suma+ 70
Secciones
Julio 2012
pp. 93-98

Euler y su interés por la música

Vicente Liern Carrión

Únicamente el conocimiento de todas las proporciones que dominan en la música, tanto considerando la armonía como el compás, no es suficiente para excitar el sentimiento del placer. Es necesario algo más, que nadie hasta ahora ha manifestado[1].

Leonhard Euler (1707-1783)

De Leonhard Euler (1707-1783) se ha escrito mucho en ésta y otras publicaciones, así que no voy a descubrir a estas alturas su brillantez en todos los campos de la matemática y de la física. Sin embargo, un aspecto menos tratado es su interés por la música. En el debut de *Musymáticas*, incorporamos discretamente algunas de las aportaciones de Euler acerca de la conveniencia de usar el número 7 en la música (Liern, 2008). Pero a veces, como en este caso, se tiene el privilegio de que sea algún lector quien te sugiere ahondar más en algún aspecto que puede resultarnos interesante. Esto, además de la satisfacción de hacerte sentir acompañado en la sección, te anima a dar una respuesta más elaborada.

En 1726 Euler finalizó su doctorado con una tesis sobre la propagación del sonido, titulada *De Sono*[2], en la que ya podían vislumbrarse las inquietudes del autor por la música, entendida como una parte de la acústica. Sin embargo, pronto se ocupó directamente de la música como un fenómeno con entidad propia y en 1731, a la edad de veinticuatro años, ya había escrito *Tentamen novae theoriae musicae*. Su objetivo era encontrar una regla general con la que expresar el orden oculto de los distintos grados de consonancia, de la armonía y de la música en general.

Musymáticas

Artículo solicitado por *Suma* en febrero de 2012 y aceptado en abril de 2012

Entre la extensísima producción de Euler, al menos siete de sus artículos y dos libros están relacionados directamente con la música[3], pero siempre se consideraron demasiado matemáticos para los músicos y no tuvieron la repercusión esperada entre los artistas de su época. De hecho, en ocasiones se le ha visto desde la música como «poco preocupado por los fenómenos acústicos y las preferencias del oído, interesado únicamente por el aspecto matemático de la definición de las escalas» (Lattard, 1988). Sin embargo, esta sensación desaparece cuando se analiza la innegable influencia de sus aportaciones entre los teóricos del siglo XVIII.

Una época apasionante

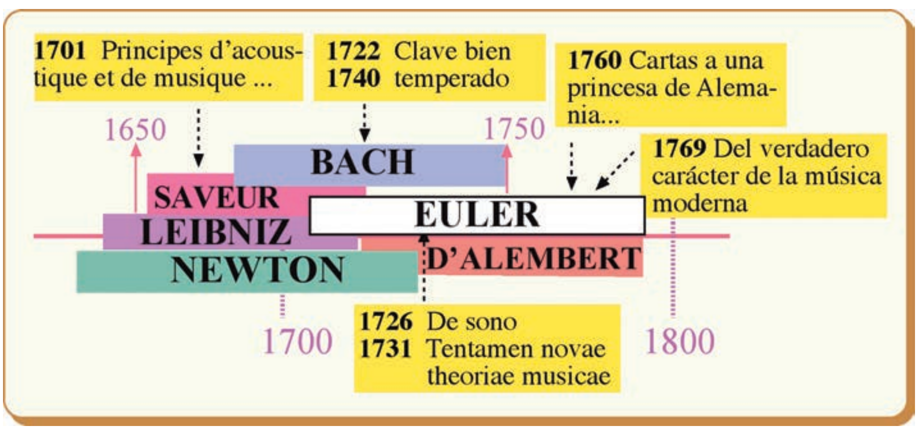
Euler vivió en una época de plena efervescencia científica y artística. Como buen ilustrado, estaba convencido de que todo placer musical viene de la percepción de la perfección que deriva del orden; donde no hay orden no hay perfección. Para él, lo interesante de la música es que las estructuras no se conocen a priori, sino que debemos llegar hasta ellas a través del estudio de sus partes (Goldáraz, 2004), como podemos conocer el término general de una progresión cuando conocemos algunos de sus términos.

