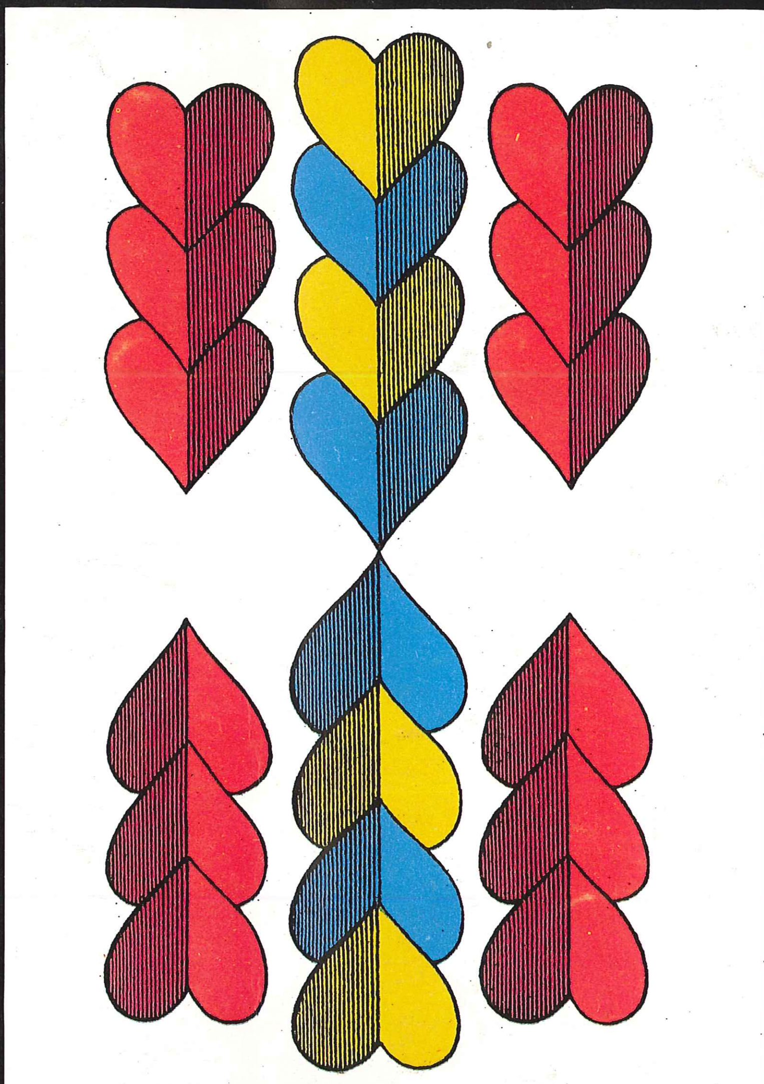
SUMA 7

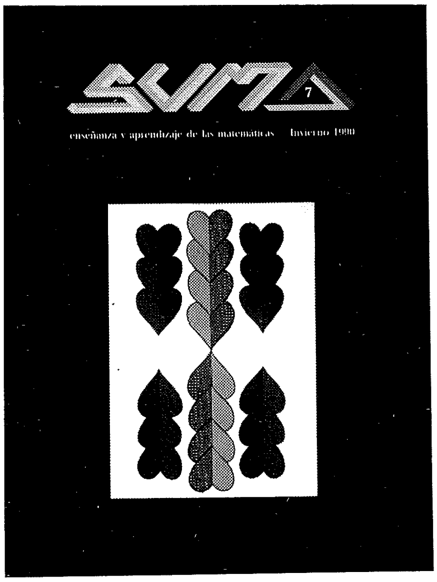
enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Invierno 1990



PANEL DE COLABORADORES

Aizpún López, A., SCPM «Puig Adam», Madrid.
Arias Vílchez, J., SAEM «Thales». I.B. «Auringis», Jaén.
Arrieta Gallastegui, J., Centro de Profesores, Gijón.
Azcárate Goded, P., EUPEGB, Cádiz.
Balbuena Castellano, L., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Bou García, L., I.B. «Zalaeta», La Coruña.
Benítez Trujillo, F., SAEM «Thales», E.U. de Estudios Empresariales, Cádiz.
Burgués Flamarich, C., Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Cajaraville Pegito, J., EUPEGB, Santiago de Compostela.
Cancio León, M.ª P., SCPM «Isaac Newton», Telde (Las Palmas).
Cardeñoso Domingo, J. M.ª, EUPGB, Melilla.
Castro Castro, A., Secret. Gral. Técn. Cons. Educación, Santiago.
Colectivo «Manuel Sacristán», Centro de Profesores, Algorta (Vizcaya).
Colera Jiménez, J., I.B. «Colmenar Viejo», Colmenar Viejo, Madrid.
Coriat Benarroch, M., SAEM «Thales», I.B. «Padre Poveda», Guadix (Granada).
Díaz Godino, J., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Dorta Díaz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Fernández Sucasas, J., EUPEGB, León.
Fortuny Aymemí, J. M.ª, Escola de Mestres «S. Cugat», Univ. Autónoma, Barcelona.
Fuente Martos, M., SAEM «Thales», I.B. «Averroes», Córdoba.
García Arribas, C., SAEM «Thales», I.B. «Padre Suárez», Granada.
García Cruz, J. A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
García González, E., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
García Cuesta, S., Centro de Profesores, Albacete.
Garrudo García, M., SAEM «Thales», Colegio Público, Palomares del Río (Sevilla).
Gil Cuadra, F., SAEM «Thales», EUPEGB, Almería.
Giménez J., EUPEGB, Tarragona.
Gómez Fernández, J. R., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Grupo AZARQUIEL, ICE de la Universidad Autónoma, Madrid.
Grupo BETA, EUPEGB, Universidad de Extremadura, Badajoz.
Grupo CERO, Centro de Profesores, Valencia.
Grupo GAUSS, ICE de la Universidad de Salamanca, Salamanca.
Grup ZERO, Escola de Mestres «S. Cugat», Universidad Autónoma, Barcelona.
Guzmán Ozámiz, M. de, Facultad de Matemáticas, Univers. Complutense, Madrid.
Hernández Guarch, F., SCPM «Isaac Newton», Las Palmas.
López Gómez, J., SAEM «Thales», I.B. «Luis Cernuda», Sevilla.
Luelmo Verdú, M.ª J., Servicio de Innovación Educativa del MEC, Madrid.
Llinares Ciscar, S., SAEM «Thales», EUPEGB, Sevilla.
Martínez Recio, A., SAEM «Thales», EUPEGB, Córdoba.
Mayor Forteza, G., Dep. Matemáticas, Univ. Islas Baleares, Palma de Mallorca.
Mora Sánchez, J. A., Centro de Profesores, Alicante.
Moreno Gómez, P., Instituto Español, Andorra.
Nicolau Voguer, J., Centro de Profesores, Palma de Mallorca.
Nortes Checa, A., EUPEGB, Murcia.
Padilla Díaz, F. J., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Pareja Pérez, J. L., SAEM «Thales», EUPEGB, Ceuta.
Pascual Bonis, J. R., SNPM «Tornamira», EUPEGB, Pamplona.
Pérez Bernal, L., SAEM «Thales», I. B. «Emilio Prados», Málaga.
Pérez Fernández, J., SAEM «Thales», IFP «Las Salinas», San Fernando (Cádiz).
Pérez García, R., SAPM «P. S. Ciruelo», I. B. «Miguel Servet», Zaragoza.
Pérez Jiménez, A., SAEM «Thales», I. B. «Nervión», Sevilla.
Petri Etxeberría, A., SNPM «Tornamira», C.P. «M.ª Ana Sanz», Pamplona.
Puig Espinosa, L., EUPEGB, Valencia.
Rico Romero, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Granada.
Romero Sánchez, J., SAEM «Thales», C.P. «F. García Lorca», Huelva.
Romero Sánchez, S., SAEM «Thales», E.U. Politécnica «La Rábida», Huelva.
Ruiz Garrido, C., SAEM «Thales», Facultad de Ciencias, Granada.
Ruiz Higueras, L., SAEM «Thales», EUPEGB, Jaén.
Salvador Alcaide, A., I.B. «San Mateo», Madrid.
Sánchez Cobos, F. T., SAEM «Thales», C.P. «Virgen del Rosario», Jaén.
Santos Hernández, A., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Seminario ACCIÓN EDUCATIVA (M. Aguilera, I. Callejo, C. Calvo, L. Ferrero), Madrid.
Socas Robayna, M. M., SCPM «Isaac Newton», La Laguna.
Soto Iborra, F., EUPEGB, Valencia.
Suárez Vázquez, J. A., SAEM «Thales», C.E. «Blanco White», Sevilla.
Varo Gómez de la Torre, A., SAEM «Thales», I.B. «Trafalgar», Barbate (Cádiz).
Velázquez Manuel, F., SCPM «Isaac Newton», Santa Cruz de Tenerife.
Vicente Córdoba, J. L., SAEM «Thales», Facultad de Matemáticas, Sevilla.

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Invierno 1991



Fernando Hernández Rojo

Edita:
Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"
Presidente: Gonzalo Sánchez Vázquez
Apartado 1.160. 41080-Sevilla

Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas "P. Sánchez Ciruelo"
Presidente: Rosa Pérez García
ICE Ciudad Universitaria. 50006-Zaragoza

Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton"
Presidente: Jacinto Quevedo Sarmiento
Apartado de Correos 329. 38080-La Laguna (Tenerife)

Sociedad Castellonenca de Matemáticas
Presidente: Charo Nomdedeu
C/. Mayor, 89. 12001-Castellón

Sociedad Navarra de Profesores de Matemáticas "Tornamira" Matematika Iraskasleen Nafar Elkartea
Presidente: José Ramón Pascual Bonís
Dto. Matemáticas. E.U. del P. EGB. Plaza de S. José, s/n. 31001-Pamplona

Depósito legal: Gr. 752-1988
I.S.S.N.: 1130 - 488X
Fotocomposición: Lozano

Impresión: Proyecto Sur de Ediciones. Armilla (Granada)

Suscripciones
Revista Suma Apdo. 1017. 18080 (Granada)

Condiciones de suscripción
Particulares: 3.000 ptas. (tres números)
Centros: 3.500 ptas. (tres números)
Números sueltos: 1.200 ptas. (más gastos de envío)

Recursos para el aula

Información

Miscelánea

Editorial

La mayoría de nosotros es conocedora de la gran fuerza que tiene el movimiento que existe alrededor de la Educación Matemática tanto a nivel nacional como internacional. En todos los paises desarrollados, o en vías de desarrollo, se están dando cambios esenciales en los diferentes currículos de matemáticas. Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas van ofreciendo resultados a aquellos profesores y grupos que desean cambiar su clase de matemáticas incorporando nuevos métodos y tecnologías para obtener los resultados que la sociedad actual nos exige.

Nuestro país no es una excepción. Estamos aglutinándonos alrededor de una Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas que cada día es más fuerte, la presencia de profesores españoles en congresos y grupos de trabajo es cada día mayor, las publicaciones de calidad son frecuentes, las realaciones con otras comunidades profesionales son una realidad y el reconocimiento internacional va llegando tanto a nivel de instituciones como en el de grupos y personas.

Podemos estar de enhorabuena por todo lo anterior, aunque sea todavía poco lo conseguido. Mas hay un hecho que tiene especial significación: el nombramiento del Profesor Miguel de Guzmán como Presidente del ICMI. Sirvan estas líneas como felicitación de todos los que estamos alrededor de SUMA y manifestación del ofrecimiento de nuestra modesta ayuda en todo lo que podamos ser requeridos.

Por esta razón, en este número incluimos información acerca de lo que es el ICMI y nos permitimos reproducir la traducción de la carta que el Profesor Miguel de Guzmán ha enviado para su publicación en el próximo número del Boletín del ICMI que ha llegado a nuestra Redacción.

Rafael Pérez Gómez

El desarrollo geométrico de la representración espacial

Mongeau, Piere
Pallascio, Richard
Allaire, Richar

Traducción: *Harout Kodjian*

Resumen

Los autores emitieron la hipótesis de que la evaluación del desarrollo geométrico de la representación espacial se repite, desde la infancia hasta la edad adulta, sobre la relación jerárquica de los niveles geométricos (topológico, proyectivo, afín y métrico). Como no se ha encontrado ningún instrumento de investigación geométricamente completo y válido, los autores han construido uno. Grupos de individuos de diferentes edades, —jóvenes (11-12 años), adolescentes (15-16 años), adultos jóvenes (18-24 años), adultos (30-40 años)— han sido sometidos a un test para ver sus logros en cada nivel geométrico. Aunque los resultados no confirmen la hipótesis original, sin embargo estos revelan una habilidad topológica relativamente superior y una habilidad proyectiva generalmente pobre. Los autores tratan de explicar esto, haciendo referencia a los factores psicométricos de "relación" y "visualización" espaciales.

Palabras claves: Representación espacial, geometría, nivel geométrico, evolución, desarrollo, edad, factores, tests.

El desarrollo geométrico de la representación espacial

Toda representación del espacio, o de objetos que este contiene, se elabora según las leyes geométricas. Sin embargo, la evolución del desarrollo geométrico de estas representaciones es poco conocida a partir de la infancia. Por un mejor conocimiento de esta evolución, se han medido los logros de grupos de individuos de diferentes edades. Después de un breve repaso de los principales trabajos sobre la representación espacial, se presentan a continuación la metodología seguida y los resultados obtenidos.

A parte de los trabajos de Piaget, los estudios hechos sobre la representación espacial que miden la evolución de esta, o toman en consideración sus aspectos geométricos son escasos. En efecto, varios investigadores (Cooper, Glaser, Kosslyn, Pellegrino, Shepard, Sternberg y otros; ver Pellegrino et al., 1984) tratan de explicar los procesos básicos subyacentes en los problemas de representación espacial, pero ninguno de ellos parece tomar en consideración las cualidades geométricas intrínsecas de las representaciones estudiadas. Asimismo, el trabajo de los psicométricos, que reposa sobre análisis estadísticos comparativos de los resultados obtenidos por un gran número de sujetos en ciertos tests, de ninguna manera considera estas cualidades geométricas. Los psicométricos buscan más bien identificar los principales componentes de estos resultados.

Así, según McGee (1979, 1987), Eliot y Smith (1983), Pellegrino, Alderton y Shute (1984) quiénes analizaron exhausiva y detalladamente el conjunto de los estudios publicados en este campo, resulta que la cuestión de habilidad espacial, como está medida por los test psicométricos generalmente utilizados durante las investigaciones, se compone de dos factores principales comunmente llamados "relación espacial" y "visualización espacial".

Por "relación espacial" se entiende la capacidad de establecer y comprender las relaciones que unen los diversos elementos de un objeto "espacial", y de comparar objetos entre ellos. Por ejemplo, el sujeto tiene que reconocer una figura o una forma presentada desde un punto de vista diferente.

Por "visualización" se entiende la capacidad de manipular mentalmente objetos tridimensionales. Esta habilidad, la mayoría de las veces, se mide a partir de representaciones bidimensionales (proyecciones). Por una operación mental, el sujeto tiene que transformar una representación de manera que esta corresponda a otra eligible dentro de un grupo de varias representaciones. Por ejemplo, se elige una proyección entre varias de manera que esta corresponda a un despliegue plano.

De otra parte, el análisis de los tests utilizados para medir la representación espacial (ver: Eliot, J., Smith, I.M., 1983) permite comprobar que desde un punto de vista geométrico, no hay ningún instrumento de medida geométricamente completo y válido. Ningún instrumento que cubra los cuatro niveles geométricos y que permita evaluar la evolución del desarrollo geométrico de la representación espacial. Los aspectos topológico, proyectivo y afín están casi siempre ignorados en beneficio del aspecto métrico. Más del 82% (212/256) de los tests obtenidos, analizados desde un punto de vista geométrico son de índole métrico, 11,6% son afines, 2% solamente son proyectivos, y 4% son de índole topológico. Hasta hay unos tests (2%) que contienen errores geométricos flagrantes (Mongeau, 1989).

Siendo el objetivo de este estudio el de conocer mejor la evolución del desarrollo geométrico de la representación espacial, ha sido necesario elaborar un nuevo instrumento de búsqueda geométricamente válido, antes de someter a un test los grupos de sujetos de diferentes edades.

Representación geométrica de espacio

La representación geométrica del espacio se apoya sobre axiomas agrupados en cuatro niveles geométricos jerárquicamente imbricados. Se trata de los niveles topológico, proyectivo, afín y métrico. La imbricación se hace desde el topológico hacia el métrico. Así, una representación métrica conserva necesariamente todas las propiedades propias a los niveles topológico, proyectivo y afín, mientras que una representación topológica no da cuenta de ninguna propiedad propiamente proyectiva, afina o métrica. De hecho, una misma familia, de poliedros, prismas por ejemplo, puede ser representada por cuatro tipos de representaciones distintas y geométricamente exactas (fig. 1).

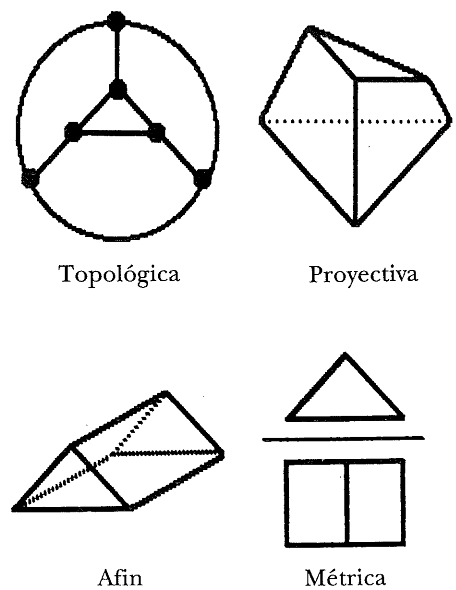


Fig. 1: Representaciones de un poliedro ("prisma").

Una representación métricamente correcta será también topológicamente justa por las propiedades topológicas que son jerárquicamente previas. En cambio, una representación topológicamente correcta puede ser incorrecta a los niveles proyectivo, afín y métrico.

Las principales características topológicas son: el número de las caras, el de los vértices y de las aristas, y las propiedades de adyacencia y de conexión. Mientras la representación en forma de grafo conserva estas características y propiedades, ignora las de los niveles superiores. Deformaciones continuas como el estiramiento, el estrechamiento, el plegado y la torsión no afectan la exactitud del grafo. Así, cuando el grafo de un prisma está deformado de una manera continua, la adyacencia de las caras, los números de vértices, de aristas y de caras, se conservan. El nivel proyectivo corresponde principalmente a las propiedades de incidencia de rectas y planos. Estas propiedades se conservan en una representación creada por una proyección central.

El nivel afín corresponde principalmente a las propiedades de paralelismo y de convexidad. Estas propiedades se conservan en una representación creada por una proyección paralela.

El nivel métrico corresponde principalmente al estudio de propiedades relacionadas con las distancias y los ángulos. Estos pueden conservarse simultáneamente en una misma representación. Se representarán correctamente las distancias o los ángulos, o bien se utilizarán dos vistas (por ejemplo, como las vistas de cara y de encima usadas en geometría descriptiva).

Hipótesis de trabajo

Piaget, en sus trabajos concernientes a la génesis de la representación espacial en el niño, sostiene que el desarrollo de esta respeta la jerarquía de los niveles geométricos. El desarrollo va desde el topológico hacia el métrico, vía el nivel proyectivo; la noción de proximidad precede a los otros axiomas euclidianos, mientras la intuición de las dimensiones, basada sobre la interioridad y la exterioridad, precede la abstracción del volumen. Entre tanto, el orden de los desarrollos ulteriores, es decir, desde la edad de 11-12 años hasta la edad adulta, queda poco conocido e incierto.

La hipótesis de trabajo es que la evolución del desarrollo de la representación espacial sigue repitiéndose sobre la jerarquía de los niveles geométricos hasta la edad adulta. Según esta hipótesis, los logros de nivel topológico deberían ser superiores, hasta la edad adulta, a los observados por los otros niveles geométricos. Asimismo, los logros de nivel métrico deberían crecer con la edad y ser inferiores a los otros, mientras que las de los niveles proyectivo y afín deberían intercalarse entre los niveles topológico y métrico.

Las observaciones de Lunkenbein (1981, 1982) se alejan de nuestras hipótesis. El nota, a partir de actividades didácticas, que los niños parecen tener más facilidad con los gráficos topológicos que con las representaciones métricas como son los desarrollos planos, mientras que los adultos tienen más facilidad con las métricas y tienden a rechazar los gráficos como representaciones posibles de objetos poliédricos. El observa también que todos, niños y adultos, reconocen de una manera más natural los dibujos en perspectiva que las formas de representación: gráficos, desarrollos planos y proyecciones ortogonales. Estas proyecciones serían las más accesibles. Así, el punto de entrada para el reconocimiento de las propiedades geométricas no sería el topológico, sino el proyectivo, y esto, evidentemente no por razones relacionadas con las propiedades geométricas, sino más bien por razones estrictamente figurativas y de percepción.

Lunkenbein utilizaba, sin embargo, proyecciones caballeras (representaciones afines) relativamente familiares (cubo, pirámide, etc.), las cuales no permiten confirmar que las nociones proyectivas están verdaderamente adquiridas.

También, con el propósito de averiguar si efectivamente la evolución del desarrollo de la representación espacial va desde el topológico hacia el métrico hasta la edad adulta, hemos querido someter a un test, con un método geométricamente válido en los cuatro niveles geométricos, a grupos de sujetos de diferentes edades.

Metodología

Ya que no ha sido identificado ningún test, geométricamente completo y válido, entre la cantidad de tests espaciales recopilados por Eliot y Smith (1983), se ha desarrollado una nueva batería de tests, cubriendo los cuatro niveles geométricos. Esta batería consta de cuatro tests, cada uno compuesto por diez items. Los cuarenta items constituyen representaciones geométricas bidimensionales de objetos tridimensionales. Se trata de gráficos o de proyecciones centrales, afines y ortogonales.

Los items de cada test son de tipo "lápiz y papel" por razones de eficacia en el examen de los sujetos. También, este tipo de items forma parte de la tradición de los tests psicométricos de representación espacial.

Para asegurarse de la validez del contenido de los items, han sido examinadas, por varias personas, un gran número de "preguntas-problemas" relacionadas con la enseñanza de la geometría. A continuación de sus comentarios y reacciones, las "preguntas-problemas" y los ejemplos que las acompañan han sido rediseñados.

Finalmente, un comité restringido de cinco expertos hizo una última selección de las "preguntas-problemas" para la confección final de los items. Los criterios de selección fueron la exactitud geométrica, la adecuación a la tarea y la sencillez. A cada item corresponde una tarea diferente pero del mismo nivel geométrico, y está acompañado de un ejemplo, el más sencillo posible, ilustrando la tarea pedida. Así, las figuras 2,3,4 y 5 en anexo, presentan cuatro de estos items, uno por cada nivel. La corrección se hizo según el modo de verdadero o falso.

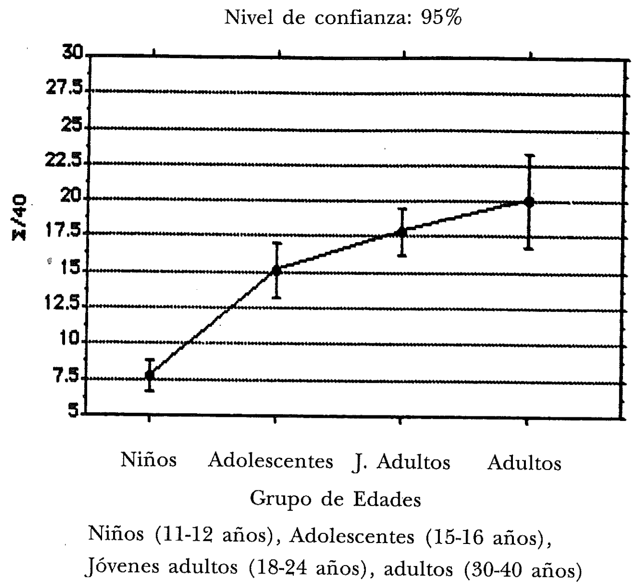
La muestra de individuos sometidos al test, se compone de alumnos de seis clases ordinarias repartidas desde el nivel primario hasta el universitario de la manera siguiente: un primer grupo de 45 niños entre 11 y 12 años, un segundo grupo de 23 adolescentes entre 15 y 16 años, un tercer grupo de 104 jóvenes adultos entre 18 y 24 años, y finalmente un cuarto grupo de 20 adultos entre 30 y 35 años. En total, unas 192 personas han sido sometidas al test. Ninguna de ellas había seguido curso de formación particular de geometría.

En el conjunto de la muestra 65% eran mujeres y 35% eran hombres. Entre los niños, la repartición era de 62% chicas y 38% chicos. Entre los adolescentes, 39% chicas y 61% chicos. Entre los jóvenes adultos 68% mujeres y 32% hombres. En cuanto al grupo de adultos, todas eran mujeres. Los individuos han sido examinados por grupos. El tiempo máximo concedido era de tres horas para la totalidad de los items. Los examinados tenían derecho a un lápiz, una regla, un compás y una goma de borrar.

Cada uno de los cuarenta items está, correlacionado, de una manera significativa, con todo el test, en un nivel de confianza de a=0,01. El índice de fiabilidad de Cronbach (1970) para los cuarenta items en su totalidad, es de 0,886. Los items están agrupados en cuatro bloques según los niveles geométricos. Cada bloque se compone de diez preguntas. Todos los items están correlacionados, de una manera significativa, con el total de su reagrupamiento respectivo. También, los coeficientes de cada uno de estos reagrupamientos son buenos, teniendo en cuenta que los items se componen de tareas y de modos de respuesta variados: 0,71 para el nivel topológico; 0,63 para el nivel proyectivo; 0,72 para el nivel afín; 0,60 para el nivel métrico.

Resultados

Conforme a las previsiones, la puntuación total en los test está fuertemente correlacionada con la edad (r=0,67), siendo el nivel de confianza 0,71. Sin embargo, la puntuación de los grupos de sujetos no crece uniformemente, pero crece de repente entre la infancia y la adolescencia para estancarse después (cuadro 1).



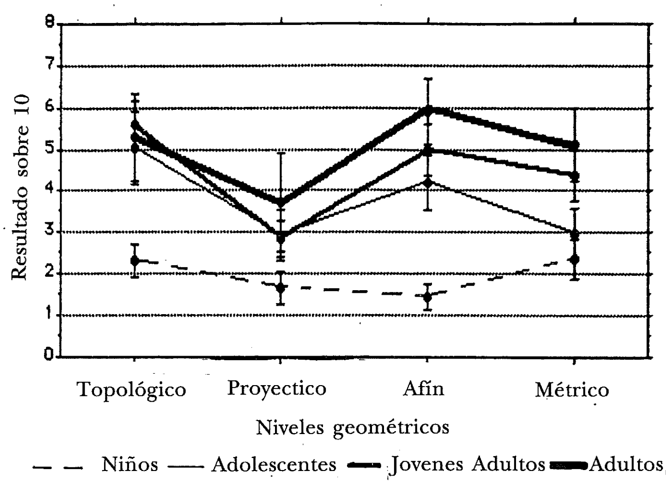
Cuadro 1: Puntuación total según las edades.

Ninguna diferencia significativa (a=0,05) de puntuación entre ambos sexos ha sido observada. Además, no existe ninguna diferencia de puntuación significativa entre ambos sexos cualquiera que sea el nivel geométrico.

La evolución de las puntuaciones, con respecto a los niveles geométricos a través de los grupos de diferentes edades, refleja la correlación observada entre la edad y el total del test. Para conjunto de los 192 sujetos, la edad y las puntuaciones observadas según los niveles geométricos están correlacionadas de una manera significativa: topológico=0,558; proyectivo=0,432; afín=0,675; métrico=0,52.

De acuerdo con las puntuaciones generales, los resultados, cuando están compilados según la edades, se dividen en dos grupos bien distintos reagrupando de una parte los niños y de otra los otros grupos de edades diferentes (ver cuadro II)

Intervalo de confianza: 95%



Cuadro II: Puntuaciones según las edades y los niveles geométricos

Cualquiera que sea el nivel geométrico, las notas medias de los niños están flojas y tienden a bajar más desde el nivel topológico hasta el afín, después suben ligeramente en el nivel métrico. Estas notas medias son claramente inferiores a las de los otros grupos de edad diferente en los niveles topológico, proyectivo y afín.

En el nivel métrico, sus resultados no se pueden distinguir de los resultados de los adolescentes. Este logro superior de los niños en los items topológicos y la bajada progresiva de sus puntuaciones en los niveles proyectivo y afín, confirman nuestra hipótesis y se sitúan en la prolongación del modelo de Piaget. No obstante, la subida de las puntuaciones en el nivel métrico parece estar en contradicción con ese modelo, lo que puede, sin embargo, explicarse por el impacto de los programas escolares, los cuales se refieren esencialmente a nociones métricas: figuras y formas regulares, medida de área y de volumen, etc.

En el caso de los adolescentes, los jóvenes y los adultos, hay que subrayar primero que los resultados se distinguen más y más entre los grupos de edades diferentes a medida que nos acercamos al nivel métrico. Así, las puntuaciones en el nivel topológico no parecen progresar con la edad, mientras que progresan un poco más en cada uno de los otros niveles geométricos. Son los resultados de los items de nivel afín los que más crecen con la edad, mientras los de nivel topológico son los que menos crecen, pero crecen a pesar de todo de una manera significativa.

Una vez más, esta situación, a lo mejor, no hace más que reflejar el poco cuidado puesto en las nociones distintas de las métricas o en los dibujos en perspectiva, a lo largo del aprendizaje académico.

Lo que hay que observar también, es el descenso acentuado de las puntuaciones en el nivel proyectivo. Contrariamente a nuestra hipótesis de origen que suponía un debilitamiento contínuo de las puntuaciones desde el topológico hasta el métrico, asistimos globalmente a una caída significativa de las del nivel proyectivo y a una homogeneización de las puntuaciones entre los otros tres niveles geométricos: topológico, afín y métrico. Este fenómeno nos lleva a suponer que el nivel proyectivo es quizás directamente el menos solicitado en las diversas actividades de aprendizaje de la vida cotidiana, o quizás especificamente el más espacial en el sentido de que, parece que es más difícil resolver los items proyectivos que los otros items (topológicos, afines y métricos) por estrategias analíticas (observar, contar, medir, etc.)

Los items proyectivos parecen hacer un llamamiento a estrategias más bien propiamente espaciales, exigiendo operaciones y transformaciones en el espacio propias al factor "visualización" identificado por los psicométricos, mientras que los items de los otros niveles serían más "analíticos", en el sentido del factor "relación". Estos hacen un llamamiento a una capacidad de "reconocimiento" de las formas.

Más específicamente, en el caso de los adolescentes, las notas medias aumentan en comparación con las de los niños en los niveles topológico y afín, pero su puntuación en los niveles proyectivo y métrico quedan flojas. Los items de nivel proyectivo son también poco logrados como los de nivel métrico. Los resultados de los jóvenes adultos (18-24 años) son más débiles (a=0,01) en los items de nivel proyectivo, de una manera significativa. Los adultos (30-35 años) tiene éxito de una manera relativamente más homogénea a través de los niveles geométricos. Las diferencias entre las notas medias se atenúan. Solo los items de nivel proyectivo quedan menos logrados.

En los dos primeros casos, topológico y proyectivo, no hay diferencia significativa entre los grupos de adolescentes, de jóvenes adultos y de adultos. En los niveles afín y métrico, la mejora de la puntuación entre los grupos de diferentes edades parece ser más regular que en los niveles topológico y proyectivo. En el nivel métrico, los adolescentes no se distinguen de los niños, solo los jóvenes adultos y los adultos obtienen pues resultados superiores de una manera significativa.

Conclusión

Los resultados de los más jóvenes (11-12 años) responden al modelo de Piaget. No obstante, las puntuaciones observadas en el conjunto de los cuatro grupos estudiados (infancia, adolescencia, joven adulto y adulto) no permiten confirmar nuestra hipótesis en cuanto al orden de adquisición de las propiedades geométricas según el orden jerárquico de su axiomatización (desde el topológico hasta el métrico) hasta la edad adulta. En oposición con las observaciones de Lunkenbein, los items de nivel proyectivo son, a partir de la adolescencia, constantemente menos logrados que los otros niveles geométricos, y quedan así hasta la edad adulta. Así, las preferencias expresadas por las representaciones en perspectiva no parecen reflejar una mejor comprensión de las nociones proyectivas. En cambio, las puntuaciones en estos items siguen mejorándose después de 20 años de edad, mientras que los otros se estabilizan y tienden a homogeneizarse cuanto más mayores son los sujetos.

De hecho, las puntuaciones, en cada uno de los cuatro niveles, progresan hasta la edad adulta. La evolución más significativa tiene lugar entre la infancia y la adolescencia, hacia la edad de 12 a 14 años, y está pues particularmente marcada por los items del nivel topológico. Las puntuaciones inferiores observadas en el nivel topológico se explican quizás en parte por la familiaridad relativa con las figuras métricas y afines, las cuales son más a menudo utilizadas en los manuales escolares como en la vida corriente. Pueden también explicarse por el tipo de habilidad psicológica solicitada por los items relacionados a estos diferentes niveles geométricos. En efecto, los items de nivel topológico, donde se trata de interpretar una proyección del objeto, parecen más "operatorios" en el sentido del factor psicométrico "visualización" que se refiere a la transformación de las formas; mientras los items de los otros niveles, donde se trata de describir la estructura del objeto, parecen más "analíticos" en el sentido del factor "relación" que se refiere al reconocimiento de las formas.

Bibliografía

CRONBACH, L.J. *Essentials of Psychological Testing.* Harper & Row, New York, 1949, 1960 (1970).

ELIOT, J., SMITH, I.M. *An international directory of spatial tests.* NFER-NELSON, (1983).

KOSSLYN, S. MICHAEL *Image and Mind.* Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1980).

KOSSLYN, S. MICHAEL *Ghosts in the Mind's Machine.* W. W. Norton & Compagny, New York (1983).

LOHMAN, D.F. *Spatial Ability: A review and reanalysis of the correlational literature.* Aptitude Research Project. Report #8, Standford California University (1979).

LOHMAN, D.F., PELLEGRINO, J.W., ALDERTON, J.W. Regian Dimensions and Components of individual differences in Spatial Ability, in *Inteligence and Cognition: Contemporary Frames of Reference.* Ed. S.H. Irvine et S. E. Newstead, Marinus Nijhoff Publishers et NATO, Boston (1987).

LUNKENBEIN, D., ALLARD, H., GOUPILLE, C. *Observations concernant le genèse et le développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte.* Rapport nº 34, Programme F.C.A.C., M.E.Q. (1981).

LUNKENBEIN, D., ALLARD, H., GOUPILLE, C. *Structuration intérieure d'objets géométriques dans le genèse d'idées spatiales.* Rapport nº 35, Programme F.C.A.C., M.E.Q. (1982).

MCGEE, M.G. Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal and Neurological Influences. *Psychological Bulletin,* vol. 86, nº 5, 889-918 (1979).

MONGEAU, P. *Analyse et évaluation psychologique et géométrique de la représentation spatiale.* Université de Montréal, thèse de 3ième Cycle (1989).

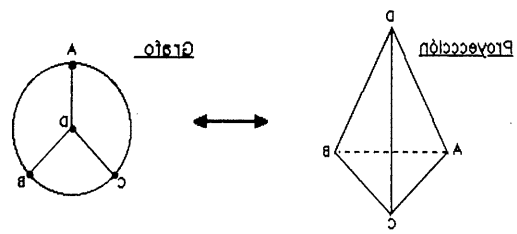
PELLEGRINO, J.W., ALDERTON D.L., SHUTE, V.J. Understanding Spatial Ability. *Educational Psychology,* vol. 19, nº 3, 239-253 (1984).

PIAGET, J., INHELDER, B. *La représentation de l'espace chez l'enfant.* Presses universitaires de France, Paris 1947/1972).

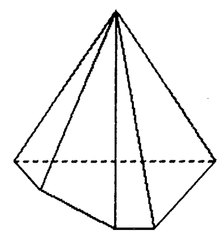
ANEXO

Ejemplo y pregunta en un item topológico

Ejemplo: Las figuras de abajo corresponden a una misma forma. Los vínculos entre los vértices A, B, C Y D son los mismos

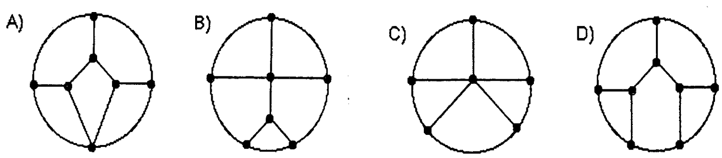


Pregunta: ¿Cuál de los gráficos de abajo corresponde a la forma representada al lado?



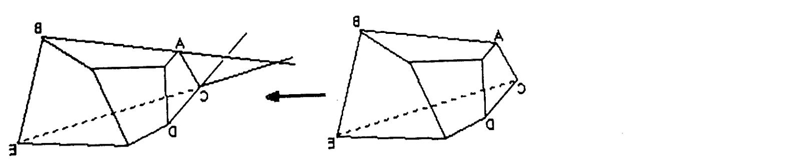
INDICA TU RESPUESTA

A	B	C	D



Ejemplo y pregunta de un item proyectivo

Ejemplo: Si prolongamos en el espacio las aristas de la forma representada de abajo, algunas de ellas se cruzarán, mientras que otras nunca. Por ejemplo, las aristas AB y CD no se cruzan; en cambio, AB y CE si.



