suma+ 70
Artículos
Julio 2012
pp. 35-42

¿Es π un impostor?

Pere Grima Cintas

Parece que sobre π está todo dicho y que su papel protagonista en el reino de los números es indiscutible pero... ¿son posibles unas matemáticas en las que el número pi no tenga un papel protagonista, en las que 3,14159... suene a número raro que no sugiere nada? Este artículo pretende poner de manifiesto que sí lo son, que el número pi no tiene la genuina especificidad de otros números singulares. Pero tranquilos, son las matemáticas de siempre, solo se trata repasar los terrenos en que aparece pi y descubrir que seguramente sería más justo que el número singular fuera otro.

Palabras clave: Divulgación, Números, Fórmulas, Número Pi, Bachillerato.

Is π an Impostor?

It seems that everything has been said about pi and that its role in the realm of numbers is indisputable but... Is possible a mathematics where the number pi hasn't any role? A mathematics where 3.14159... sounds like a strange number that does not suggest anything? This article aims to show that it is possible: pi does not have the genuine specificity of other special numbers. Do not worry, we will use the 'same mathematics as always', but we want to review the areas in which pi appears and show that mathematics would be fairer if another number would get all the attention.

Key words: Popular Science, Numbers, Formulas, Number Pi, High School.

Es bien sabido que algunos números tienen un protagonismo especial, ya sea por su papel en la teoría matemática, por su presencia en las fórmulas que describen el mundo físico o por ambas cosas a la vez. Y destacar entre los números tiene mucho mérito. Hay infinitos.

Algunos libros presentan una recopilación de esos valores destacados. Son una especie de diccionarios en los que las entradas en vez de ser palabras son números, y de cada uno se explican sus méritos, propiedades y curiosidades. Uno de estos es *Les nombres remarquables* (Le Lionnais, 1994) que contiene unas 450 entradas con explicaciones muy claras. Otro similar, con 650 entradas y también muy interesante, es *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers* (Wells, 1997). Los números estrella (π, *e*, *i*,...) evidentemente aparecen en los dos libros, pero en cuanto a los números menos destacados no hay muchas coincidencias. Por ejemplo, *Les nombres remarquables* contiene 50 valores entre 0 y 1 (ambos inclusive) mientras que el *Penguin Dictionary* presenta solo 21, entre los cuales solo hay 11 comunes.

A veces incluyen el mismo número, pero los méritos son distintos. Por ejemplo, el aparentemente discreto número 39 aparece en los dos libros con comentarios distintos, pero ambos curiosos:

Artículo recibido en *Suma* en enero de 2012 y aceptado en abril de 2012

Les Nombres Remarquables:

> *39:* «Le plus petit entier pour lequel nous ne connaissons aucune propriété remarquable. Le fait d'être le plus petit ne sera pas considéré comme une propriété remarquable afin d'éviter une récurrence redoutable dans la suite de la collection».

The Penguin Dictionary:

> *39:* «Like all 2-digit numbers ending in 9, it equals the product of its digits plus their sum. The number of convex polygons that can be assembled from a complete set of 12 hexiamonds».

También existen libros dedicados a un solo número[1]. La tabla 1 muestra los resultados obtenidos explorando los libros en inglés en <amazon.com>.

Tal como era previsible gana π, aunque con muy poca diferencia respecto al segundo, «la proporción áurea». Seguramente al público no especialmente motivado por las matemáticas (al público llamado «en general») las disquisiciones sobre π le deben sonar a vida escolar ya superada, mientras que lo de la «proporción áurea» (o «la divina proporción», o el «número de oro») parece que tiene un aire más mágico o esotérico y que va a permitir descubrir misterios escondidos.

El gran derrotado en esta especie de escaparate mediático es el número *e*, francamente infra representado de acuerdo con su importancia. Solo hay una «Historia de *e*». Quizá, parafraseando a J. A. Paulos (1993), resulta más interesante, incluso para los matemáticos, la «Histoire d'O».

Con independencia de que hayamos encontrado más libros dedicados a π, hay un consenso general en considerarlo como «rey de los números», el que tiene un papel más relevante en la explicación de la naturaleza. La reconocida fuente de información sobre matemáticas <functions.wolfram.com>[3] dice sobre π:

> «The constant is the most frequently encountered classical constant in mathematics and the natural sciences.»