Si a la capacidad científica de Euler le añadimos el haber compartido época con Leibniz, Newton, los Bernoulli o D'Alembert, entendemos mejor el interés de Leonhard por dar una explicación a la revolución musical que Saveur, Bach o Rameau estaban llevando a cabo. Surgen así trabajos suyos con títulos tan explícitos como *Du véritable caractère de la musique moderne* (Euler, 1766b), en los que el autor se ve en la necesidad de hacer un análisis del panorama musical y científico que le rodeaba. Por un lado, algunos teóricos se aferraban a principios históricos que clasificaban de forma rígida las consonancias, las disonancias o las reglas de la armonía y por otro lado,

Obras de Euler con contenido musical

tanto la ciencia como la práctica musical invitaban a transgredir estos principios.

Hasta el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación. En estos sistemas de afinación las notas se generan con potencias y cocientes de los números 2 y 3 o de los números 2, 3 y 5. Si consideramos una nota fija, por ejemplo el Do de frecuencia $f = 264$ Hz, para obtener el resto de notas, hay que multiplicar por las fracciones que se muestran más abajo (tabla 1).



Cronología de algunos matemáticos y teóricos de la música de la época de Euler

Como la frecuencia de partida era 264Hz, estas notas son las de la octava do_2-do_3. Para trasladarlas a otra octava, no hay más que multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Así, si queremos *subirlas n octavas*, multiplicamos sus valores por 2^n, con n un número entero.

Pero Euler no podía ignorar que en la música que se estaba haciendo en su época se usaban intervalos que habían estado prohibidos tradicionalmente, como la séptima. Por esta razón, él fue uno de los científicos que, contrariamente a lo que decía Leibniz, aceptaba más primos para generar intervalos (y con ellos notas afinadas): el número 3 para la quinta, el 5 para la tercera y el 7 para la séptima.

> Se sostiene generalmente que no nos servimos en la música más que de las proporciones compuestas por estos tres números primos 2, 3 y 5 y el gran Leibniz ha advertido ya, que en la música no se ha aprendido aún a contar más allá del 5; lo cual es incontestablemente cierto en los instrumentos afinados según la armonía. Pero, si mi conjetura se cumple, se puede decir que en la composición se cuenta ya hasta el 7 y que el oído está ya acostumbrado; es un nuevo género de música, que se ha comenzado a usar y que era desconocida por los antiguos.

En el artículo del que está extraída esta cita, *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (Euler, 1766a), no se contenta sólo con esto, sino que propone todas las combinaciones de los primos $2^n3^m5^p$ ó $2^n3^m5^p7^q$ (Ayala-Velázquez; Lonngi, 2008) como los generadores de una infinidad de sistemas de afinación conocidos como *géneros de Euler* (Lattard, 1988). Lo cierto es que la poca operatividad de la propuesta, excepto para los sistemas que ya eran conocidos, hizo que permaneciesen como una aportación teórica sin muchas repercusiones.

Calculando la suavidad de la música

De las aportaciones de Euler a la música, la que más repercusiones y controversias ha tenido ha sido su cálculo de las consonancias. Aunque nunca es fácil establecer una definición unánime e inmutable de sonidos consonantes, podemos aceptar la que el propio Leonhard Euler dio en la carta que escribió a Federica Carlota Ludovica von Brandenburg Schwedt, princesa de Anhalt Dessau (1745–1808):

> Carta V: Del Unísono y de las Octavas:
>
> «[...] Vuestra Alteza comprenderá fácilmente que cuanto más simple sea la proporción [entre las frecuencias], o expresada con menores números, más distantemente se presenta al entendimiento y presenta un mayor sentimiento de placer [...]».
>
> 3 de mayo de 1760

Hay que reconocer que, a primera vista, puede resultar paradójica la forma de explicarle a la princesa el concepto de consonancia. En esencia, lo que quería hacerle entender es que cuando una proporción precise de pocos razonamientos, cuando más rápidamente se perciba, mayor será el placer que proporciona, y que esto sucede cuando los números son pequeños.

En esta carta[4] se establecía con casi un siglo de antelación lo que después se conocería en música como Teorema de Tyndall: «Cuanto más simple es la relación de las frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman».