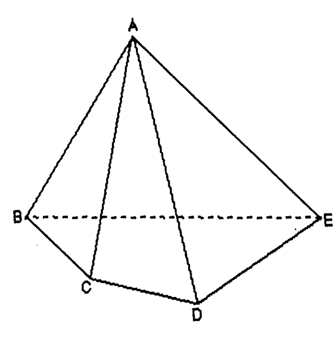
Pregunta: Mira bien la pirámide de la derecha. ¿Qué par de aristas se cruzarán en un punto exterior a la forma cuando las prolongamos en el espacio?

ELIGE TU RESPUESTA

1) AE Y BC;
2) BC Y DE;
3) AB Y CD;
4) AD Y BC.

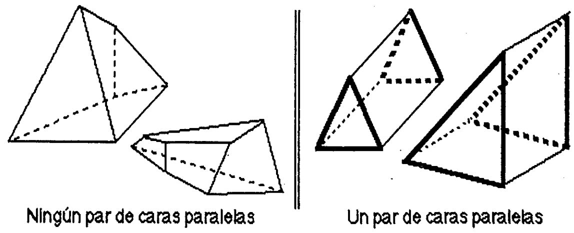
INDICA TU RESPUESTA

1	2	3	4



Ejemplo y pregunta en un item afín

Ejemplo: Se pueden agrupar formas según el paralelismo de sus caras.



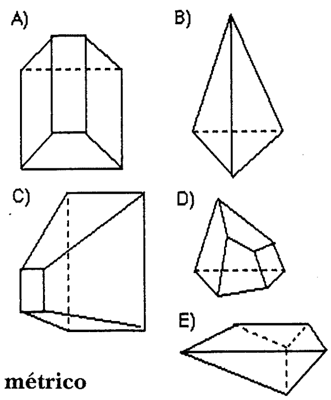
Pregunta: ¿Cuál de los enunciados de abajo (de 1 a 4) corresponden correctamente, a las cinco formas representadas más abajo, según el paralelismo de sus caras?

ELIGE TU RESPUESTA

1) Las formas A, B y C juntas,
2) Las formas B y E juntas,
3) Las formas A, C y E juntas,
4) Las formas A, C y D juntas

INDICA TU RESPUESTA

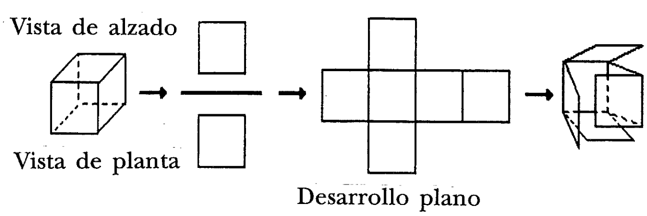
A	B	C	D



Ejemplo y pregunta en un item métrico

Ejemplo; El alzado y la planta

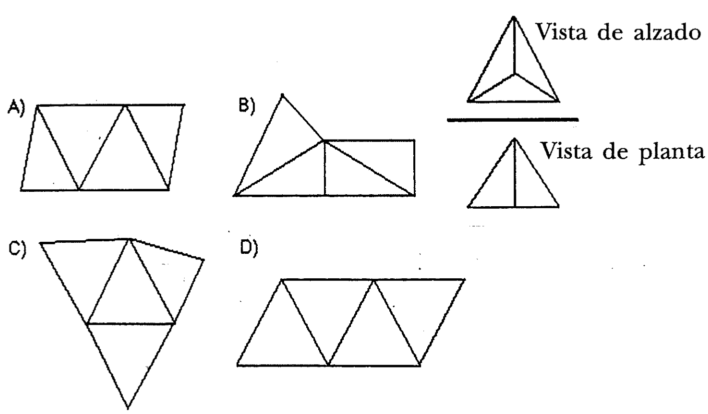
Las vistas de cara y de encima de la forma representada más abajo permiten conocer el verdadero tamaño de las caras y de las aristas. Se puede hacer pues un despliegue plano que, una vez replegada de nuevo, permite de obtener la forma ilustrada.



Pregunta: ¿Cuál de los desarrollos planos de abajo permiten obtener la forma representada por las vistas de planta y de alzado al lado?

INDICA TU RESPUESTA

A	B	C	D



Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros

M. Dolores Iriarte Bustos
Manuela Jimeno Pérez
Inmaculada Vargas-Machuca de Alva

Introducción

Al analizar las respuestas dadas por estudiantes de 8º de E.G.B. y E.U de Magisterio a preguntas que requieren poner en funcionamiento la estructura algebráica y de orden de los números enteros, hemos tratado de poner de manifiesto las ideas causantes de los errores y olvidos constatados y que obstaculizan el aprendizaje de los números enteros.

Estas ideas obstaculizadoras las hemos agrupado en dos apartados:

A) Lo real como obstáculo: el apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria de número como cantidad, obstaculiza de múltiples formas la construcción de Z.

b) La imposición de lo formal como obstáculo: la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas. Si no es así, lo formal queda vacío de significado, y se convierte en mera apariencia que no tarda en desvanecerse.

Obstáculos y errores

La enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores, se esfuercen en buscar situaciones concretas para justificar todas las propiedades de los enteros; pero por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones. Es decir, se trata de un tema en el que no cabe aplicar la vía que caracteriza a la enseñanza de la matemática elemental, ni tampoco la que caracteriza a la enseñanza superior, pues ninguna de las dos es, en este caso, satisfactoria: la primera porque impide el acceso a lo abstracto, la segunda porque la imposición de la abstracción es estéril.

A) Lo real como obstáculo

El alumno está acostumbrado a ver en los números primero, y más tarde en las letras con que opera, representaciones de cosas reales y concretas, y en las operaciones con números o letras las correspondientes operaciones con las cosas. (F. Klein 1927).

El gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia, profundamente enraizada en la experiencia de cada cual, que identifica número con cantidad y que se vio favorecida por la concepción que de las matemáticas predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real.

Y si necesitaron más de diez siglos para plantear la cuestión de los negativos en el plano formal es que, desde luego, la ruptura con la evidencia inmediata no resulta fácil, y aquí radica la gran dificultad de la enseñanza/aprendizaje de los números enteros.

El conocimiento del número entero exige pues, la ruptura con algunas ideas que están muy ligadas al conocimiento que se posee de la aritmética práctica.

A1) El número como expresión de cantidad

"¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido -(-3)?"

"No, porque no es posible quitar una cosa que no existe". (Alumno de Magisterio).

Mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos, porque simplemente, no son necesarios. Nadie dice: "tengo -300 ptas" sino "me faltan 300 ptas.", y el prescindir del negativo no provoca ningún problema.

La identificación de número con cantidad también va a obstaculizar la generalización de las operaciones aritméticas y de orden, como veremos en lo que sigue:

A2) La suma como aumento

La concepción ingenua de suma como acción de añadir una cantidad a otra, es la que hace que algunos estudiantes ante la pregunta:

"**¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 de 2?**", sin acordarse para nada de los negativos ni de lo que "saben" sobre ellos, respondan que no es posible o se queden perplejos sin contestar.

A3) La multiplicación como multiplicación natural

"**¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?**"

Son bastantes encuestados los que no contestan o responden: "no existe", posiblemente porque no conciben la idea de un múltiplo de cinco menor que él. Otros para eludir el conflicto que les provoca esta idea confunden los conceptos de múltiplo y divisor y responden que se trata del número 1.

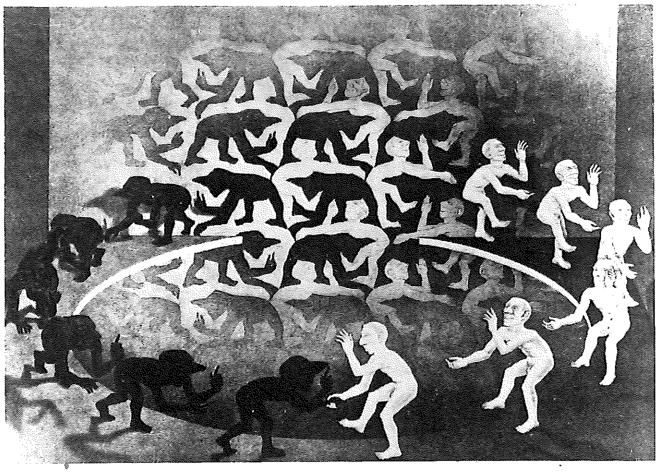
La concepción de la suma como aumento se traslada también a la multiplicación, "debe (-5) y hace 3 años debía (-3) veces lo de ahora, (-5).(-3)". Esta respuesta muestra un intento frustrado de imitar los múltiples ejemplos que salpican los libros de texto para tratar de justificar la regla de los signos. En donde la concepción de multiplicación natural como número de veces una determinada cantidad se mantiene vigente.

A4) La sustracción como disminución

"He conocido algunos que no podían entender que al restar cuatro de cero quede cero" (B. Pascal).

"**¿Es posible encontrar un número que restado de 7 de 10?**"

Algunos alumnos afirmar que no existe, otros no se atreven a ser tan tajantes pero al no caer en cual pueda ser, dejan la pregunta sin contestar, y por último, están los que eluden el conflicto tergiversando la pregunta; ellos parecen entender: "¿Qué



número al restarle 7 da 10?", pregunta que no plantea problema a la lógica natural y responden "17".

La sustracción también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y por tanto, con disminución.

A5) La división como división natural

La división con números naturales se hace por defecto y admite ser interpretada como reparto o agrupamiento de objetos.

Esta es la idea que tienen más de la mitad de los encuestados de división y por eso contestan negativamente a la pregunta:

"**¿Es correcta la siguiente división?**"

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} -1 & 1 \end{array}$$

Y algunos especifican: "3 entre 4 no cabe"; "3 entre 4 cabe a 0"; "el resto no puede ser negativo".

A6) El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural

En la serie natural los números van aumentando a medida que van estando más alejados del origen.. El trasladar esta secuencia a los negativos es la causa de que algunos encuestados cuando se les pregunta: "**Cuál es el número mayor en una unidad a -3?,**" respondan: "-4".

"**En la lista de los cuarenta principales, el disco favorito de Juan estaba 3 lugares más abajo de lo que**

había estado la semana anterior. La antigua posición era la 3 ¿Cuál es la nueva?", hemos encontrado el mismo error. Responden: "w3-3=w0".

A7) Ignorar el signo

Este error consiste en ignorar sistemáticamente el signo que precede a las temperaturas negativas, identificando así los números negativos con los naturales.

"-7 grados en Moscú, -3 en Budapest. **Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿Habría notado una subida o una bajada de temperatura?"**

Algunos estudiantes, olvidando por completo el signo "menos" y operando como si se tratara de números naturales contestan: "una bajada porque 7 - 3 = 4".

En el otro extremo están aquellos que siendo sensibles al signo "menos" lo hiperutilizan y responden: "una bajada de -4 grados".

A8) Identificación de los símbolos literales con números positivos

Bastantes encuestados afirman:

"a no puede ser un número negativo, sería -a".

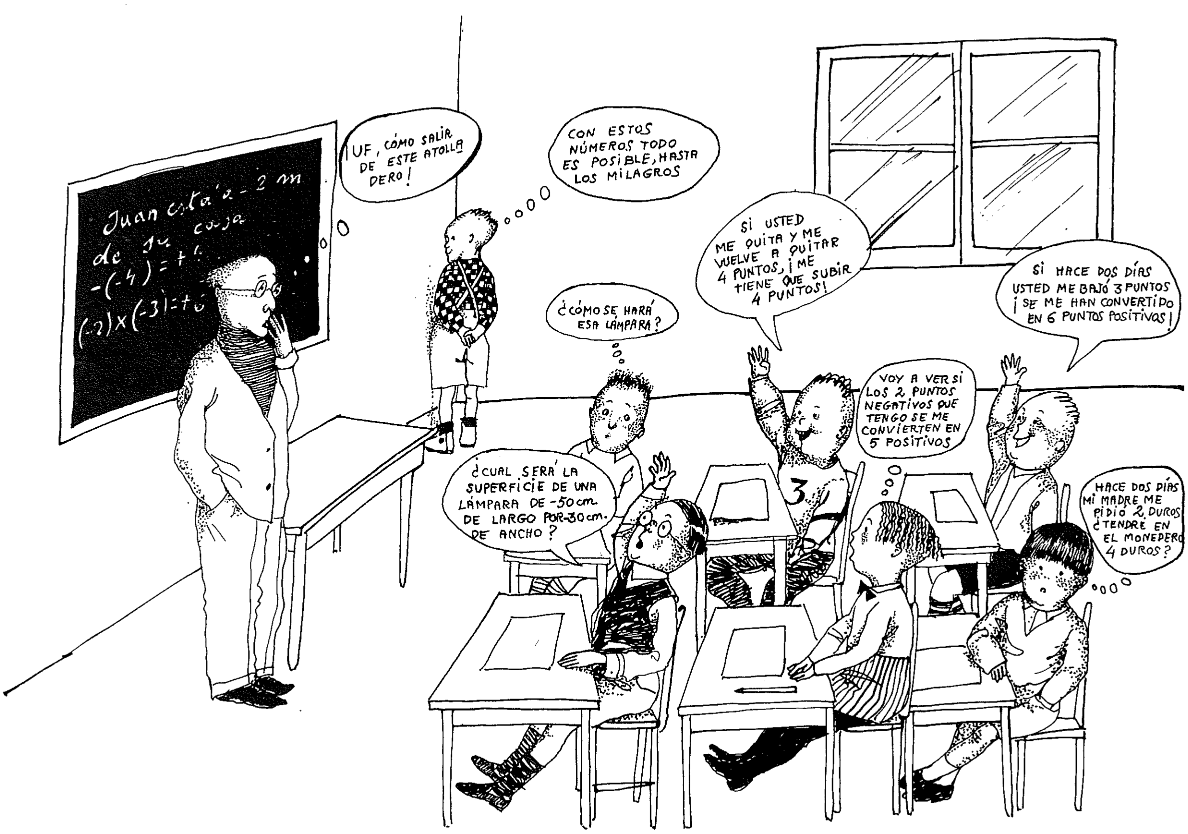
Y a la pregunta que pide calificar de verdadera o falsa la siguiente expresión:

"Si a es positivo y b es negativo, a-b es un número positivo" contestan diciendo que de a-b no se puede decir que sea positivo o negativo sino que "depende de los valores que tomen a y b", esto es, razonan como si a y b fuesen ambos números positivos.

B) La imposición de lo formal como obstáculo

"*Siempre se conoce en contra de un conocimiento anterior*" (G. Bachelard).

La historia de los números enteros confirma este principio epistemológico, pues cada avance en su



—SI A LOS NIÑOS LES DIERA POR BUSCARLE UTILIDAD A LOS NEGATIVOS—

conocimiento ha supuesto la ruptura con concepciones previas. Sin embargo, en la enseñanza de los números enteros, según el testimonio de los libros de texto, parece olvidarse con frecuencia; quedando reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en obstáculo y origina errores, pues los estudiantes se ven inmersos en un terreno en el que no pueden orientarse porque carecen de intuiciones, o porque las tienen pero se encuentran tan alejadas de la teoría que no le sirven de ayuda.

B) En el manejo del orden lineal

Hay algunos errores que pueden ser achacables a que trasladen el orden de N a otras situaciones, ya consideradas en el apartado anterior, pero hay otros, que son los que aquí señalamos, que son inherentes al concepto de orden.

—Fracaso en la inversión de una relación de orden

Bajo este epígrafe hemos reunido los errores constatados en una serie de preguntas que se resuelven por inversión. Con estos errores, una vez más se pone de manifiesto cuán lenta es la conquista de la reversibilidad, entre otras cosas porque, no es capitalizable, pues al haberla adquirido dentro de un contexto no significa que sea extensible a cualquier otro contexto.

"Pedro tiene 5 canicas más que Juan y Juan tiene 3 canicas más que Enrique sabiendo que Pedro tiene 26 canicas ¿Cuántas canicas tiene Enrique?

Los errores que hemos constatado están provocados porque no realizan la inversión de las relaciones "más que" y "menos que" y por ello contestan que "Juan tiene 31 canicas y Enrique 28" y en otros casos, invierten con éxito la primera relación pero no la segunda y contestan "Juan tiene 21 y Enrique 18".

Ninguno de los encuestados dibuja un esquema de recta numérica, pero como el problema les pide que simbolicen la situación algunos plantean ecuaciones.

Por otro lado, da la impresión de que los estudiantes no son sensibles a las situaciones relativas que encierran enunciados tan habituales como el siguiente:

"El ordenador de Eva costó 12.000 ptas. más que el de Alejandro. El de Eva costó 52.000 ptas. ¿Cuánto costó el de Alejandro?

El error más frecuente es dejarse engañar por la palabra "más" y contestar que el ordenador de Alejandro costó:

$$52.000 + 12.000 = 64.000$$

—La secuencia temporal como fuente de errores

"Sara gastó ayer en 'chucherías' 8 ptas más que hoy. Ayer gastó 35 ptas. ¿Cuántas ha gastado hoy?"
Son bastantes los que contestan 35 + 8 = 43.

Por otro lado hemos constatado la tendencia a olvidar la doble orientación del tiempo. Así en el problema:

"El señor Ruiz tiene 56 años y su hijo 29. ¿Cuándo la edad del padre es doble que la del hijo?"

Los errores observados hacen pensar que han buscado la solución en el tiempo por venir, y no han considerado la posibilidad de que el suceso se hubiese dado en el pasado.

Por eso responden "nunca" y otros, "dentro de 2 años pues 29 . 2 -56 = 2", donde el supuesto implícito de que el suceso se dará en el futuro se le suma el de considerar que el tiempo no pasa para el hijo. Otra variante dentro de este tipo de respuesta es la de aquellos que se dan cuenta que la única forma de estancar la edad del hijo es hacerlo morir y responden: "cuando el hijo muera", o también, "si el hijo muere con 30, cuando el padre tenga 60".

—Identificación de una relación con su recíproca

¿Qué número precede en 7 unidades a -3?

Al identificar "x precede a -3 en 7 unidades" con su recíproca "x sigue a -3 en 7 unidades", cerca de la mitad de los encuestados responden que es 4.

B2) Las reglas de cálculo como formalismo vacío

Si estas reglas se encuentran vacías de contenido y significación son fáciles de olvidar y confundir.

La regla de los signos es la que parece más asumida. Las reglas de la adición resultan más difíciles de memorizar y provocan mayor número de errores. Cuando interviene la sustracción los errores aumentan.

La dificultad es aún mayor cuando los cálculos se encuentran dentro de un contexto algebraico.

B3) Los enteros estudiados y olvidados

En las respuestas a las preguntas:

"¿Qué número sumado a 5 da 3?"

"¿Puedes encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?

"¿Qué número restado de 7 da 10?

Hemos constatado que son bastantes los que no se acuerdan de los negativos y responden que no existe tal número o dejan la pregunta sin contestar.

También los olvidan a la hora de simbolizar ciertas situaciones relativas inventando sus propios símbolos: tres pasos hacia delante, 3—; tres pasos hacia atrás —3.

Conclusiones

1.- Separación entre pensamiento académico y natural

Los errores constatados en situaciones que se encuentran, sin duda, dentro de la experiencia de todos los alumnos encuestados, manifiestan un pensamiento lo suficientemente rígido como para dejarlos indefensos frente a la seducción de ciertas palabras engañosas que les impiden resolverlas. También puede ser indicio de la separación que existe en muchos alumnos entre pensamiento natural y pensamiento académico, la flexibilidad de pensamiento que muestran en situaciones ajenas a la escuela se convierte en agarrotamiento ante un ejercicio escolar, y si es de matemáticas peor.

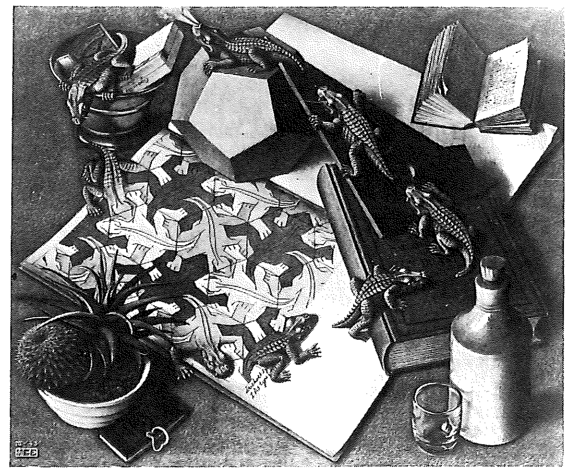
2.- Necesidad de tratamiento matemático de las situaciones de comparación en el curriculum

Las preguntas que se hacen dentro de un contexto de comparación "es tantos años mayor que", "ha costado tantos menos que", tienden a traducirlas de forma mecánica a una operación aritmética sin tener en cuenta la relación de orden en la que están inmersas. La abundancia de errores en estas preguntas muestran el olvido de estas cuestiones en la práctica escolar.

Puede ser que los encuestados hayan estudiado las relaciones de orden, que conozcan que son relaciones antisimétricas y transitivas, pero si es así, lo tienen totalmente separado e inutilizado a la hora de afrontar cuestiones que exigen la consideración de los dos sentidos en una relación de orden.

3.- Paralelismo entre los obstáculos históricos y los obstáculos en el aprendizaje

Históricamente el conocimiento que se poseía de los números como expresiones de cantidad, obstaculizó durante siglos la aceptación de los negativos y la construcción de Z. Los errores de los estudiantes provienen en muchos casos de tratar las situaciones con números negativos con herramientas de la aritmética natural (número como cantidad la adición como aumento, traslación del orden natural a Z, etc.).



4.- Ausencia de representación de los procesos de pensamiento

Según Piaget (1975) los enteros surgen no como resultado de una acción sino de la toma de conciencia de los mecanismos que rigen la propia acción, de ahí que su aparición fuese más tardía.

La dificultad para reflexionar sobre el proceso queda de manifiesto en las respuestas: la mayoría sólo expresan los resultados no el proceso que les llevó a ellos. Quizás esta falta de representación sea consecuencia de que en la enseñanza vigente se prima la obtención del resultado sobre el análisis de los procesos.

5.- Ausencia de un modelo unificador para el tema de los números enteros

La mayor dificultad para la enseñanza de los números enteros es la no existencia de un modelo concreto que explique todas las propiedades de Z. El intento de utilizar un modelo de este tipo que cubra totalmente el estudio de los enteros es contraproducente por dos motivos:

a) Obstaculiza el aprendizaje al impedir la ruptura con lo real; necesaria para la construcción de Z.

b) Convence al alumno de la inutilidad de los negativos, ya que los ejemplos propuestos para justificar ciertas propiedades de los enteros se resuelven mejor en el marco de la lógica natural.

Por otro lado el tratamiento de los enteros desde un punto de vista exclusivamente formal es estéril pues lo formal no se puede imponer por decreto. Prueba de ello es que ni siquiera el objetivo mínimo de utilizar correctamente las reglas de cálculo llega a realizarse totalmente.

6.- Necesidad de provocar el conflicto que entraña el número entero

La enseñanza/aprendizaje de los números enteros, desde nuestro punto de vista, ha de estar marcada por el conflicto, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real.

Sólo afrontando este conflicto es posible descubrir las limitaciones que lo real impone a la aritmética práctica, concebir los números enteros como ampliación de los naturales que permite trascender el plano de la acción y generalizar el concepto de número, operación aritmética y orden.

Pero lo habitual en la enseñanza de los números enteros no ha sido provocar el conflicto sino evitarlo, con lo que las concepciones ingenuas de la aritmética práctica han seguido vigentes y los números enteros se han visto reducidos a un formalismo vacío.

Bibliografía

—BACHELARD, G. *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI. Argentina (1974).

—BELL, A. "Enseñanza por diagnóstico, algunos problemas sobre números enteros" *Enseñanza de las Ciencias.* 4(3) (1986).

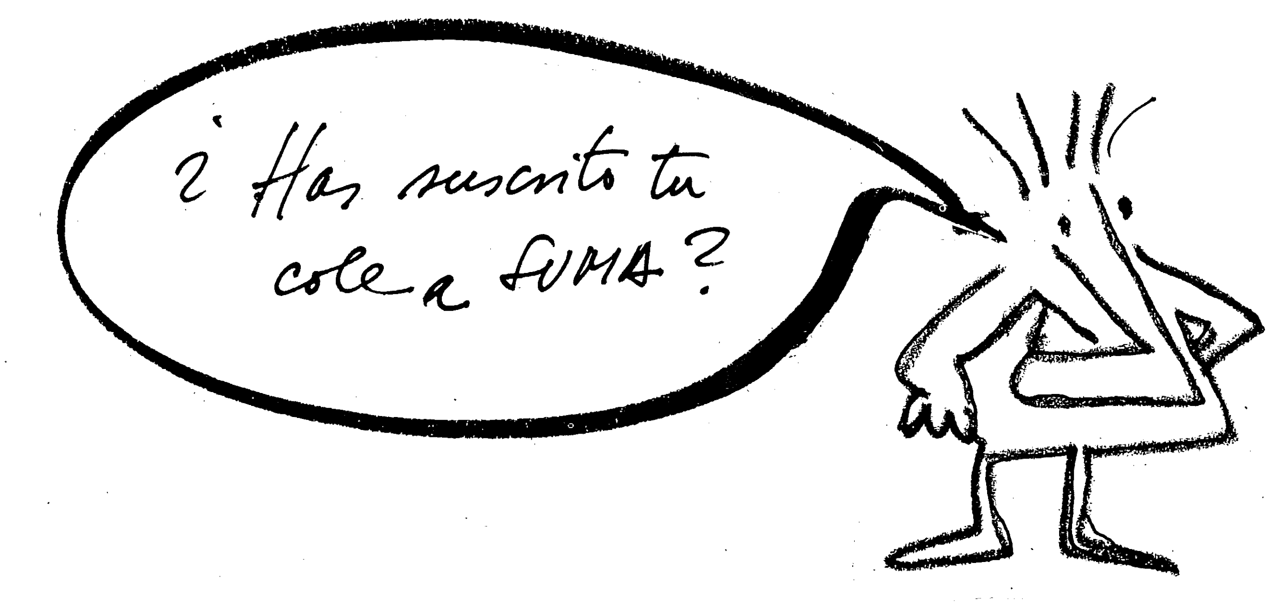
—BELL, A. "Looking at Children and Directed Numbers". *Mathematics Teaching, nº 100* (1982).

—BELL, A. "Direct Numbers and the Bottom up curriculum". *Mathematics teaching nº 102.* (1982).

—GLAESER, G. "Epistemologie des nombres relatifs". *Recherces en didactique des Mathématiques, 2.3* (1981).

—KLEIN, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Colección de Rey Pastor. Madrid (1927).

—PIAGET, J. *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Paidos. Buenos Aires. (1975).



Nota sobre la enseñanza de la lógica en el bachillerato

Eric Trillas
Alexandre Sobrino

0. Introducción

En este trabajo se pretende dar un conjunto de ideas un tanto espontáneas, muy generales y no totalmente sistematizadas sobre la enseñanza de la lógica en el bachillerato. Señalar programáticamente cómo debe enfocarse la enseñanza de una materia es un proyecto controvertido y a menudo sujeto a polémica; ello no sólo sucede con la lógica, sino más bien, parece acentuarse en ella, dado que se trata de enseñar un contenido que a su vez instruye acerca de cómo razonar correctamente con otros contenidos. Por eso conscientes de la complejidad de la didáctica en general y de la didáctica de la lógica en particular, esta nota pretende ofrecer solamente un conjunto de observaciones parciales acerca de algunos aspectos que pueden ser relevantes para la enseñanza de la lógica en el bachillerato.

Las ideas que a continuación se exponen se articulan a través de la inevitable pregunta de partida de si la lógica debe figurar o no en el bachillerato. Dada una respuesta positiva, las propuestas tratan de responder a aquellas cuatro cuestiones que pretenden, tradicionalmente, abarcar de un modo genérico las posibles preguntas acerca de un tema: qué, cuándo, cómo y dónde debe enseñarse la lógica en le bachillerato. Todas estas cuestiones señalan el hilo conductor de las ideas que a continuación sometemos a juicio, las cuales, de debatirse, podrían arrojar algunos logros programáticos.

1. ¿La lógica, sí o no en el bachillerato?

La respuesta es, inequívocamente, sí a la enseñanza de la lógica en el bachillerato, dado su papel propedéutico para el buen razonar. La lógica ejerce un efectivo control sobre la corrección de una clase especial de razonamientos, los argumentos, y proporciona la confianza de que, en el diálogo interactivo humano, en el que intentamos o nos intentamos convencer de algunas tesis, existan herramientas que aseguren que la persuasión sólo es admisible cuando está sometida a unos controles de objetividad; precisamente, los que ella proporciona. Lógica, por tanto, no es persuasión, aunque desde luego, la lógica también puede ser persuasiva. Mostrar esta diferencia y hacerla comprender a los alumnos parece fundamental.

1.1. Si la lógica no es persuasión, ¿qué debemos entender por lógica?

Se define usualmente la lógica indicando que es la ciencia que estudia la corrección en el razonamiento, las formas válidas de inferencia. El término "corrección" tiene una gran importancia en esta definición, y hacer hincapié en el papel formal de la lógica como *saber* que estudia las formas de los razonamientos, en principio, independientemente del contenido que tengan éstos, es un concepto que debe inculcarse al alumno. También es fundamental hacerle comprender la diferencia entre validez y verdad, señalando que mientras la validez alude a la forma de los argumentos, la verdad se refiere a su contenido. La *lógica formal* estudia formas y alude a la validez, a la corrección argumentativa.

La corrección es importante en un doble sentido.

1.1.1. La corrección como propuesta ética.

El papel propedéutico que la lógica tiene para el razonar humano puede resumirse en dos funciones distintas; como asesora y como fiscal de los argumentos propios o como asesora y fiscal de los argumentos ajenos. Como asesora, la lógica orienta en la confección de argumentos concretos Como fiscal, vela para que la demagogia, la falacia o el engaño tengan la menor acogida en el discurso humano. La lógica permite, por tanto, autocontrolar tanto los propios razonamientos como los argumentos ajenos, contribuyendo por tanto a que la racionalidad se instaure en el mundo. Una propiedad inherente al carácter racional, serio y científico de los saberes es que se intente probar lo que se afirma o que se haga ver de un modo claro que lo que se concluye se sigue válidamente de los presupuestos o hipótesis de partida o que, simplemente, *se sigue* de alguna manera previamente acordada. Esta es una de las funciones de la lógica: objetivar las situaciones, ayudar a obtener un criterio propio y a asumir, conscientemente, las consecuencias que se siguen de este criterio. La lógica ayuda, por tanto a madurar y el alumno debe entenderlo así.

1.1.2. La corrección como propuesta formal.

Ya indicábamos que "corrección" es un concepto vinculado a la forma de los argumentos, no a su contenido. El ser, en parte, la ciencia de la corrección formal le confiere a la lógica un papel metadisciplinar, una función metateórica que la diferencia de otros saberes. La lógica formal se conforma entonces como una ciencia con un contenido propio (las propiedades formales de la forma de los razonamientos) que tiene repersusiones ajenas (sobre las ciencias y los lenguajes donde se hacen los razonamientos concretos).

1.1.3. La lógica es entonces una disciplina empírica, y así debe mostrársela a los alumnos. Uno de sus objetos principales de estudio es el lenguaje puesto de una determinada forma argumentativa. Y así como la geometría estudia cuerpos a través de figuras y movimientos, la lógica estudia razonamientos a través de símbolos y substituciones Estos símbolos forman parte de un lenguaje formal bien estructurado, por lo que debe hacerse ver a los alumnos que —en palabras de Putnam— la lógica es tan empírica como la geometría. Ello no es fácil, pero de lograrse puede resultar enormemente formativo.

1.1.4. La lógica formal debe mostrarse entonces como un saber riguroso, constituído en un lenguaje formal perfectamente definido. Cuenta con un vocabulario, que indica todos y cada uno de los símbolos del sistema, unas reglas de formación, que indican como formar expresiones complejas a partir de estos símbolos primitivos y unas reglas de transformación, que permiten convertir unas expresiones en otras conservando la validez del razonamiento. Es muy conveniente que el alumno llegue a participar completamente de este carácter estructurado y riguroso de la lógica.

2. ¿Dónde enseñar lógica?

La utilidad de la lógica para algo tan básico como el buen razonar y su carácter metadisciplinar, hace que tenga un contenido propio (el estudio de las propiedades formales de los argumentos) que puede ser ejemplificado con contenido ajenos (argumentos concretos). Esta dualidad debe quedar reflejada en su aprendizaje. Por ello, propondremos enseñanza de la lógica participando en distintas asignaturas, porque;

a) La lógica requiere de la enseñanza de sus contenidos concretos.

b) Una parte de la enseñanza de estos conceptos propios se beneficia de su *ejemplificación* en distintos tipos y contenidos de argumentos.

c) El análisis lógico de partes de otras asignaturas ha llevado, históricamente, a importantes replanteamientos de las mismas.

2.1.*La lógica participa en otras asignaturas.*

En ellas, los razonamientos que la lógica estudia, alcanzan una realización concreta. Un objetivo interesante sería enseñar algunos contenidos concretos de la lógica analizando argumentos sobre temas específicos y en un lenguaje concreto. Así se conseguiría posiblemente mostrar con más facilidad al alumno que la lógica es de este reino terrenal, no de un reino celestial imaginario (parafraseando a Russell) y que es un saber útil. Y tanto más útil en conjunción con el trabajo descriptivo y la imaginación creadora.

2.2. Seleccionemos cinco tipo-contenidos de razonamiento, en los que algunos conceptos lógicos pueden alcanzar un interesante nivel ejemplificación. Esto permitiría vincular la enseñanza de la lógica a la enseñanza de algunas disciplinas concretas.

	científico	... Física
Tipos de argumento	común	.... Gramática, Informática
(por su contenido)	histórico	.... Filosofía (de la Ciencia)
	simbólico	... Matemática

2.3. Por tanto, la enseñanza de la lógica debería estar vinculada, en alguna etapa, a su papel en el análisis de argumentos de la física, de la gramática, de la filosofía, de la informática y de la matemática. Se pondría énfasis así en su utilidad y su no aislamiento respecto a otros saberes.

2.4. Pero además de ser útil su ejemplificación para observar con más claridad su papel asesor y fiscal de los argumentos de estas ciencias, su ejemplificación en ellas puede ser también retroalimentación beneficioso para la lógica, ya que algunos argumentos concretos pueden poner de manifiesto algunas deficiencias de los instrumentos usuales de análisis lógico. P. ej., en informática y control, el razonamiento con proposiciones vagas; en física, argumentos de la mecánica cuántica, etc... Así se conseguiría mostrar a los alumnos que la lógica es una ciencia viva que evoluciona constantemente, evolución de la que ellos pueden ser participantes. Es el caso del cálculo con relaciones, que fue el gran salto dado por la lógica al contacto con otras disciplinas.

3, ¿Cuándo enseñar lógica?

Razonar no está vinculado a un número delimitado de pensamientos concretos, sino a una capacidad formal y abstracta conseguida durante el desarrollo psicológico humano. Lo que marca la madurez cognitiva en el niño es precisamente el despegue de los objetos concretos, la ausencia de egocentrismo y la capacidad de realizar primero clasificaciones y, luego, operaciones formales. La desvinculación de los objetos concretos tiene como importante consecuencia el advenimiento de la capacidad de conjeturar, de hacer hipótesis, de emplear el razonamiento hipotético-deductivo, ampliamente usado en las ciencias. Antes de cierta edad sería inútil enseñar lógica.

Cuando se empieza el BUP, precisamente en torno a los 15 años; Es entonces un momento propicio para que se ejercite algo que señala nada menos que madurez cognitiva: el pensamiento abstracto o formal. A partir de entonces, la enseñanza de la lógica no sólo es deseable, sino conveniente; otra cosa son las dosis de enseñanza en cada curso.

En las primeras etapas del BUP, sin embargo, el estudiante todavía se siente poco familiarizado con el pensamiento abstracto y, a menudo, debe echar mano del objeto concreto. En los primeros cursos el estudiante todavía se siente muy apegado al objeto real y su vinculación progresivamente mayor con la formas requiere, para que capte todo su interés, de abundante ejemplificación. Es en esta etapa donde la lógica no se concibe como una asignatura más, sino como un saber que debe realizarse a través de los programas de otras asignaturas. Proponemos entonces la conveniencia de dar, en BUP *un poco* de lógica en cada una de las asignaturas que arriba se citaron como buenas ejemplificadoras de su objeto de estudio: los argumentos.

En COU, el chico debe estar ya bastante familiarizado con el pensamiento formal. Es entonces cuando la lógica debe tener un hueco propio, como asignatura independiente y corta, donde se reflexione un poco más sobre sus propios contenidos, sobre la teoría de la reducción formal y en la que alcancen madurez y cohesión aquellos conceptos que se habían ilustrado en ejemplos de otras ciencias.

4. ¿Qué debe enseñarse?

Dependiendo de su ejemplificación concreta, un alumno antes de COU debería haberse encontrado, al menos en principio, con los siguientes conceptos (la lista que sigue quiere tener únicamente un papel orientativo y provocador de discursión):

4.1. En física. Los conceptos de hipótesis, método hipotético-deductivo, método inductivo, prueba axiomática, tal vez alguna noción de lógica cuántica.

4.2. En gramática. Los conceptos de expresión bien formada, vocabulario, reglas de formación y reglas de transformación, significado lógico, significado lingüístico, estructura lógica del lenguaje natural.

