
— Los hay que se apoyan en el 5 y cuentan: 5, 10, 11, 12, 13 y 14.
— Los hay que se apoyan en el 10, separan dos grupos de bolas y dicen: 10, 11, 12, 13 y 14.
— Algunos explican que «van» al 15 y retroceden una: 5, 10, 15 y 14.

Cuando ya se ha trabajado la localización de números en el collar, es el momento de acercarnos a la suma y a la resta proponiendo a los alumnos que realicen saltos sobre el collar y que indiquen donde caen después de ese salto. Si estoy en el 8 y salto 7 bolas hacia delante, ¿donde iré a parar? Aquí de nuevo lo importante es plantear el debate sobre las diferentes estrategias de resolución teniendo presente que es muy importante que aparezcan entre las propuestas de los alumnos estrategias como la de la imagen 4.

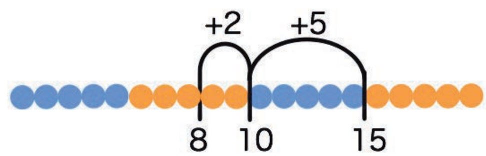

Imagen 4

Podemos llamar a esta estrategia «paso por la decena», una estrategia imprescindible si queremos que nuestros alumnos dejen de utilizar los dedos en la sumas básicas hasta 20 y que resultará fundamental para todos los cálculos aditivos en el rango 0-100 tal como mostraremos en los próximos párrafos.

Podemos seguir trabajando con collares más allá del rango 0-20. Y, de hecho, se hace usando el collar de 100 bolas, en la que los grupos de bolas de un mismo color son ya de 10 y no de 5.

Imaginemos aquí las discusiones que puede llevar la ubicación del número 78. ¿Cuentan de 10 en 10? ¿Ubican el 70 y avanzan luego de 1 en 1 hasta el 78 o ubican el 80 y retroceden 2? ¿Cómo ubican el 70 contando 10, 20, 30, 40, 50, 60 y 70 o 90, 80 y 70?

En los párrafos anteriores esperamos haber justificado por qué vemos el uso del collar de bolas como un modelo numérico estructurado que nos permite gestionar las clases a base de preguntas y discusiones grupales donde se pide a los alumnos que expliquen sus estrategias y que justifiquen sus afirmaciones: un ambiente de clase donde «ell@s tienen la palabra».

Damos mucha importancia al trabajo con los diferentes collares y creemos que puede introducirnos en el uso de la línea numérica. Creemos que se debe llevar la abstracción del collar hasta la LNV como modelo para trabajar el cálculo aritmético que, como veremos a continuación, nos brinda un escenario mucho más potente en el que trabajar la aritmética, dando continuas oportunidades para que sean los propios alumnos quienes tomen la palabra en el descubrimiento y perfeccionamiento de unas técnicas de cálculo aditivo independientes de los algoritmos y propicias para el cálculo mental.

Calcular saltando sobre la línea

Resulta natural para un alumno asociar los saltos hacia adelante sobre un collar o sobre una línea numérica con una suma, ya sea que esa suma represente[3]:

- *Un cambio creciente*: si en una bolsa hay 23 objetos y agrego otros 6 objetos puedo representar la situación colocando una marca en el 23 y avanzando 6 unidades hacia la derecha,
- *Una combinación*: si en un autobús viajan 23 personas sentadas y otras 6 de pie, podemos representar las personas sentadas con una marca y entender que las personas de pie “se agregan” como si subieran al autobús con posterioridad.
- *Una comparación*: si Maria ha tardado 23 minutos en hacer su tarea de Matemáticas y Joan ha tardado 6 minutos más que ella, podemos determinar el tiempo que ha tardado Joan representando el tiempo de María con una marca sobre la *LNV* y a partir de allí contar los minutos extra que ha necesitado Joan.

Para el caso de la resta no es tan inmediata la asociación con saltar hacia atrás, a menos que el alumno se esté enfrentado a un problema de cambio decreciente (un problema de esos de “quitar”).