	Do	Do#	Re	Mib	Mi	Fa	Fa#	Sol	Sol#	La	Si^b	Si
12 notas pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
12 notas justa entonación	1	$\frac{5^2}{3\cdot 2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3\cdot 2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{3^2\cdot 2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$

Tabla 1. Afinación pitagórica y justa entonación

Utilizando este criterio, se puede ordenar las consonancias. Por ejemplo, vistas de mayor a menor consonancia tendríamos las siguientes:

> 1/1 Unísono > 2/1 Octava > 3/2 Quinta > 4/3 Cuarta > 5/4 Tercera mayor > 5/3 Sexta mayor > 6/5 Tercera menor > 8/5 Sexta menor > ...

Fiel a su idea de que cuanto más diste de tener que ser entendido mayor será la consonancia de un intervalo, Euler calcula el grado de suavidad, *Gradus Suavitatis*, que existe entre dos o más sonidos. La forma de expresar el grado entre los sonidos n y m será GS(n,m) o GS(n:m). Por propia construcción, un grado de suavidad 7 entre dos sonidos, por ejemplo, indica que la percepción es menos consonante que si el grado de suavidad fuese 6.

Con el método propuesto puede hallarse el grado de suavidad no sólo de una fracción (intervalo musical) o de una serie (acorde), sino que se puede extender a una melodía, un contrapunto, o cualquier porción de música que pueda expresarse con fracciones.

Caso 1: La razón $1{:}2^n$ tiene grado de suavidad $n+1$.

Caso 2: La razón $1{:}p$ tiene grado de suavidad p, siempre que p sea primo.

Caso 3: Si el grado de suavidad de $1{:}p$ es p, la razón $1{:}\ 2^n p$ tiene grado $p+n$.

Caso 4: La razón $1{:}\ pq$ (con p y q primos) tiene grado de suavidad $p+q-1$.

Una vez admitidos los grados de suavidad para un número primo o una potencia de dos, el resto de grados se obtienen con razonamientos netamente matemáticos[5]. Así, cuando las relaciones de las que queremos conocer la suavidad no están representadas por números primos, debemos extender los criterios anteriores a cualquier número natural N. Para ello, en primer lugar se hace la descomposición en factores primos. Para calcular el grado de suavidad de la razón $1{:}N$ recurrimos al producto de primos de su descomposición. En este caso, el grado de suavidad se calcula como explicamos a continuación (Godáraz, 2004):

Caso 5: Dada la razón del tipo $1{:}N$, siendo N cualquier número natural con descomposición en producto de factores primos $N=p_1^{k1}\cdot p_2^{k2}\cdot \ldots \cdot p_n^{kn}$, su grado de suavidad es:

$$k_1(p_1-1)+k_2(p_2-1)+\ldots+k_n(p_n-1)+1$$

Caso 6: El grado de suavidad entre tres números $1{:}p{:}q$ (un acorde formado por sonidos cuya relación es $1{:}p{:}q$), es el mismo que el de $1{:}\ pq$. Entre cuatro números, $1{:}p{:}q{:}r$ se percibe como $1{:}\ pqr$, y así sucesivamente.

Caso 7: Si hay repetición de números primos se cuentan como el mismo. La razón $1{:}p{:}p$ se percibe como $1{:}p$. La razón $1{:}pr{:}qr{:}ps$ equivale a $1{:}\ pqr$ o, dicho de otra manera, es la misma que la razón entre 1 y el mínimo común múltiplo de pr, qr, ps.

Aunque esta casuística resultó útil al autor para que los razonamientos musicales y aritméticos se introdujesen de forma gradual, en un lenguaje más operativo puede expresarse de forma mucho más sencilla. Para calcular el grado de suavidad entre intervalos musicales, es decir entre relaciones a/b siendo a y b números cualesquiera, se puede calcular de la forma siguiente.

Dada la fracción a/b, consideramos la fracción irreducible equivalente p/q, calculamos $N=mcm(p,\ q)$, y su descomposición en factores primos:

$$N=p_1^{k_1}\times p_2^{k_2}\times\ldots\times p_n^{k_n}$$

El grado de suavidad entre a y b (o del intervalo a/b) se define como:

$$GS(a,b)=k_1(p_1-1)+\ldots+k_n(p_n-1)+1$$

A continuación vamos a calcular el grado de suavidad de algunos intervalos muy conocidos: quinta justa, 3/2; cuarta justa, 4/3; y séptima «natural», 7/4.

$$GS(4:3)=2\cdot(2-1)+1\cdot(3-1)+1=5$$
$$GS(3:2)=1\cdot(2-1)+1\cdot(3-1)+1=4$$
$$GS(7:4)=1\cdot(7-1)+2\cdot(2-1)+1=9$$

Esto significa que la quinta es más consonante que la cuarta y ésta a su vez lo es más que la séptima.