π tiene un día dedicado a él (y no sabemos que esto ocurra con ningún otro número), que es el 14 de marzo. En Estados Unidos

Número	Cantidad	Referencias
π	6	Petr Beckmann: *A History of Pi*. Marboro Books, 1990 David Blatner: *The Joy of Pi*. Walker & Company, 1999 Alfred S. Posamentier: *Pi: A Biography of the World's Most Mysterious Number*. Prometheus Books, 2004 Lennart Berggren, Jonathan Borwein, Peter Borwein: *Pi: A Source Book*. Springer, 2004 Jörg Arndt, Christoph Haenel: *Pi - Unleashed*. Springer, 2001 Pierre Eymard, Jean-Pierre Lafon: *The Number Pi*. American Mathematical Society, 2004 Naila Bokhari: *Piece of Pi: Wit-sharpening, Brain-bruising, Number-crunching Activities with Pi*. Pruforck Press, 2005
Proporción áurea	6	Mario Livio: *Golden ratio: The Story of Phi, the World's most Astonishing Number*. Broadmway, 2003 H. E. Huntley: *Golden ratio: The Divine Proportion*. Dover Publications, 2003 Roger Herz-Fischler: *A Mathematical History of the Golden Number*. Dover Publications, 1998 R. A. Dunlap: *The Golden Ratio and the Fibonacci Numbers*. World Scientific Publishing Company, 1998 Hans Walser, Jean Pedersen: *The Golden Section (Spectrum)*. The Mathematical Association of America, 2001 Priya Hemenway: *Divine Proportion: Phi in Art, Nature, and Science*. Sterling, 2005
0	2	Charles Seife: *Zero: The Bioghraphy of a Dangerous Idea*. Penguin, 2000 Robert Kaplan: *The Nothing that Is: A Natural History of Zero*. Oxford University Press, 2000
e	1	Eli Maor: *e: The Story of a Number*. Princeton University Press, 1998
i	1	Paul J. Nahin: *An Imaginary Tale: The Story of i (the square root of minus one)*. Princeton University Press, 2007
Constante de Euler	1	Julian Havil: *Gamma: Exploring Euler's Constant*. Princeton University Press, 2003
V2	1	David Flannery: *Gamma: The Square Root of Two*. Springer, 2005

Tabla 1. Libros que tratan sobre un número

se escribe la fecha colocando primero el mes y después el día, con lo que esta fecha queda 3/14. Y las celebraciones empiezan a las 1:59 pm. (3,14159). El texto de Naila Bokhari, que se encuentra en la lista de los dedicados a π, contiene actividades y sugerencias para celebrar este día en los centros de enseñanza.

También hay abundante merchandising con como protagonista. ¿Quiere una camiseta con π? Puede comprarla en internet ahora mismo[4]. También existe un club de amigos de π[5]. Incluso una estatua (Figura 1).

Pero π tiene una especificidad menos genuina que los otros números singulares. Por ejemplo, *e* es un número singular pero no lo son *2e* ni *e*/*2*. Lo mismo ocurre con *i*, o con la proporción áurea. Sin embargo, por la misma razón por la que se ha puesto a π en el Olimpo se podría haber puesto a 2π, ya que aparece con bastante más frecuencia en las fórmulas que describen nuestro mundo. Vamos a verlo.

π en la Física

Desde que 360º son 2π radianes, π tiene la batalla perdida frente a 2π. En la naturaleza es mucho más frecuente la forma circular que la semicircular. Veamos algunas fórmulas típicas en las que aparece en los libros de física general:

Mecánica[7]

Movimiento armónico simple:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Figura 1. Estatua de Pi en Seattle (EEUU) (Autor: Niall Kennedy[6])

Péndulo simple:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Movimiento de rotación angular:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Electricidad y magnetismo[8]

Ley de Coulomb:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Campo eléctrico creado por una línea de carga infinita:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Capacidad de un condensador cilíndrico:

$$C = 2\pi\varepsilon_0 \frac{L}{\ln(b/a)}$$

Capacidad de un condensador esférico:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}$$

Campo magnético a lo largo de un conductor rectilíneo:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Circuito RCL. Frecuencia de resonancia:

$$f_R = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Y si en este apartado de electricidad y magnetismo vamos directamente a las ecuaciones de Maxwell[9], también vemos que π aparece con el coeficiente 4, por lo que 2π sería una constante «más cercana» que llevaría solo el coeficiente 2.

Leyes generales

Y si nos referimos al comportamiento de los planetas, o a las leyes más generales de la física, también podemos observar que una nueva constante, 2π, daría lugar a fórmulas más elegantes como las siguientes.