4.3. En matemáticas. Prueba (como proceso lógico y como proceso metodológico), teorema, estructuras de orden, hipótesis, reducción al absurdo, álgebra de Boole y cálculo con silogismos, probabilidad y situación del axioma de inducción completa entre los de Peano.

4.4. En filosofía. Proposición, argumento, diferenciación entre verdad y validez, vinculación de verdad y validez: tablas de verdad, deducción, consecuencia lógica, satisfacción y verdad, cálculo de proposiciones cuantificadas, hipótesis científica.

4.5. En informática. Lenguajes lógicos, cálculo de deducción natural, reglas de inferencia como transmisoras de verdad (M. P.) o de falsedad (M. T), formas normales, regla de resolución, excursiones fuera de la lógica clásica: lógica modal, lógica intuicionista, lógica borrosa.

5. ¿Cómo debe enseñarse?

5.1. No debe enseñarse memorísticamente, sino acostumbrar al alumno a que el ejercicio lógico sea un hábito racional de juicio crítico, una práctica casi rutinaria de autocontrol del razonamiento propio y ajeno.

5.2. *Con rigor.* Debe mostrarse con claridad que la *prueba* es un proceso absolutamente riguroso, donde no puede darse ningún paso sin estar perfectamente demostrado.

5.3. *Con diversión.* El rigor no debe estar reñido con la enseñanza amena. Algunos ejemplos divertidos o enseñar a resolver acertijos lógicos empleando técnicas formales pueden ser uno de los métodos que hagan la clase, en algún momento, más distendida.

5.4. *Integramente,* vinculando forma y contenido. Así no se verá a la lógica como una suerte de disciplina vacua, como un juego, como a veces es presentada, ni tampoco como un instrumento pobre para semantizar el mundo lo cual no es su objetivo.

5.5. *Sin complejidades teóricas* innecesarias. Ejemplo: Explicar algunos conceptos lógicos a través de ideas algebráicas que los alumnos habrán debido aprender.

6. Logros generales

Algunos logros generales que se pueden esperar de las ideas arriba propuestas son los siguientes:

6.1. Incremento de la capacidad racional: Convencer y dejarse convencer correctamente es útil.

6.2. Ejercicio de las capacidades cognitivas superiores, adquiridas en el último estadio del desarrollo psiçológico.

6.3. Uso correcto y crítico de los contenidos proporcionados por otras materias: un camino hacia la interdisciplinariedad.

6.4. Obtención de criterios propios e incremento de la racionalidad de juicio.

7. Logros específicos

Los alumnos deberían participar de una forma clara, entre otras, de las siguientes convicciones:

7.1. La lógica no es persuasión, aunque puede ser persuasiva.

7.2. La lógica se ocupa de la validez de los argumentos, no de su contenido.

7.3. La lógica ayuda a madurar.

7.4. La lógica es metadisciplinar

7.5. La lógica es empírica en el mismo sentido que lo es la geometría.

7.6. La lógica es útil.

7.7. La lógica es rigurosa.

7.8. La lógica evoluciona.

Informática y Matemáticas en la enseñanza secundaria

Vicente Trigo Aranda

En este artículo se analiza la coyuntura actual de la matemática en la enseñanza secundaria y su relación con la informática, haciendo una prospección del futuro desarrollo de ambas materias. Este desarrollo, necesariamente convergente al tratarse de dos potentes herramientas de cálculo interrelacionadas, es imprescindible e inevitable ya que los sistemas educativos deben concebirse y planificarse teniendo en cuenta las posibilidades que ofrecen las nuevas tecnologías [1].

En primer lugar, y antes de pasar al análisis del presente entorno educativo, parece conveniente volver la vista atrás hacia el pasado de la informática y de la enseñanza matemática, con objeto de averiguar las razones por las cuales la enseñanza secundaria se encuentra en el estadio actual.

El pasado

¡Cálculos, cálculos, cálculos, ...!

Como ya es sabido los primeros ordenadores se construyeron con un fin exclusivamente calculista, debido a que las necesidades de la sociedad exigían cálculos cada vez mas laboriosos y de mayor exactitud. Así, las máquinas de Babbage se diseñaron para elaborar sin errores tablas de logaritmos que facilitaran la navegación marítima; los primeros ordenadores se construyeron durante la II Guerra Mundial para realizar tablas balísticas que permitieran la máxima eficacia del armamento en combate; el analizador diferencial de V. Bush tuvo su origen en la predicción del movimiento de las mareas, etc.

Tengamos presente que la realización de cálculos, generalmente complicados, podía ser una labor que exigiera de un científico arduos trabajos operacionales, impidiéndole desarrollar todo su potencial investigador y desaprovechando así gran parte de sus capacidades. Un ejemplo muy ilustrativo es el de Charles Delaunay [2]: en 1867 tras veinte años de trabajo, finalizó unas tablas para predecir la posición temporal de la Luna; en 1970 un ordenador realizó todas las operaciones en sólo veinte horas, descubriendo de paso tres errores que había cometido Delaunay.

Lógicamente en la enseñanza tambien se reflejaba esta importancia del cálculo. Como botón de muestra basta con leer el libro "Algebra" de José Mariano Vallejo, uno de los matemáticos españoles del siglo XIX de mayor influencia en la enseñanza. En esa obra dedica cien páginas a explicar un método, bastante engorroso por cierto, para resolver ecuaciones polinómicas.

A principios del siglo XX es de destacar el elevado número de métodos de cálculo que se aplicaban habitualmente, empujados por la imperiosa necesidad que exigía la práctica cotidiana [3]:

Métodos de cálculo habituales	
ALGORITMICOS	iteraciones, "regulas"
TABULARES	tablas numéricas
MECANICOS	regla cálculo, arithmómetros
GRAFICOS	ábacos o nomogramas

Paulatinamente los métodos mecánicos y gráficos fueron eliminados del entorno general educativo y acabaron refugiándose en carreras técnicas donde todavía hoy se siguen utilizando: arquitectura, ingenierías, etc.

En resumen: hasta la aparición y generalización de los ordenadores gran parte del esfuerzo estudiantil debía dedicarse necesariamente al aprendizaje memorístico de algoritmos de cálculo y manejo de tablas diversas. Como era previsible, el punto de mira de la enseñanza se trasladó del estudio de la comprensión del proceso al de su mecánica de aplicación.

El presente

¡Cálculos, cálculos, ... y comprensión!

En la actualidad aún persisten las secuelas de este tipo de educación matemática memorística y mecánica. Basta con realizar un breve análisis de los libros de texto de matemáticas en secundaria para descubrir multitud de ejemplos que corroboran esta afirmación. Así, además de explicarse el manejo de todo tipo de tablas (financieras, logarítmicas, trigonométricas, estadísticas, etc), aparecen sin cesar simplificaciones de toda clase, operaciones con irracionales, cálculos estadísticos y funcionales, interpolación polinómica, integración numérica, desarrollos de Taylor, resolución aproximada de ecuaciones, etc.

Sin embargo no todos los males se subsanan dedicando el tiempo empleado en enseñar cálculo reiterativo y manejo de tablas a la explicación y comprensión de las diversas materias, puesto que han surgido tambien otros varios problemas no menos importantes: excesivo formalismo, temarios poco realistas, etc.

¿Cómo puede ayudar a mejorar la enseñanza secundaria de las matemáticas la introducción del ordenador en el aula?. Las cuestiones que se analizan seguidamente ayudarán a clarificar algunas posibles respuestas.

¿Cuáles son las razones del fracaso escolar en matemáticas?

Es innegable el elevado fracaso escolar de los estudiantes en matemáticas y, de hecho, la sociedad parece considerarlo inherente con esta asignatura. Son varios y muy diversos los aspectos que originan el rechazo hacia las matemáticas por parte del alumnado. Algunos de ellos son de índole extraacadémica (razonamiento lógico, capacidad de abstracción, etc) pero existen otros (curriculares, expositivos, etc) manifiestamente mejorables y en los cuales la informática tendrá mucho que decir en el futuro. De estos últimos pueden destacarse los siguientes:

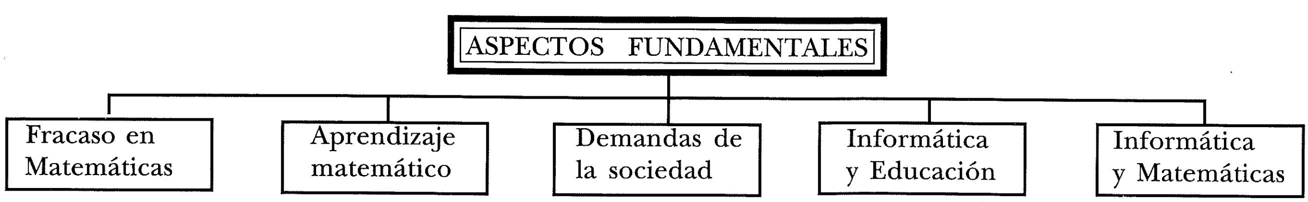
Aprendizaje memorístico de métodos de cálculo que les son totalmente anejos ya que no se les ven ninguna utilidad práctica.

Exposición demasiado perfecta y rigurosa de dichos métodos, de forma que las matemáticas se presentan como una ciencia ya completa, cerrada en sí misma, y sin posibilidad de que el alumno descubra nada por sí mismo. Además, se muestra todo como resultado de un proceso deductivo cuando la realidad es que, generalmente, se ha obtenido como consecuencia de razonamientos empíricos e inductivos

Estudio formal de conceptos matemáticos que se hallan fuera de su comprensión, a causa de su elevado grado de abstracción, sin tener en cuenta que la formalización debe ser siempre el último peldaño, no el primero. El ejemplo mas ilustrativo es la tan denostada "Matemática Moderna" [4]

El olvido cada vez mayor de la geometría, que se ha reducido a una mera sucesión de nombres y fórmulas, obviando que se trata de una de las principales armas matemáticas para favorecer la visión intuitiva de los problemas.

Por un mal entendido pudor matemático, los aspectos manipulativos y lúdicos se dejan de lado por su presunta falta de seriedad y rigor. Sin embargo, la historia de las matemáticas presenta innumerables de ejemplos de temas que han tenido su origen en las llamadas "matemáticas recreativas".



¿Cómo debe ser el aprendizaje matemático?

En la cuestión anterior se han abordado algunas de las razones que han llevado al actual fracaso, por consiguiente la metodología de la enseñanza matemática tiene que tender a evitar la repetición de dichos errores. Así, debería invertirse el orden de preferencia que tienen ahora los tres aspectos básicos metodológicos:

1º) conocimientos de información

2º) técnicas específicas

3º) estrategias generales

de modo que se haga especial hincapié en las estrategias dedicadas a que el estudiante investige y explore, a través incluso de sus propias contradicciones [5], ya que el razonamiento matemático se apoya en una atmósfera de interrogantes, desafíos y reflexión. [6]

¿Qué matemáticas demanda la sociedad?

En la etapa obligatoria de la enseñanza secundaria las matemáticas deben ser necesariamente prácticas, a un nivel pretécnico, y encaminadas a la resolución de problemas, potenciando en el alumno una serie de cualidades que superan los límites del mundo matemático: comprensión y análisis, intuición, método, etc.

Las palabras de Gary Kildall sobre este tema son muy claras: "Yo enseñaba dos cosas que es importante que los alumnos aprendan: como resolver problemas y como estudiar.... si uno aprende a resolver problemas, puede manejarse en la vida y arreglárselas bastante bien" [7]

Será sólo en la etapa preuniversitaria cuando se introduzca el formalismo, no antes. Por ejemplo, es un absurdo pedagógico y matemático que, como sucede en la actualidad, a estudiantes de E.G.B. se les definan los enteros como representantes de una clase de equivalencia.

¿Cuál es el estado actual de la informática educativa?

En la actualidad la informática se comienza a introducir en la enseñanza secundaria en dos vertientes claramente diferenciadas(1):

Como una potente herramienta auxiliar a nivel de usuario, con software comercial y específico: procesador de textos, base de datos, diseño asistido, bibliotecas y bancos de datos accesibles desde el centro, etc

Como medio de resolución de problemas: hoja de cálculo y lenguajes de programación.

Sin desechar la primera vertiente, que es y será cada vez mas un auxiliar para todas las materias curriculares, es la segunda la que ofrece mas posibilidades de interrelación con las matemáticas.

¿Cómo incluir la informática en la enseñanza matemática?

El ordenador permite que el propio alumno tantee y visualice los problemas, de tal forma que el aprendizaje se interiorice y sea un proceso personal. Con ayuda de la informática las matemáticas en secundaria pueden dejar de ser el cuidado y perfecto invernadero que son en la actualidad para convertirse en un terreno semivirgen que el estudiante puede y debe explorar.

(1) Hay otro aspecto de la informática educativa que, aunque pueda llegar a ser muy interesante en el futuro, hoy por hoy es casi inexistente en los centros: la enseñanza asistida por ordenador, E.A.O.[8]

Como se ha expuesto anteriormente, dos de los procedimientos mas adecuados para integrar la informática en las matemáticas son la hoja de cálculo y el empleo de un lenguaje de programación, ya que ambos posibilitan una resolución heurística de los problemas (frente a la tradicional y exclusiva solución deductiva), al permitir realizar hipótesis y comprobar su grado de verisimilitud casi al instante.

Hoja de Cálculo

Es un programa estandar de usuario que ha sobrepasado los límites del círculo empresarial para incorporarse cada vez con mas empuje al ámbito educativo ya que, aunque por ser un programa de usuario no tiene la flexibilidad que pueda ofrecer un lenguaje de programación, presenta otras ventajas que lo hacen especialmente aconsejable:

- su manejo es relativamente fácil de aprender y puede ser util en la posterior introducción del alumno en el mundo laboral.
- elimina gran parte de la mecánica operativa por lo que posibilita una mayor dedicación a la comprensión de los conceptos.
- facilita en gran medida el estudio de cuestiones matemáticas que son bastante áridas explicadas

ante una pizarra: estudio funcional, distribuciones estadísticas, etc.
- permite el estudio intuitivo de temas complejos (ecuaciones funcionales, desarrollos en serie, etc), de modo que su posterior estudio teórico será mucho mas comprensible y asimilable.

Lenguajes de programación

Los lenguajes de programación son una de las principales herramientas para la resolución de problemas pero esto no quiere decir que todos los alumnos de secundaria deban saber programar perfectamente; basta con que dominen las técnicas elementales.

El principal escollo que presenta la programación en enseñanza es el de la elección del lenguaje mas adecuado. Si se tiene en cuenta que lo importante no es su dominio sino el aprendizaje de estrategias generales de resolución del problemas la elección es clara, ya que un buen lenguaje educativo debe satisfacer entre otras las siguientes condiciones:
- Sencillez: evitar que su aprendizaje y posterior empleo conlleven mas dificultades que beneficios se esperan.
- Modularidad: facilitar el trabajo en equipo y los sucesivos refinamientos del programa.
- Estructuración: impedir el caos de esos programas en que la estrategia brilla por su ausencia.
- Rapidez: es imprescindible en simulaciones, cálculo científico, etc.
- Utilidad: poder emplear posteriormente en el mundo laboral o universitario los conocimientos técnicos adquiridos.

Hoy por hoy parece evidente que el lenguaje mas próximo a este ideal es el Turbo Pascal y por ello ha sido adoptado para la enseñanza secundaria por la mayoría de los países avanzados.

Laboratorio matemático

Partiendo de la base de que tanto la hoja de cálculo como la programación son dos complementos muy importantes de las matemáticas, es imprescindible y urgente la creación en los centros educativos de laboratorios informáticos donde los alumnos tengan la oportunidad de realizar prácticas matemáticas, de modo análogo a como ya se han introducido los laboratorios de física, química, idiomas, etc.

En estas prácticas inicialmente se formará al alumnado en las técnicas básicas informáticas para, posteriormente, aplicarlas a la resolución heurística e intuitiva de los problemas.

El futuro

¡Comprensión, comprensión y cálculos!

Actualmente la informática se encuentra todavía en un estadio primitivo. Hoy en día parece muy alejada la época de los Spectrum o Apple pero debe recordarse que hace menos de diez años que surgió el P.C. (su presentación en sociedad tuvo lugar el 12/8/81). Es de suponer que los cambios futuros que se produzcan en informática sean asombrosos en los terrenos del software y hardware.

En lo relativo a educación es inevitable que estos cambios incidan de una manera revolucionaria:

La inteligencia artificial [9] permitirá crear sistemas expertos que sepan diagnosticar individualizadamente la etapa de comprensión de cada alumno, de tal manera que el propio ordenador será capaz de comunicar al estudiante sus carencias en la materia objeto de aprendizaje.

En hardware los avances aún serán mas espectaculares: en el equivalente a una sencilla calculadora actual, se tendrá a disposición del usuario cantidades ingentes de información. Esto implica que la tarea del estudiante no será tanto memorizar conocimientos sino saber localizarlos.

La telemática influirá de manera decisiva en el cambio del rol social asignado a los centros de enseñanza. La labor del profesor no consistirá en transmitir conocimientos y controlar al alumnado, sino en supervisar y coordinar su trabajo, que cada vez en mayor medida será investigativo y descubridor.

En el aspecto matemático en concreto, los ordenadores llevarán incorporadas la gran mayoría de las funciones de cálculo, incluso las más específicas y técnicas, por lo que su aplicación manual irá cayendo progresivamente en desuso. El estudiante podrá despreocuparse de los aspectos mecánicos para centrarse en los comprensivos.

Como será absolutamente inevitable la presencia de la informática en educación es aconsejable, si se desea evitar el sempiterno desfase técnico y educativo, que ya se incorpore progresivamente al curriculum escolar.

Sin embargo, esta introducción puede traer consigo una serie de nuevos problemas (pedagógicos, sociológicos y psicológicos) e interrelaciones (profesor-alumno-ordenador) que deberán analizarse en profundidad para soslayar un nuevo fracaso escolar de distinta índole.

Para ello el educador ha de tener siempre presente cuales son los objetivos de su enseñanza y, como suele suceder a menudo, volver la vista al pasado es un ejercicio gratamente ilustrativo. Por dicho motivo, este artículo concluye con cuatro citas de autores clásicos, presentadas por George Polya en el II Congreso Internacional sobre Educación Matemática (Esether, Inglaterra 1972).

Socrates: "Las ideas deben nacer en la mente de los estudiantes y el profesor sólo debe actuar como comadrona"

Leibnitz:"Nada hay mas importante que ver los caminos de la inventiva, que son, en mi opinión, mas interesantes que las invenciones mismas"

Kant: "Todos los conceptos humanos empiezan con intuiciones, prosiguen con conceptos y finalizan con ideas"

Herbert Spencer:"¿Qué es enseñar bien?... Dar la oportunidad al estudiante para descubrir las cosas por sí mismo"

Bibliografía

[1] - Comisión Internacional sobre el Desarrollo de la Educación
"21 puntos para una estrategia de la educación"
El Correo de la Unesco, Págs 33-35, Mayo-Junio 1986

[2] - R. Pavelle, M. Rothstein, J. Fich
"Algebra por ordenador"
Investigación y Ciencia, nº 65, Págs 82-91. Febrero 1982

[3] - Maurice D'Olagne
Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques
Gauthier-Villars, 1905

[4] - Morris Kline
El fracaso de la matemática moderna
Siglo XXI, Madrid 1978

[5] - GRUPO CERO
Estrategias, conjeturas y demostraciones
I.C.E. Universidad de Valéncia, 1982

[6] - J. Mason, L. Burton, K. Stacey
Pensar matemáticamente
Labor-M.E.C., Barcelona 1988

[7] - Susan Lammers
Programadores en acción
Microsoft-Anaya, Madrid 1988

[8] - Francisco Martin Casalderrey
"Los usos educativos de la Informática"
(Informática y Enseñanza. Muestra de experiencias)
CEP de Monzón, Monzón 1986

[9] - Susan J. Scown
The Artificial Intelligence Experience: An Introduction
Digital Equipment Corporation, 1985

"El uno y los ceros": Un cuento satírico en el país de la aritmética

José M. Núñez Espallargas

En nuestro país no abundan las obras de ficción que emplean elementos matemáticos para caricaturizar o ironizar sobre aspectos de la sociedad. No ocurre lo mismo en los paises anglosajones donde se han producido importantes obras en este sentido, popularizadas por figuras como Ch. L. Dogson, más conocido por su pseudónimo de Lewis Carroll, o E. A. Abbott, el autor de "Flatland".

Es cierto que entre los creadores de literatura infantil podemos encontrar algunos que nos introducen en "mundos matemáticos", pero su intención no suele ir más allá del mero recurso didáctico para hacer las matemáticas más atrayentes al pequeño lector. Así, por ejemplo, en Iberoamérica es bien conocida "A aritmética de Emilia" del brasileño Monteiro Lobato y, en nuestras latitudes, "Cifralia o La ciudad de los números" de Francisco Bernardo Cancho.

Por ello nos parece interesante rescatar un breve cuento publicado hace casi un siglo en una revista de ámbito muy reducido y escrito por un autor, entonces bastante popular, pero hoy ya totalmente olvidado.

Se trata del cuento "El uno y los ceros" publicado a finales de 1898. Su autor, Ramiro Blanco, nació en Gijón en 1857, estudió la carrera de medicina en Barcelona y en Madrid, aunque se dedicó enteramente al periodismo, dirigiendo la "Revista Artística y Literaria" y colaborando en gran número de revistas españolas y americanas. Escribió varias novelas, obras de teatro y cuentos, también algunos estudios históricos y libros de divulgación científica.

El cuento "El uno y los ceros" no tiene grandes pretensiones literarias, su objetivo es el de ironizar sobre un aspecto de la sociedad española divirtiendo al lector con un planteamiento que ofrece indudable originalidad al describir un país poblado por números donde se combinan las relaciones de carácter humano con las de caráter aritmético. A través de un relato en el que se incluyen ingeniosos juegos de palabras y expresiones de doble sentido se acomete una dura crítica de la actividad parlamentaria del momento, que a pesar de estar indudablemente condicionada por los acontecimientos que culminaron en la pérdida de las últimas colonias españolas, su lectura no resulta anacrónica para un lector actual.

El relato que comentamos apareció en "La Defensa del Magisterio", una revista que había visto la luz en Barcelona en 1896 y que semanalmente mantenía informados a los maestros de Cataluña sobre las cuestionnes legislativas que les afectaban. Si bien este tema constituía el núcleo esencial de cada número, la revista contaba con otras secciones dedicadas a la

Continua en la pág. 42

Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores[1]

Victoriano Ramírez González

0. Resumen

En este trabajo se realiza un estudio que conduce a la obtención de fórmulas electorales, basadas en sucesiones de divisores, que aseguran una representación proporcional a la hora de asignar los escaños en cada circunscripción.

Se ha encontrado una familia de fórmulas a la que pertenecen como casos particulares D'Hondt, St-Lagüe , Imperiali y el método Danés. De las propiedades matemáticas de las fórmulas obtenidas se deducen ventajas e inconvenientes que va a tener el uso de cada una de ellas.

En la búsqueda de las nuevas fórmulas se parte de un objetivo: **primar a los partidos más votados y conseguir una buena proporcionalidad.** El resultado de la aplicación de las fórmulas que consiguen este objetivo está comprendido entre los que se obtendrían aplicando las fórmulas de St-Lagüe y D'Hondt. Esta propiedad queda ilustrada con los resultados de aplicar varias de las fórmulas obtenidas a los datos de las Elecciones Generales de 1989 en España, que se muestran en el párrafo 3.

1. Introducción

El uso de una fórmula electoral es un procedimiento matemático que determina la asignación de escaños entre los partidos que concurren en una misma circunscripción.

En la literatura electoral se distinguen dos grupos de fórmulas: **mayoritarias y proporcionales.**

1) Las llamadas mayoritarias son las que asignan todos los escaños a la lista más votada. Unas de otras se diferencian en detalles como: mayoría absoluta o mayoría relativa, una o dos vueltas, etc. Algunos países en los que se usa, o se ha usado alguna fórmula mayoritaria son: Gran Bretaña, EEUU, Canadá, Nueva Zelanda, Francia, y Australia.

2) Las proporcionales tienen como objetivo el reparto de los escaños de cada circunscripción proporcionalmente a los votos que ha obtenido cada partido. Aunque el principio que inspira este tipo de fórmulas es bien sencillo, en la práctica surge el problema de aproximar cantidades que no son enteras por otras que si lo sean. Esta situación se deriva del cálculo de la proporción de escaños que corresponde a cada partido y no poder dividirse un escaño en fracciones.

El reparto de escaños, como problema de aproximación, admite diferentes soluciones en función de lo que se quiera ponderar. En ocasiones la ponderación es tal que la fórmula correspondiente no puede considerarse proporcional en sentido matemático. A pesar de todo lo anterior suelen denominarse fórmulas proporcionales a todas las que no son mayoritarias. Entre ellas se distinguen dos grupos según la filosofía subyacente:

a) Las basadas en cociente electoral y posterior redondeo por exceso de los restos mayores. Pertenecen a este grupo el Método Proporcional Puro, conocido también como Niemeyer [9], así como el Método de las Proporciones Relativas Iteradas [11]. Por ejemplo, al repartir cinco escaños entre tres partidos que han obtenido: 108 300 votos, 102 400 votos y 32 600 votos respectivamente , se obtienen las proporciones correspondientes, (243 500 votos / 5 escaños = 48700 votos por cada escaño), que son: 2.22 escaños, 2.11 escaños y 0.67 escaños respectivamente. A su vez

1. Este trabajo ha sido subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía

estas cantidades se aproximan por 2, 2, y 1, que es la distribución definitiva de escaños.

b) Las basadas en una sucesión de divisores utilizan una sucesión creciente de números positivos $0 < d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$. Los votos obtenidos por cada partido son divididos entre los n primeros términos de dicha sucesión, siendo n el número de escaños a repartir. Por ejemplo para los datos: 871, 256, 156, 154, 72, 52 y 39 votos, si tomamos como sucesión de divisores: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34.. , redondeando a cantidades enteras, obtenemos:

DIVISORES

Div / Vot	d_1 4	d_2 9	d_3 14	d_4 19	d_5 24	d_6 29	d_7 34	d_8 39	d_9 44	d_{10} 49	d_{11} 54	d_{12} 59	d_{13} 64	d_{14} 69	d_{15} 74	d_{16} 79
871	217	96	62	45	36	30	25	22	19	18	16	15	14	13	12	11
256	64	28	18	13	11	9	8	7	6	5	5	4	4	4	3	3
156	39	17	11	8	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2
154	38	17	11	8	6	5	5	4	3	3	3	3	2	2	2	2
72	18	8	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
52	13	6	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
39	10	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

¿Cómo se efectúa la asignación de escaños a partir de esta tabla?. De las dieciseis cantidades mayores: diez correponden al partido 1, tres corresponden al partido 2, una corresponde al partido 3, una corresponde al partido 4, y otra al partido 5, por tanto la asignación de escaños es 10-3-1-1-1-0-0.

Como puede verse en [7], las sucesiones de divisores que usan las fómulas electorales conocidas son:

Fórmula	Divisores				
Imperiali	2,	3,	4,	5,	6,...
D'Hondt	1,	2,	3,	4,	5,...
St-Lagüe	1,	3,	5,	7,	9,...
St-Lagüe Mejorada	1.4	3,	5,	7,	9,...
Danés	1,	4,	7,	10,	13,...

si se completa una tabla como la anterior para cada una de estas fórmulas se obtienen los siguientes repartos:

asignación de escaños

	partido 1	partido 2	partido 3	partido 4	partido 5	partido 6	partido 7
FORMULA							
Imperiali	12	2	1	1	0	0	0
D'Hondt	11	3	1	1	0	0	0
St-L.Mej.	9	2	2	2	1	0	0
St-Lagüe	8	2	2	2	1	1	0
Danés	8	2	2	1	1	1	1
Propor. Exac.	8.71	2.56	1.56	1.54	0.72	0.52	0.39

Comentarios a la tabla de resultados

1) La aplicación de cada fórmula a los datos conduce a resultados muy dispares, hasta el punto de ser tachadas unas fórmulas por un defecto y otras por el contrario. Así, Imperiali y D'Hondt benefician mucho a los partidos más votados, por ejemplo, asignan al primer partido 12 u 11 escaños respectivamente, cuando solo le corresponden 8.71. Por el contrario St- Lagüe y el método Danés benefician a los partidos minoritarios, por ejemplo, al partido 6, que solo le corresponden 0.52 escaños ambos le asignan un escaño, mientras que al primer partido que le corresponden 8.71 le asignan 8, y al segundo que le corresponden 2.56 ambas fórmulas le asignan 2 . Peor aún el método Danés que a 0.39 escaños del último partido le asigna 1 escaño (salvo que exista una barrera mínima como por ejemplo el 3%).

2) St-Lagüe Mejorada puede ser aceptable en cuanto a la proporcionalidad de los resultados y la prima que otorga a los partidos más votados; sin embargo, desde el punto de vista matemático, la modificación del primer divisor de la sucesión de St-Lagüe es una arbitrariedad que conlleva una penalización de las minorías. En nuestro ejemplo ha sido justa la penalización del partido 6, en favor del partido 1, sin embargo no habría sido tan justa la penalización del partido 5, que ha estado a punto de perder el escaño. Obsérvese un posible defecto de esta fórmula, al segundo partido que le corresponden 2.56 escaños le asigna 2, y al cuarto que le corresponden 1.54 le asigna 2 también.

3) En el ejemplo se ha elegido una circunscripción de tamaño grande con objeto de resaltar, simul-

táneamente, las propiedades más importantes de varias fórmulas electorales. Sin embargo sería un error entender que el desvío de proporcionalidad que origina el uso de D'Hondt se produce por la existencia de circunscripciones grandes. Pues, son precisamente las de tamaño pequeño las que causan más desvío. Obsérvense los datos del ejemplo del apartado a), que corresponden a la circunscripción de **Valladolid** en las elecciones de 1989, cuyo reparto D'Hondt es 3-2-0, así, el primer partido al que corresponden 2.22 escaños recibió 3, (un 35% de prima), mientras que el tercero con 0.67 escaños recibió 0. Sin embargo obsérvese que en las Elecciones Andaluzas de Junio de 1990, apéndice II, D'Hondt desvía menos la proporcionalidad porque ahora las circunscripciones son más grandes.

4) El fuerte desvío de la proporcionalidad es la causa por la cual la fórmula **D'Hondt** fue **sustituida en los Países Escandinavos (1953) por Sainte-Lagüe**, ésta a su vez, lo fué por St-Lagüe Mejorada [12,pp170] y **en Alemania Federal (1985) por Niemeyer** [9, pp 295].

2. Propuesta de nuevas sucesiones de divisores

Definimos la sucesión de divisores de parámetro **A**, por:

(1) $\mathbf{d_{n+1} = n+ A}$, $n = 0, 1, 2, 3 ....$ $\mathbf{A} > 0$

Por tanto, si tomamos valores diferentes de **A**, obtenemos sucesiones de divisores diferentes, y en definitiva, diferentes fórmulas.

Por otra parte, valores muy próximos de **A** conducen a divisores también muy próximos, que normalmente, darán resultados idénticos, o casi idénticos.

Veremos que los valores que interesan para **A** se encuentran entre 0.5 y 1, por lo que, aunque (1) representa una infinidad de fórmulas electorales diferentes, en la práctica sólo hay 7 u 8 valores de **A** que conduzcan a resultados sensiblemente diferentes.

En la tabla siguiente incluímos algunos valores, de **A**. Dos de los que citamos están fuera del intervalo [0.5, 1]; el motivo de considerarlos también es por corresponder a métodos electorales famosos.

Valor de **A**	Sucesión de divisores				
1/3	1/3,	4/3,	7/3,	10/3,	....
0.5	0.5,	1.5,	2.5,	3.5,	....
0.6	0.6,	1.6,	2.6,	3.6,	....
2/3	2/3,	5/3,	8/3,	11/3,	....
0.7	0.7,	1.7,	2.7,	3.7,	....
3/4	3/4,	7/4,	11/4,	15/4,	....
0.8	0.8,	1.8,	2.8,	3.8,	....
0,9	0.9,	1.9,	2.9,	3.9,	....
1	1,	2,	3,	4,	....
2	2,	3,	4,	5,	....

Comentarios a la Tabla

1) Para A=1 se obtienen los divisores del método D'Hondt

2) Para A=2 obtenemos los divisores: 2, 3, 4, 5, .. que corresponden al método Imperiali.

3) Para A=2/3 observamos el inconveniente de trabajar con números con infinitos decimales, por lo que parece aconsejable buscar un procedimiento de sustitución de estas sucesiones por otras equivalentes para las cuales esta problemática no aparezca. Por ejemplo, en este caso si multiplicamos por tres los términos de la sucesión se elimina el problema, quedando como divisores: 2, 5, 8, 11, ... , que conducen al mismo reparto.

4) Multiplicando por dos los divisores correspondientes a A=0.5, se obtienen los divisores del método de St-Lagüe.

5) Si damos a A el valor 1/3, y multiplicamos por tres la sucesión correspondiente se obtienen los divisores del Método danés.

Por tanto las fórmulas electorales: D'Hondt, St-Lagüe, Imperiali, y Danés son casos particulares de la familia de fórmulas que hemos definido anteriormente.

6) En general, si **A** = q/p , con p, q > 0, los divisores (1) son equivalentes a los que se obtienen como:

(2) $d_{n+1} = pn + q$, n = 0, 1, 2 ....

y si p y q son enteros, los divisores anteriores son todos enteros. Así las sucesiones anteriores correspondientes a valores de A comprendidos entre 0.5 y 1, son equivalentes a:

A	p	q	Sucesión de divisores
0.5	2	1	1, 3, 5, 7, 9, 11 ...
0.6	5	3	3, 8, 13, 18, 23, 28 ...
2/3	**3**	**2**	**2, 5, 8, 11, 14, 17 ...**
0.7	10	7	7, 17, 27, 37, 47, 57 ...
0.75	4	3	3, 7, 11, 15, 19, 23 ...
0.8	5	4	4, 9, 14, 19, 24, 29 ...
0.9	10	9	9, 19, 29, 39, 49, 59 ...
1	1	1	1, 2, 3, 4, 5, 6 ...

que usadas para distribuir los escaños, en cada circunscripción, en las Elecciones Generales de 1989 en España dan los repartos siguientes:

3. Resultados para las elecciones generales de 1989

Los resultados están en la tabla de abajo.

Comentarios a la tabla anterior.

1) Se han resaltado en negrilla tres columnas. La primera indica el reparto más justo en proporción a los votos obtenidos globalmente por cada partido; la última indica el reparto que ha dado la fórmula D'Hondt, y la del centro, el reparto correspondiente al valor 2/3 para **A** (posteriormente vamos a deducir que la fórmula correspondiente a este valor de **A** es una de las más adecuadas para efuectuar repartos proporcionales. En el apéndice I damos los resultados en cada provincia al aplicar esta fórmula).

2) El reparto correspondiente al valor 0.5 para **A** es el que produce mayor proporcionalidad en el sentido de que es mínima la suma de las diferencias, en valor absoluto, entre la proporción exacta de escaños que corresponde a cada partido y la que la fórmula le asigna. Pero ello no significa que esta fórmula sea la mejor; por ejemplo obsérvese el siguiente dato, que no es un hecho casual, la segunda fuerza recibe 10 escaños de prima, (107 escaños en lugar de 97), por tanto la primera fuerza, el P.S.O.E., debe recibir al menos 10 escaños de prima, o para mantener su proporción respecto de la primera, debe recibir unos 15 escaños más que proporcionalmente le corresponden y solo recibe 3.

3) Salvo pequeñas excepciones, (de fuerzas que concurren en pocas circunscripciones), las dos pri-

R E P A R T O S

PART.	VOTOS	PRO. DIPUT.	ST-Lg A=0.5	A=0.6	A=2/3	A=0.7	A=3/4	A=4/5	A=0.9	D'Hont A=1
PSOE	8088072	**148**	151	158	**162**	164	165	168	172	**176**
PP	5282877	**97**	107	108	**106**	105	106	105	104	**106**
IU	1851080	**34**	24	22	**22**	23	23	21	20	**17**
CDS	1617104	**29**	27	22	**21**	19	18	16	15	**14**
CIU	1030476	**19**	17	17	**17**	17	18	18	18	**18**
PNV	253769	**5**	5	5	**5**	5	5	5	5	**5**
HB	216822	**4**	6	6	**6**	6	6	6	5	**4**
PA	212807	**4**	3	2	**2**	2	2	2	2	**2**
UV	144655	**3**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
EA	136595	**2**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
EE	105217	**2**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
PAR	71628	**1**	1	1	**1**	1	1	1	1	**1**
AIC	64989	**1**	2	2	**1**	1	1	1	1	**1**
ERC	84400	**1**	1	1	**1**	1	1	1	1	**0**

meras fuerzas son las únicas beneficiadas con cualquiera de las fórmulas anteriores.

4) La prima que recibe la segunda fuerza es independiente de la fórmula usada, mientras que la prima para la primera fuerza aumenta a medida que aumenta el valor de **A.**

5) La prima de las fuerzas beneficiadas es soportada, salvo pequeñas excepciones por la tercera y cuarta fuerza, IU y CDS, que con la fórmula D'Hondt pierden cada una el 50% de sus escaños en favor del PSOE y de PP.