Sin duda se trata de un método sencillo que permite calcular con facilidad el *gradus* *suavitatis* de relaciones más complejas. Por ejemplo, si en lugar de intervalos queremos calcular los grados de suavidad de acordes tenemos que, para el acorde mayor 4:5:6 el grado de suavidad es el de 1:60, es decir:

$$GS(4:5:6) = 2\big(2-1\big)+1\big(3-1\big)+1(5-1)+1 = 9$$

Para los ocho primero armónicos, 1:2:3:4:5:6:7:8 sólo hay que calcular el grado de suavidad 1:840, que es 16, y así con cualquier sucesión de relaciones.

Si queréis calcular el grado de suavidad entre cualquier par de números naturales, podéis utilizar la página:

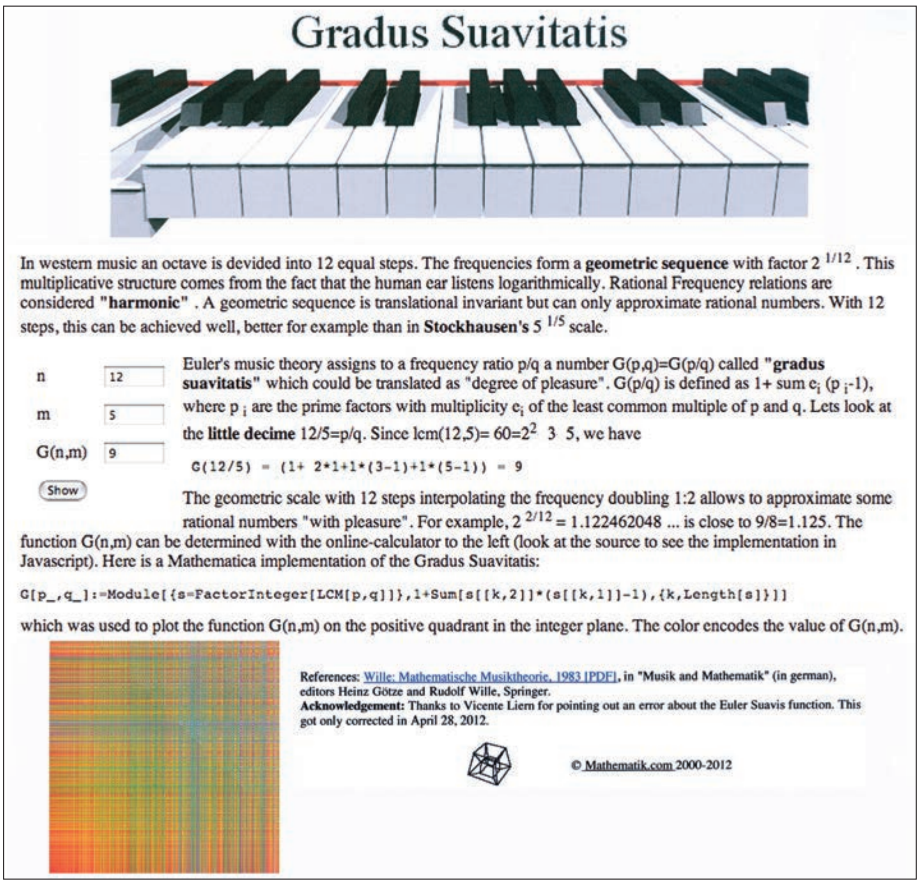
<http://www.mathematik.com/index.html>

Se trata de una página desarrollada por el profesor Oliver Knill, del departamento de Matemáticas de la Universidad de Harvard. En ella, además de una calculadora on-line para determinar el grado de suavidad, podéis encontrar la representación de la función GS(n, m).

¿Valía la pena el esfuerzo?