Tercera Ley de Keppler (movimiento planetario)[10]:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G\left(m_1 + m_2\right)} a^3$$

Fórmula de la relatividad general[11]:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Principio de indeterminación de Heisenberg[12]:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Naturalmente, lo anterior no es una recopilación exhaustiva, pues también aparece π en otros contextos. Pero es difícil ir repasando todas las fórmulas de un libro gordo de Física para ver cuando y cómo sale π. O no. Si tuviéramos el libro en forma de archivo electrónico, en formato *pdf*, por ejemplo, podríamos utilizar la opción de búsqueda y contar cuántas veces aparece y con qué coeficientes. ¿Es posible conseguir un libro serio y completo en ese formato? Sí, está en la red y es de acceso libre.

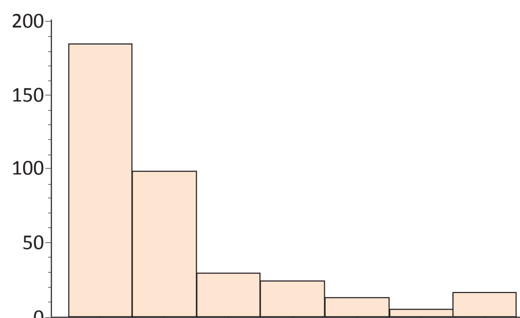
Se trata de los textos del profesor Benjamin Crowell, que se pueden descargar de forma gratuita (o también se pueden comprar en formato papel)[13]. Ofrece una serie titulada *Light and Mater* que consta de seis volúmenes «of introductory physics textbooks […] designed for the type of one-year survey course taken by biology majors» y también un texto orientado a estudiantes de Física e Ingeniería que titula *Simple Nature*.

El recuento de número de veces que aparece el símbolo π en estos textos, según sea el coeficiente que le acompaña en cada caso, se resume en la tabla 2.

Coeficiente de π	Libros		Total
	Light and Matter	*Simple Nature*	
1/2	2	3	5
1	5	19	24
4/3	12	1	13
2	73	112	185
4	10	88	98
8	8	21	29
Otros	8	8	16

Tabla 2. Coeficientes de π en las fórmulas que aparecen en estos libros

A la vista de estos números ya es evidente «quien gana», pero quizá se ve todavía más claro representándolos mediante el gráfico de la figura 2.



Coeficientes	2	4	6	8	10	12	Otros
Frecuencia	185	98	29	24	13	5	16
Porcentaje	50,0	26,5	7,8	6,5	3,5	1,4	4,3
% Acumulado	50,0	76,5	84,3	90,8	94,3	95,7	100,0

Figura 2. Frecuencia con que aparecen los coeficientes que acompañan a π

El 50% de las veces que aparece π lo hace de la forma 2π. El 84% de las veces, el coeficiente es 2, 4 u 8. Solo el 6,5% de las veces el coeficiente es 1.

Se puede decir que los textos analizados no son toda la Física, pero sí es verdad que contienen lo que típicamente se explica en los cursos de Física general de carreras de ciencias o de ingeniería (en total los textos contienen 1.828 páginas!). También es cierto que todos los textos son del mismo autor, que *Light and Matter* y *Simple Nature* seguramente tienen muchos temas comunes, tratados de forma muy similar. De acuerdo, pero las fórmulas no son una cuestión de estilo sino que son las que son. Y, en cualquier caso, los resultados son tan claros que es difícil poner pegas a la clara preeminencia de 2π y sus múltiplos.

π en las matemáticas

Áreas y volúmenes

En la fórmula para la longitud de la circunferencia ($2\pi r$) gana 2π, pero para el área del círculo (πr^2) gana π. La tabla 3 recoge las áreas y los volúmenes de las figuras geométricas en las que interviene π, indicando si el coeficiente protagonista es π o 2π (si es dudoso se ha dejado en blanco).

No hay un vencedor claro, pero también es verdad que por el hecho de tomar el radio, y no el diámetro, como magnitud principal, 2π aparece como protagonista más veces que π.