Para clarificar la exposición posterior y conocer el origen del problema que nos ha llevado a la búsqueda de nuevas fórmulas electorales planteemos un ejemplo de reparto, que corresponde a datos reales, y cuya solución no es trivial. Concretamente, en la circunscripción de **Sevilla**, en las Elecciones Generales de 1989, al repartir los 12 escaños entre PSOE, PP,IU y PA proporcionalmente a los votos obtenidos se tiene:

PSOE	6.94	Escaños
PP	2.43	Escaños
IU	1.47	Escaños
PA	1.16	Escaños

dos partidos tienen que redondear por exceso y, por tanto resultar beneficiados. Los otros dos redondean por defecto. Parece evidente que el PSOE con 6.94 escaños debe redondear a 7 escaños, y por otro lado, que el PA con 1.16 escaños debe redondear a 1 escaño.

Sin embargo, no es tan evidente el redondeo entre el PP e IU; los restos correspondientes difieren sólo cuatro centésimas. Si, para minimizar el desvío de proporcionalidad redondeamos por exceso el de mayor resto, el de IU, tenemos que PP e IU obtienen 2 escaños cada uno, a pesar de que PP tiene un 70% más votos que IU. La otra aproximación posible es 3 escaños para el PP y 1 para IU. Lógicamente ninguna solución al problema anterior es completamente satisfactoria, pero para poder aceptar la última necesitamos establecer una fórmula que prime los restos en función de la parte entera a la que pertenezcan. Es decir, que restos iguales no tienen una influencia idéntica en el reparto, sino que aquel que acompañe a una parte entera mayor tiene más posibilidades de ser redondeado por exceso. (Con D'Hondt en Sevilla se obtuvo PSOE 8, PP 2, IU 1, PA 1; de ahí su no proporcionalidad y dudosa constitucionalidad.)

4. Fundamento matemático de la familia de sucesiones de divisores

Supongamos que la sucesión de divisores es $d_1, d_2, d_3, \ldots$.

Deseamos que esta sucesión conduzca a repartos proporcionales con una influencia creciente de la parte entera en los redondeos por exceso de los restos. Para ello supongamos que, establecida la proporción de diputados, R es el resto que acompaña a cierta parte entera, $0 \leq R < 1$. La parte entera puede valer cero, uno, dos, etc. En el primer caso, cuando la parte entera es cero, el partido correspondiente al que corresponden R escaños debe aspirar a conseguir un escaño, (a lo sumo), por tanto hay que analizar el comportamiento de R/d_1. Si la parte entera vale uno, es decir, la proporción de escaños para el partido correspondiente es 1+R, dicho partido debe aspirar a conseguir dos escaños en el mejor de los casos, por tanto hay que analizar el comportamiento de $(1+R)/d_2$, y así sucesivamente.

Luego vamos a estudiar el comportamiento de los siguientes cocientes:

$$\frac{R}{d_1}, \frac{1+R}{d_2}, \frac{2+R}{d_3}, \frac{3+R}{d_4}, \text{ etc. }, \ R \text{ dado }, R \in [0,1)$$

aquí estamos considernado que la proporción de escaños es R, 1+R, 2+R, etc. Operar con proporción de escaños o con votos es equivalente, como ya se ha dicho anteriormente.

Sería interesante que se verificase:

$$(3) \ \frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2} \leq \frac{2+R}{d_3} \leq \frac{3+R}{d_4} \leq \text{ etc. } \forall R \in [0,1)$$

pues ello significaría que, en caso de igualdad de restos, primero redondea por exceso el que tenga mayor parte entera. En efecto, fijado R, se tiene que

$$\frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2}$$

y ello supone que un partido cuya proporción de escaños sea 1+R recibe el segundo escaño antes que reciba el primer escaño otro partido cuya proporción sea R. Análogamente para cualquier otra comparación.

Para que en (3) se verifique la primera desigualdad

$$(4) \quad \frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2} \qquad \forall R \in [0,1)$$

es necesario y suficiente que

$$d_2 \leq 2\, d_1$$

pues la constante $d_1/\, d_2$ tiene que ser mayor o igual que la función $R/(1+R)$ en $[0,1]$, que es creciente, alcanzando el máximo valor, $1/2$, en $R=1$.

Las restantes desigualdades se caracterizan de forma análoga por:

$$(5) \quad d_{n+1} \leq \frac{n+1}{n}\, d_n$$

Si, con objeto de no primar más aún a los partidos mayoritarios, en cada caso, tomamos el divisor máximo que verifica la desigualdad, se obtiene

$$d_2 = 2d_1 \;;\; d_3 = (3/2)d_2 = 3d_1 \;;\; d_4 = 4d_1 \;;\; \text{etc}$$

es decir los divisores serían: d_1, $2d_1$, $3d_1$, $4d_1$, ..., y por tanto, equivalentes a los del método D'Hondt.

Exigir que se cumplan las desigualdades (3) $\forall R \in [0,1)$ puede ser excesivo porque daría lugar a un desvío importante de la proporcionalidad cuando a la lista más votada corresponda una parte entera mucho mayor que a las demás, pues en tal caso aquella puede absorber los restos de todas las demás.

Para paliar este efecto podemos restringir las desigualdades (3) a un intervalo menor, es decir, $\forall R \in [0, \mathbf{A}]$ con $0 < \mathbf{A} < 1$. Vamos a probar que ello se consigue con la sucesión de divisores (1).

Consideraremos que a un determinado partido le corresponden x + R escaños, donde x es entero y R el resto. Por tanto debe conseguir al menos x escaños y posiblemente x + 1.

Si llamamos C(x) al cociente resultante de dividir

$$(7) \quad C(x) = \frac{x+R}{x+\mathbf{A}} \qquad 0 < \mathbf{A} < 1, \quad R > 0, \quad x \in [0, \infty)$$

Para valores de x iguales a 0, 1, 2, 3, .., C(x) es el cociente x+1, usando la sucesión de divisores (1), para un partido cuya proporción de escaños sea x+R, por tanto nos va a informar del grado de dificultad que tiene el correspondiente partido para obtener el escaño x+1, es decir redondear por exceso su proporción exacta de escaños. Analicémos C(x); su derivada es:

$$(8) \quad C'(x) = \frac{\mathbf{A} - R}{(x+\mathbf{A})^2} \Rightarrow C \text{ es } \begin{cases} \text{creciente,} & \text{si } R < \mathbf{A} \\ \text{decreciente,} & \text{si } R > \mathbf{A} \end{cases}$$

$$(9) \quad \text{Si } R = \mathbf{A} \quad C(x) = 1, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

$$(10) \quad \text{Si } R > \mathbf{A} \quad C(x) > 1, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

$$(11) \quad \text{Si } R < \mathbf{A} \quad C(x) < 1, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

Comentarios

1) De (8) se deduce que las desigualdades (3) se verifican en el intervalo [0, A]. Cuando varios restos son idénticos, (o casi idénticos), pero menores que **A**, redondea por exceso, **primero, el correspondiente al partido con más votos.**

2) De (9), (10) y (11) se deduce que, con la sucesión de divisores (1), un partido al que corresponda una proporción de escaños con parte entera n y resto mayor que **A**, recibirá el n+1-ésimo escaño antes que otro, al que corresponda una proporción de escaños con parte entera m y resto menor que **A**, reciba el m+1-ésimo, y esto es independiente de los valores de n y m. Por tanto antes de que un resto menor que **A** redondee por exceso habrán redondeado por exceso todos los restos que sean mayores que **A**.

Por ejemplo si al repartir 10 escaños entre cuatro partidos, la proporción de escaños es:

$P_1 \to 4.7$ esc.	al menos, para todo	$P_1 \to 5$ esc.
$P_2 \to 2.8$ esc.	A, 0.3<A<0.7	$P_2 \to 3$ esc.
$P_3 \to 2.2$ esc.	el resultado con	$P_3 \to 2$ esc.
$P_4 \to 1.3$ esc.	la sucesión (1) es	$P_4 \to 1$ esc.

3) De (8) se deduce que, si a varios partidos corresponden restos iguales (o similares) y mayores que **A**, redondea por exceso **primero el partido con menor número de votos** (menor parte entera), y en último lugar el que tenga mayor número de votos, (aunque eso sí todos ellos lo harán antes que cualquier partido con resto menor que **A**).

4) Si **A** = 0.5 y , al establecer las proporciones, hay tantos restos mayores que 0.5 como cantidades es necesario redondear por exceso, todos los restos mayores que 0.5 redondean por exceso y los demás por defecto, coincidiendo los resultados en tal caso con el método **Proporcional Puro**. Esta situación se da con frecuencia, de ahí que el método de St-Lagüe, (**A** = 0.5), dé resultados muy similares al Proporcional Puro.

La alta proporcionalidad de la sucesión correspondiente al valor **A** = 0.5, no significa que la fórmula correspondiente sea la mejor. De hecho es una sucesión mala en el siguiente sentido: un partido al que correspondan algo más de 0.5 escaños la fórmula asignará 1 escaño con mucha probabilidad, mientras que otro que tenga resto mayor que 0.5 y parte entera grande (alguno de los más votados) es muy posible que la fórmula le redondee por defecto debido al decrecimiento de C(x) para restos mayores que **A**.

Por tanto el valor **A** = 0.5 no se debe utilizar porque beneficia a los partidos minoritarios a costa de los mayoritarios dando lugar a la **fragmentación Parlamentaria** y a la consiguiente **inestabilidad política**. Con mayor motivo no es recomendable el uso de un valor del parámetro menor que 0.5 (el método Danés corresponde a , **A** =1/3)

Ejemplos. Para ver con mayor claridad algunas de las conclusiones anteriores vamos a mostrar dos ejemplos y los correspondientes repartos para la fórmula de St-Lagüe, **A** =0.5=1/2, cuyos divisores son según (2): 1,3,5,7,..

Ejemplo 1. Escaños 12

Partido	Propor. ciones	Reparto
A	5.30	6
B	3.36	3
C	1.90	2
D	1.44	1

Ejemplo 2. Escaños 12

Partido	Propor. ciones	Reparto
A	5.73	5
B	3.65	4
C	1.57	2
D	1.05	1

En ambos ejemplos dos restos deben redondear por exceso. En el primero sólo hay un resto mayor que 0.5, correspondiente al partido C, luego es el primero en redondear por por exceso. Ahora, entre los restos menores que 0.5, a igualdad (o proximidad) de los mismos, redondea antes el que corresponda a mayor parte entera. En efecto, observemos que a pesar de ser 0.30 el menor resto ha conseguido redondear por exceso porque su parte entera es mayor que la correspondiente al resto 0.36 y mucho mayor que la correspondiente al resto 0.44. Es deseable la prima a los partidos más votados y por tanto el comportamiento de esta sucesión de divisores ante una situación como la del ejemplo 1, sin embargo no es deseable el comportamiento de la misma fórmula ante situaciones como la mostrada en el ejemplo 2.

En el ejemplo 2, tres restos son mayores que 0.5 y solo dos pueden redondear por exceso, para valores "similares", el que menos probabilidad tiene es el correspondiente a una parte entera mayor, y efectivamente así ocurre en este caso, pues el partido A se queda con 5 escaños teniendo un resto de 0.73, mientras que el C al que corresponden 1.57 pasa a 2.

Para disminuir la probabilidad de que aparezcan repartos como el mostrado en el ejemplo 2, basta con aumentar el valor de **A**. Es evidente que cuanto mayor sea **A**, menor será el número de restos mayores que **A**, y por tanto mayor la probabilidad de que todos tengan que redondear por exceso. La simetría de una distribución uniforme de los restos respecto del valor 0.5, hace que no sea necesario elevar mucho el valor de **A**, respecto de 0.5, para que la situación mostrada en el ejemplo 2 no se de, o se presente en muy rara ocasión.

Por ejemplo los valores 0.6, 2/3 ó 0.7 pueden ser suficientes. Por tanto las fórmulas correspondientes priman a las fuerzas más votadas y al mismo tiempo no desvíen excesivamente la proporcionalidad.

Por el contrario si nos acercamos mucho al valor

1, (D'Hondt), no se presentará jamás la situación mostrada en el ejemplo 2, pero el intervalo de influencia creciente de la parte entera en el redondeo del resto, puede llevar fácilmente a que la lista más votada absorba todos los restos de las proporciones correspondientes a las demás listas y redondee a **varios escaños más** de los que proporcionalmente le corresponde. Por ejemplo las proporciones para la distribución de los 16 escaños de Valencia, en las Elecciones Generales de 1989 fueron: PSOE 6.96 escaños, PP 4.21 escaños, UV 1.99 escaños, IU 1.72 escaños y CDS 1.12 escaños. El reparto con D'Hondt ha sido: 8, 4, 2, 1, 1 escaños respectivamente. En estos casos no se puede considerar que el reparto sea proporcional.

5) El intervalo [0.60, 0.75] para elegir valores de **A**, es decir sucesiones de divisores, es muy bueno, aunque ninguna sucesión de divisores usada hasta ahora se aproxima a las correspondientes a los valores de este intervalo. Por tanto **una fórmula recomendable es** la correspondiente al valor 2/3 para **A**, es decir **los divisores: 2,5,8...** etc. El reparto al que conduce para los datos de las Elecciones Generales de 1989 quedó resaltado en el centro de la tabla del párrafo 3.

Siguiendo razonamientos análogos a los anteriores se pueden establecer otras propiedades de las nuevas sucesiones de divisores. Antes de enunciarlas necesitamos las siguientes notaciones:

Supongamos que en una circunscripción concurren los partidos $P_1, \ldots, P_t$, que ya consideramos ordenados decreciendo según número de votos. Sea K el número de escaños a asignar; y notemos por $N(\mathbf{A},j)$ la suma de los escaños que asigna la fórmula electoral (1) a los partidos $P_1, \ldots, P_j$.

Propiedad 1.- Fijado $j \in \{1,2,..,t\}$, se tiene

$$\mathbf{A} \le \mathbf{A'} \Rightarrow N(\mathbf{A},j) \le N(\mathbf{A'},j), \quad \mathbf{A}, \mathbf{A'} > 0$$

es decir, al aumentar **A**, si algún escaño cambia de partido, es porque ha pasado a pertenecer a uno que tiene más votos que el partido del que procede.

Propiedad 2.- Si P_2 ha obtenido menos votos que P_1, existe un valor $A_0 \in R$, tal que si

$$\mathbf{A} > A_0 \Rightarrow N(\mathbf{A},1) = K$$

Propiedad 3.- Si $K \le t$, existe un valor $A_0 \in R$, estrictamente positivo, tal que si

$$0 < \mathbf{A} < A_0 \Rightarrow N(\mathbf{A},j) = j, \quad 1 \le j \le K$$

La propiedad 1 nos dice que al aumentar el valor de **A**, se beneficia **siempre** a los partidos más votados, por tanto podemos diseñar sucesiones de divisores con la **garantía** absoluta de que ante **cualquier situación posible** van a primar más o menos, (según el valor elegido para **A**), a la lista más votada, que las sucesiones conocidas hasta ahora.

Además nos dice la propiedad 1 que si al aumentar el valor de **A** hasta **A'**, la nueva sucesión da un reparto diferente es porque algún partido ha perdido un diputado en beneficio de otro que tiene más votos que él.

La propiedad 2 nos dice que podemos construir sucesiones de divisores **equivalentes** a la fórmula mayoritaria (mayoría simple además).

La propiedad 3 nos indica del peligro de tomar valores pequeños de **A**, ya que en tal caso la prima a los partidos pequeños puede ser enorme.

Después de observar las propiedades 2 y 3, nos planteamos la siguiente pregunta, ¿ en general, pueden considerarse proporcionales las fórmulas basadas en sucesiónes de divisores ?.

Por último indicar que a este trabajo se ha llegado buscando argumentos científicos para, primeramente, mostrarle al Defensor del Pueblo que la fórmula electoral D'Hondt no es proporcional y por tanto debe recurrirse ante el Tribunal Constitucional, y en segundo lugar mostrarle a los Diputados del Congreso los defectos de nuestra fórmula electoral y darle soluciones alternativas. Es posible que el cambio de fórmula electoral no se consiga, y debamos conformarnos con haber obtenido una infinidad de fórmulas electorales basadas en sucesión de divisores con efectos intermedios entre D'Hondt y St-Lagüe, de tal manera que podemos realizar cambios de fórmula con tanta moderación como se quiera. Creemos que esta es una aportación importatante a una sociedad democrática de los profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

[1] AGUILERA DE PRAT, C.R.,, Pere Vilanova, *Temas de Ciencia Política*, PPU, 1987.

[2] ALVAREZ CONDE, E. Y GONZÁLEZ HERNÁNDEZ,, J.C.,*Código de Derecho Electoral Español.* Ed. Tecnos, Madrid 1985.

[3] BALINSKI, H.P. & YOUNG, H.P. *Fair Representation,* Yale University Press, 1982.

[4] BALINSKI, H.P. & YOUNG, H.P. *On Huntington methods of apportionment,* SIAM J. Appl. Math., vol. 33, pp. 607-618, 1977.

[5] CARRERAS FRANCÉS DE, Y VALLES, JOSEP M.: *Las elecciones.* Ed. Blume, Barcelona, 1977.

[6] COLOMER, J.M. *El arte de la manipulación política.* Anagrama S.A.,Barcelona, 1990.

[7] DUVERGER, M. (ed): *L'influence des systèmes électoraux sur la vie politique, Cahiers de la fondation Nationales des Sciences Politiques,* A. Colin,París, 1950.

[8] GIMÉNEZ FERNÁNDEZ, M.: *Estudios de Derecho electoral contemporaneo,* Sevilla, 1925 (2º ed. 1977).

[9] MACKENZIE, W. J. M.: *Elecciones libres,* Ed.Tecnos, Madrid, 1962.

[10] MEER, F. *La Constitución de la II República,* Eunsa, Pamplona, 1978.

[11] NOHLEN, D.: *Sistemas electorales del mundo,* Centro de Estudios Constitucionales, Madrid, 1981.

[12] ORTIZ DE BURGOS, J., *La Representacón Proporcional,* J.B., 1923.

[13] PASTOR, M.: *Ciencia Política,* Mc-Gran Hill, 1988.

[14] RAE DOUGLAS W.: *Leyes electorales y Sistemas de partidos políticos,* Ediciones CITEP, Madrid, 1977.

[15] RAMÍREZ GONZÁLEZ, V., *Matemática Aplicada a la distribución de escaños Método de reparto P.R.I* Rev. Epsilon nº 6/7, 1985.

[16] ROKKAN, S.: Voz *"Elecciones electorales"*, en Enciclopedia Internalcional de las Ciencias Sociales, Ed. Aguilar, Madrid, 1968.

[17] SANTOLAYA MACHETTI, P. , *Significado y alcance de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General,* Centro de Estudios Constitucionales, Revista de Estudios Políticos (Nueva Epoca), nº 53, pp. 45-69, Madrid 1986.

[18] 'TE RIELE, H.J.J. *The proportional representation problemin de Second Chambre: an approach via minimal distances,* Statistica Neerlandica, vol. 32, nº 4, pp. 163-179, 1978.

APENDICE I

RESULTADO POR PROVINCIAS AL APLICAR LA FORMULA CUYOS DIVISORES SON:2, 5, 8, ... EN 1989.
Comparación con D'Hondt y con las proporciones exactas

Provincia	REPARTO CON 2, 5, 8, .. PSOE	PP	IU	CDS	OTROS	Proporciones	REPARTO D'HONDT
					PNV HB		
Alava	**1**	**1**			**1 1**	1.51-0.83-0.98-0.68	**2-1-1-0**
Albacete	3	1				2.47-1.53	3-1
Alicante	5	3	1	1		4.7-3.2-0.97-1.1	5-3-1-1
Almería	**3**	**2**				3.43-1.58	**4-1**
Avila	1	1		1		0.88-1.1-1.02	1-1-1
Badajoz	**4**	**1**		**1**		3.72-1.6-0.68	**4-2**
Baleares	**2**	**3**		**1**		2.45-2.89-0.66	**3-3**
					CiU ERC		
Barcelona	**13**	**4**	**3**	**1**	**10 1**	12.7-3.6-2.8-1.6-10.4-0.86	14-3-3-1-11-0
Burgos	2	2				1.7-2.3	2-2
Cáceres	3	2				3.3-1.7	3-2
Cadiz	**5**	**2**	**1**		1→PA	5.24-1.64-0.97-1.15	**6-1-1-1**
Castellón	3	2				2.75-2.25	3-2
Ciudad Real	3	2				3.18-1.82	3-2
Córdoba	**4**	**1**	**2**			4.01-1.49-1.5	**5-1-1**
Coruña	4	4		1		4.4-3.97-0.99	4-4-1
Cuenca	2	1				1.62-1.38	2-1
Gerona	2				3→CiU	1.9 - 3.1	2-3
Granada	4	2	1			4.25-1.84-0.91	4-2-1
Guadalajara	1	2				1.38-1.62	1-2
			PNV	HB	EA EE		
Guipuzcoa	2		1	2	1 1	1.6-1.3-1.8-1.45-0.85	2-1-2-1-1
Huelva	4	1				3.75-1.25	4-1
Huesca	2	1				1.84-1.16	2-1
Jaén	**4**	**1**	**1**			3.61-1.62-0.77	**4-2**
León	**2**	**2**		**1**		2.25-2.18-0.57	**3-2**
Lérida	**1**	**1**			2→CiU	1.38-0.6-2.02	**2-0-2**
La Rioja	2	2				1.96-2.04	2-2
Lugo	2	3				2.02-2.98	2-3

Madrid	12	12	5	4		11.7-12.1-5.37-3.9	12-12-5-4
Málaga	**6**	**2**	**1**	**1**		5.69-2.18-1.5-0.61	**7-2-1**
Murcia	**4**	**3**	**1**	**1**		4.33-2.83-0.86-0.98	**5-3-0-1**
Navarra	**2**	**2**			1→HB	2.07-2.2-0.73	**2-3-0**
Orense	2	3				2.3-2.7	2-3
Asturias	4	3	1	1		3.8-2.5-1.5-1.2	4-3-1-1
Palencia	1	2				1.36-1.64	1-2
Las Palmas	**2**	**2**	**1**	**2**		2.57-1.66.81-1.96	**3-2-0-2**
Pontevedra	**3**	**4**		**1**		3.27-3.92-0.81	**4-4**
Salamanca	2	2				1.9-2.1	2-2
S.C. Tenerife	4	1		1	1→AIC	3.26-1.4-0.8-1.5	4-1-1-1
Cantabria	**2**	**2**		**1**		2.27-2.18-0.55	**3-2**
Segovia	**1**	**1**		**1**		1.06-1.37-0.57	**1-2**
Sevilla	**7**	**3**	**1**		1→PA	6.94-2.43-1.47-1.16	**8-2-1-1**
Soria	1	2				1.2-1.8	1-2
Tarragona	2	1			2→CiU	2.1-0.8-2.1	2-1-2
Teruel	2	1				1.64-1.36	2-1
Toledo	3	2				2.88-2.12	3-2
Valencia	**7**	**4**	**2**	**1**	**2→UV**	6.96-4.2-2-1.72-1.1	**8-4-2-1-1**
Valladolid	**2**	**2**		**1**		2.1-2.23-0.67	**2-3**
					PNV HB EA EE		
Vizcaya	2	1			3 2 1 1	2.3-1.1-3.1-1.7-0.9-0.9	2-1-3-2-1-1
Zamora	1	2				1.41-1.59	1-2
Zaragoza	3	2	1		1→PAR	3.05-2.2-0.9-0.85	3-2-1-1
Ceuta+Melilla	2					2	2

Nota: i) se han resaltado en negrilla las provincias en las que los repartos, con los divisores 2, 5, 8, ... y con la fórmula D´Hondt, son diferentes.
ii) Para el cálculo de las proporciones se han considerado sólo los votos de aquellos partidos que obtienen algún escaño con los divisires 2, 5, 8, ...
iii) Los datos son anteriores a la resolución de las impugnaciones por tanto no contemplan el cambio de resultado en el escaño de Melilla.

APENDICE II

ELECCIONES ANDALUZAS. JUNIO DE 1990

	REPARTO CON 2, 5, 8,..				PROPORCIONES				REPARTO D'HONDT			
Provincia	PSOE	PP	IU	PA					PSOE	PP	IU	PA
Almería	**6**	**3**	**1**	**1**	5.88	3.31	1.05	0.76	**7**	**3**	**1**	**0**
Cádiz	**8**	**2**	**2**	**3**	7.46	2.47	1.62	3.45	**8**	**2**	**1**	**4**
Córdoba	7	3	2	1	6.39	2.81	2.54	1.26	7	3	2	1
Granada	7	4	1	1	6.70	3.84	1.61	0.85	7	4	1	1
Huelva	7	2	1	1	6.43	2.56	1.07	0.94	7	2	1	1
Jaén	**7**	**3**	**1**	**1**	6.47	3.40	1.43	0.70	**7**	**4**	**1**	**0**
Málaga	9	4	2	1	8.33	3.72	2.46	1.49	9	4	2	1
Sevilla	10	4	2	2	9.44	3.66	2.35	2.55	10	4	2	2
TOTAL	61	25	12	11	56.8	25.4	14.5	12.3	62	26	11	10

Nota: se han resaltado en negrilla las provincias en las que los repartos, con los divisores 2, 5, 8, ... y con la fórmula D´Hondt, son diferentes

Observaciones:

i) El PSOE, partido ganador en todas las provincias, ha resultado beneficiado respecto de su proporción exacta en todas las provincias, acumulando una prima de 4.2 escaños con los divisores 2, 5, 8,... y 5.2 con D'Hondt, que extrapolando los 109 escaños autonómicos a los 350 de unas Elecciones Generales equivalen a una prima de 13.5 y 16.7 escaños respectivamente. Lo que prueba, una vez más, que el desvio de proporcionalidad que origina D'Hondt disminuye al aumentar el tamaño de las circunscripciones.

ii) Con los divisores 2, 5, 8, .. el último escaño por **Almería** no corresponde ni al PP ni al PSOE sino al PA, independientemente de que usemos los datos anteriores o posteriores a la impugnación. (Los que aparecen en la tabla son los posteriores a la impugnación).

El aprendizaje por descubrimiento dirigido aplicado a la enseñanza de las matemáticas

Mariano Domínguez Muro

Robert Glaser, en su artículo titulado "Variables en el aprendizaje por descubrimiento", resalta que es la inducción el método seguido en el aprendizaje por descubrimiento, pero que la inducción lleva implícito el aprendizaje con errores.

Más adelante afirma:

"El niño realiza desde su comienzo un aprendizaje por descubrimiento ante lo desconocido: colores, objetos, animales, operaciones,...

El descubrimiento por sí mismo lleva implícito el error.

Una forma de reducir errores en el aprendizaje es que se utilice positivamente el conocimiento existente y sirva para guiar el aprendizaje..."[1]

Con el fin de reducir el máximo estos riesgos de error, nosotros entendemos el aprendizaje por descubrimiento dirigido apoyándenos fundamentalmente en estos cuatro pilares: el alumno, los materiales, el profesor y la evaluación.

El Alumno

El alumno partirá de situaciones concretas (juegos, manipulaciones, observaciones, problemas,...) o de conceptos aprendidos y asimilados previamente (conocimientos previos); a partir de ellos podrá llegar a la formalización del conocimiento matemático. Ahora bien, la formalización del conocimiento matemático no la entendemos como punto de partida, sino más bien como una meta. Coincidimos en este sentido con los planteamientos que hace el D.C.B. cuando afirma (p. 379 y 481):

"La formalización, la precisión y la ausencia de ambigüedad del conocimiento matemático no es el punto de partida, sino más bien el punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para conocerla, analizarla y transformarla".[2]

La historia del aprendizaje de la humanidad, así como la de nuestros propios alumnos, nos descubre que es imposible hacer matemáticas si no partimos de los objetos, de las aproximaciones, de los tanteos y de la resolución de problemas particulares.

Veamos, a modo de ejemplo, cómo mediante un juego puede iniciarse al alumno en los conceptos de probabilidad:

En grupos de dos alumnos, se les indica que se repartan los 12 primeros números naturales, seís cada uno. Pueden ordenar los números que a cada uno le han correspondido de una forma similar a esta:

$\boxed{1\ 4\ 6\ 7\ 9\ 11}$ $\boxed{2\ 3\ 5\ 8\ 10\ 12}$

Se realizan tiradas alternativas con dos dados. Se irá tachando cada número a medida que resulte como suma de ambos casos.

Gana aquél que consiga tachar primero todos sus números.

Con posterioridad se le pedirá que elijan los seis números que consideren mejores (estrategias ganadora)

¿Qué número no elegirían nunca? ¿Por qué?,...

El paso del juego a la introducción de los correspondientes conceptos probabilísticos es inmediata.

El material

Todo el largo proceso en la formalización del conocimiento del alumno creemos que debe estar dirigido por el propio material, previamente elaborado por el profesor (guión de trabajo). Este guión debe estar diseñado de tal forma que, por una parte no suprima el poder creador del alumno, y por otra le proporcione las ayudas imprescindibles para cambiar.

Entendemos que el guión debe prever y sugerir todas aquellas actividades que, según el Informe Cockroft, en su párrafo 243, deben realizarse en una clase de Matemáticas: realización de trabajos prácticos adecuados, adquisición de destrezas algorítmicas, explicaciones a cargo del Profesor, discusiones por grupo y a nivel de aula, resolución de problemas y planteamiento de situaciones de investigación.

La realización de trabajos prácticos adecuados la consideramos como una actividad muy importante a la hora de conseguir la necesaria motivación en los alumnos. El nivel manipulativo es, frecuentemente, el único eslabón al cual pueden agarrarse todos los niños, no importa cual sea su nivel intelectual. A este respecto estamos totalmente de acuerdo, partiendo de nuestra experiencia de aula, con la afirmación que realiza al respecto el Informe Cockroft en su párrafo 247 cuando asegura:

"Con bastante frecuencia se considera que en la secundaria no son necesarias ya las actividades prácticas, pero no parece ser cierto, como tampoco lo es que dichas actividades deban ser llevadas a cabo únicamente por los alumnos de rendimiento bajo; por el contrario, los alumnos de todos los niveles pueden beneficiarse con el desarrollo de experiencias prácticas apropiadas..."[3]

El D.C.B. al hacer referencia al diseño de la Educación Primaria indica (p. 386);

"...el proceso de construcción del conocimiento matemático debe utilizar como punto de partida la propia experiencia práctica de los alumnos." (2)

Y en la Introducción de la Secundaria Obligatoria igualmente indica (p. 481):

"...la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos,... y la resolución de problemas particulares." (2)

Es necesario que nuestros alumnos manejen mucho más las tijeras, la regla, la escuadra, el transportador de ángulos, el compás,...

Los juegos o simulaciones también los incluimos dentro de las actividades que pueden ayudar a desarrollar en los alumnos el gusto por el aprendizaje de las matemáticas. Evidentemente no estamos de acuerdo con el principio de que las matemáticas deben ser necesariamente aburridas.

Las situaciones de investigación, creemos, deben estar sugeridas de forma sencilla y forma a lo largo del guión. Desde muy pequeños, los niños son capaces de descubrir propiedades en los números y figuras, de realizar clasificaciones, de simular situaciones a través de juegos,...

Es evidente, por ejemplo, que si proponemos la suma de los n primeros números impares $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1)$ la mayor parte de los niños se quedarán sin saber que hacer; pero si se añade el siguiente esquema.

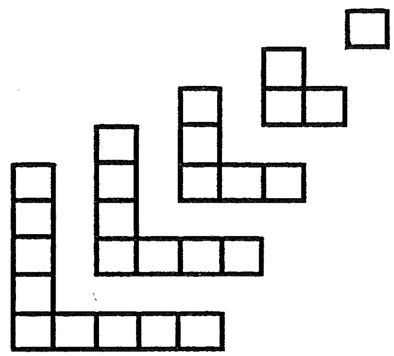


Figura 1

Ahora muchos niños se atreverán hacer sus conjeturas y, posiblemente, a proponer sus soluciones.

Jugando con tiras de mecano, los alumnos pueden iniciarse en la investigación, clasificación de polígonos y sus propiedades.

A lo largo de las actividades propuestas, debe haber también situaciones, problemas, ejercicios,... dirigidos exclusivamente a aquellos alumnos que, frecuentemente, se aburren en nuestras clases y, por ello, nos molestan, debido a que su nivel es muy superior al del resto de los alumnos del aula. Con alguna pequeña sugerencia por parte del profesor y las situaciones adecuadas, estos alumnos seguirán su propio ritmo de trabajo y nos permitirán centrarnos más en aquellos alumnos con dificultades mayores en el aprendizaje.

De todo lo anterior se desprende que la labor más importante en todo este proceso consistirá en elaborar adecuadamente el material de trabajo del alumno. Es preciso que tanto el lenguaje, como el desarrollo lógico del proceso esté al alcance del alumno.

Coincidimos plenamente con Robert M. Gangé cuando en su artículo "Diversas especies de aprendizaje, y el concepto de descubrimiento", afirma lo siguiente:

"Se tiene que atender ampliamente la fase de preparación de la instrucción, si se quiere que el descubrimiento tenga lugar".[4]

El Profesor

El profesor se mantiene expectante ante las diversas situaciones de aprendizaje que se dan en la clase. Animando a unos, orientando a otros,... procurando en todo caso no adelantar soluciones a sus alumnos, privándeles así del disfrute inherente al propio descubrimiento.

En este sentido consideramos igualmente válidas las dos frases siguientes:

"No enseñes a los monos a subir a los árboles" de Confucio.

"En clase no conviene responder a preguntas que nadie se ha formulado todavía" (Polya).

La Evaluación

Es evidente que esta forma de enseñanza condiciona fuertemente la forma y modo de la evaluación de nuestros alumnos.

Frecuentemente hemos oído comentar, y en cierto modo pensamos que es cierto, que se enseña para los exámenes o también, que examinamos de aquello que hemos contado reiteradamente en clase; con lo cual el mejor alumno será, lógicamente, el que mejor sepa reproducir nuestras explicaciones o los libros de texto que seguimos. Si bien, este alumno a menudo carece de todo afán de búsqueda, aportación personal...

Por lo cual, toda evaluación del alumno, en nuestra opinión, en caso de que se haga, debe recoger el máximo de factores posibles que influyen en la formación del alumno. Siempre debería recoger, al menos, los aspectos siguientes:

—Integración e interés manifestado por el alumno en la actividad.

—¿Cómo refleja su actividad en el cuaderno de clase? El cuaderno de clase debería ser un diario detallado de la actividad del alumno y no sólo un esquema de problemas y respuestas. Ahí deben figurar sus sugerencias, sus deducciones, interpretaciones,...

—Los trabajos de investigación o problemas propuestos. Es muy importante que los alumnos se habitúen a justificar y razonar todos los caminos seguidos, sus rectificaciones,...

—Los propios ejercicios tipo control (si bien éstos deberían ser realizados en unas condiciones normales de clase y teniendo en cuenta de la edad del alumno).

Conclusión

Creemos que esta forma de trabajo prepara claramente al alumno para la vida, tanto para aquél que va a seguir estudios posteriores, como aquél que se incorpore al mundo laboral. Estamos plenamente convencidos que el caracter eminentemente formativo que se ha atribuído siempre a las Matemáticas está más en función del modo y forma en que se trabajen, que de los propios contenidos abordados. El propio D.C.B. reconoce este mismo hecho cuando en su página 382 reconoce:

"... su mayor o menor incidencia sobre la formación intelectual de los alumnos, al igual que sucede con los contenidos de las otras áreas curriculares, depende sobre todo de la manera como se enseñan y se aprenden..."

Nuestra experiencia de aula nos confirma que el *Aprendizaje por Descubrimiento Dirigido,* en la línea descrita anteriormente, contribuye a una formación integral de nuestros alumnos.

Estamos igualmente convencidos que este tipo de enseñanza cubre perfectamente el objetivo esencial que marca para la enseñanza Secundaria Obligatoria el Ministerios de Educación Nacional francés cuando en los Programas e Instrucciones para les Collèges en 1985 en su apartado de Orientations et Objectifs indica:

"Seuls ou en groupe les élèves doivent enfin apprendre à travailler par eux-memes, afin d'accéder à l'autonomie et à la responsabilité. Pour progresser, il ne suffit pas de savoir, il faut savoir travailler".[5]

(Solos o en grupo los alumnos deben aprender a trabajar por sí mismos con el fin de llegar a adquirir autonomía y responsabilidad. Para prosperar, no es suficiente saber, es preciso saber trabajar).

Referencias Bibliográficas

—ROBERT CLASER, "*Variables en el aprendizaje por descubrimiento*" del libro de SHULMAN-KEISLAR," Aprendizaje por descubrimiento", 1974. Trillas.

—DISEÑO CURRICULAR BASE, 1989, M.E.C.

—INFORME COCKCROFT, 1985, "*Las matemáticas si cuentan*" M.E.C.

—ROBERT M. GAGNE, "*Diversas especies de aprendizaje, y el concepto de descubrimiento*", del libro de SHULMAN-KEISLAR, "Aprendizaje por descubrimiento", 1974. Trillas.

—Ministère de l'Education Nationale, 1985, COLLEGES Programes et Instructions. Publications de CNDP.

Viene de la pág. 28

exposición de los últimos descubrimientos científicos, al comentario de recursos pedagógicos y a la creación literaria, sección ésta donde se incluyó "El uno y los ceros".

A continuación reproducimos el cuento tal como apareció publicado.

El uno y los ceros

Cuento.

La Aritmética es, como todos saben, una de las islas que pertenecen al archipiélago llamado de las Matemáticas.

Aquel pueblo se compone de números enteros, quebrados y mixtos, así como en España hay hombres de talento, importantes y medianías.

No es la Aritmética un país seductor por lo civilizado, fuerza es decirlo... El bello ideal de aquellos insulares consiste en extraer al prójimo la raíz cuadrada, siempre multiplicar para sí y dividir para los demás.