Es cierto que en materia musical Euler dejó muchas cosas sin explicar. Por ejemplo, el grado de suavidad de a:b:c es el mismo que el de b:c:a. Sin embargo, estas dos situaciones, que se conocen como inversión de acordes, no se percibe de igual forma. Por otro lado, en estos momentos, en los que la psicoacústica es una área de conocimiento importante, aceptar que podemos dar reglas generales de percepción a partir de la descomposición en factores primos resulta poco realista. Si a esto añadimos que los sistemas de afinación no tienen por qué basarse en la relación entre números naturales, parecería que la utilidad de estos trabajos es más que cuestionable.

Sin embargo, a pesar del apriorismo de sus propuestas, Euler hizo avanzar mucho la concepción de la teoría musical. Desde mediados del siglo XVII la separación entre la teoría y la práctica musicales se estaba haciendo insostenible. Las reglas rígidas de afinación, de armonía o estructurales parecían un tema de los teóricos, mientras que compositores e intérpretes estaban dispuestos a saltárselas constantemente (Liern, 2008). Después de algunas revoluciones como habían sido *El clave bien temperado* (1722, 1740) de Bach, era necesario un golpe de timón en un mundo en el que la ciencia se estaba imponiendo. Y para este cambio de rumbo, pocos estaban tan autorizados como Euler.



Captura de pantalla de la página <http://www.mathematik.com/Piano/index.html>

Había conseguido zanjar cuestiones que permanecían sin resolver durante siglos. Por ejemplo, para justificar por qué la razón 8:5 es más consonante que 7:4, a pesar de que la segunda se obtiene con cifras más pequeñas, G. Zarlino (1517 – 1590) tuvo que recurrir a la distinción aristotélica entre potencia y acto o J. Kepler (1571 – 1630) utilizó razonamientos geométricos que no llegaron a ser convincentes (Goldáraz, 2004). Sin embargo, para Euler basta con calcular el grado de suavidad de las razones. Como GS(8:5)= 8 y GS(7:4)=9, el intervalo 8:5 es más consonante que 7:4.

Para entender la profundidad del cambio propuesto por Euler no podemos analizar sus cálculos como un fenómeno aislado. En realidad, se trata de un cambio de concepción para determinar si los sonidos son consonantes o disonantes. A partir de sus trabajos se produce un cambio explícito que proporciona una gradación de los intervalos sin establecer una ruptura drástica entre consonancia y disonancia. Este hecho, junto con el prestigio del autor hicieron que las aportaciones de Euler gozaran de una amplia difusión y aceptación entre los teóricos de la música del siglo XVIII.

Referencias bibliográficas

AYALA, D. y LONNGI, P. A. (2008): *Contribuciones de Leonhard Euler a la acústica,* Miscelánea Matemática, 46, 1-25.

EULER, L. (1766a): «Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique», *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* 20, 165–173.

— (1766b): «Du véritable caractère de la musique modern», *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin,* 20, 174-199.

— (1990): *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía,* Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

GOLDÁRAZ, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

LATTARD, L. (1988): *Gammes et tempéraments musicaux*, Masson, París.

LIERN, V. (2008): «La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida», *Suma*, 58, 137-143.

Internet

<http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>

<http://www.mathematik.com/Piano/index.html>

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

VICENTE LIERN CARRIÓN
Universitat de València. Estudi Generalnal
<musymaticas@revistasuma.es>

1 La cita se ha extraído de la Carta VIII: Sobre el atractivo de una bella música, fechada el 6 de mayo de 1760 y publicada en *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*.

2 La disertación de la tesis puede verse en <http://www.17centurymaths.com/contents/euler/e002tr.pdf>

3 En <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/>, pueden consultarse muchos trabajos de Euler on-line.

4 La carta entera está publicada en Euler (1990).

5 Por ejemplo, Euler sostiene que el grado de suavidad de 1:*pq* es *p+q-1* porque supone que GS(1:*pq*), G(1:*q*), G(1:*p*), G(1:1) son cuatro términos consecutivos de una progresión aritmética. Entonces, se verifica GS(1:*pq*) = G(1:*p*)+G(1:*q*)–G(1:1) (en este tipo de progresiones siempre se verifica $a_4=a_3+a_2-a_1$). Como los grados de suavidad de 1:p, 1:q y 1:1 los conocemos, se tiene que GS(1:*pq*)=p+q–1.