Si decimos que Maria ha tardado 23 minutos en resolver una tarea y Joan 29, y queremos saber cuantos minutos más ha tardado uno que otro, es

Este tipo de problemas son ideales para generar un rico debate en la clase y las conclusiones de este debate deben ser verbalizadas periódicamente

más natural asociar la resta con la búsqueda del salto que me lleva del 23 al 29. Y lo mismo sucederá si el problema es calcular cuántas personas van de pie si viajan 29 personas en un autobús donde sólo hay 23 asientos.

Este punto es muy importante trabajarlo explícitamente en la clase porque cuando planteamos una resta descontextualizada pretenderemos que elija entre los dos tipos de representación de la resta la que mejor se adecúe a los números involucrados: imaginemos qué inconveniente sería realizar una resta como 61-59 saltando 59 unidades hacia atrás a partir del 61 o calcular 103-5 calculando el salto que separa las marcas que representan a estos dos números sobre la *LNV*.

Este tipo de problemas son ideales para generar un rico debate en la clase y las conclusiones de este debate deben ser verbalizadas periódicamente.

Diferentes formas de saltar

Después de la asociación entre las operaciones aditivas y los saltos sobre la LNV los alumnos tienen la palabra para decidir cuál creen que es la mejor manera para hacer estos saltos.

Cuando deben avanzar 13 unidades: lo hacen de uno en uno o pueden dar un salto de 10 y luego tres saltitos de 1 (¡o primero los tres saltitos de 1 y luego el de 10!)

Cuando deben avanzar 36 unidades: lo hacen dando 3 saltos de 10 y 6 saltitos de 1 o pueden hacerlo dando un gran salto de 30, otros dos saltos de 3 o de muchas maneras más.

Muchas veces lo que determina la elección es la confianza del alumno con el conteo o su familiaridad con el uso de la decena como unidad, pero en otras ocasiones son los números que tenemos entre manos los que dictan la conveniencia de una estrategia frente a otra. Ilustramos esta idea con un ejemplo en la imagen 5.

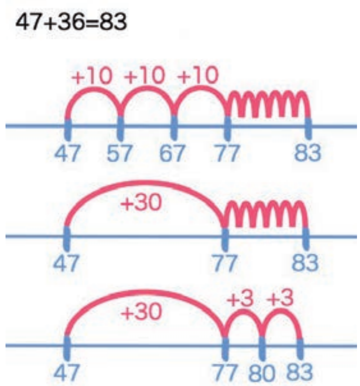

Imagen 5

En una propuesta didáctica donde damos un papel central a las explicaciones de los alumnos sobre cómo obtienen el resultado de un cálculo es muy importante la oportunidad que da este modelo para representar el razonamiento de un alumno, poder discutir su corrección con sus compañeros y compararlo con otros procedimientos para descubrir estrategias eficientes.

Ante un problema cualquiera que involucre la resta 74-59 podemos encontrar diversidad de razonamientos como los que se exponen en la imagen 6.

Sin la LNV sobre la cual los alumnos ilustran su razonamiento tendrán que hacer relatos del tipo:

> Al 74 le quito 50, me quedan 24, le quito 4, me quedan 20 y, por último, le quito 5 para así quedarme con 15.

Pero sus compañeros tendrán dificultades para seguir este razonamiento si no hay ninguna anotación.

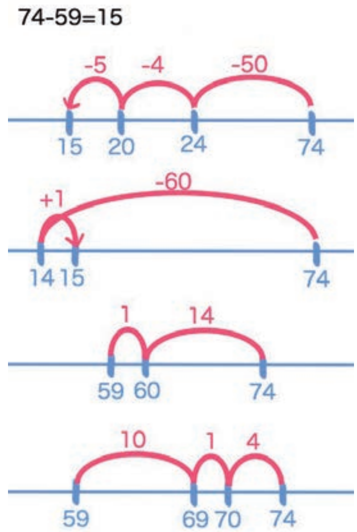

Imagen 6

Tampoco será fácil comparar objetivamente los beneficios de dos estrategias diferentes. Es por esto que decimos que la LNV no es solo un modelo para pensar sino también para comunicar, algo indispensable cuando «ell@s tienen la palabra».