Figura	*Área*		*Volumen*	
Cilindro	$2\pi rh + 2\pi r^2$	[2π]	$V = \pi r^2 h$	[π]
Cono	$\pi r^2 + \pi rg$	[π]	$V = 1/3\ \pi r^2 h$	—
Esfera	$A = 4\pi r^2$	[2π]	$V = 4/3\ \pi r^3$	—
Toro	$4\pi^2 Rr$ (= $2\pi R \cdot 2\pi r$)	[2π]	$2\pi^2 Rr^2$ (= $2\pi R \cdot \pi r^2$)	—

Tabla 3

Probabilidad

Solo una fórmula, pero que tiene una importancia crucial. La función que representa la conocida campana de Gauss, que describe un tipo de variabilidad muy presente en la naturaleza, y lugar de convergencia de muchas otras distribuciones, es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

Series

Existen muchas series que convergen a un valor que se puede dar en función de π. Las dos siguientes, debida la primera a Leibniz y la segunda a Euler, son ejemplos muy típicos.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots = \frac{\pi}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

Pero en general, tal como ocurre en estos ejemplos, la serie, escrita de su forma más sencilla, no conduce directamente al valor de π sino a una función de ese valor.

El matemático indio Srinivasa Ramanujan planteó muchas fórmulas curiosas que permiten obtener el valor de π. Una de las más famosas es la serie:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4\, 396^{4k}}$$

En esta fórmula π aparece solo, aunque en el denominador. Pero si el valor buscado fuera 2π la fórmula sería un poco más compacta, ya que podría eliminar el 2 en el numerador del coeficiente de la serie.

Otros

Las funciones seno y coseno tienen período 2π, (otra vez 2π) y esto tiene consecuencias en algunas fórmulas importantes, como la expresión de la transformada de Fourier:

$$Ff(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

Otra expresión interesante, donde π (perdón, 2π) aparece de forma sorprendente es la fórmula de Stirling, que para valores grandes de n puede escribirse de la forma:

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Una famosa paradoja

Supongamos que la Tierra es perfectamente esférica y que colocamos una cuerda pegada a la superficie por el ecuador. A continuación alargamos la cuerda 1 metro y la colocamos de forma que la distancia a la tierra es igual en todas partes ¿cuál será esa distancia? Hacemos lo mismo con un balón de futbol (cuerda alrededor del balón, añadir 1 metro y volver a colocar alrededor) ¿Cuál es ahora la distancia? En los dos casos es la misma e igual a $1/2\pi$.

Pero... «La fórmula»

Existe una fórmula calificada como «la más bella» de las matemáticas, que contiene de forma parca y elegante los que para muchos son los números más relevantes: e, i, π, 1 y 0.

$$e^{i\pi}+1=0$$

Mantener esta fórmula, solo esta, ya justificaría la presencia de π en el Olimpo de los números. Cambiar π a costa de estropearla sería pagar un precio demasiado alto. Pero, ¿que pasa si sustituimos π por 2π? Resulta que[14]:

$$e^{ix}=cos(x)+i\cdot sen(x)$$

Si $x=\pi$:

$$cos(\pi)+i\cdot sen(\pi)=-1$$

Obteniéndose «la fórmula», pero si $x=2\pi$, las cosas no cambian mucho:

$$cos(2\pi)+i\cdot sen(2\pi)=1$$

Vamos a llamar ρ (léase *ro*) a la expresión 2π. En este caso resulta:

$$e^{i\rho}-1=0$$

Que tiene el mismo número de símbolos, y con la misma estética, que la fórmula clásica. Anque, es verdad que cambiamos un signo más por un signo menos. Esto nos permite escribir:

$$e^{i\rho}=1$$

Con menos símbolos (de forma más «limpia») que si utilizamos π.

En definitiva: ¿π o ρ?

π y ρ son dos caras de la misma moneda. La existencia de una constante que relaciona el valor del radio y la longitud de la circunferencia es conocida desde muy antiguo. Pero la selección de π como constante universal, en vez de 2π, surgió a mediados del siglo XVIII, en la misma época que e e i con las obras de Euler, tal como explica Posamentier (2004). Y así se quedó, para todos los campos y en todos los ámbitos. Si Euler hubiera tomado el doble de ese valor y le hubiera llamado ρ muchas de las fórmulas que utilizamos serían más compactas y habría menos símbolos en los libros de Matemáticas y de Física.

En fin, es de justicia reconocer que el reinado de π debería ser compartido con otro valor que no aparece en las listas de números selectos, pero que tiene, como mínimo, la misma importancia que el singular (¿o ya no tan singular?) número π.

Notas finales

Desde que este artículo fue concebido han pasado muchas cosas, algunas buenas. Por ejemplo, la aparición de la colección «El Mundo es Matemático», que incluye textos de divulgación muy interesantes, entre los cuales se encuentra el de Joaquín Navarro: *Los secretos del número* π (Navarro, 2011) y el de Lamberto García: *Números notables: El 0, el 666 y otras bestias numéricas* (García, 2011) que también merecen ser citados en este contexto.