Con lo dicho basta para que el lector no se sorprenda al saber que el monarca absoluto y tiránico de aquel curiosísimo país es el último vástago de la muy ilustre, augusta e inmortal dinastía El Tanto por ciento.

La historia política de la Aritmética está llena de interesantes episodios; pero ninguno tanto como el que voy a referir.

Los ceros, ciudadanos de la más ínfima clase, eran poco menos que esclavos de los personajes que figuraban al frente del Gobierno, tales como el 145.000 y el 63.804, Presidente del Consejo y Ministro de Hacienda respectivamente, números que siempre salían en todos los sorteos de la Lotería nacional.

A los desventurados ceros se les hacía pagar toda clase de impuestos y contribuciones directas e indirectas; se les obligaba a llevar siempre a cuestas un legajo de documentos justificativos de su insignificante personalidad; a ellos se les hacía sufrir todo el peso de la ley por un quítame allá esas pajas; no podían tomar asiento en las Cámaras populares ni defenderse por medio de la prensa, ni reunirse en comité pequeño ni grande, para tratar sus menguados intereses.

Los unos pertenecían a la clase media, y aun muchos de ellos procuraron demostrar, mostrando al efecto frondosísimos árboles genealógicos, que descendían por línea recta de los hunos, nombre de un pueblo bárbaro y conquistador que al degenerar y venir a menos había perdido una hache, letra a la verdad bien poco resonante que no pudo jamás competir con una de cambio, únicas que allí figuraban.

Pero, ¿qué queréis¿ Cada cual se da importancia con lo que puede, y en último resultado, la manía de los pergaminos es la más inocente manía de cuantas se conocen.

Los unos, sin embargo, podían aspirar a ser diputados a Cortes, y muchos de ellos lograban escalar un elevado puesto oficial.

Sucedió en cierta época que los ceros, hartos ya de tantas injusticias y arbitariedades, reuniéronse un día a la chita callando, y después de breve, si bien acalorada discusión, determinaron sublevarse contra los poderes constituidos apelando al recurso de la fuerza.

-¡Pido la palabra¡- gritó una voz del centro más nutrido de las masas.

Era un uno que se había introducido furtivamente en aquel secreto club revolucionario.

-¡Qué hable¡- exclamaron varios ceros.

-¡Ciudadanos¡- comenzó diciendo el orador, -evitemos la efusión de sangre; subamos legalmente al poder amparándonos de la justicia y no elevemos nuestros innovadores proyectos de la ley en las puntas de las espadas. Los gobiernos que se imponen a la opinión pública a cañonazos, jamás logra-

Continua en la pág. 46

Sumando cuadrados: un ejemplo de visualización en matemáticas

Vicente Meavilla Seguí

A modo de introducción

Un buen diagrama suele ser de gran ayuda a la hora de *intuir* una determinada propiedad numérica, *descubrir* algún teorema geométrico, *comprender* cierta identidad algebráica o *resolver* un problema.

La historia de la Matemática nos proporciona abundante material para apoyar esta tesis.

En este artículo presentamos un ejemplo contenido en el libro *La llave de las Matemáticas,* escrito en el siglo XVII por el autor chino Du Zhigeng.

Jugando con torres de cubos

La figura 1 representa tres torres iguales compuestas por cubos idénticos.

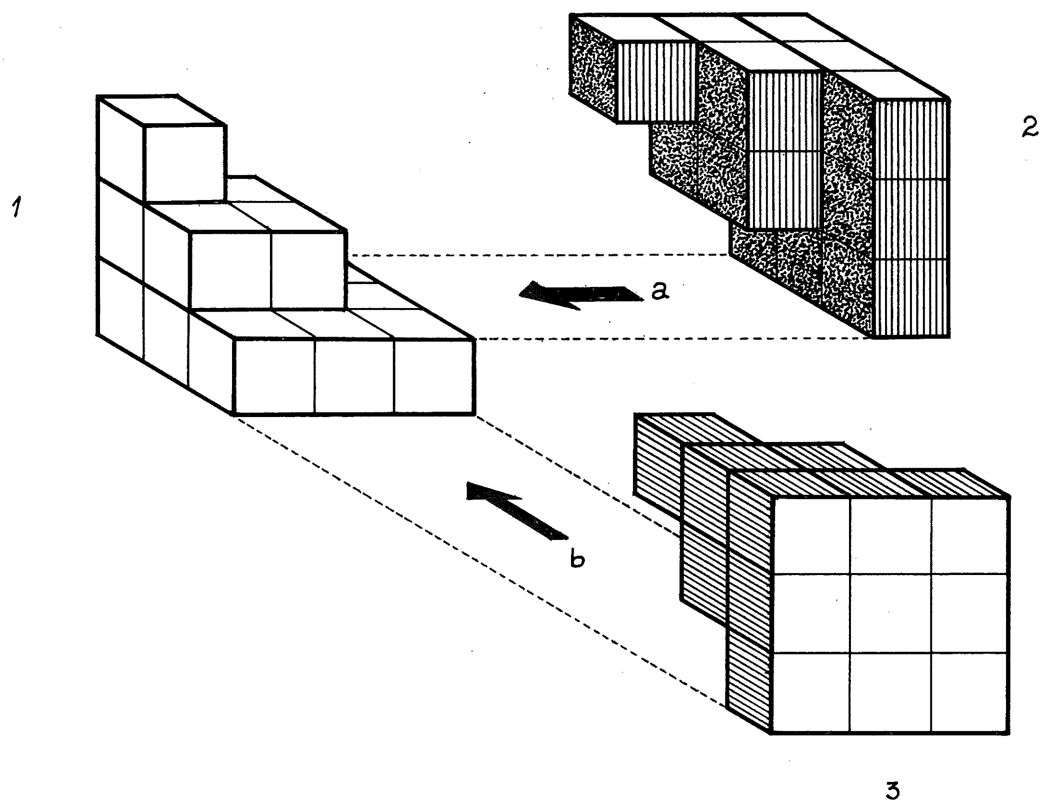


Figura 1

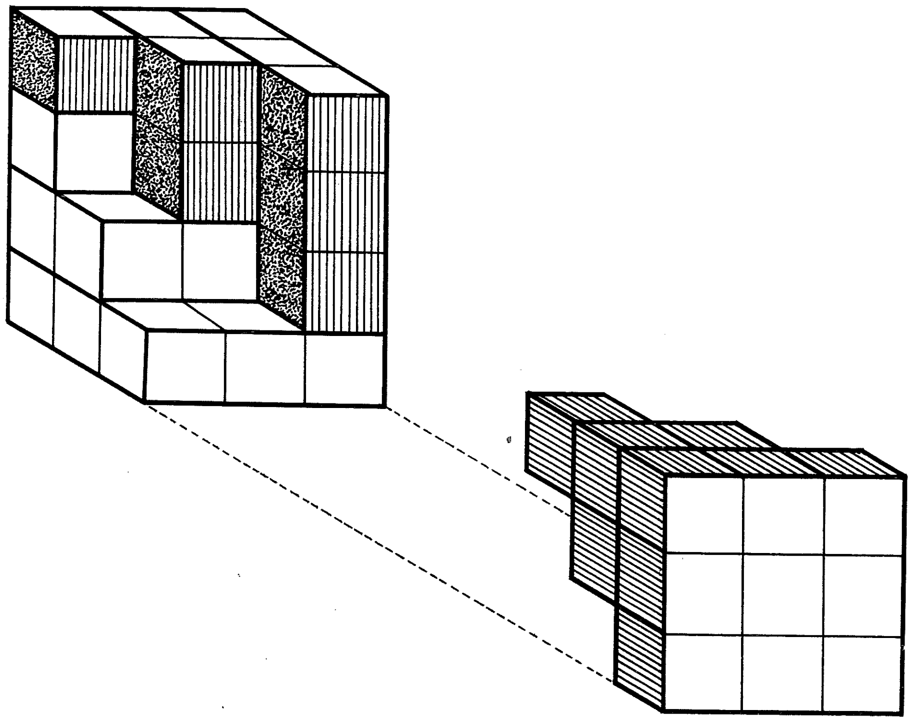


Figura 2

¿Cuántos cubos hay en cada torre?

Fijémonos en la torre 1.

En la capa superior hay *un* cubo (1^2), en la capa media *cuatro* (2^2) y en la inferior *nueve* (3^2).

Dicho en otras palabras:

Cada torre es un modelo tridimensional de la suma de los tres primeros números cuadrados.

Si desplazamos la torre 2 —según el sentido de la flecha *a*— hasta que se acople con la torre 1 y dejamos la pila 3 inmóvil, obtendremos una distribución de cubos como la que se representa en la figura 2.

Notemos que el sólido de la izquierda está compuesto por $2(1^2 + 2^2 + 3^2)$ cubos.

Si trasladamos la torre 3 —siguiendo la flecha *b*— hasta que se acople con el sólido que acabamos de describir, habremos materializado un bloque como el de la figura 3 compuesto por $3(1^2 + 2^2 + 3^2)$ cubos.

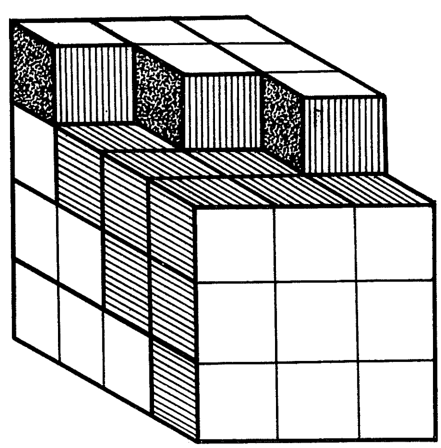


Figura 3

Resulta claro que, contando de abajo hacia arriba, las tres primeras capas de este bloque son paralelepídeos y la última no.

Si embargo, si dividimos la capa superior en dos partes iguales (ver figura 4) y las acoplamos de modo comveniente, podemos transformar el bloque de la figura 3 en un paralelepídeo de dimensiones 3,4 y 3+(1/2) (ver figura 5)

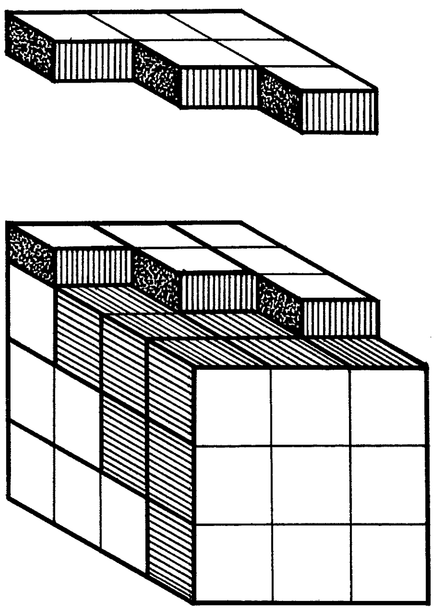


Figura 4

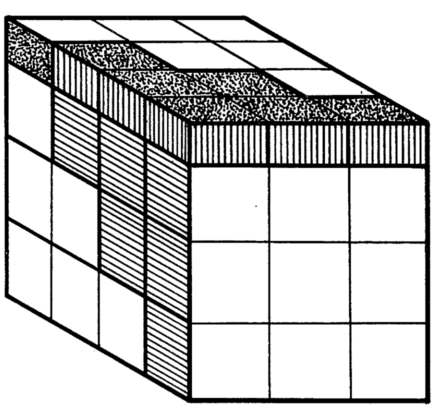


Figura 5

Con esto, resulta que:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2) = 3.4.(3 + (1/2)) \qquad [1]$$

Analicemos los tres factores que aparecen en el segundo miembro de la igualdad que acabamos de obtener.

—El primer factor (=3) coincide con el número de sumandos de $1^2 + 2^2 + 3^2$.

—El segundo (=4) es igual al primero más 1.

—El tercero [=3 + (1/2)] es igual al primero más 1/2.

Torres de cuatro plantas

Habiéndo llegado a este punto, vamos a jugar con tres torres de cuatro plantas como la que representamos en la figura 6.

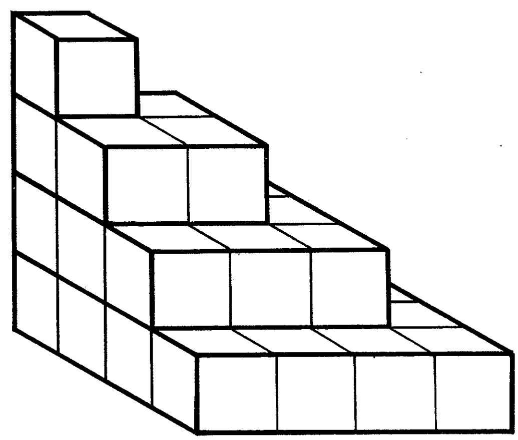


Figura 6

Si repetimos los mismos pasos que hemos dado en la sección anterior, obtendremos el resultado siguiente:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4.5.[4 + (1/2)] \qquad [2]$$

Una somera inspección de los factores que intervienen en el segundo miembro de la igualdad (2) nos conduce a descubrir que su ley de formación es idéntica a la que observamos en la igualdad (1).

En efecto:

—El primer factor (=4) coincide con el número de sumandos de $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.

—El segundo (=5) es igual al primero más 1.

—El tercero [=4 + (1/2)] es igual al primero más 1/2.

Una conjetura

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos no parece descabellado establecer la "igualdad" siguiente:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 +....+ n^2) = n(n+1)[n + (1/2)]$$

Por tanto, la suma de nos *n* primeros números cuadrados viene dada por:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 +....+ n^2 = (1/3)\ n\ (n+1)[n+(1/2)] =$$
$$= (1/3)\ n\ (n+1)[(2n+1)/2] =$$
$$= (1/6)\ n\ (n+1)(2n+1)$$

Dejamos al lector interesado la demostración —por inducción— de esta "fórmula" a la que nosotros hemos llegado por *vía geométrica.*

Viene de la pág. 42

ron una vida larga y pacífica. ¡Nada de revoluciones¡ Os veo a todos exaltados e iracundos..., mas recordad que la ira, como decía Séneca, es una locura momentánea, y por tanto,las consecuencias de aquello que la locura dicte serán irracionales y funestas.Pensad que la injusticia se comete de dos modos, o con la violencia o con el fraude: injuria fit duobos modis, aut vi, aut fraude. No hagamos valer nuestros santos derechos con las armas que se vale la injusticia y tomemos posesión legal de los escaños del Congreso... ¡Nombradme diputado y yo sabré defenderos¡

Estallaron frenéticos aplausos; aquel hombre era una adquisición, aquel hombre sabía hablar, aquel hombre se explicaba en una lengua exótica cuando venía el caso...

-¡Nombrémosle nuestro diputado¡- gritaron todos.

Un cero se puso a la derecha del uno, que desde aquel momento ya valía por diez; otro cero se les unió... y valía por ciento; después fueron todos colocándose en larga fila detrás del uno.

Figúrense los lectores el valor que en un santiamén adquirió mel uno: 1.000.000.000...

Entró, pues, triunfante en el Congreso derrotando al Gobierno en menos que canta un gallo. El 145.000 tomó las de Villadiego al ver que se le venía encima aquella nube de millones.

Muchos números primos se unieron al nuevo jefe, y a la sombra de éste comenzaron a hacer papel hasta los simples quebrados, es decir, las medianías. No falto 1/3 osado que lograra alcanzar la cartera de Hacienda, substituyendo al 63.804, y los números mixtos no les fueron a la zaga a los quebrados, pues siendo gentes despreocupadas que, como la romana del diablo, entraban con todos, ingresaron en el flamante partido.

Pero ¡ay¡ bien pronto el encumbrado uno comenzó a olvidarse de aquellos a quienes debía el ambicionado puesto que ocupaba, y acabó por no cumplir ni una sola de las promesas consignadas en su programa político.

Cundió el descontento entre los ceros: había marejada, protestas, murmuraciones..., todo lo cual supo aprovechar el Excelentísimo señor 145.000, caudillo de la oposición, atacando briosamente al jefe de Gobierno con discursos de irrebatible lógica.

El uno entonces, viéndose perdido, trató de anexionarse al 145.000, y al final de una de sus peroraciones, dijo:

-Mucho me extraña que S. S. me increpe tan duramente, pues en realidad nuestro credo político es en el fondo idéntico... Podríamos formar un gran partido, ya que en lo esencial estamos paralelos.

-¡No estamos para... lelos¡- gritó el 145.000.

Esta frase produjo tal hilaridad en la Asamblea, que hasta el presidente se retorcía de risa en su poltrona.

Fue aquella la última batalla que libró el uno... Convencidos los ceros de que, como siempre, se les había engañado, fueron pasándose poco a poco de la derecha a la izquierda, conmvirtiendo a su jefe, mediante una coma (voto de censura) en una insignificante fracción decimal: 0,00000000...1.

Desde entonces se estableció como un axioma de aquel país, y en otros muchos, la creencia de que no hay políticos sin-ceros.

El Drago: del juego a las funciones

Lluís Mora i Cañellas

1. Introducción

"El hombre nació para jugar, fue el pecado original el que lo condenó a trabajar".

La materia de matemáticas tiene una bien ganada fama de difícil, superarla requiere actualmente trabajo, trabajo y más trabajo. Parece como si el pecado original nos hubiera obligado a enseñar matemáticas en las escuelas. Ya va siendo hora que esta enraizada idea cambie, o más bien, se transforme en una nueva que conjugue el juego con el trabajo. El juego atrae, gusta a todo el mundo, por eso puede ser una experiencia muy formativa introducir conceptos matemáticos a traves de los juegos, así conseguiremos como mínimo, solucionar uno de los problemas fundamentales de la matemática: la motivación de los alumnos.

Este artículo pretende ser un ejemplo de lo expuesto anteriormente, a traves de un juego muy simple, EL DRAGO, introduciremos a los alumnos en el importante tema de las funciones matemáticas, pasando al mismo tiempo por el estudio de las series de números y preparando el terreno para introducir conceptos de teoria de grafos.

EL DRAGO es un juego muy simple, para desarrollarlo solo necesitamos una hoja de papel, un lápiz y mucha imaginación. Dice Martin Gardner en uno de sus libros, "los juegos matemáticos son útiles gracias a que partiendo de elementos muy simples, podemos llegar a obtener grandes resultados matemáticos", y en este sentido el DRAGO se adapta perfectamente a lo que le pedimos a un juego.

2. El juego: mecanismo

El DRAGO es un juego de competición para dos jugadores, el material necesario para jugarlo consiste en un papel y un lápiz.

El juego se inicia decidiendo los dos jugadores un número de puntos, entre 3 y 10, que dibujaran sobre la hoja de papel. Una vez dibujados, corresponde decidir cúal será el orden en que intervendran, esto se puede hacer mediante un sorteo.

Imaginemos que ambos jugadores han decidido empezar la partida con el mínimo de puntos posible, tres. El primer jugador debe unir dos de los puntos con una línea y después dibujar sobre esta línea un nuevo punto (fig1).

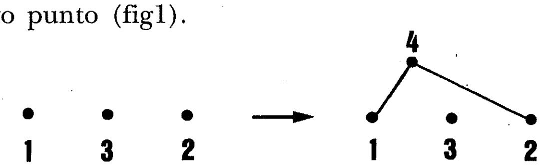


Figura 1

Siguiendo el mismo proceso los jugadores iran alternando sus jugadas hasta que no quede ninguna posiblidad de movimiento.

Las tres únicas reglas que deben cumplir los jugadores son:

1- Si de un punto salen tres lineas, este punto queda inutilizado para el juego.(fig.2)

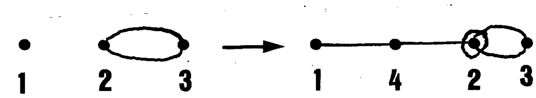


Figura 2

2- Podemos dibujar lineas entre dos puntos útiles o entre un punto y el mismo, si de éste solo sale una línea o ninguna.(fig.3)

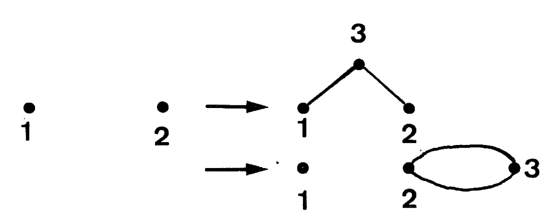


Figura 3

3- Las líneas no pueden cruzarse por ningún motivo.

El objetivo del juego consiste en ser el último jugador capaz de dibujar una línea entre dos puntos.

El desarrollo de una partida, a partir de tres puntos, puede ser el siguiente (fig.4):

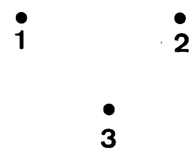


Figura 4

El primer jugador une los puntos (1) y (2) y dibuja un nuevo punto (4).(fig.5)

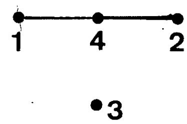


Figura 5

El segundo jugador decide trazar una línea que vaya del punto (3) a sí mismo dibujando el nuevo punto (5).(fig.6)

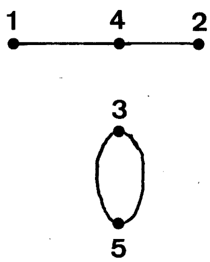


Figura 6

Hasta ahora todos los puntos son útiles, ya que de ellos salen como máximo dos lineas. El primer jugador dibuja ahora una linea de (3) a (5) por el interior, gracias a la regla número 3 el nuevo punto (6) queda bloqueado ya que la única linea que podria trazarse sin cortar a ninguna otra, lo uniría consigo mismo, dando como resultado un punto del que salen cuatro líneas, lo que incumple la regla número tres (fig.7)

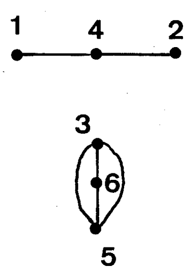


Figura 7

La siguiente jugada consistiría en unir los puntos (1) y (4) dejando el (4) inutilizado (fig.8).

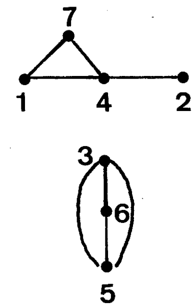


Figura 8

El próximo movimiento puede ser unir el punto (1) con el (2) quedando fuera del juego el punto (1), (fig.9)

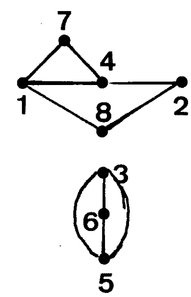


Figura 9

Para continuar jugando quedan tres puntos disponibles (2), (8) y (7). Ahora el segundo jugador tiene dos opciones:

a) unir los puntos (8) y (2) a traves del interior del polígono de vértices (1), (4), (2) y (8). De esta manera conseguiría ganar la pa- tida debido a que los puntos restantes (7) y (9) solo podrían unirse cruzando otras lineas, y

b) unir los puntos (7) y (8) o (2) y (7), jugada que llevaría al próximo jugador a la victoria en el próximo movimientó.

El jugador sigue la jugada a) con lo cual gana la partida. La distribución final del juego corresponde a la (fig.10)

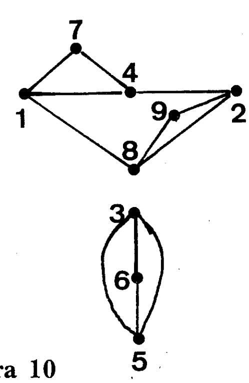


Figura 10

3. Análisis del juego

Una vez que los alumnos han adquirido el mecanismo del juego, se les plantea el análisis matemático del mismo. Este análisis consiste en responder a la siguiente pregunta:

¿Que estrategia debe seguir un jugador para vencer en una partida de DRAGO?

Probablemente esta pregunta despistará a la mayor parte del alumnado. Será necesario que el profesor encamine el procedimiento a seguir, es conveniente que esta "pista" se formule en términos de pregunta:

Dado un número n de puntos, ¿Cuál es el mínimo número de jugadas con los que se puede terminar la partida?, pregunta que irá acompañada de ¿Cuál es el máximo número de jugadas?

La resolución de este problema debe realizarse en dos etapas, primero una particularización, en la cual los alumnos resolveran casos sencillos, un punto de salida, dos, tres... hasta tener suficientes datos para analizar el problema. Una vez se tengan los resultados se procede a su generalización, intentando obtener una fórmula general que resuma el problema y responda a la pregunta formulada.

Estudiando el problema para los casos de 1, 2 y 3 puntos obtenemos los siguientes resultados:

nº de puntos	jugadas mínimas	jugadas máximas
1	2	2
2	4	5
3	6	8

Para obtener estos resultados los alumnos deben darse cuenta que el número de jugadas mínimas se obtiene, cuando se bloquean, se dejan sin completar, tantos puntos como puntos tenemos de salida. El número máximo de jugadas se obtendrá cuando sólo dejemos un punto, el último, sin completar.

Cuando tenemos un sólo punto, estamos delante de un caso trivial, las dos soluciones són iguales. Pero el caso de 2 puntos donde las soluciones son distintas puede ilustrar lo dicho en el párrafo anterior.

A partir de ahora el juego debe dejarse de lado ya que su resolución se hará a partir de la tabla de resultados obtenida con los casos sencillos.

Es fácil ver que las jugadas mínimas responden a la sucesión de los números pares, por tanto el término general de la sucesión será de 2n. Ya tenemos la respuesta a la primera pregunta, ¿cuál es el mínimo de jugadas con que puede terminar una partida si empezamos a jugar a partir de n puntos? 2n

Respondamos ahora al número máximo de jugadas con que puede terminar una partida que empiece con n puntos. Para hallar el término general de la segunda sucesión, 2, 5, 8,..., és fácil ver que la diferéncia entre términos consecutivos és 3, por tanto los siguientes términos de la série seran 11, 14 .... En este punto podemos introducir el concepto de recurréncia para hallar el término general.

Llamando a_1 al primer término, a_2 al segundo y a_3 al tercero, tenemos que:

$$a_2 = a_1 + 3$$
$$a_3 = a_2 + 3$$

De donde sera fácil ver que $a_3 = a_1 + 2.3$, y deduciremos que el término general de la serie es:

$$a_n = a_1 + 3(n-1)$$

Como sabemos que $a_1=3$ podemos arreglar la fórmula anterior y dejarla como

$$a_n = 3_n - 1$$

Para fortalecer en los alumnos los conceptos de sucesiones estudiados podemos proponer, dentro del juego, el estudio del número de puntos dibujados al final de la partida. Son dos sucesiones de términos generales 3n y 4n-1, que además de reforzar el traba-

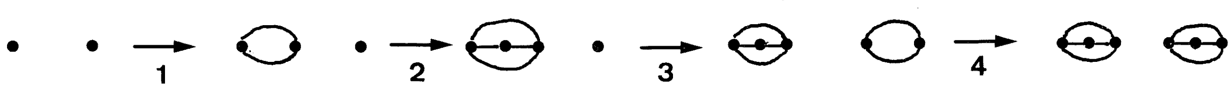


Figura 11

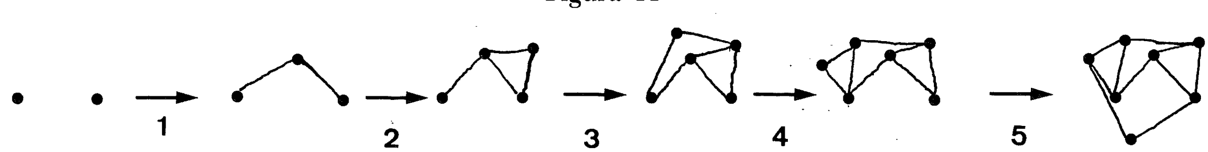


Figura 12

jo sobre sucesiones podrán ser utilizados para el trabajo posterior sobre funciones.

Una posterior ampliación del estudio de las sucesiones puede aparecer si planteamos a los alumnos el cálculo de la suma de los diez primeros términos de cada una de las cuatro sucesiones, con el fin de llegar al resultado

$$S = (a1+a10).10/2$$

Después del análisis matemático, podemos abordar el problema de la estrategia a seguir para vencer en este juego. Habrá que distinguir dos casos,si somos el primer jugador o si somos el segundo.

El segundo jugador tiene más posibilidades de victoria dado que puede enfocar el juego de tres maneras distintas:

1) Buscar el mínimo de jugadas, en este caso no importa el número de puntos con que iniciemos el juego, ya que todos son pares.

2) Buscar el número máximo de jugadas si el número inicial de puntos es impar, dado que en estos casos el número de jugadas es par.

3) Entre 4 y 10 puntos puede buscar un número intermedio de jugadas pár que le llevará a la victoria.

En los casos restantes el jugador ganador será el jugador que inicie el juego.

4. Funciones

En el estudio del juego del DRAGO, intervienen dos variables, el número de puntos que usamos para iniciar la partida y el número de jugadas, máximas o mínimas, con las que finaliza esta. Existe una clara dependéncia entre la segunda y la primera, decimos que el número de jugadas con las que finaliza la partida es función del número de puntos con los que iniciamos la partida.

El concepto de función queda ahora introducido como una dependencia entre dos variables, y la fórmula hallada anteriormente como una manera matemática de expresar esta dependencia.

Una formula es un medio que tenemos para resumir información, no es el único ni el mejor. Uno de los más utilizados en la mayoría de asignaturas es el gráfico. Todos sabrán ya que es un gráfico y como se construye, pero muchas veces su significado pasa desapercibido. Para conseguir subsanar este problema, podemos plantear a los alumnos que construyan un gráfico que refleje la dependencia entre el número de puntos y el número de jugadas, máximas y mínimas.

El principal problema que puede aparecer al hacer el gráfico será, en que eje deben colocar cada una de las dos variables. Situaremos la variable independiente, número de puntos, en el eje de abcisas, y la variable dependiente, número de jugadas, en el eje de ordenadas (figura 13).

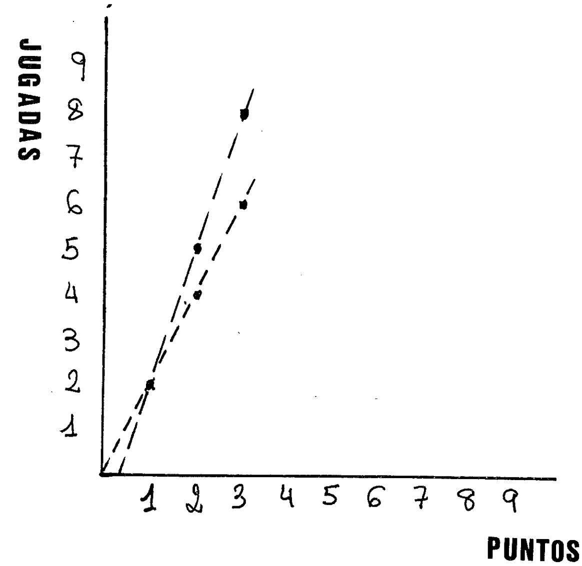


Figura 13

Una vez construido el gráfico y dado que los alumnos suelen unir invariablemente todos los puntos representados, podemos formular la pregunta: ¿Es lícito unir los puntos del gráfico mediante una línea continua?

Dado que las dos variables solo cogen valores en el campo de los naturales, punto en que introduciremos el concepto de dominio y recorrido de una función, unir los puntos del gráfico significa que el número de puntos a partir de lo cuales puede iniciarse la partida, puede ser un número decimal, lo cual es imposible, y lo mismo sucede con el número de jugadas con las que puede finalizar la partida.

Ya tenemos todos asumido que estamos trabajando con una función que relaciona dos variables que cogen valores en el campo de los números naturales, y por eso no podemos unir los puntos del gráfico con una línea contínua. Entonces ¿Cuando podremos unir los puntos?

Se ha estado creando el ambiente para discutir el concepto de número real, es el momento de aprovechar la coyuntura e introducir los distintos conjuntos de números que conocemos, naturales (N), enteros (Z), racionales (Q) y reales (R). El conjunto de los números imaginarios lo dejariamos para más adelante.

Introducidos los conceptos de teoria de números y de funciones entraríamos ahora en la parte más pesada y menos gratificante, establecer la nomenclatura que vamos a utilizar para referirnos a los distintos tipos de funciones, según el conjunto de números donde cojan valores las dos variables. En el caso de la función estudiada esta nomenclatura seria:

$$f: N \longrightarrow N$$
$$i \longrightarrow a_i$$

El conjunto de números de donde cogen valores las dos variables viene representado por N. La primera indica la variable independiente y la segunda la variable dependiente y donde i seria la variable independiente y a_i la variable dependiente.

Como se expresa a_i en función de i, a partir de la fórmula matemática hallada. En el caso del número mínimo de jugadas esta seria: $a_i= 3i-1$.

Generalicemos las funciones obtenidas al caso de los números reales. El conjunto N seria sustituido por R, i por x y a_i por $y=f(x)$.De manera que ahora en el caso del número mínimo de jugadas, la función sería:

$$f:R \longrightarrow R$$
$$x \longrightarrow y=f(x)$$

donde la fórmula de la función vendría expresada por $y= 3x-1$.

Dado que ahora podemos unir los puntos con lineas continuas, podremos ver que los gráficos corresponden a líneas rectas e iniciar por tanto, el estudio de la función de primer grado de fórmula general $y = ax + b$.

El estudio de las cuatro funciones trabajadas, jugadas mínimas, jugadas máximas, y número de puntos dibujados al finalizar el juego en los dos casos anteriores nos puede proporcionar información valiosísima sobre el comportamiento de la función de primer grado. Las fórmulas de estas cuatro funciones ampliadas al campo de los números reales son:

$$y=2x \quad y=3x-1 \quad y=3x \quad y=4x-1$$

El gráfico de las mismas viene indicado en la figura 14.

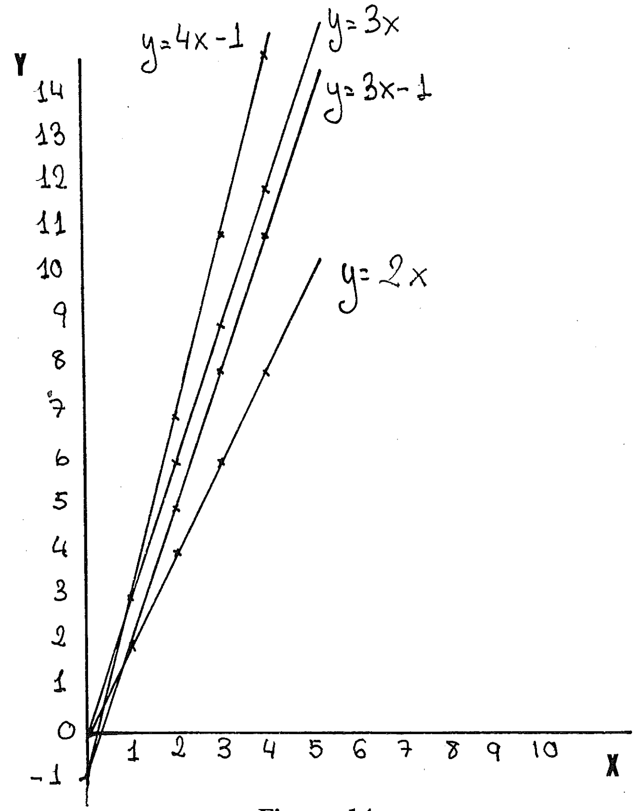


Figura 14

A partir de las cuatro rectas dibujadas podemos observar el significado de "a", número que multiplica a la x, y el de "b", número que suma o resta al término con x.

Diferentes valores "a" hacen que varie la inclinación de la recta, si el valor de "a" argumenta el valor de la inclinación tambien lo hace. Por tanto hay una dependencia directa entre ambos factores, "a" e inclinación. Tambien vemos que dos rectas que tengan el mismo valor de "a" pero diferente valor de "b" seran rectas paralelas, igual inclinación. Un valor de "b" negativo, hace que la recta no pase por el origen de coordenadas, sino que se desplace hacia la derecha un número de unidades indicado por el valor absoluto de "b". Si el valor de "b" es positivo la recta se desplazará hacia la izquierda del origen de coordenadas. Tambien podemos ver que el valor de"b" es la ordenada del punto por el cual la recta corta el eje de ordenadas.

A la vista de estas consideraciones lo lógico es llamar a "a", pendiente de la recta y a "b", ordenada en el origen.

Una vez terminado el análisis de la función de primer grado, es necesario que los alumnos realicen ejercicios de recapitulación para cimentar los conceptos adquiridos; ejercicios que podran conducir a trabajar equaciones de primer grado con una o dos incógnitas, según el criterio del profesor.

Una tarea muy interesante que se puede realizar una vez finalizados los ejercicios de recapitulación, consiste en proponer la realización de un trabajo de ampliación a realizar en grupo. Este trabajo de ampliación versará sobre un tema donde intervengan principalmente las funciones de primer grado. Unos posibles temas para realizar el estudio pueden ser:

- Estudio de la facturación eléctrica.
- Estudio de la presión atmosférica.
- Estudio de los recibos del agua y del gas
- Estudio del IRPF.
- Introducción a la teoria de grafos.

5. Resumen

Hemos visto como a partir de un juego podemos introducir conceptos de sucesiones y de funciones. Tambien nos ha preparado el terreno para realizar un estudio de diversos temas que pueden resultar provechosos para los alumnos según sus intereses.

No termina aqui el interés de las matemáticas en los juegos, podemos encontrar juegos que nos introduzcan en las funciones de segundo grado, en combinatoria, en probabilidad, que mezclen geometría con teoria de números y sucesiones, solo es cuestión de buscar y escoger aquello que nos ira mejor para desarrollar la asignatura de matemáticas de una manera motivadora y divertida.