Requisitos necesarios

Vale la pena mencionar cuáles creemos que son los conocimientos mínimos necesarios para que los alumnos de 6 ó 7 años comiencen a trabajar con la LNV:

i) deben respetar el orden en el momento de ubicar números sobre la LNV tal como mencionamos que se consigue a partir del trabajo con el collar de bolas.
ii) deben saber contar hacia delante y hacia atrás, de uno en uno y de diez en diez, comenzando de cualquier número en el rango 0-100.
iii) deben saber con fluidez les descomposiciones de los dígitos y las descomposiciones del 10.

Cuando un alumno se enfrenta a la necesidad de saltar 7 unidades hacia delante a partir del 28 es necesario que sepa que faltan 2 para llegar a la siguiente decena (pues 10=8+2) y que habiendo gastado dos unidades de las siete que tenía que saltar, le falta avanzar 5 (pues 7=2+5).

Cálculos sobre la LNV en los textos escolares

En algunos libros de texto de países donde el uso está mucho más extendido que en el nuestro es normal encontrar ejercicios para ejercitar los cálculos sobre la línea numérica.

Destacaremos a continuación algunos tipos de ejercicios (imágenes 7 y 8) que podemos encontrar, más allá de aquellos que piden directamente hacer sumas o restas sobre una LNV.

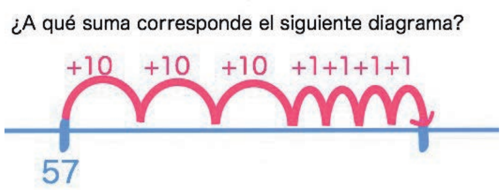

Imagen 7. Ejercicio

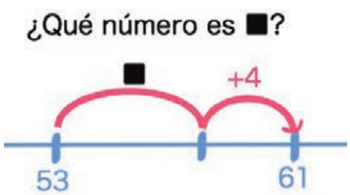

Imagen 8. Ejercicio

Ya que la mayor fuerza de este modelo es su flexibilidad, hemos de cuidar no caer en la propuesta de ejercicios repetitivos, ahora utilizando la LNV en sustitución de los algoritmos estándar. Debemos estar alertas para no algoritmizar los saltos sobre la línea y procurar que nuestros alumnos no se acomoden en el uso de una estrategia «rígida», no promoviendo una manera «oficial» de hacer los saltos sino siempre potenciando la aparición de estrategias alternativas donde la eficacia sea un valor a considerar.

Saltos sobre la línea a través de *applets*

Destacaremos a continuación algunos *applets* que permiten ejercitar la estrategia de saltos para la realización de cálculos aditivos en un ambiente de resolución de problemas.

Los dos primeros *applets* que presentamos (imágenes 9 y 10) son propuestas del Instituto Freudenthal que podrían verse como equivalentes salvo que en uno el problema se presenta pidiendo el resultado de una operación (una suma o una resta) y en el otro se pide llegar saltando de un número a otro (lo que equivaldría a calcular una resta). Pero el hecho de que el enunciado indica que el objetivo es lograrlo en la mínima cantidad de saltos es una manera evidente de trabajar estrategias alternativas para el cálculo sobre la LNV.

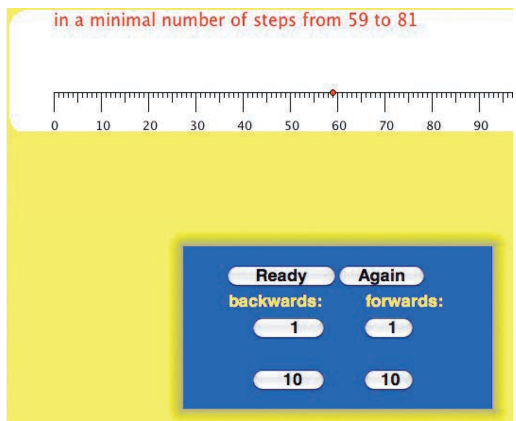

Imagen 9. Captura de pantalla de la página: <www.fi.uu.nl/toepassingen/03106/leerling.html>