Figura 3.
Fuente: <http://www.hotcosmetics.com.au/pi-by-givenchy-eau-de-toilette-spray-100-ml>

El número π aparece en otros lugares además de los libros[15]. En el terreno de las marcas también gana 2π. Ya sea en el ámbito de la perfumería (Figura 3), en de la grastronomía (Figura 4) o en el de la enología (Figura 5).

Figura 4. Fuente: <http://www.melsagourmet.com/product.php?id_product=18>)

Figura 5. Foto: Pere Grima

Referencias bibliográficas

García del Cid, L. (2011): *Números notables: El 0, el 666 y otras bestias numéricas*, RBA, Barcelona.

Le Lionnais, F. (1994): *Le Nombres Remarcables*, Hermann, París.

Navarro, J. (2011): *Los secretos del número* π, RBA, Barcelona.

Paulos, J. A. (1993): *Más allá de los números*, Tusquets, Barcelona.

Posamentier, A. S. *(2004):* π*: A Biography of the World's Most Mysterious Number*, Prometheus Books, Amherst, NY.

Wells, D. (1997): *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Books, London.

Pere Grima Cintas
Facultat de Matemàtiques i Estadística
Universitat Politècnica de Catalunya
<pere.grima@upc.edu>

1 Algunos libros tienen un número como título (*El ocho, 1984, 2666*) pero el libro no trata sobre ese número. (Comentario seguramente innecesario).

2 Seguramente el más desconocido. Su valor es: 0,57721...

3 <http://functions.wolfram.com/Constants/Pi/35/> Consulta: 23 enero de 2012.

4 <http://www.thinkgeek.com/tshirts/science/6e7e/> Consulta: 23 enero 2012.

5 <http://wasi.org/PI/pi_club.html> Consulta: 23 enero 2012.

6 <http://www.flickr.com/groups/welovepi/pool/page3/> Consulta: 23 enero 2012.

7 T: Tiempo necesario para realizar una oscilación completa (periodo); m: masa; k: constante recuperadora del muelle; L: Longitud; g: aceleración de la gravedad; ω:Velocidad angular.

8 F: Magnitud de la fuerza en la carga q_1 debido a la carga q_2; ε_0: Constante de permitividad en el vacío.
r: Distancia entre las cargas (en la Ley de Coulomb) o distancia al hilo. E: Intensidad del campo eléctrico;
λ: Carga por unidad de longitud; C: Capacidad; L: Longitud; b, a: Radio de los conductores exterior e interior respectivamente; B: Campo magnético; μ0: Permeabilidad en el vacio; I: Intensidad de la corriente eléctrica; fr: Frecuencia de resonancia; L: Inductancia; C: Capacidad

9 $\nabla\cdot E = \rho/\varepsilon_0 = 4\pi k\rho$
$\nabla\cdot B = 0$
$\nabla\times E = -\partial B/\partial t$
$\nabla\times B = (4\pi k/c^2 \cdot J) + (1/c^2 \cdot \partial E/\partial t) = (J/\varepsilon_0\, c^2) + (1/c^2 \cdot \partial E/\partial t)$
Ver: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/hframe.html> [Consulta: 23 enero 2012]

10 T: Periodo; G: constante de gravitación universal; $m1$ y $m2$: masas del cuerpo central y del cuerpo orbital; a: semieje mayor de la órbita

11 <http://en.wikipedia.org/wiki/Introduction_to_general_relativity> Consulta: 23 enero 2012.

12 <http://en.wikipedia.org/wiki/Uncertainty_Principle y http://en.wikipedia.org/wiki/Planck%27s_constant> Consulta: 23 enero 2012.

13 <http://www.lightandmatter.com/> Consulta: 23 enero 2012. El estudio se realizó con la versión que había el 10 diciembre 2008, es posible que el contenido actual no sea idéntico, pero no se aprecian cambios relevantes.

14 Ver, por ejemplo: Córdoba, A. (2006): *La saga de los números*, Editorial Crítica, 196.

15 La salsa de pimientos del piquillo no la encontré en un supermercado, sino en Alsina, C. (2010): *Asesinatos Matemáticos*, Editorial Ariel. También es verdad que es este caso *2π* parece tener más que ver con los *pi*-mientos que con las matemáticas.