No hemos de cometer el error de creer que nuestros alumnos solo pueden aprender matemáticas a partir de unos conceptos muy abstractos y perfectamente ordenados. La matemática no es un libro cerrado donde todo este calculado, medido y pesado, sino que tiene muchas puertas abiertas para ser utilizadas, y los juegos pueden ser una de estas puertas, aprovechemosla.

Para terminar, decir que este método se experimentó en la Escuela Pia Santa Anna de Mataró, escuela que participa en el proyecto de reforma de las enseñanzas medias en Catalunya. El grupo de 30 alumnos con los que realice la experiéncia formaba parte de un crédito variable del área de matemáticas. Dado que en la asignatura de matemáticas el nivel de motivación y de trabajo de los alumnos no suele ser muy elevado, podemos decir que los resultados de ésta experiencia han sido buenos, ya que como mínimo hemos solucionado este problema.

A nivel académico pienso que los alumnos han superado concreces las espectativas planteadas, dado que un porcentaje de los alumnos situado entre el 80% y el 90% han cogido el concepto de función y el de sucesión de números, así como un grado operativo y de tratamiento de problemas elevado.

No puedo, por tanto, dejar de considerar la experiéncia realizada como algo muy positivo.

5. Bibliografía

— MARTIN GARDNER, "*Carnaval Matemático*" Alianza Editorial.
— MARTIN GARDNER, "*Comunicación extraterrestre*" Editorial Cátedra.
—BRIAN BOLT, " *Divertimentos Matemáticos*" Editorial Labor.

El ajedrez, un recurso en el aula de Matemáticas

Santiago Fernández Fernández

Introducción.

En el presente artículo expongo el resumen de una experiencia llevada a cabo en el I.F.P. de Erandio (Vizcaya), con alumnos de 1º y 2º curso de FP I y 1º Curso de FP II.

El propósito inicial del proyecto era enseñar a jugar al ajedrez a un conjunto de alumnos que de forma voluntaria se habían apuntado, a medida que las clases fueron tomando cuerpo el objetivo inicial fue derivando hacia una utilización del tablero de ajedrez y los movimientos de sus fichas con el propósito de presentar y resolver situaciones de índole matemática, en principio (durante el primer año) fui tomando de aquí y de allí: problemas, historias, ideas... relacionadas con el mundo del ajedrez, pero sin ningún orden lógico y sin haber hecho explícito los objetivos didácticos que deseaba cubrir, así en las clases de Problemas presentaba de vez en cuando una situación "ajedrecística" acorde con la parte de las matemáticas que estaba trabajando.

El segundo año (88-89), articulé mejor los contenidos y situaciones a presentar, definiendo del mismo modo: objetivos didácticos, conceptos que se introducen, Problemas presentados, nivel de dificultad, campos de la Matemática en los que incide el concepto,...

Los objetivos perseguidos por la experiencia los clasificamos bajo dos aspectos: Contenidos y Objetivos escolares

Contenidos: Se presentan situaciones dentro de los Campos de la Matemática: Geometía, Teoría de Números y Probabilidad.

Objetivos Escolares: Potenciar la Creatividad, Investigar, Eliminar el miedo hacia los Problemas, mayor motivación.

A lo largo del artículo únicamente presentaré aquellas situaciones enmarcadas en un ámbito estrictamente matemático no exponiendo otras que considero también interesantes: Temas históricos, actividades manipulativas,... son algunas de ellas.

¿Por qué emplear el ajedrez como recurso matemático? Al ser el ajedrez un juego, el posicionamiento ante él es distinto: mayor motivación, más participación, menor tensión por aprender,... En este sentido la experiencia podría situarse en una concepción contructivista y de interacción del proceso *Enseñanza/Aprendizaje.*

Por último cabe citar que la experiencia se centra en el Campo de la "Resolución de Problemas" si bien toca aspectos como la introducción y reforzamiento de conceptos.

Conocimientos previos y materiales a emplear en el aula.

Para iniciar, es necesario conocer en una primera instancia:

a) El tablero de ajedrez consta de 64 casillas, 32 de las cuales son blancas y 32 negras, dispuestas de modo alternativo.

b) Las piezas son 32;16 por cada bando, no moviéndose todas de la misma manera.

Los materiales necesarios: Papel cuadriculado, algunas fichas de ajedrez, una tijeras, una regla y unos lápices.

Presentación de la experiencia

Una vez conocido el tablero de ajedrez y sus características más relevantes: Es un cuadrado, 8 x 8 casillas, casillas blancas y negras,...

El profesor plantea un conjunto de situaciones que a lo largo de estas páginas iré exponiendo.

a) Concimiento del Tablero

Profesor: ¿Cuántas casillas tiene un tablero de ajedrez?

Alumno: 64

P. ¿Seguro que son 64?

A. Sí seguro.

P. Mira, vamos a cortar el tablero en 4 partes tal como muestra la figura 1. y luego vamos a unirlos de otra manera (fig. 2). Cuenta ahora las casillas de la nueva figura.

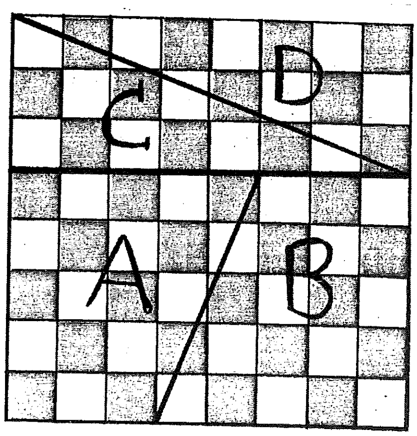


Figura 1

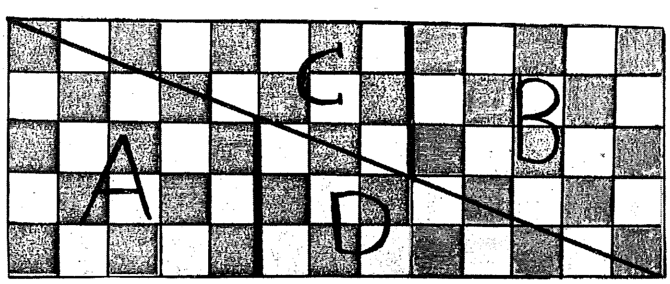


Figura 2

El alumno sorprendido se dá cuenta que en la figura 2 hay 65 casillas.

P. ¿No decías que había 64 casillas?

P. ¿Te parece correcto el proceso en su extensión?, ¿No crees que tiene que existir un fallo en algún lugar?. Encuentra el error o errores.

El objetivo perseguido con este apartado es: Despertar la atención del alumno.

Esta situación se puede presentar a alumnmos com muy pocos conocimientos matemáticos (desde los 12 años), las respuestas dadas obviamente serán distintas: Manipulativas, algebraicas, trigonométricas, etc.

b) Número de cuadrados en un tablero de Ajedrez

P. ¿Cuántos cuadrados hay en un tablero de ajedrez?

A. 64 cuadraditos.

P. Si observas bien al menos hay 65, (los 64 que tú está diciendo más el cuadrado correspondiente al todo el tablero).

P. Si a los cuadraditos más pequeños los llamamos de orden 1 (por tener el lado igual a la longitud de una casilla) y al más grande de orden 8, ¿podrías contarlos ahora?

A. Claro, entonces hay muchos: de orden 1, de orden 2, de orden 3,... y de orden 8.

Así los alumnos empiezan a dibujar figuras como:

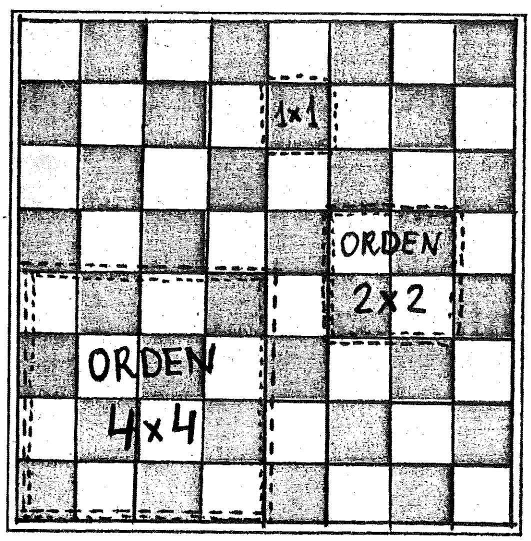


Figura 3

Y comienza a rellenar la tabla

ORDEN	1x1	2x2	3x3	4x4	5x5	6x6	7x7	8x8
Número Cuadrados	64	49	36	25	16	9	4	1

El número total de Cuadrados es:
64 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 204

Profesor: Muy bien, observa que los has obtenido como suma de Nº Cuadrados, en orden decreciente hasta llegar al 1. Si el tablero es de 10 x10 ¿cuántos cuadrados hay en total?. Si es de dimensiones N x N, podrías encontrar alguna fórmula?

Esta es una situación planteada en el más puro estilo de G. Polya, el objetivo es acercarse a la "Resolución de Problemas" al ser un problema sencillo requiere pocos conocimientos matemáticos, las estrategias utilizadas son asequibles, igual que el apartado anterior, para alumnos muy jóvenes, si bien la generalización que se pide al final es propia plantearla a alumnos que han cursado al menos dos cursos de Enseñanzas Medias.

c) Las Casillas y su Localización

Este resulta ser un problema interesante por admitir una multilicidad de soluciones.

Profesor: ¿Cómo podrías identificar las casillas del tablero de ajedrez mediante algún código?

Las respuestas son varias, sin embargo las que aparecen con mayor frecuencia son las que aparecen en las figuras 4 y 5.

Siendo válidas las dos, solemos centrarnos en la primera de ellas para trabajar exclusivamente con números (si bien la segunda es la más utilizada dentro del campo ejedrecístico).

Es una actividad propia para reforzar el concepto de coordenadas, o bien para introducirlo.

d) Diagonales, Horizontales y Verticales en el tablero

Las preguntas que aparecen en este apartado pueden discurrir bajo dos estadios, uno concreto y el otro más general.

Profesor: Dada la casilla (3,2) sabrías ¿cuán-

(8,1)	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,5)	(8,6)	(8,7)	(8,8)
(7,1)	(7,2)	(7,3)	(7,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(3,8)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(2,7)	(2,8)
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)

Figura 4

a8	b8	c8	d8	e8	f8	g8	h8
a7	b7	c7	d7	e7	f7	g7	h7
a6	b6	c6	d6	e6	f6	g6	h6
a5	b5	c5	d5	e5	f5	g5	h5
a4	b4	c4	d4	e4	f4	g4	h4
a3	b3	c3	d3	e3	f3	g3	h3
a2	b2	c2	d2	e2	f2	g2	h2
a1	b1	c1	d1	e1	f1	g1	h1

Figura 5

tas diagonales pasan por ésta casilla y cuáles son?

La pregunta en términos más generales tomaría la forma:

P. Dada la casilla (x,y) ¿cuántas diagonales pasan por ésta casilla y cuáles son?

Ante la primera cuestión, es muy frecuente obtener respuestas correctas, así tenemos:

Alumno: Las diagonales que pasan por la casilla (3,2) son dos:

Diagonal 1= (2,1); (3,2); (4,3); (5,4), (6,5,); (7,6); (8,7)

Diagonal 2= (4,1); (3,2); (2,3); (1,4)

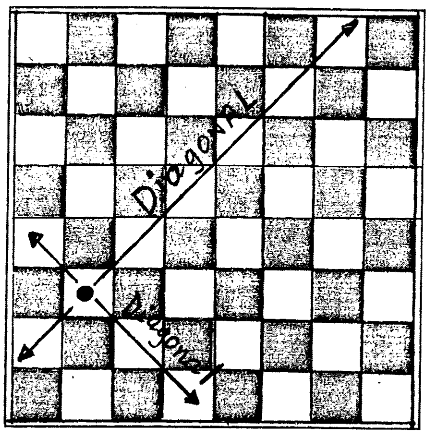


Figura 6

Es conveniente hacer notar el alumno que:

—No todas las diagonales tienen el mismo número de casillas.

—Las casillas que componen la diagonal tienen una cierta relación con el valor de la casilla dada.

—Hay determinadas casillas por las que pasa una sóla diagonal. ¿Cuáles son esas casillas?

—Hay varias casillas que se comportan "casi igual": mismo número de diagonales, mismo número de casillas por diagonal, etc.

Mediante estas pequeñas "ayudas", el alumno se sentirá más dispuesto para abordar con éxito la pregunta más general: ¿cuántas diagonales pasan por la casilla (x,y) y cuáles son?

Quizás es el momento de dar una pequeña definición para organizar mejor la búsqueda.

Definición: Llamamos longitud de una diagonal al número de casillas que la componen.

De acuerdo a esta definición el problema planteado puede tener un cuerpo más sólido si damos respuesta a las siguientes preguntas:

Dada la casilla (x,y)

1) ¿Cuántas diagonales pasan por esta casilla?
2) ¿Cuáles son estas diagonales?
3) ¿Cuál es la longitud de las diagonales?
4) ¿Para qué valor de (x,y) la longitud es máxima?
5) ¿Cuánto han de valer x e y para que las diagonales que pasan por la casilla (x,y) tengan longitudes cuya suma se máxima? ¿Y cuál es el máximo? (Por ejemplo, por la casilla (3,2), pasan dos diagonales una de longitud 7 y otra de longitud 4, por tanto la suma será igual a 11).
6) Realiza un estudio similar al aparato anterior pero analizando el mínimo.
7) Si el tablero de ajedrez es de 10 x10, contesta a las preguntas formuladas en los apartados 4) y 5). ¿Y si fuese de N x N?

Este problema puede ser abordado en parte dándose cuenta de la simetría existente en el tablero de ajedrez, así en lugar de trabajar con todo el tablero lo hacemos con otro más pequeño, de 4 x 4, justamente la cuarta parte del tablero original, ver figura 7

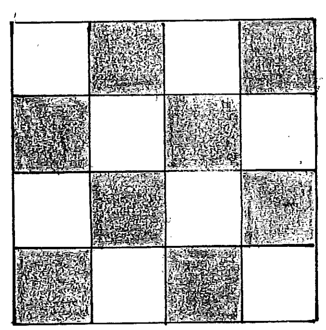


Figura 7

Estudiando este pequeño tablero podemos pasar a estudiar el tablero original (8 x8), pero es necesario conocer qué casillas se comportan de igual modo (tienen el mismo número de diagonales y de la misma longitud), a pesar del color, estas casillas diríamos que están relacionadas entre sí. Por ejemplo las casillas (1,1); (1,8); (8,1) y (8,8) tienen sólo una diagonal y de la misma longitud, por tanto estas cuatro casillas estarían relacionadas según nuestra definición.

En el dibujo adjunto se muestran las casillas relacionadas entre sí.

1	2	3	4	4	3	2	1
2	5	6	7	7	6	5	2
3	6	8	10	10	8	6	3
4	7	10	9	9	10	7	4
4	7	10	9	9	10	7	4
3	6	8	10	10	8	6	3
2	5	6	7	7	6	5	2
1	2	3	4	4	3	2	1

Figura 8

Ponemos el mismo número a las casillas relacionadas, puede observarse la simetría existente.

Este apartado resultó muy interesante, ya que proporciona gran cantidad de situaciones problemáticas a distintos niveles, igual que el apartado b) podría situarse inmerso en la línea del modelo de Polya o bien para reforzar el concepto de coordenadas en el plano, la búsqueda de ralaciones, fórmulas, etc. que propician la aparición de modelos inductivos. Es una situación que puede ser presentada a alumnos que están cursando los últimos años de E.G.B., si bien los aspectos más abstractos son propios de alumnos que estan situados entre los 15-16 años.

e) Ajedrez y Dominó

El objetivo de esta actividad es resolver un problema en el que aparecen mezcladas varias variables: color de las casillas, número de casillas, disposición de las mismas, etc.

Profesor: De un tablero de ajerez se han quitado dos casillas, justamente las que están en esquinas opuestas. ¿Podrías recubrir el nuevo tablero con fichas de dominó?.

Se supone que cada ficha de dominó ocupa dos casillas consecutivas.

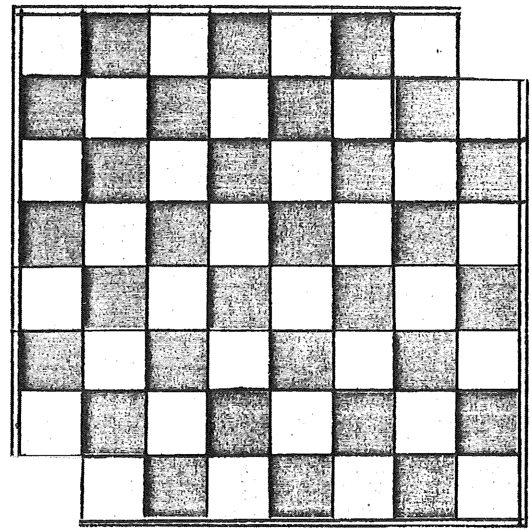


Figura 9

Si las dos casillas que se han suprimido son la (x_1, y_1) (x_2, y_2) ¿cuando no se podrá recubrir con fichas de dominó?

Nuevamente es una actividad planteada en la linea de la "Resolución de Problemas", el profesor puede dar las siguientes sugerencias: ¿Cuantas fichas de dominó hacen falta para tapar todo el tablero, una vez suprimidas dos casillas? ¿Cuál es el color de las dos casillas ocupadas por una ficha?...

Este problema cabe ser presentado a alumnos a partir de 12 años, si bien el planteamiento más general es más propio hacerlo a alumnos de 14/15 años.

f) Ajedrez y Probabilidad

Se presentan problemas relativos a la probabilidad, las situaciones presentadas están pensadas para realizar simulaciones previas.

Los problemas son de corte clásico y muy conocidos, por lo que no hace falta excesivos comentarios (naturalmente a los alumnos conviene explicarselos muy bien)

Profesor: Tiro un dardo sobre el tablero de ajedrez ¿Qué probabilidad tenemos de alcanzar una casilla negra? ¿Y una blanca?

Problemas de este tipo son:

P1. El mismo dardo se tira ahora dos veces sobre el tablero. ¿Qué probabilidad hay de introducirlo en dos casillas del mismo color? ¿Y de introducirlos en una misma diagonal? ¿Y en una misma horizontal?

P2. Tiro una moneda sobre un tablero de ajedrez, ¿qué probabilidad hay de que caiga sobre cuadros de distinto color a la vez? Se toma como diámetro de la moneda la cuarta parte de la longitud de una de las 64 casillas,

P3. Como es sabido, para jugar al ajedrez además del tablero es necesario contar con 16 fichas por bando, blancas y negras. Introducidas las 32 fichas en una bolsa metemos la mano y sacamos dos fichas. ¿Qué probabilidad hay de encontrarse con las dos de distinto color? ¿Y las dos del mismo color?

Es conveniente que los alumnos conjeturen resultados de acuerdo a sus experimentaciones, el profesor puede ayudarles desde distintas ópticas: simulaciones aleatorias, muestreos realizados en clase, etc.

Es una actividad propia de alumnos entre 15/16 años.

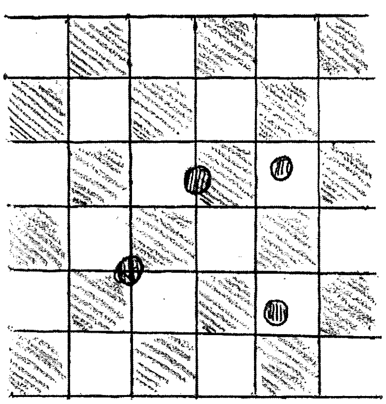


Figura 10

g) Movimientos de las piezas de ajedrez

El objetivo de esta sección no es enseñar a jugar al ajedrez, sino más bien emplear los movimientos de las piezas (algunas de ellas) para consolidar los sistemas de ejes coordenados, su represéntividad y su representación, podría considerarse como una actividad de Pre-álgebra.

Para llevar a buen puerto la actividad es necesario conocer:

LA TORRE: se mueve en horizontal o vertical.
EL ALFIL: se mueve siguiendo las diagonales.
EL CABALLO: se mueve "en forma de L".

En las figuras anexas se muestran los movimientos, las casillas marcadas con una cruz son los posibles desplazamientos de la pieza indicada.

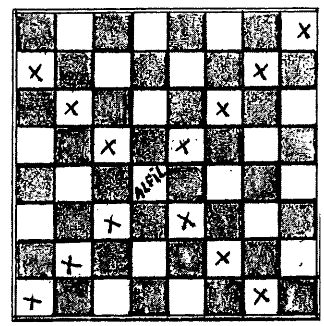


Figura 11

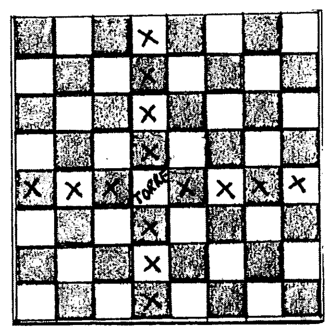


Figura 12

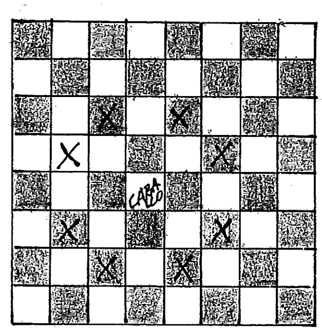


Figura 13

Una vez conocidas las piezas y sus movimientos, suele presentar problemas del tipo:

P1. Con el tablero ocupado únicamente por una Torre en la casilla (x, y). ¿A qué casillas se puede desplazar?

Las soluciones esperadas son del tipo:

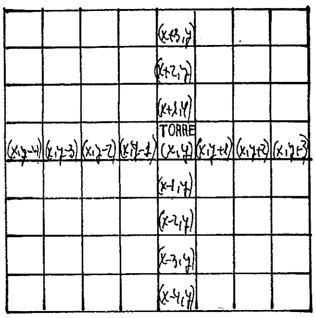


Figura 14

P2. Si el tablero de ajedrez está ocupado únicamente por un caballo situado en la casilla (x, y). ¿Qué casillas puede ocupar? Ver figura 15

P.3. ¿Con cuántos alfiles podemos cubrir todo el tablero de ajedrez?

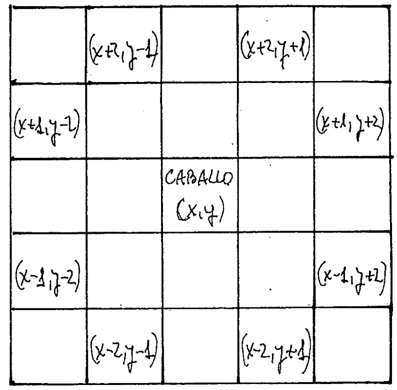


Figura 15

Estudia el mínimo número de ellos.

P.4. ¿Cual es el mínimo número de caballos necesarios para cubrir todo el tablero de ajedrez?

P.5. Con dos alfiles y dos caballos ¿Cuál es el máximo número de casillas que se pueden ocupar?

¿Y con una Torre y dos alfiles?

Todas las actividades presentadas se pueden trabajar a partir de los 13/14 años.

Para acabar suelo considerar un tablero con un número ilimitado de casillas.

Así pido a los alumnos que rellenen la tabla adjunta:

CASILLA	COLOR DE LA CASILLA		Si tenemos la pieza que se indica en en la casilla señalada. ¿En cuántos movimientos se puede desplazar a las otras casillas? Estudiar el mínimo		
(x, y)	BLANCA		CABALLO		
(x-1, y)					
(x, y-1)				ALFIL	
(x-2, y+1)					
(x, y-3)					TORRE
(x, y-2)		NEGRA			
(x-5, y+10)					

Valoración de la Experiencia:

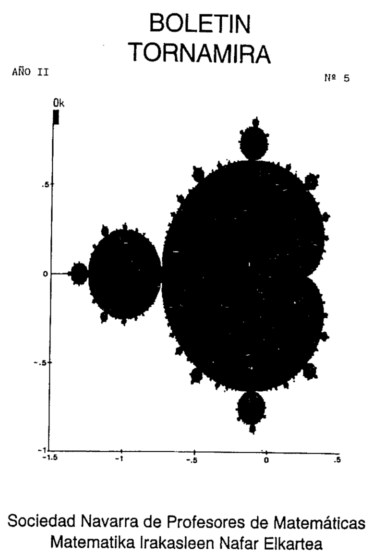
La experiencia puede considerarse como muy positiva, como decía al principio podría enmarcarse en una concepción Constructivista y dentro del campo de la "Resolución de Problemas", las actividades resultaron francamente motivadoras, los alumnos se propusiero situaciones entre ellos abriendo aún más el campo de experimentación.

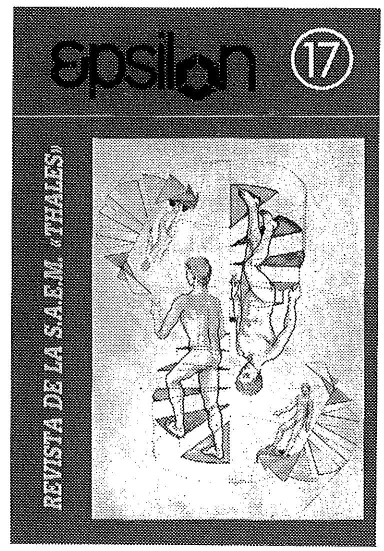
Referencias bibliográficas

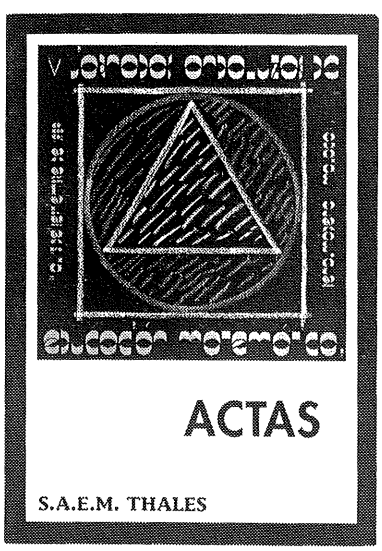
—MÁXIMO BRORREL. 1976. **Ajedrez Brillante.** Ed. Bruguera.

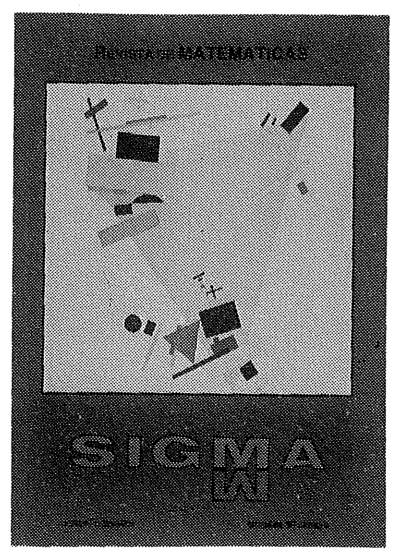
—BONDORFF-FABEL-RIIHIMAA. 1974. **Ajedrez y Matemáticas.** Ed. Martínez Roca.

—DEGROOT, A D. **Trought and choice in chess.** Mouton. New York. 1978.









Generador de volúmenes

T. Ortega, R. Coca, A. García,
C. Velasco, J. Benito,
L. Mayo, I. Martín y Mª L. Rebollo

Nos parece interesante dar a conocer este útil didáctico, entre otras razones, por su sencillez de manejo, por su eficacia y su bajo costo. Su construcción es muy sencilla y con él se pueden conseguir resultados extraordinanarios.

1. Objetivos

En el estudio de volúmenes de revolución, los alumnos de Tercero de B.U.P. y C.O.U. se encuentran con serias dificultades. Una reflexión sobre las mismas nos ha llevado a la construcción de un aparato que llamamos generador de volúmenes. El fundamento consiste en girar una cartulina a cierta velocidad y así dar una sensación de volumen. Este utensilio es un recurso didáctico interesante para los citados cursos.

Indudablemente, la utilización del aparato será distinta en cada curso; en Tercero puede servir como introducción y en C.O.U. como una aplicación en Matemáticas I, y como una profundización en Matemáticas II. Los objetivos también serán distintos y, de forma general, podemos señalar los siguientes.

1. Relacionar el área plana con el volumen de revolución que genera al girar sobre un eje. Así, se sabrá asignar cada tramo de la función con la zona de volumen correspondiente.

2. Ver de forma inequívoca como se generan volúmenes de revolución muy sencillos: cilindros, conos, esferas,.... Debido a la asidua aparición de estas figuras en el cálculo volumétrico, es importante que se detecte con toda seguridad.

3. Obtención analítica de los volúmenes de estos cuerpos geométricos. Es interesante que el alumno compruebe la coincidencia de los resultados obtenidos con las fórmulas que deberían conocer desde E.G.B.

4. Cuando se trate de funciones definida a intervalos, obtención de volúmenes compuestos y delimitación de las regiones planas que los generan.

5. Influencia de cada una de las curvas en el volumen generado, cuando la región plana está delimitada por dos. Ver cómo en ciertas regiones el volumen estará generado por la primera función y en otras por la segunda.

6. Ver como la superposición de volúmenes no influye en la generación del mismo (el alfarero sólo da forma al jarrón con la curva de la mano que está más alejada del eje del torno).

7. Selección de la curva que determina el volumen y de la curva que determina el hueco. El alumno tiene que ver cómo el volumen de figuras de revolución huecas es una diferencia de volúmenes.

8. Como las abscisas de los puntos de intersección de las curvas y una de ellas con la simétrica de la otra respecto del eje de giro son los límites de integración, es interesantísimo ver estos puntos en la revolución.

2. Construcción

La figura 1 muestra una fotografía del generador de volúmenes, cuyos elementos constituyentes describimos a continuación para facilitar la construcción del mismo.

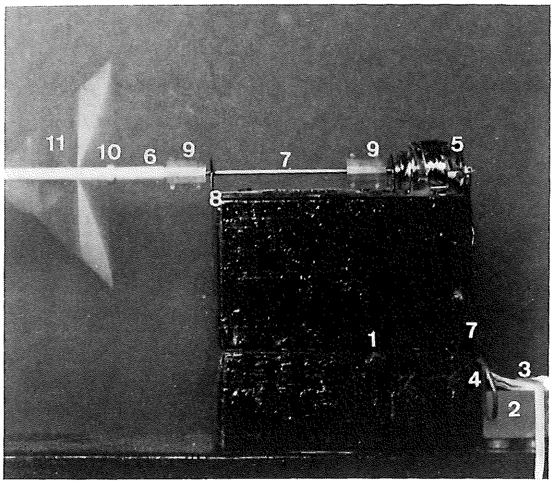


Figura 1

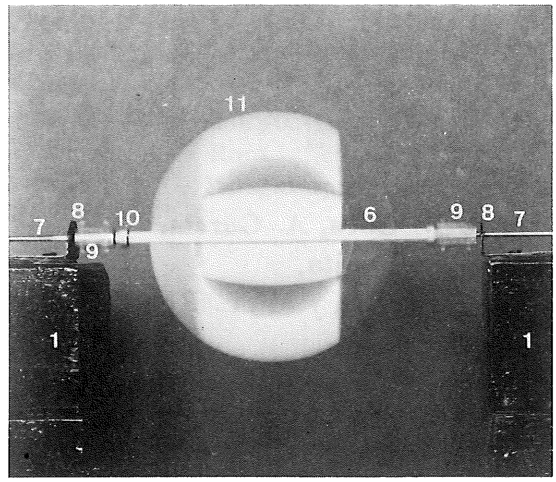


Figura 2

1. Soporte. Tablero de 0.5 x 0,5 m^2 y dos tacos de 10 x 10 x 15 cm.[3] de madera donde se instalan los componentes.

2. Caja de baterías. Contiene dos pilas de 1,5 v. para el funcionamiento del motor.

3. Cuatro alcayatas y una goma. Constituyen la sujeción al soporte de la caja de baterías.

4. Interruptor y 50 cm. de cable. Forman la conexión entre las pilas y el motor.

5. Motor. Este es un juguete infatigable de 3 v. y está sujeto al armazón por dos abrazaderas y cuatro tirafondos.

6. Dos varillas. Constituyen el soporte de las cartulinas que generan los volúmenes, tienen una longitud de unos 17 cm.

7. Dos ejes. Facilitan el giro de las varillas y tienen una longitud de unos 10 cm. sujetos al armazón por cuatro tirafondos.

8. Dos soportes de eje. Los hemos hecho doblando dos chapas en forma de U. Se podrían haber utilizado rodamientos pero saldrían mucho más caro.

9. Tres regletas. Permiten unir con relativa facilidad los ejes a las varillas.

10. Dos abrazaderas. Situadas sobre las varillas, permiten aprisionar las cartulinas para evitar que se desplacen en el movimiento.

11. Cartulina. Aunque cueste un poco recordarla, conviene que sea suficientemente fuerte para que no se doble al girarla.

12. Pintura. Es aconsejable elegir los colores de manera adecuada para que los volúmenes generados destaquen el fondo del armazón. Nosotros hemos pintado el armazón de negro y las cartulinas de colores vivos. Hemos coloreado las cartulinas en bandas perpendiculares al eje de giro, para destacar las distintas regiones planas que generan el volumen y distinguir si es hueco o no y si lo genera una curva u otra.

3. Funciones consideradas

Hemos mencionado el término "cartulinas o figuras generadoras de volúmenes" y así denominaremos a las regiones del plano delimitadas por funciones, que, al girar alrededor de un eje contenido en el mismo plano, generan los volúmenes de revolución cuyo cálculo analítico queremos que el alumno aprenda.

Estas cartulinas son la base de nuestro estudio y vamos a fijarnos en las funciones que las definen, ya que sus características afectan al volumen que generan. Nosotros hemos confeccionado un total de veintiséis cartulinas, las primeras con muy sencillas y las siguientes van aumentando su complejidad. A título de ejemplo, mostramos una selección de las mismas.

—Cartulina A: $x=0$, $x=5$, $y=0$, $y=2$
—cartulina B: $x=4$, $y=x/2$, $y=-x/4$
—cartulina M: $y=x^2-2$, $y=1$

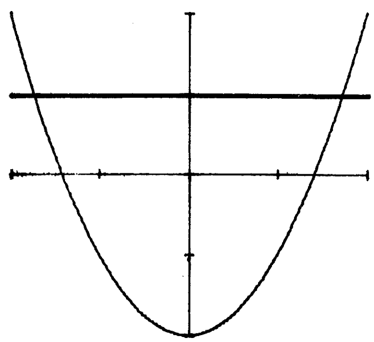


Figura 3

—cartulina Q: $x^2+(y-3)^2=1$

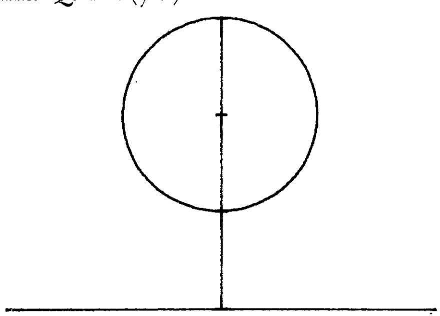


Figura 4

—cartulina S: $y=x$, $y=x^2-2$

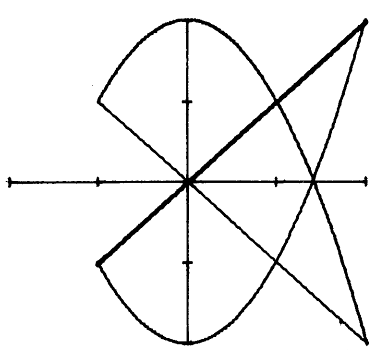


Figura 5

—cartulina U: $y=(9-x^2)/3$, $y=(x^2-9)\ (x^2-1)/8$

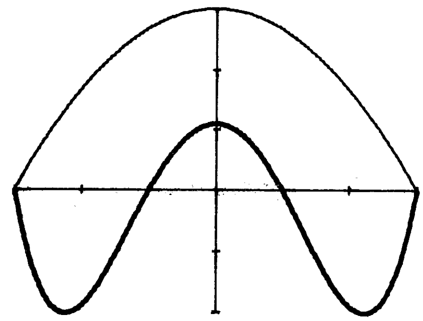


Figura 6

—cartulina W: $y=/x/$, $y=x^2-/2x/$

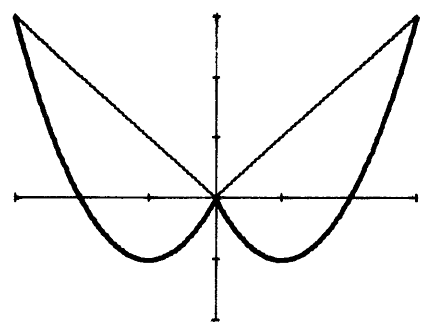


Figura 7

—cartulina Z: $y=-x^3/6 + x^2/2 - 7x/32 - 11/96$,
$y = x^3/6-x^2/2 + 1/3$.

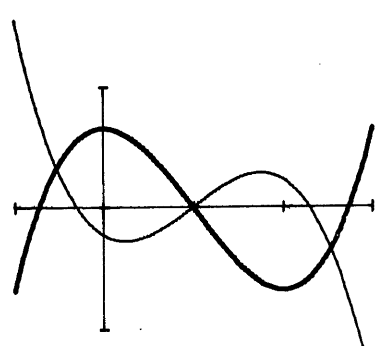


Figura 8

Para que esta presentación sea un poco más completa, vamos a hacer un análisis de la cartulina S. La figura 5 recoge las gráficas de las funciones que definen la cartulina y de sus simétricas, respecto del eje de giro, que formarían la cartulina girada W radiales.