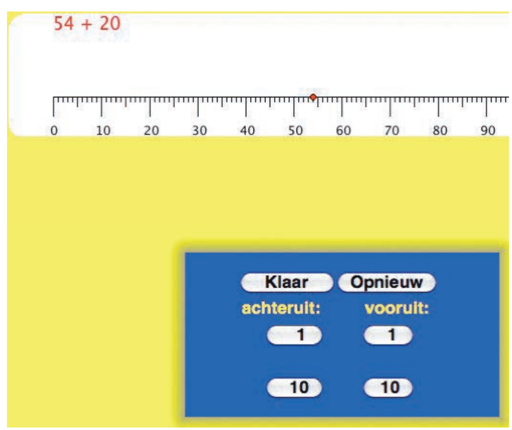

Imagen 10: Captura de pantalla de la página: <www.fi.uu.nl/toepassingen/03106/student.html>

Trabajando con este segundo applet encontramos una buena oportunidad para dar a nuestros alumnos la palabra: propongámosles que verbalicen cuando han de superar al número y recular y cuando no, propongámosles que anticipen el número de saltos que deberán dar y que digan cómo han pensado para realizar esta anticipación.

Otro *applet* similar y también procedente de la extensa biblioteca del Instituto Freudenthal aparece en la imagen 11. Este difiere de los anteriores en que se presenta en un contexto de medida de longitud y que, dependiendo del nivel en que se trabaje, incluye propuestas con números. Además, y lo que a nuestro entender es más interesante, introduce la posibilidad de que los saltos (que han de ser encontrados en su versión mínima) pueden ser no sólo de 1 en 1, y de 10 en 10, sino también de 5 en 5, lo cual introduce una nuevo desafío a la tarea.

Para acabar mencionaremos un *applet* (imagen 12) de otra biblioteca de referencia como es la de la Universidad de Utah. Aquí se dan unos saltos determinados y un número al que llegar con esos saltos partiendo del 0 y decidiendo si cada uno se hará hacia delante o hacia atrás.

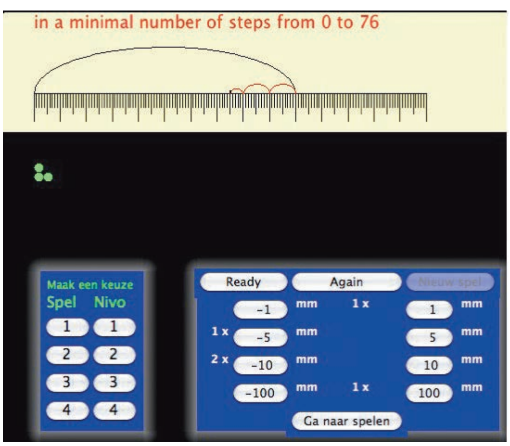

Imagen 11. Captura de pantalla de la página: <www.fi.uu.nl/toepassingen/00111/toepassing_wisweb.en.html>

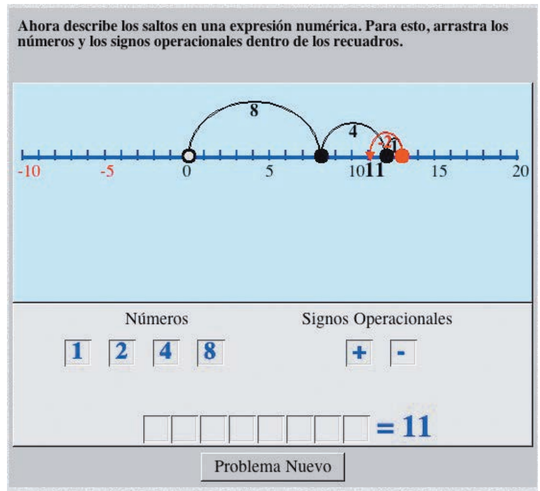

Imagen 12. Captura de pantalla de la página: <http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid-107_g_l_t_l.html>

Potencial de la LNV como soporte para pensar y comunicar

Ya hemos mencionado que la LNV permite hacer los cálculos en el rango 0-100 de los dos primeros cursos de primaria antes de la presentación de cualquier algoritmo. Pero aun le vemos más potencial, un alumno que ha trabajado con ella en el rango 0-100 podrá extender su trabajo a sumas del tipo 392+225 y resolver problemas con números más grandes independientemente de su dominio del algoritmo asociado a esta tarea:

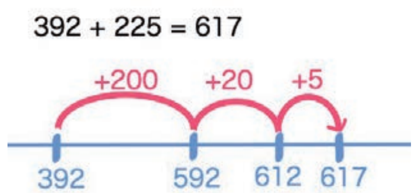

Imagen 13

Aun después de conocer los algoritmos estándar de suma y resta, la LNV continua siendo una herramienta fundamental para desarrollar estrategias de cálculo mental y para justificar los cálculos mentales. Es muy importante discutir con los alumnos que un procedimiento puede ser el más eficiente para calcular sobre papel y no serlo cuando ese mismo cálculo debe hacerse sin disponer de un lugar sobre el que hacer anotaciones. La LNV puede ser manipulada por el alumno «imaginariamente»:

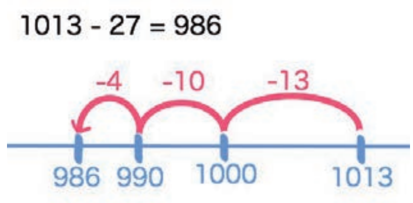

Imagen 14

También puede usarse en la ESO, cuando aparecen las primeras operaciones con números negativos:

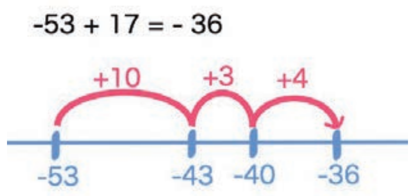

Imagen 15

Reflexión final

Hemos intentado explicar cómo un tema, en principio rutinario como es el aprendizaje de sumas y restas en el ciclo inicial, puede convertirse en una oportunidad para generar un ambiente de clase donde los alumnos tienen mucho que decir.

Basta que planteemos dinámicas de discusión y reflexión en las que participen ell@s activamente, guiados por nosotros, sus maestros. Para ello es necesario que previamente consideremos el andamio sobre el que construiremos estas dinámicas: qué modelos utilizaremos para facilitar la comunicación, qué preguntas centrales realizaremos, cuáles son las habilidades básicas asociadas que necesitaremos que vayan desarrollando los alumnos y cómo iremos observándoles individualmente para controlar su aprendizaje.

Para profundizar más

Barba, D. y Calvo, C. (2011): «Sentido numérico, aritmética mental y algoritmos», en J. E. García Jiménez (coord), *Elementos y razonamientos en la competencia matemática* [recurso electrónico], Ministerio de Educación, Subdirección General de Documentación y Publicaciones, Madrid, 47-78.

Klein, T. (1998): *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base. The empty number in a realistic versus gradual program design*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (ed.) (2001): *Children learn mathematics*, Freudenthal Institute, Utrecht University.

David Barba Uriach
Universitat Autònoma de Barcelona

Cecilia Calvo Pesce
Escola Sadako, Barcelona

Miembros del:
Grup PuntMat de Barcelona

<tienenlapalabra@revistasuma.es>

1 La LNV también puede ser utilizada en el contexto de la Medida y si la proporcionalidad de las cantidades representadas es relevante. Como, por ejemplo en: < www.fi.uu.nl/toepassingen/00254/toepassing_rekenweb.html>

2 Las evidencias que sustentan este relato se hallan en <http://edumat.uab.cat/materials/Index.php?opcio=mostra_unitat&id=48&tipus=lliso>

3 La clasificación de problemas aditivos en la que se basa este párrafo es la que aparece en «Children's Mathematics: Cognitively Guided Instruction» de Thomas Carpenter y otros (Heineman, 1999).