Desde x=-1 (abscisa del primer punto de corte de la parábola con la recta) hasta x=0 (abscisa del punto de corte de la recta con el eje de giro) del volumen generado por la parábola debemos restar el volumen cónico generado por la recta. Desde x=0 hasta x=1 (abscisa del punto de corte de la parábola con la simétrica de la recta o de la recta con la simétrica de la parábola) el volumen que genera la parábola engloba al volumen cónico que genera la recta y por lo tanto sólo debemos considerar el primero. Desde x=1 hasta $x=\sqrt{2}$ (abscisa del punto de corte de la parábola y el eje de giro) el tronco de cono generado por la recta engloba al volumen generado por la parábola, vuelve a haber superposición y sólo debemos considerar el tronco de cono. Finalmente, desde $x=\sqrt{2}$ hasta x=2 (abscisa del segmento punto de corte de la parábola con la recta) del tronco de cono que genera la recta debemos restar el volumen generado por la parábola.

En resumen, el volumen total es la suma de los volúmenes generados por estas cuatro regiones planas y para que al girar la cartulina se distingan perfectamente, las pintamos de colores distintos que, además, contrasten con el fondo del soporte. Véase la figura 2 donde la cartulina aparece en movimiento.

4. Preparación de las cartulinas y experiencia didáctica

En la elaboración de las figuras generadoras de los volúmenes, hemos tenido presente que deben ser los suficientemente claras par que el alumno vea de forma palpable qué curvas delimitan las regiones planas que generan dicho volumen. Por esta razón, es muy importante que las cartulinas sean una copia de la realidad, lo más exacta posible.

Las gráficas de las curvas las hemos hecho en cartulina blanca, utilizando un ordenador Apple II-e con plotter (véanse las figuras 3, 4,...., 8), las hemos recortado con esmero y las hemos pintado con colores apropiados y el suficiente sosiego para repetir alguna que otra. Al recortarlas, hemos dejado una franja de una amplitud aproximadamente igual a la del eje de giro del generador formado por las varillas.

Otro aspecto que debemos tener en cuenta está relacionado con las dimensiones de las cartulinas, éstas deben tener, en una escala del mismo orden de magnitud numérica que la natural, un tamaño apropiado a la longitud de las varillas y a la altura de los tacos del soporte, para que las distintas regiones de la superficie que generan el volumen sean compensadas. Por lo tanto, debemos elegir funciones tales que las abscisas de sus puntos de corte sean números sençillos, se puedan determinar muy fácilmente y tengan máximos y mínimos de dimensiones apropiadas.

La figura 3, correspondiente a la cartulina M, está formada por la parábola de vértice (0,-2) y cortes con el eje de abscisas en $\pm\sqrt{2}$, y por la recta y=1.

La figura 4 (cartulina Q) está formada por la circunferencia de centro (0,3) y radio 1. Al girar sobre el eje de abscisas el círculo que delimita genera un toro.

La figura 6 (cartulina U) está compuesta por la parábola de vértice (0,3) que corta al eje de abscisas en (-3,0) y (3,0), y por la cuártica que corta al eje de abscisas en los dos puntos anteriores, en (-1,0) y en (1,0) y con un máximo en (0,9/8).

La figura 7 (cartulina W) está formada por las bisectrices de los dos primeros cuadrantes y de la función parabólica, que definida a trozos, es simétrica respecto del eje de ordenadas, corta al eje de abscisas en (-2,0), (0,0) y (2,0), y tiene mínimos en los puntos (-1,1) y (1,-1).

La figura 8 (cartulina Z) corresponde a dos cúbicas que cortan al eje de abscisas en el punto (0,1). Esta circunstancia facilita la búsqueda de los otros dos puntos de corte de cada una de ellas con el eje de abscisas y de los otros dos puntos que son comunes a ambas.

Finalmente, señalamos que hemos experimentado este útil didáctico con resultados extraordinarios. Los alumnos le reciben con agrado y hasta los menos aventajados se percatan de cómo se forman los volúmenes de revolución y de los límites de integración que debemos considerar en cada caso.

La calculadora en la enseñanza de la matemática

Elfriede Wenzelburger Guttenberg

Resumen:

La calculadora electrónica es un excelente recurso didáctico que hace mucho más que las operaciones básicas. Usarla como "calculadora" nada más sería desperdiciar una oportunidad de hacer la matemática más atractiva para muchos estudiantes. Con ella es posible por ejemplo, experimentar con patrones numéricos, explorar relaciones funcionales, desarrollar conceptos y resolver problemas con datos reales.

La disponibilidad cada vez mayor de calculadoras electrónicas las hacen una herramienta natural para hacer aritmética[1]. Aprender a usar una calculadora debe ser parte de una clase de matemáticas. No se puede ignorar ni prohibir porque se alejaría a los estudiantes más de la matemática. La calculadora puede ayudar a mejorar la actitud de estudiantes hacia la aritmética ya que los capacita para hacer cálculos relacionados con la vida real y permite trabajar con números grandes y pequeños, se pueden generar patrones numéricos, explorar propiedades de números, formular hipótesis. Las Calculadoras ayudan a desarrollar las habilidades de estimación y aproximación. En la escuela secundaria no se presentan las preguntas ¿qué grado hay que introducir la calculadora? ¿cómo puede ayudar en la enseñanza de la matemática,? sino ¿cuánto tiempo se puede disponer para explorar todas las posibilidades que representa su uso?

Las calculadoras deben jugar un papel decisivo en el currículo de la matemática en los años 90. A pesar del impacto de las microcomputadoras sobre la enseñanza de la matemática hay un interés renovado en las calculadoras de la tal manera que el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos las va a dedicar su libro del año 1992. Se tomarán en cuenta nuevos desarrollos en la tecnología de calculadoras como manipulación de fracciones y matrices, aproximación de curvas y manejo simbólico.

Cómo afecta la calculadora la enseñanza de la matemática

La calculadora va a producir cambios en la educación matemática; no solo vuelve obsoleto auxiliares de calculo de antes (regla de cálculo, tablas) sino también abre nuevas perspectivas[2].

De acuerdo a Jhonson[3], el área más fructífera y rica para actividades con calculadoras esta en la exploración. El estudiante usa la calculadora para generar resultados con la intención que estos demuestran un concepto o relación que los resultados ayuden para la solución de problemas matemáticos. En otras palabras, la calculadora puede ser usada para desarrollar conceptos, retroalimentar aprendizaje y adquirir habilidades que ayudan a la resolución de problemas. Una modalidad de enseñanza para lograr estos consiste en juegos matemáticos con la calculadora[4,5].

Bitter[6], afirma que el tema fundamental que subyace a los cambios curriculares en matemáticas provocados por el uso de nuevas tecnologías es de emergencia de una nueva relación entre profesores, estudiantes y la matemática. La presencia de calculadoras (y/o computadoras) para demostraciones, práctica, resolución de problemas y evaluación crea una nueva dinámica en el aula en la cual profesores y estudiantes son compañeros naturales en la búsqueda de la comprensión de ideas matemáticas y la solución de problemas. Si los profesores están preparados para aceptar el reto de esta nueva tecnología, entonces la educación cambiará.

En estudios de investigación se encontró que calculadoras ayudan al aprendizaje de la matemática. En más de 100 de estos trabajos sobre calculadoras en el aula se comparó el desempeño de grupos que usan calculadoras con los que no la usan. En la gran mayoría de los casos, los grupos con calculadoras trabajaron mejor o igual que el grupo que no las usó[7].

Shumway[8] presenta un resumen de argumentos a favor y en contra del uso de la calculadora. Los argumentos más importantes se relacionan al efecto de la calculadora sobre el aprendizaje de niños de los hechos básicos y su actitud hacia la matemática[9]. Un estudio con cincuenta grupos de segundo a sexto año con duración de un año indica que el uso de calculadoras en la primaria no inhibe el aprendizaje de hechos y operaciones básicas. Además, parece que a los niños les gusta usar la calculadora[10], los motiva y despierta un mayor interés en la matemática[11]. En lo que se refiere al desarrollo de conceptos de numeración, la calculadora no es una amenaza sino la clave para el aprendizaje[12].

Recomendaciones para el uso de calculadoras

En la "Agenda for Action"[13] se recomienda que todos los estudiantes tengan acceso a calculadoras en la clase de matemáticas en la primaria y secundaria. Estas deben ponerse a disposición de los alumnos por parte de las escuelas y los objetivos de la enseñanza deben incluir la habilidad de determinar los usos apropiados de la calculadora Estos pueden ser, por ejemplo, maneras ingeniosas de explorar, descubrir y desarrollar conceptos matemáticos y no solamente cálculos aritméticos.

En los primeros años de la primaria es importante que el alumno adquiera el concepto de número y aprenda las operaciones básicas. Pero cuando los cálculos aritméticos empiezan a ser una carga en vez de una contribución al proceso educativo, es tiempo de recurrir a la calculadora.

En un documento reciente del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics)[14], esta posición se reafirma. La calculadora debe integrarse a la matemática escolar en todos los grados para trabajos en clases, tareas y exámenes y dentro su uso hace posible ahorrar mucho tiempo dedicado a practicar cálculos. Este tipo se debe utilizar a ayudar al alumno que comprenda mejor la matemática, que sepan razonar y resolver problemas y aplicar lo aprendido.

Específicamente se recomienda que todos los estudiantes deben usar calculadoras para:

—concentrarse en el proceso de solución de problemas y no en la aritmética.

—lograr acceso a matemáticas que van más allá de su nivel computacional.

—explorar, desarrollar y reforzar conceptos incluyendo estimación, computación y aproximación

—experimentar con ideas matemáticas y patrones

—hacer cálculos tediosos con datos de la vida real.

Otra publicación reciente del NCTM, "Los estándares curriculares y de evaluación de la matemática escolar"[15] hace referencia a las calculadoras. Se reafirma nuevamente que cada estudiante debe disponer de una calculadora en cualquier momento. Sin embargo esto no elimina la necesidad de aprender algoritmos. Alguna práctica con lápiz y papel es importante. Si se requiere una respuesta aproximada, hay que estimar, si no se puede escoger el método apropiado: cálculo mental, lápiz y papel, calculadora y computadora. La calculadora se escogerá para cálculos complejos. La estimación del resultado debe acompañar a cualquier método de cálculo. No hay evidencia, hasta ahora, de que las calculadoras impidan que los alumnos aprendan y realicen algoritmos básicos para cálculos simples. Es para problemas complejos donde se prefiere la calculadora.

Se hace énfasis otra vez en el documento mencionado que la calculadora es un medio valioso para aprender matemáticas, para explorar ideas y patrones, desarrollar conceptos, resolver problemas y investigar aplicaciones. El uso bien planeado de calculadoras puede mejorar la calidad del currículo y del aprendizaje. La experiencia ha demostrado que los alumnos no usan la calculadora si hay otras maneras de realizar los cálculos. Sin embargo, la práctica excesiva y repetitiva de cálculos complejos con lápiz y papel ya pasó de moda y es contraproducente.

Encuestas realizadas en Estados Unidos[16] demuestran que de los primeros nueve años escolares en matemáticas, dos se dedican a la enseñanza y práctica del algoritmo de división. A pesar de toda esta inversión de tiempo y esfuerzos, los alumnos en diagnósticos nacionales y locales no manejan el algoritmo. Concretamente se propone[17] eliminar a nivel primaria cálculos de tipo:

$37\overline{\smash{)}296}$, 426 x 89, 3/7 + 4/12

3.45 x 0.865 ó 456.78:6.7.

Estos tópicos consumen muchísimo tiempo, los alumnos nunca los dominan bien y lo hace mejor una calculadora. Lo que es importante es un dominio de las operaciones básicas con números del 1 al 100, estimación y aritmética mental, aplicaciones, medición, estadística, probabilidad y resolución de problemas.

Resumiendo lo anterior dicho, afirmamos que la calculadora es mucho más que un instrumento para calcular con lápiz y papel, es una ayuda didáctica para desarrollar conceptos y explorar.

Preguntas abiertas acerca del uso de las calculadoras

Algunas preguntas que necesitan más reflexión para encontrar respuestas adecuadas son las siguientes:

—¿Cómo se puede instruir y convencer a los profesores de matemáticas de la importancia de la calculadora como auxiliar didáctico?

—¿Qué tipo de calculadora conviene escoger para cada nivel escolar?

—¿Cómo se puede lograr una introducción temprana en la matemática escolar de números decimales y notación científica?

—¿Cuál es el papel de las fracciones?

—¿Qué tipo de material didáctico se necesita para hacer mejor uso de la calculadora?

—¿Cómo asegurar una posición crítica de los usuarios hacia los resultados que produce la calculadora?

—¿Se deben permitir calculadoras en los exámenes, a partir de que grado escolar?

Conclusión

La calculadora electrónica es un excelente recurso didáctico que hace mucho más que las operaciones básicas. Usarla como "calculadora" nada más sería desperdiciar una oportunidad de hacer la matemática más atractiva para muchos estudiantes ya que la máquina es una memoria electrónica que nos libera de cálculos tediosos y el uso de tablas anticuadas. Con ella es posible la experimentación con patrones numéricos, exploración de relaciones funcionales, desarrollo de conceptos y resolución de problemas con datos reales.

La investigación educativa ha comprobado que la calculadora puede mejorar el aprovechamiento de los estudiantes que la utilizan en el aula[18]. La mejoría general de los niveles de aprendizaje es el resultado de una mejor capacidad de los estudiantes para realizar sus cálculos matemáticos y escoger adecuadamente las estrategias a seguir en la resolución de problemas.

Pero la calculadora puede enriquecer el estudio de las matemáticas únicamente si alcanzamos aplicarla correctamente en las situaciones didácticas donde es conveniente.

Bibliografía

ICMI Study Series: School Mathematics in the 1990's. Cambridge University Press, 1986.

CHEUNG, Y.L.: Learning Mathematics with the calculator. Int. Journal of Math. Educ. Sci. and Technol., Vol. 13, 5, 593-597, 1982.

JOHNSON, D.C.: Calculators, Abuses and Uses. Mathematics Teaching, 85, 50-56, 1978.

JUDD, W.: Instructional Games with Calculators. The Aritmetic Teacher, 23, 516-518, 1976.

IMERZEEL, G., OCKENGA, E.: Calculator Activities for the Classroom, Book 1 and 2. Creative Publications Inc., Palo Alto, California, 1977.

BITTER, G.: Educational Techonology and the futur of Mathematics Education. School Science and Mathematics, Vol. 87, 6, 454-465, 1987.

HEMBREE, R.: Research gives calculators a green light. Arithmetic Teacher, Vol. 34, 1, 18-21, 1986.

SHUWAY, R.J.: Hand Calculators: Where do you Stand? The Aritmetic Teacher, 23, 569-572, 1976.

KOOP, A.I.: Calculators in Schools; Some curriculum issues. The Australian Mathematics Teacher. Vol. 35, 6, 6-7, 1979.

GIBB, E.G.; Calculators in the Classroom. Todays Education, 64, 42-44, 1975.

SULLIVAN, J.I.: Using Hand-Held Calculatos in Sixth grade Classes. Arithmetic Teacher, 23, 551-552, 1976.

MCCRAE, B.: Calculators and Numeracy. The Australian Mathematics Teacher, Vol. 33, 4, 24-25, 1979.

NCTM: An Agenda for Action, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 1980.

NCTM: Position Statement: Calculators in the Mathematics Calssroom. News Bulletin, 12, september 1989.

NCTM: Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. National Council of Teacher of Mathematics, Reston, 1989.

HIGGINS, J.; Kirschner, B.: Calculators, Computer and Classrooms, ERIC, Matematics Educations Report, Ohio, 1981.

WHEATLEY, G.: Calculators in the Classroom: A Proposal for Curricular Change AERA, Raper, ERIC: ED 175631, 3-9, 1979.

LÓPEZ, J.M.: Manual para la utilización de la Calculadora, Departamento de Instrucción Pública, Hato Rey, Puerto Rico, 1988.

EXPOSICION IBEROAMERICANA EN EL ICMI-7

Es deseo de los organizadores del ICMI-7,que como sabes se celebrará en Quebec del 16 al 23 de Agosto de 1992, tener presente el 500 Aniversario del Descubrimiento de América. Para ello ha pensado que la comunidad iberoamericana de educadores matemáticos tenga una participación distinguida, y ofrecen la superficie necesaria para instalar una exposición titulada **Arte y Educación Matemática. Experiencias Iberoamericanas**. A mi se me ha honrado designándome su coordinador.

Una vez resueltos los primeros detalles de infraestructura, se hace necesaria la invitación a cuantos teneis tantas cosas que aportar a la misma, si bien hay que dejar claro que el ICMI no sufragará gasto alguno.

Actualmente, estamos intentando, Miguel de Guzmán y yo, que el Ministerio de Educación del Gobierno Español sufrague los gastos de montaje. De esta forma creemos que puede hacerse algo uniforme, al menos en su aspecto externo.

Como el nombre de la exposición indica, se trata de presentar experiencias, a titulo individual o colectivo, realizadas en la Educación Matemática basadas en el estudio y análisis de algún aspecto artístico, en sentido amplio, del entorno escolar. Por si te sirve de orientación, estoy organizando un grupo que presente la Prehistoria de la Teoría de Grupos en España.

La realización técnica sería muy sencilla. Se presentarán las experiencias en paneles de 50*70 cms. que contendrán una fotografía que describa gráficamente la experiencia y un texto con el título de la misma, autor/es y lugar de procedencia. Sobre una mesa adicional podrá presentarse un texto más amplio, del que puede darse fotocopia a los visitantes, y mostrar algún material manipulativo, si lo hubiere.

Para llevar a cabo lo anterior de modo uniforme y con un mínimo de diseño, únicamente necesito que se me envie una diapositiva de la imagen que se exhiba en el panel, así como los textos descriptivos de la experiencia. El material manipulativo lo llevaría cada autor/es a Quebec y se responsabilizaría del mismo durante el Congreso.

Si se trata de un grupo de autores, ruego se me indique con cuál de ellos debo mantener la correspondencia.

Por último, quiero que sepais que estoy intentando la búsqueda de algún mecenas para la publicación de todas las experiencias en una monografía.

Nada más por ahora. Quedo a tu entera disposión para cuantas aclaraciones necesites sobre el particular o sobre cualquier otro asunto en el que pueda serte de utilidad, a la vez que espero tu respuesta, ya sea a título personal o en nombre de algún colectivo del cual ostentes su representación.

Gracias por tu segura colaboración. Un fuerte abrazo.

Rafael Pérez Gómez

Mis señas para una posible localización son:

Rafael Pérez Gómez
Departamento de Matemática Aplicada. Universidad de Granada
18071 Granada, España.

Tel. (34) (58) 243130
Fax. (34) (58) 243286 / 274258

El sorprendente número π

Jesús Antonio Temprano Marañón

Parece increíble que algo aparentemento tan sencillo como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro haya preocupado al hombre desde la más remota antigüedad hasta el presente más actual.

A unos, por que han querido aprender sus cifras de memoria y, a otros, por que han querido conocer todas sus cifras con exactitud, lo cierto es que siempre el número pi ha estado presente en el pensamiento de la especie humana.

Ya el pueblo judío conocía diversos valores del número pi, puesto que ya en la Biblia, cuando en el libro de los Reyes (1 Reyes, 7, 23) y en el libro de las Crónicas (2 crónicas, 4,4) se habla de la primera construcción del Templo y de la Casa de Salomón, alrededor del siglo X o XI a.C., se utilizaba el valor:

$$\pi = 3$$

ya que en ambos libros se decía:

"*Hizo el mar fundido de diez codos* (el codo era una medida de longitud de aproximadamente medio metro) *de borde a borde y un cordón de treinta codos medía su contorno*"

$$\pi = \frac{l}{d} = \frac{30}{10} = 3$$

No obstante, recientes investigaciones sobre los textos hebreos ofrecen evidencias de que conocían el valor de 3,1416 aunque la validez de esta interpretación no está todavía universalmente aceptada.

La civilización mesopotámica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en un periodo que comienza hacia unos 5.000 años a.C. y llega hasta los albores del cristianismo. Dado que actualmente se han recogido casi medio millón de tablillas escritas en forma cuneiforme es difícil encuadrarlas exactamente, pero, parece posible suponer que fue en la ciudad de Babilonia, centro cultural del "Creciente fértil" entre los años 2.000 y 550 a.C. donde se hicieron los descubrimientos más importantes.

Al estudiar dichas tablillas, se han encontrado para pi los siguientes valores:

- Al calcular el área del círculo mediante la fórmula

  $$A = C^2/12$$

  siendo C la longitud de la circunferencia da el valor π - 3
- Al resolver algunos problemas relativos a hexágonos inscritos se ha encontrado el valor:

  $$\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$$

- Al resolver otros problemas, empleaban la relación existente entre el perímetro de un hexágono regular y su circunferencia circunscrita, que según ellos era:

  $$p = \frac{24}{26} l \quad \text{(figura 1)}$$

  siendo "p" el perímetro del hexágono y "l" la longitud de la circunferencia, con lo cual, considerando que el radio de la circunferencia y el

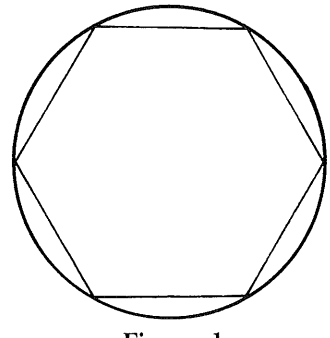


Figura 1

lado del hexágono regular inscrito en la misma son iguales, resulta:

$$\frac{24}{26} \cdot 2\pi r = 6r \Rightarrow \pi = \frac{6,26}{2,24} = 3,25$$

La civilización egipcia abarca una época que comienza en el año 3.100 a.C. y termina en el 322 a.C. con la conquista griega de Alejandría y lo que sabemos de ella está escrito en los numerosos papiros encontrados en sus monumentos y, fundamentalmente en lo que se refiere al número pi, en el papiro de Rhind (1.650 a.C.). En dicho papiro se ve que los egipcios pensaban que el área del circulo era la misma que la de un cuadrado que tuviese por lado los 8/9 del diámetro del círculo (fig. 2)

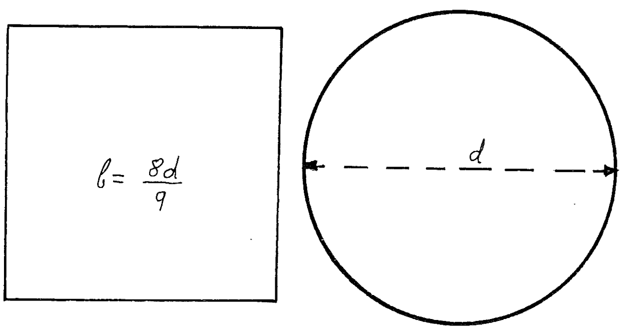


Figura 2

$$A_{ci} = A_{cu} \Rightarrow \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8d}{9}\right)^2 \Rightarrow \pi \cdot \frac{d^2}{4} = \frac{64d^2}{81}$$

$$\pi = \frac{64,4}{81} = 3,16049$$

No obstante, al estudiar en profundidad las pirámides, se ha visto que los egipcios conocían el valor de pi con bastante aproximación (fig. 3)

600/191 = 3,14136...	443/141 = 3,14184...
110/35 = 3,14285...	1.043/332 = 3,14156...
333/106 = 3,141504...	377/120 = 3,14166...
267/85 = 3,141176...	166,5/53 = 3,141504...

pero, y fundamentalmente conocían el valor

710/226 = 3,141592...

que daba seis cifras decimales exactas, con lo que adelantaban en varios siglos al valor dado por un astrónomo chino, al que se supuso durante mucho tiempo el descubridor de este valor.

Los arquitectos fenicios y griegos empleaban el valor:

$$\pi = 22/7 = 3,14285$$

pero los matemáticos griegos no se conformaron con este valor aproximado y fue el genial Arquímedes el que consiguió un valor mas exacto.

Arquímedes fue entre otras cosas, un gran matemático que murió en el año 212 a.C. cuando los romanos conquistaron Siracusa, ciudad a la que el había defendido durante años ingeniosamente con espejos, poleas, etc., causando grandes pérdidas en tiempo y hombres entre ellos.

Su idea para calcular el valor de pi fue la siguiente: primeramente inscribió un hexágono regular en una circunferencia de diámetro unidad, con lo cual su perímetro tiene que ser menor que la longitud de la circunferencia, es decir, menor que pi. A continuación dividió en dos partes cada uno de los arcos anteriores obteniendo un polígono de doce lados del que halló su perímetro. Continuó con este procedimiento inscribiendo polígonos de 24, 48 y 96 lados y, obtuvo para el perímetro de este último, el valor de:

$$p = 3 + \frac{10}{71} = \frac{223}{71}$$

que todavía debe ser menor que pi puesto que queda hueco entre este polígono y la circunferencia. Des-

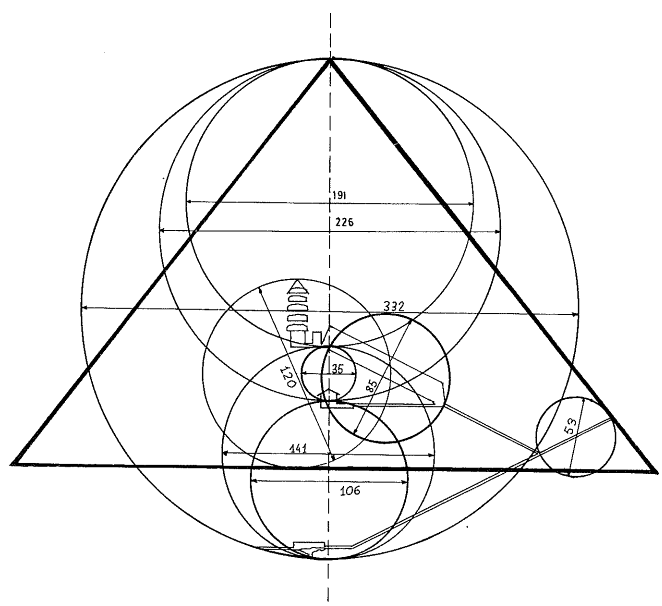


Figura 3

pués hizo lo mismo, pero circunscribiendo polígonos de los mismos lados a la circunferencia y, obtuvo para el de 96 lados un perímetro:

$$p = 3 + \frac{10}{70} = \frac{22}{7}$$

con lo cual, haciendo el promedio de los dos valores, obtuvo:

$$\pi = \frac{\frac{22}{7} + \frac{223}{71}}{2} = \frac{\frac{1562}{497}}{2} = \frac{3123}{994} = 3{,}14185$$

Ptolomeo dividió el círculo en 360° y el diámetro en 120 partes, y luego cada parte en minutos, segundos y décimas de segundo, según el sistema sexagesimal de los babilonios y admitía que la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro era 3 8' 30'', es decir:

$$\pi = 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}14285$$

Herón de Alejandría que vivió posiblemente entre los años 75 y 150 d.C. y que es conocido por la famosa fórmula del área del triángulo en función de su semiperímetro, aunque hoy sabemos que procede de Arquímedes, también utilizaba el valor:

$$\pi = 22/7 = 3{,}14285$$

En uno de los mas antiguos libros chinos, "*El arte matemático en nueve secciones*", posiblemente bastante anterior al año 213 a.C. en el que un emperador mandó quemar todos los libros, aparece para pi el valor 3.

En el siglo III d.C., Liu Hui, considerando un polígono de 172 lados encontró:

$$\pi = 3{,}14159$$

El astrónomo chino Tsu Chúng-Chih (430-501 d.C.) y su hijo consiguieron dar el valor:

$$\pi = 3{,}1415927$$

como límite superior y:

$$\pi = 3{,}1415926$$

como límite inferior. Además escribieron los tres primeros números impares repitiéndolos dos veces cada uno:

1 1 3 3 5 5

y colocando los tres últimos sobre los tres primeros, obtuvieron:

$$\pi = \frac{355}{113} = 3{,}14159$$

que es la mejor manera de expresar el número pi en forma de fracción. Estos resultados no fueron mejorados hasta cientos de años después.

En la civilización india también existen estudiosos del número pi, entre los que podemos destacar los siguientes:

- Baudhayana pensaba que su valor era:

$$\pi = \frac{49}{16} = 3{,}0625$$

- Este verso de Aryabhata, matemático indio del siglo IV, nos da el valor aproximado de la relación que más adelante se denominará pi:
"*Sumar cuatro a cien, multiplicar por ocho, sumar todavía sesenta y dos mil y se obtiene así un valor aproximado de la circunferencia de un círculo cuyo valor aproximado es de dos miríadas*".

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

En su trigonometría también se encuentra el valor:

$$\pi = \sqrt{10}$$

- Bramhagupta, en el siglo VI, en su libro de astronomía consideraba:

$$\pi = 3$$

como valor práctico, y:

$$\pi = \sqrt{10}$$

como valor preciso.

- En el siglo XII, Bhaskara o, Bhaskafa según otros autores, manejaba los siguientes valores:

$$\pi = 754/240 = 3{,}14167$$
$$\pi = 3927/1250 = 3{,}1416$$

En Europa, no obstante, se siguieron utilizando los valores dados por Leonardo, que obtuvo:

$$\pi = 2880/917 = 3{,}14067$$

por el Cardenal Cusa, que por medio de construcciones poligonales obtuvo:

$$\pi = 3{,}142337...$$

y

$$\pi = \frac{3}{4}\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right) = 3{,}13615$$

y, el valor de origen desconocido:

$$\pi = \sqrt[3]{31} = 3{,}14138$$

hasta que en el siglo XVI, se conoció el valor dado por el astrónomo chino que, como ya sabemos, nos da hasta la sexta cifra decimal exacta.

Al ir conociendo todos estos datos, los sabios y hombres de ciencia de la época se empeñaron en conocer el valor de pi exactamente. Para ello trataron de resolver el famoso problema de la cuadratura del círculo, es decir, construir con regla y compás un cuadrado que tuviera exactamente el mismo área que un círculo dado y, como esto no es posible, según se demostró posteriormente, se abandonó el método tradicional y se recurrió al de obtener una serie de fracciones que tendiera hacia pi.

Con este método, el llamado padre del álgebra, el francés Viete, partiendo de la expresión del perímetro γ" de un polígono regular de 2n - 1 lados y, utilizando de manera recurrente la expresión del seno del ángulo doble, en función del seno y coseno del arco, llegó después de n - 2 transformaciones a:

$$\frac{4}{p} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cdots \cdot \cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

que, al pasar del polígono a la circunferencia, resulta la expresión límite:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \cdots$$

con lo que obtuvo para pi el siguiente valor:

$$\pi = 3{,}14159265358979323$$

En 1.596, el alemán Ludolph von Ceulen, poco convencido de los nuevos métodos, volvió al método tradicional de Arquímedes y utilizó un polígono de 1.073.741.284 lados, con lo que obtuvo pi con 35 cifras decimales, por lo que también se le conoce como el número de Ludolph, y que permitía calcular el volumen de una esfera de la magnitud de la Tierra aproximadamente con una exactitud de tres mil millonésimas de centímetro.

Un poco mas tarde, el inglés Jhon Wallis (1.616-1.703) al aplicar su regla a la expresión entera:

$$\left(1 - x^2\right)^n$$

para valores sucesivos de n trató de obtener por interpolación, el valor de n = 1/2, al que correspondería como resultado π/4. Como no logró éxito, fue modificando los valores del exponente n", al mismo tiempo que modificaba los de la potencia de x, y siguiendo ciertas leyes de generalización e interpolación llegó a un nuevo desarrollo en producto infinito de la forma:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \ldots =$$

$$= 2 \cdot \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \ldots \cdot \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

Como Wallis no quedó muy contento con esta fórmula instó a su amigo William Brouncker, que no se sabe como, obtuvo un desarrollo de pi en fracción continua infinita que por incomodidad tipográfica omitimos aquí.

En 1.671, el matemático escocés James Gregory obtuvo la serie del arco tangente como:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

aprovechándose de lo cual, en 1.673, el filósofo y matemático alemán Gottfried von Leibnitz, cofundador del cálculo con Isaac Newton, obtuvo los actuales desarrollos en serie del arco tangente circular y del arco tangente hiperbólico mediante el cálculo de los sectores elíptico e hiperbólico, que en el primer caso, haciendo x=1, da lugar a una fórmula muy sencilla y conocida:

$$\pi = 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2n+1}\right)$$

con el inconveniente de que se necesitan veinte mil términos para obtener cuatro decimales exactos. También obtuvo la serie más precisa:

$$\pi = \frac{8}{1 \cdot 3} + \frac{8}{5 \cdot 7} + \frac{8}{9 \cdot 11} + \frac{8}{13 \cdot 15} + \dots$$

En 1.717, el matemático inglés Abraham Sharp calculó pi con 71 decimales.

Jhon Machin, profesor de astronomía en Londres, también a comienzos de este siglo obtuvo la fórmula:

$$\pi = 16 \cdot \text{arctang } \frac{1}{5} - 4 \cdot \text{arctang } \frac{1}{239}$$

con la que consiguió los cien primeros decimales de pi, ya que ambas series convergen rápidamente.

En este mismo siglo, Leonhard Euler generalizó la fórmula de Machin y dio numerosos desarrollos en serie del número pi mediante la serie del arco tangente. Además de obtener un notable impacto, popularizó en 1.736 el uso de la letra griega π, para nuestro número. Esta aceptación ocurrió 30 años mas tarde cuando el autor inglés William Jones introdujo este símbolo en nuestra escritura.

En 1.761, el alsaciano Johan Heinrich Lambert demostró la irracionalidad de pi, es decir, que tiene infinitos decimales, mediante el desarrollo en fracción continua cde tangente de ¯“.

En 1.794, Legendre, en su libro “Elementos de Geometría”, volvió a demostrar la irracionalidad de pi con la profética observación de que es probable que el número pi no esté comprendido entre los irracionales algebraicos, es decir, que no sea raiz de una ecuación algebraica de un número finito de términos y de coeficientes racionales.

No obstante, el interés por nuestro número no decayó ya que George von Vega calculó 140 decimales, J. M. Zacharias 200, Richter 500, pero fue el matemático inglés William Shanks, empleando la fórmula de Machin el que en 1.873, y después de 20 años de trabajo, obtuvo el valor de pi con 707 decimales, aunque para su desgracia cometió un error en la cifra 528 afectando por ello a todas las siguientes. A pesar de ello, y como homenaje al más grande calculador humano de pi, sus 707 cifras decimales se hallan grabadas a lo largo del friso circular en que se apoya la cúpula del palacio Decouverte de París.

En 1884, Ferdinand Lindemann demostró que el número pi era trascendente. Esta demostración implicaba la solución del problema de la cuadratura del círculo. En efecto pueden construirse con regla y compás los segmentos cuya medida se expresa algebraicamente mediante un número finito de operaciones racionales y de raices cuadradas a partir de la medida de segmentos dados o, lo que es lo mismo, pueden construirse aquellos cuyas medidas son raices de ecuaciones algebraicas o reducibles a cuadráticas, de coeficientes racionales o irracionales cuadráticos, es decir, de determinados tipos de números algebraicos. Ahora bien, la ecuación que traduce el problema de la construcción con regla y compás de un segmento de un lado de un cuadrado equivalente a un círculo de radio dado, es:

$$x^2 = \pi$$

ecuación cuadrática, uno de cuyos coeficientes no es algebraico.

Como anécdota, cabe destacar que el problema de la cuadratura del círculo, imposible en la geometría euclidiana, tiene solución en la geometría de tipo hiperbólico.

El inglés, D. F. Ferguson empleando una expresión diferente de la del algoritmo de Machin fue el que descubrió el error de Shanks y, ayudado por una calculadora obtuvo 808 decimales en 1.945.

Ya en 1.949. George W. Reitwiesher, con una computadora Eniac (Electronic Numerical Integrator and Computer) y durante más de 70 horas de trabajo calculó pi con 2.037 cifras decimales.

En 1.955, una computadora más veloz obtuvo pi con 10.017 decimales trabajando durante 33 horas.

En 1.961, Shanks y Wench, con un IBM 7030, obtuvieron pi con 100.625 decimales.

En 1.974, el francés Jean Guilloud calculó un millón de cifras decimales con la computadora más poderosa del mundo en esa época, una Control Data 7600, en 23 horas y 18 minutos. Un poco más tarde, se obtuvieron los primeros 10 millones de decimales, en donde, para hacernos una idea:

el 0 se repite 9994440 veces,
el 1, 999333 veces,
el 2, 1000306 veces,
el 3, 999964 veces,
el 4, 1001093 veces,
el 5, 1001093 veces,
el 6, 999337 veces,

el 7, 1000207 veces,
el 8, 999814 veces, y,
el 9, 1000040 veces.

En 1983, los japoneses Kanada, Tamura, Yoshiro y Ushiro utilizando un algorítmo basado en la gran velocidad de convergencia de las secuencias correspondientes a la media aritmetico-geométrica de dos números y conocido como algorítmo de Brent-Salamin, obtuvieron 16 millones de decimales.

Dos o tres años después, el ordenador Cray-2 de la Nasa, tras 28 horas de trabajo obtuvo 29.360.128 decimales. En 1989, el profesor asistente de informática de la Universidad de Tokyo, Yasumasa Kaneda, ha resultado ganador de una competición en la que participaban norteamericanos y japoneses, para calcular la relación exacta entre la longitud de una circunferencia y su diámetro, al obtener 536.870.000 decimales del número pi, gracias a 67 horas y 13 minutos de trabajo de un ordenador perfeccionado y a 100.000 hojas de papel.

Gregory y David Chudnovsky han superado a Kanada en 1990, obteniendo 1.000 millones de decimales utilizando un nuevo algorítmo iterativo que combina técnicas de convolución rápida, de multiplicación de enteros largos y de evaluación de series de potencias, utilizando dos ordenadores, un Cray-2 del Minesotta Supercomputer Center y un IBM 3090-UF del centro de investigación T.J. Waston de Nueva York, lo que constituye el record mundial hasta ahora.

Pero, si normalmente con tres o cuatro decimales nos basta, ¿a qué se debe el empecinamiento de matemáticos y no matemáticos en encontrar el número pi cada vez con más decimales?.

Por una parte, este empeño ha dado lugar a grandes descubrimientos matemáticos (métodos de aproximación a integrales definidas, evaluación de funciones trascendentes, etc.) y por otra, el intentar buscar un record siempre ha sido un reto para la especie humana.

No obstante, si algún curioso quiere saber las 20 primeras cifras, no tiene más que acudir a los versos de Manuel Golmayo:

"Soy y seré a todos definible,
mi nombre tengo que daros,
cociente diametral siempre inmedible
soy de los redondos aros."

o las 32 primeras cifras y acudir a los siguientes versos del ingeniero colombiano R. Nieto París:

"Soy ø, lema y razón ingeniosa
de hombre sabio, que serie preciosa
valorando, enunció magistral.
Por su ley singular, bien medido
el grande orbe por fin reducido
fue al sistema ordinario usual."

y cambiar cada palabra por el número de letras que la forma, con lo que obtendrá el siguiente valor:

$$\pi = 3,\ 14159265358979323846264338327950$$

Aunque tampoco quedaría muy bien, ya que el doctor A.C. Aitken, profesor de Matemáticas de la Universidad de Edimburgo se aprendió las 802 primeras cifras en aproximadamente 15 segundos, ó el japonés Hidaki Tomoyori, que en 1.979 y durante 3 horas y 10 minutos recitó de memoria las 15.151 primeras cifras decimales de pi, procediendo de la siguiente manera: plegaba un dedo de la mano derecha cada 100 cifras, uno de la mano izquierda cada 10 cifras para acordarse donde estaba, y se paraba cada 1.000 cifras para descansar. Poco después de acabar declaró que pensaba memorizar 100.000 cifras, aunque esto creemos que todavía no lo ha conseguido.

Mucho menos trabajoso es, desde luego, utilizar las fórmulas rápidas de Stormer

$$\pi = 24 \cdot \arctan\frac{1}{8} + 8 \cdot \arctan\frac{1}{57} + 20 \cdot \arctan\frac{1}{239}$$

y de Gauss

$$\pi = 48 \cdot \arctan\frac{1}{18} + 32 \cdot \arctan\frac{1}{57} + 20 \cdot \arctan\frac{1}{239}$$

y obtener los primeros 100.000 decimales de pi mediante el programa publicado en la revista "El Ordenador Personal", en el número 36, por el club Ademir.

Crisis de fundamentos en las Matemáticas españolas a finales del siglo XIX*

José M. Pacheco Castelao

I.

Comenzaré haciendo algunas reflexiones acerca de la definición de "Matemáticas" y de sus implicaciones. No se debe olvidar que la palabra Matemáticas proviene del griego "μαυεσισ" cuyo significado viene a ser el de "explicación". También la palabra griega "μαυετησ", que quiere decir alumno o discípulo, posee la misma raiz. Esta es la causa por la que a veces parece redundante hablar de Didáctica de las Matemáticas; Si esta Ciencia, en sí, constituye una explicación, resulta difícil admitir que necesite a su vez tantas explicaciones.

Para entender lo anterior se puede dar multitud de razones. Aquí comentaré dos que me parecen las más interesantes.

En primer lugar, la actividad del matemático consiste en manipular una serie de conceptos o ideas de acuerdo con ciertas estipulaciones o reglas. Los resultados de este trabajo consisten en establecer nuevas relaciones entre los conceptos o definir algunos nuevos que permitan comprender mejor el mundo circundante. Las reglas antes citadas reciben el nombre de "Cálculos", y los hay de diferentes clases; así tienen Uds. el cálculo aritmético, el cálculo diferencial, etc. Por regla general, la enseñanza de las Matemáticas consiste en aprender los cálculos . En segundo lugar, hay que tener encuenta que las Matemáticas, como ciencia, tiende a estudiarse a sí misma, de forma que los resultados de los trabajos se expresan en lenguajes muy formalizados y que cada vez resultan más incomprensibles para los profanos.

Estas dos razones suelen aducirse para iniciar tareas acerca de cómo mostrar al público en general la manera más sencilla de acceder al conocimiento de las Matemáticas. Veamos algunas ideas más a este respecto.

II.

Al darse cuenta de las dificultades citadas antes u otras análogas aparece una tentanción difícil de resistir entre quienes enseñan Matemáticas: La de intentar alclarar los conceptos recurriendo a la evolución histórica de los mismos. Esto es un ejercicio arriesgado y de ejecución complicada. Las Matemáticas, como creación del hombre, se hallan sometidas a los avatares de las modas, de la política y de los usos sociales en cada época.

De todas maneras, parecen reconcerse dos corrientes en la historia de las Matemáticas cuyo fluir es más o menos paralelo: La primera es la elaboración de los cálculos correspondientes a la necesidades técnicas, culturales o sociales de cada momento histórico. La segunda es el trabajo de sedimentación y fundamentación formal de los cálculos, esto es, la búsqueda de la consistencia lógica de los hechos matemáticos.

A veces estas dos corrientes se entremezclan, y esos son los momentos o crisis más fecundos de la historia de las Matemáticas. Así, los Elementos de Euclides fundamentan un conjunto de saberes aritmérico-geométricos provinientes de las culturas mesopotámicas. Arquímedes provee sólidas demostraciones de resultados del cálculo integral. Newton, Leibniz y los Bernouilli establecen el Cálculo, Diferencial recogiendo la herencia de muchos geómetras y Euler, provee un gigantesco corpus matemático que exigió la obra de Gauss y todo el desarrollo matemático del siglo XIX para su fundamentación rigurosa. En esta idea, podemos ver que el siglo XIX es el verdadero siglo de las Matemáticas: Salvo desarrollos y formulaciones nuevas, lenguajes más o menos sofisticados o evoluciones hacia mayores generalidades, las Matemáticas de hoy día están aun profundísimamente enraizadas en el XIX.

* Conferencia pronunciada en abril de 1990, en la clausura de las III Jornadas didácticas de los E.U. F.P.E.G.J. de Las Palmas.

III.

Hablaremos ahora de las Matemáticas españolas del XIX. Siguiendo la costumbre, el XIX español se puede considerar como la época entre 1830 y 1914. La primera fecha es el final del reinado de Fernando VII y 1914 es la irrupción de los conflictos generalizados y la internacionalización de los hechos históricos y culturales.

Para nuestro fin, el siglo XIX comienza con el cierre generalizado de las Universidades Españolas entre 1830 y 1834. Este cierre hizo que la cultura matemática se conservara en Centros como las Academias militares o los Institutos. Además, ese cierre se mantuvo, en aras del centralismo, de un modo u otro hasta bien entrado el siglo XX, cuando la Universidad Central era la única que podía expedir Doctorados. El siglo XIX matemático español termina con la vuelta a España en 1914 de Rey Pastor tras su estancia en Alemania.

Hay tres textos básicos para conocer el desarrollo matemático español en el XIX:

1.- El discurso de Echegaray "Historia de las Matemáticas puras en nuestra España", pronunciado ante la academia de Ciencias el 11-III-1866 ([8], 161-190).

2.- El artículo de García de Galdeano [9] en la revista L'Enseignement Mathematique en 1899, y

3.- La conferencia de Rey Pastor en Valladolid en 1915, "El progreso de las Ciencias en España y el progreso de España en las Ciencias" ante la Asociación para el progreso de las Ciencias ([8], 458-478).

Estos tres documentos presentan caracteres muy diferentes: Echegaray se lamenta amargamente del subdesarrollo cultural español, en esencial del matemático; García de Galdeano es reflexivo y serio e intenta resaltar lo bueno y novedoso de la escasa contribución española; finalmente Rey Pastor opina críticamente acerca de lo producido en nuestro país y de sus perspectivas de futuro. En la fig. 1 (ver al final del texto) se muestra una cronología sumaria.

IV.

A partir de los textos citados pasaremos revista a la evoluciónn de los conocimientos matemáticos en la España del XIX.

A lo largo del XVIII se produce la incorporación del Cálculo Infinitesimal en España. Parece demostrado que se introdujo a través de las Academias militares y de la Universidad de Salamanca[4], donde fue explicado por Juan Justo García[7]. Queda constancia de ello en el "Examen marítimo". En esta época, final del siglo de las luces se comprendían las matemáticas españolas en los tratados de B. Bails (entre 1772 y 1783), de Vallejo (a partir de 1817) y el citado de García[7].

Durante los años 20 del siglo XIX tiene lugar la crisis de fundamentos en el Análisis Matemático debida a Cauchy, a quien se debe una definición rigurosa del concepto de infinitesimo y muchos resultados basados en esa concepción. Esta crisis no parece afectar a los matemáticos de nuestro país. Veámoslo:

En 1828 el Teniente de Ingenieros García San Pedro publica el tratado "Cálculos diferencial e integral", que, en sucesivas refundiciones se usó como texto en la Academia de Ingenieros hasta más allá de 1900 [2], [21]. En este texto describe el autor la teoría de los "incrementos ideales", con objeto de no utilizar el paso al límite. En efecto, la herramienta básica del cálculo es el cociente incremental $\Delta F/\Delta x$, al que el autor denomina "la disposición a variar" de F. Así:

$$\Delta F/\Delta x = h^{-1}\,(F(x+h) - F(x))$$

donde hace falta saber quién es $F(x+h)$. Como para $h=0$ se ha de cumplir que $F(x+0)=F(x)$, nuestro autor concluye que ha de ser:

$$F(x+h) = F(x) + h^{\alpha}\,F'(x,h)$$

donde $\alpha > o$ para que el segundo sumando se anule si $h=0$. De la misma manera, $F'(x,h)$ se descompodrá en:

$$F'(x+h) = A + h^{\beta}F''(x,h)$$

donde A no depende de h. De igal modo:

$$F''(x+h) = B + h^{\gamma}F'''(x,h)$$
$$F'''(x+h) + C + h^{\sigma}F^{iv}(x,h)$$

luego en general se tendrá:

$$F(x+h) = F(x) + Ah^{\alpha} + Bh^{\alpha+\beta+\gamma}\ldots = F(x) + h^{\alpha}(\ldots)$$

Según esto, basta hallar A, B, etc. Tras ingeniosos desarrollos demuestra que A es la primera derivada, etc. En todo el proceso, para evitar el paso al límite con h tendiendo a 0, el autor denomina a h un "incremento ideal", y a $F(x+h)$ el incremento ideal de F y establece un cálculo muy interesante para la manipulación de esas entidades. Lo que el autor no ve claro es que el producto $h^{\alpha}(\ldots)$ se anule cuando h es cero. (ver [21]), p.ej., no he encontrado el texto original de García de San Pedro).

De todo modos, en este texto y otros análogos, aunque anclados en las descripciones del Cálculo de finales del XVIII, se plantea de forma clara, aunque sin consecuencias, el problema de presentar con coherencia los resultados prácticos del Cálculo Infinitesimal y los fundamentos básicos de la teroría. Véase también el tratado de la Academia de Artillería de Segovia de D. Dámaso Bueno[3].

Hay que resaltar que en la época a que nos referimos ya se conocían en nuestro país los grandes tratados de análisis matemático en los clásicos dos tomos, y aun así hay que esperar a 1882 a que el Profesor S. Archilla publique su libro "Principios fundamentales del Cálculo Diferencial"[1], que origina una serie de textos como el de Clariana[5], Villafañe[22] hasta Rey Pastor[18].

V.

La geometría es otra de las áreas de interés para los matemáticos españoles del XIX. Recordemos que en el año 1854 se produce la fundamentación por Riemann de la Geometría[19] en un texto básico para la Geometría Fiferencial. Sin embarbo, en un primer momento este avance pasa desapercibido en España. Aquí existe una preocupación de carácter más didáctico y se nota la influencia de los profesores de los niveles básicos en la producción científica. Esta es una consecuencia del cierre de las Universidades, sin duda.

En especial, las aplicaciones de los números complejos a la geometría es un problema que se trata con frecuencia. Esta idea viene originada por la introducción por Hamilton (1833 al 1835) de los cuaterniones y pretende formalizar la geometría tridimensional. El texto español esencial, y destacable por su originalidad es el tratado de Rey Heredia[17] del que he tenido ocasión de ocuparme en otro lugar[14]. La concepción de este tratado es singular: Muestra, basándose en ciertas ideas del filósofo Kant que los números complejos pueden identificarse con las diferentes direcciones del plano mediante el siguiente y curioso razonamiento (ver fig.1):

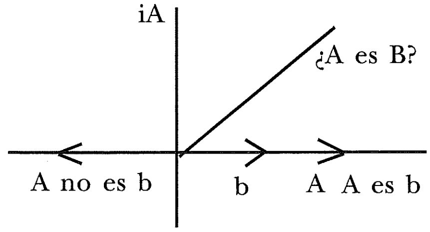


Figura 1
Geometría compleja de Rey Heredia

Si "A es B" se representa sobre un segmento sobre una semirrecta a partir de un origen dado, entonces "A no es B" se representa por el segmento opuesto sobre la recta. El juicio "A queda fuera del concepto B" se representará mediante segmentos emanados del mismo origen pero con diferentes grados de inclinación que representan la intensidad con que A es o no de la clase B. Por tanto, el caso de absoluta indiferencia de A acerca de B será el segmento perpendicular, y simbólicamente lo representa nuestro autor por iA.

Para demostrar que i^2=-1 encontramos en uno de los sucesores de Rey Heredia, el Profesor Navarro[13] el siguiente razonamiento (ver fig. 2):

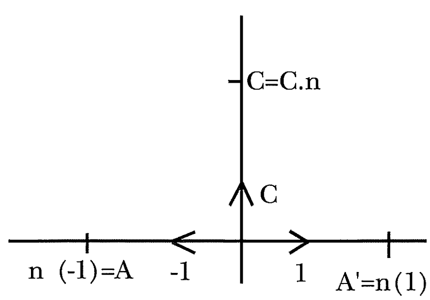


Figura 2
Demostración de Navarro acerca de $i^2 = -1$.

La posición de OC respecto de OA es como la de OA' respecto de OC (perpendiculares), y como entre las longitudes se cumple lo mismo (!) tendremos:

$$n1/nc = nc/n(-1)$$

Luego: $n1n(-1) = ncnc$
de donde: $n^2(-1) = n^2 c^2$
o bien: $c2 = -1$
luego $c = i$

El tratado de Rey Heredia se utilizó como fuente para diferentes vulgarizaciones, a pesar de ser un libro duro y complicado. Ya hemos citado al Prof. Navarro, y aparecen también Domínguez Hervella, de la Academia Naval, Rochano, del Instituto de Granada[6,20], y curiosamente aparece aun esta teoría expuesta en el texto de Lubelza, de la Escuela de Minas en 1908[12]. Nótese que en esta época ya circulaba en España el texto de Hoüel "Des quantités complexes", que incluye la teoría general de la superficie de Riemann y los últimos avances en la fecha (1874)[10]. Todo esto pasa desapercibido para los geómetras españoles, más preocupados con la fundamentación que con el avance.

VI.

Volviéndo por un momento a las ideas acerca del cálculo infinitesimal, las preocupaciones acerca de infinitos einfinitésimos son patentes en los textos españoles. Las disquisiciones son largas, complejas y farragosas, y los trabajos de Cantor acerca de las bases de la teoría de conjuntos llegan tarde a nuestro país. Citeré el texto del ingeniero de Caminos Sr. Portuondo sobre el infinito[16] y el texto, de nuevo de la Escuela de Minas[15] de Pérez Muñoz, que recoge, ya en 1914, las nociones del álgebra de conjuntos. A partir de aquí ya entramos en la época actual.

VII.

De los párrafos anteriores se desprende que la contribución española a las Matemáticas a lo largo del XIX no figure, por ejemplo, en el tratado de Klein[11]. Aunque sólo nos hemos fijado en algunos aspectos parciales, que serán objeto de otros estudios, para terminar resumiremos en tres conclusiones las ideas expuestas:

1.- Las Matemáticas españolas en els XIX están dedicadas fundamentalmente a tareas de docencia y vulgarización.

2.- El interés mostrado en cuestiones de fundamentos es patente en:

Mantenimiento de las ideas clásicas, sobre todo en las Academias militares, acerca del Cálculo Infinitesimal.

Intentos de basar la Geometría en ideas filosóficas puras, fuera de la corriente general investigadora en Europa.

3.- Esta concepción en la conclusión anterior hace crisis en los años 1900-1910, aceptándose las ideas en boga en Francia y Alemania fundamentalmente.

Bibliografía

—ARCHILLA S. 1894. "Principios fundamentales del Cálculo Diferencial", Imprenta de S. Fco. de Sales, Madrid (Segunda ed.)

—BELÓN, A. 1976 "Lecciones de Cálculo Diferencial", Imprenta del Memorial de Ingenieros, Madrid.

—BUENO D. 1876 "Curso de Análisis Trascendente", Imprenta de Ondero, Segovia.

—CUESTA N.1985. "Historia de la invención del Análisis Infinitesimal y su introducción en España", Ediciones de la Universidad de Salamanca.

—CLARIANA, L.1982 "Cálculo Diferencial e Integral", (litografiado), Barcelona.

—DOMÍNGUEZ HERVELLA M. 1879 "Elementos de Geometría Analítica", Establec. tipog. E. Cuesta, Madrid.

—GARCÍA, J. J. 1814 "Elementos de aritmética, álgebra y geometría", Imprenta de Vicente Blanco, Salamanca (Cuarta impresión).

—GARCÍA CAMARERO, E. 1970 "La polémica de la Ciencia Española", Alianza Editorial, Madrid.

—GARCÍA DE GALDEANO, Z. 1899 "Les Mathématiques en Espagne", L'Enseignement Mathématique, 1, (pp. 6-21).

—HOÜEL, J. 1874 "Théorie élémentaire des quantités complexes", Gauthier-Villars, Paris.

—KLEIN, F. 1926 "Die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert", Springer Verlag, Berlin.

—LUBELZA, J. 1908 "Lecciones de Cálculo Infinitesimal", Establec. tipog. de Jaime Ratés, Madrid.

—NAVARO, L. 1883 "Tratado de Geometría Elemental", Imprenta de Vicente Oliva (2ª de.), Salamanca.

—PACHECO, J. 1982 "La introducción de los complejos en la geometría elemental en España", ACTAS IX Jornadas Hispano-Lusas, Vol. 2, (967-970).

—PÉREZ DE MUÑOZ, R. 1914 "Elementos de cálculo infinitesimal", Adrian Romo, Madrid.

—PORTUONDO, A. 1880 "Ensayo sobre el infinito", Imprenta de Aribau, Madrid.

—REY HEREDIA, J. "Teoría trascendental de las cantidades imaginarias", Imprenta Nacional, Madrid.

—REY PASTOR, J. 1921 "Curso de Cálculo infinitesimal" (mimeografiado), Madrid.

—RIEMANN, B. 1854 "Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen" (Werke, 272-287), Ed. Dover 1953, New York.

—ROCHANO J. 1870, "Elementos de álgebra", Imprenta de D. Indalecio Ventura, Granada.

—TORO, J. DE 1870 "Elementos de álgebra", Imprenta de D. Indalecio Ventura, Granada.

—VILLAFAÑE, J. 1898 "Tratado de análisis matemático" I y II, Tipografía de la Casa Provincial de Caridad, Barcelona.

Cronología sumaria del siglo XIX Matemático en España

1828.- Academia de Ingenieros. García de S. Pedro.
1830.- Cierre de Universidades.

1834.- Apertura parcial de las Universidades.
1845.- Creación de los estudios de Ciencias.
1857.- Ley Moyano (Crea las Facultades de Ciencias).
1865.- Libro de Rey de Heredia.
1866.- Discurso de Echegaray.
1870.- Libro de Rochano.
1874.- Libro de Navarro.
1876.- Academia de Artillería. Dámaso Bueno.
1877.- Libro de Domínguez Hervella.
1880.- Libro de Portuondo.
1882.- Libro de Archilla.
1891.- Primera revista matemática española: "El Progreso Matemático".
1892.- Texto de Clariana.
1894.- Academia de Ingenieros. Texto de De Toro.
1899.- Artículo de García de Galdeano.
1899.- Texto de Villafañe.
1905.- Escuela de Minas Texto de Lubelza.
1914.- Texto de Pérez de Muñoz.
1915.- Rey Pastor.

ICMI Comisión internacional de enseñanza matemática (Internacional Commission on Mathematical Instruction)

La actividad matemática internacional se estructura a través de la Unión Matemática Internacional (IMU. International Mathematical Union), que es el organismo que coordina las acciones comunes en el campo matemático de 52 países actualmente. Cada uno de ellos envía representantes a las Asambleas Generales de la IMU que se celebran cada 4 años, generalmente en el transcurso del Congreso Internacional de Matemáticos. Ellos eligen los miembros del Comité Ejecutivo de la IMU, así como los miembros del Comité Ejecutivo del ICMI (Comisión Internacional de Educación Matemática), que se encarga de coordinar las actividades en el campo de la *educación* matemática de los diferentes niveles de la educación propiamente académica así como las que se refieren a la interacción de las matemáticas con la sociedad.

El ICMI fue fundado en 1908, a partir de una idea del matemático americano David Eugene SMITH. Su primer Presidente fue el matemático alemán Felix KLEIN, y su órgano oficial fue la prestigiosa revista *L'Enseignement Mathématique* (Suiza). Otros Presidentes fueron, por períodos, en general de 4 años, sucesivamente: SMITH (Estados Unidos), HADAMARD (Francia), BEHNKE (Alemania), STONE (Estados Unidos), LICHNEROWICZ (Francia), FREUDENTHAL (Holanda), LIGHTHILL (Gran Bretaña), IYANAGA (Japón), WHITNEY (Estados Unidos), KAHANE (Francia).

La actividad más importante del ICMI es la supervisión de los Congresos Internacionales de Educación Matemática (ICME, International Congress on Mathematical Education), que se celebran cada 4 años. Los últimos Congresos de este tipo se han celebrado o se celebrarán en : Adelaida (Australia, 1984), Budapest (Hungría, 1988), Quebec (Canadá, 1922). Para el de Quebec se esperan entre 3.500 y 4.000 matemáticos de todo el mundo especialistas en la educación matemática de los diferentes niveles, que tratan de examinar los problemas que desde los diferentes puntos de vista la enseñanza matemática propone a la comunidad de matemáticos y a la sociedad. Es muy probable que el ICMI decida celebrar su Congreso de 1996 en algún lugar de España.

Por otra parte el ICMI supervisa también la organización de reuniones más restringidas para el estudio de problemas más específicos de la educación matemática, como los siguientes:

- Influencia de la información sobre la matemática y su enseñanza (Strasbourg, 1985).
- La enseñanza de la matemática en los 90 (Kuwait, 1986).
- Cognición y educación matemática (juntamente con el grupo Psychology and Mathematical Education).
- Matemática como ciencia auxiliar (Udine, Italia, 1987).
- Popularización de la matemática (Leeds, Gran Bretaña, 1989).
- Evaluación en la enseñanza matemática (Costa Brava, 1991).

Los estudios correspondientes son publicados por Cambrigde University Press. (Algunos han sido traducidos por la Editorial Mestral, Valencia).

El Comité Ejecutivo del ICMI elegido en el Congreso Inrernacional de Kyoto (Agosto, 1990) por la Asamblea General de la IMU, para el período 1991-1994, es el siguiente:

Comité Ejecutivo del ICMI (1991-1994)

Presidente:	M. de Guzmán (España)
Vice-Presidente:	J. Kilpatrick (Estados Unidos) Lee Peng-Yee. (Singapur)
Secretario:	M. Niss (Dinamarca).
Miembros:	Yu. L. Ershov (URSS). E. Luna (República dominicana) A. Sierpinska (Polonia).
Ex-officio:	J. L. Lions (Francia). J. Palis Jr. (Brasil). J. H. van Lint (Holanda). J. P. Kahane (Francia).

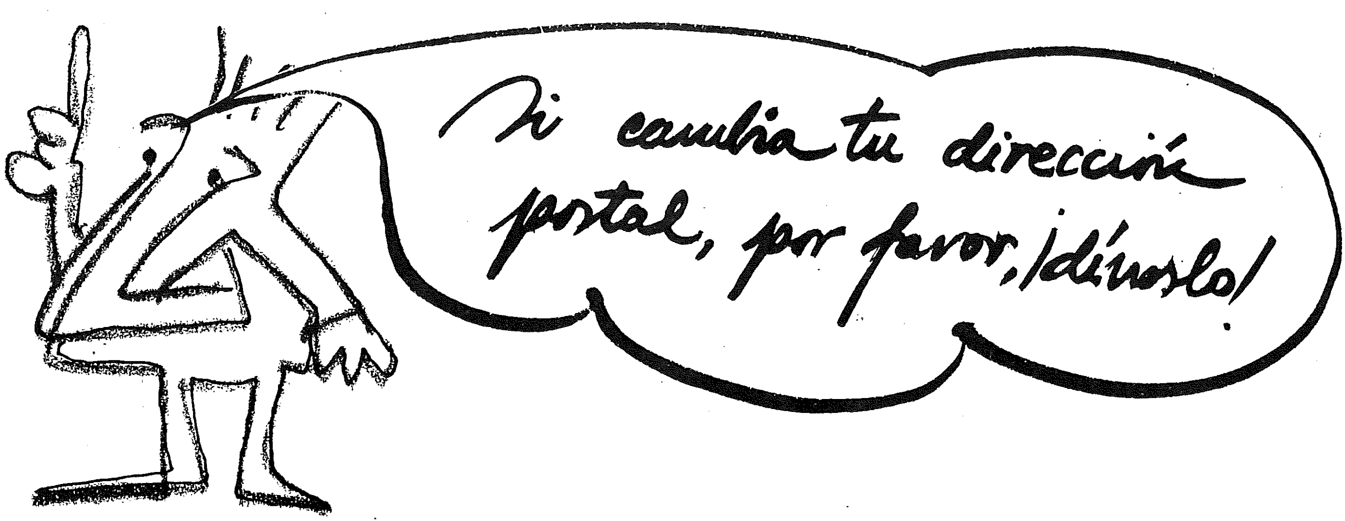
Con motivo del, comienzo de su período como Presidente del ICMI, Miguel de Guzmán ha enviado la siguiente nota que aparecerá en el BULLETIN que el ICMI edita periódicamente.

Mis primeras palabras como Presidente del Comité Ejecutivo entrante del ICMI son de profundo reconocimiento y afecto al Comité Ejecutivo que ha actuado durante los últimos años y, en particular, a su Presidente, Jean-Pierre Kahane, y a su Secretario, Geoffrey Howson.

Para todos aquellos que han seguido el desarrollo del ICMI está bastante claro que la pasada década ha sido especialmente rica en actividades sobre diferentes aspectos: congresos, jornadas de estudio, informes, publicaciones, ... debidos en gran medida al gran interés, dedicación y eficacia de los Profesores Kahane y Howson.

Será un estímulo para todos nosotros en el nuevo Comité Ejecutivo tratar de seguir el ritmo de trabajo que ellos han llevado durante estos años, mas estamos seguros de contar con su ayuda, consejo y apoyo para poder continuar, especialmente con la del Profesor Kahane desde su posición de Miembro ex-officio del Comité Ejecutivo entrante.

Es nuestro mayor deseo, y pienso que puedo hablar en nombre de todo el Comité Ejecutivo, estar al servicio de toda la comunidad matemática en materias concernientes a problemas educativos, tratando de incorporar directamente los esfuerzos de los matemáticos y de otras personas relacionadas con la transmisión de valores propios de nuestra ciencia en todos los niveles, con el fin de contribuir al desarrollo armonioso de la cultura humana.
Con esta finalidad, nos gustaría contar con la ayuda de personas y grupos de distintos paises desde la riqueza de sus experiencias profesionales para que puedan ser compartidas por toda la comunidad matemática.



Congresos y Jornadas

Reuniones de la P.M.E.

Durante los días del 15 al 20 de Julio de 1990 ha tenido lugar en Oaxtepec (México) el **XIV Congreso Internacional sobre la Psicología de la Educación Matemática (PME)**. Este grupo de trabajo fue constituido por el profesor E. Fischbein en el transcurso del segundo Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) y tuvo su origen como objetivos principales los siguientes:

—Promover contactos internacionales e intercambio de información científica en la Psicología de la Educación Matemática.

—Promover y estimular investigación interdisciplinar en este área con la cooperación de psicólogos, matemáticos y profesores de matemática.

—Fomentar una comprensión más profunda y correcta de los aspectos psicológicos de la enseñanza y aprendizaje de la matemática y sus implicaciones.

La orientación inicial hacia los aspectos psicológicos de la Educación Matemática, marcada por los puntos anteriores ha ido dando paso a una perspectiva más abierta y en la actualidad el grupo cuenta con la presencia activa de los principales investigadores, a nivel internacional, tanto en Psicología de la Educación Matemática, como en Didáctica de la Matemática. Su actual presidente es K. Hart de la Gran Bretaña y entre sus miembros se encuentra: Michele Artigue (Fracia) Claude Gaulin (Canadá), y Juan Ponte de Portugal y Angel Gutiérrez, que fue elegido en el curso de esta reunión.

La estructura del Congreso incluye los siguientes apartados:

1. Sesiones plenarias dedicadas a conferencias y paneles, que este año han sido los siguientes:

Un panel, coordinado por el profesor Alan Bishop sobre el tema: Responsabilidades de la comunidad de investigación PME, en el que también han participado los profesores Claude Gaulin y Katherine Hart.

Tres conferencias sobre los siguientes temas:

N. Balacheff: Más allá de una aproximación psicológica de la Psicología de la Educación Matemática.

E. Filloy: Perspectiva del trabajo del grupo PME en la investigación sobre álgebra.

R. B. Davis: Bases epistemológicas de la Educación Matemática.

Asimismo, se dedicó una sesión plenaria a discutir temas generales de organización, directrices de trabajo y gestión del grupo. En dicha sesión, fue elegido para formar parte del Comité Internacional de dirección para los cuatro próximos años el profesor Dr. A. Gutiérrez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia.

2. Grupos de trabajo y Grupos de discusión formados en sesiones anteriores del congreso a iniciativa de personas con interés en realizar trabajos o discutir sobre aspectos particulares. Cada uno de estos grupos ha contado con cuatro sesiones de trabajo. Los incluídos este años han sido los siguientes:

—Razón y proporción.

—Geometría.

—Pensamiento matemático avanzado.

—Psicología del profesor de matemáticas: una perspectiva de investigación.

—Investigación sobre la psicología de la formación de un profesor de matemáticas.

—Psicología social de la educación matemática.

—Metodología de investigación con microordenadores.

—Representaciones.

—Los profesores y formadores de profesores como investigadores en Educación Matemática.

—Aprendizaje de la matemática y contexto cultural.

—Filosofía de la Educación Matemática.

—Aspectos teóricos y prácticos de la desmostración.

—Orientaciones científicas del PME.

—Pensamiento algebraico.

—Investigación en el aula.

3. Informes de Investigación: sesiones paralelas de presentación de comunicaciones de 20 minutos, seguidas de 15 para debate, agrupadas por su contenido. En total se han presentado 111 comunicaciones, clasificadas en los temas siguientes:

—Pensamiento matemático avanzado.

—Pensamiento geométrico espacial.

—Probabilidad.

—Números racionales.

—Números enteros y naturales.

—Razonamiento estadístico.

—Análisis didáctico.

—Procedimiento de evaluación.

—Interacción social, comunicación y lenguaje.

—Afecto, creencias y metacognición.

Hay que hacer notar, como señalan los responsables del proceso de selección y clasificación de los trabajos en la introducción a las actas del congreso, publicadas antes del comienzo de las sesiones, la desaparición de categorías tradicionales, como la de resolución de problemas o tecnología educativa. Un acuerdo general en este grupo, es que el razonamiento matemático está ligado a las situaciones y, por ello, el campo específico de la matemática juega un papel decisivo sobre los resultados. de la investigación, por lo que se ha optado en la elección de los criterios posibles de clasificación a dar prioridad al contenido matemático.

4. Sesión de posters, donde se han presentado 32 trabajos, de los cuales se publican en las actas resúmenes de una página de extensión.

Finalmente, también hay que hacer alusión al programa social. Aunque las sesiones de trabajo han sido intensas, con un horario de 8 horas diarias de trabajo, se da gran importancia a la posibilidad de intercambio informal de ideas y experiencias. Además de una excursión de día completo, se ha incluido un concierto de música de cámara, un espectáculo de danza folklórica mejicana, y otras actividades.

Del 29 de Junio al 4 de Julio de 1991 se celebrará en Asis (Italia) la XV reunión. La información de que disponemos en estos momentos es:

Lenguas de trabajo: *Inglesa*

Lenguas en que se pueden presentar comunicaciones: *Española, Francesa, Alemana.*

Inscripción 460 $ U.S.A. por persona. Incluye estancia y comidas.

Inscripción: Enviar ya 100 $ a la cuenta 15433 / 58 Cassa Risparmio Perugia - Agenzia 2, Consul's Convention Bureau XV PME.

Programa:

Cuatro sesiones plenarias y un panel plenario, éste dedicado a “Ordenadores y la psicología de la educación matemática”.

Grupos de debate: Su objeto es el intercambio de ideas entre los participantes. Se proponen los siguientes:

—Razón y proporción.

—Geometría.

—Pensamiento matemático avanzado.

—Psicología de los profesores de matemáticas.

—Psicología social de la educación matemática.

—Metodología de la investigación en matemáticas.

—Representaciones.

—Investigación en el aula.

—Procesos algebraicos.

El Comité local de organización esta coordinado por Paolo Boero de la Universidad de Génova, Via L.B. Alberti 4, C.P. 16132 GÉNOVA (ITALIA). Donde se puede solicitar más información.

Reunión del Grupo T.M.E.

Junto al Congreso del P.M.E. se suelen celebrar las reuniones del Grupo Internacional de Estudio sobre la Teoría de la Educación Matemática. La última ha sido la cuarta, celebrada del 3 al 7 de Julio pasado en Oaxtepec.

Este grupo de trabajo, constituido por el profesor Steiner en el V Congreso Internacional de Educación Matemática responde al deseo y necesidad de un grupo de investigadores de hacer posible la creación de una Teoría de la Educación Matemática, específica, de modo que el desarrollo de la Didáctica no se reduzca al de aplicaciones de los resultados teóricos de otras disciplinas cercanas.

En el programa de trabajo del grupo en su constitución se indica que la Teoría de la Educación Matemática se ocupa del estudio de la situación actual y perspectivas de la Educación Matemática como campo académico y dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica. Se propusieron tres temas de estudio interrelaciondos:

1.-Identificación y formulación de los problemas básicos en la orientación, fundamento, metodología y organización de la Educación Matemática como disciplina.

2.-Desarrollo de una aproximación comprensiva para la Educación Matemática, que debe ser vista en su totalidad como un sistema interactivo, comprendiendo, como se ha indicado, investigación, desarrollo y práctica.

3.-Investigación sobre la propia Educación Matemática como disciplina que proporcione información sobre el estado actual de la misma y sus necesidades, teniendo en cuenta las diferencias nacionales y regionales y que contribuya al desarrollo de un metaconocimiento y una actitud reflexiva como base de desarrollo futuro de los programas del TME.

La reunión de este año ha contado con un número más reducido de participantes de lo que es habitual, aunque de por sí este grupo es minoritario. Sin duda, ello ha sido debido a la separación entre las fechas de los dos congresos, que hacía necesaria una estancia en México de 20 días en total, y a la distancia geográfica, ya que una gran parte de investigadores actuales interesados en los aspectos teóricos son europeos. Aunque se han presentado trabajos de índole diversa, los temas propuestos previamente por el profesor Steiner para discusión en esta reunión han sido los siguientes:

—Relaciones entre la orientación teórica y la metodología de investigación empírica en Educación Matemática.

—El papel de los enfoques holístico y sistémico en la Educación Matemática.

Por último hay que destacar que, por iniciativa del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, se ha dedicado una jornada completa al estudio comparativo y determinación de las componentes necesarias de los programas de formación de investigadores en Educación Matemática. Se han examinado programas de formación de Universidades de Francia, Canadá, Australia, Alemania, México, Alemania y España. Este trabajo será continuado con la elaboración de un Informe, a partir de una encuesta internacional que será realizada conjuntamente por varios de los miembros del grupo.

La próxima reunión de este grupo tendrá lugar en Italia, al finalizar el PME. Los temas propuestos para discusión son los siguientes:

I. El papel de las Metáforas y Metonimias en Matemáticas, Educación Matemática y la clase de Matemáticas.

II. Interacción social y desarrollo del conocimiento.

Además se continuará la discusión sobre los programas de maestría y doctorado, iniciada en la reunión de este año. Los interesados en asistir a esta reunión pueden escribir a la siguiente dirección:

Prof. Dr. H. G. Steiner
Institütfür Didaktik der Mathematik
Universität Bielefeld
Posttach 8640
4800 Bielefeld 1
República Federal de Alemania

ESTRUCTURA

Día 20:

—ENTREGA DOCUMENTACIÓN
—INAUGURACIÓN
—MESA REDONDA: **Las matemáticas hoy**
Ponentes: *Carlos Conde*
Capi Corrales
Miguel Guzmán
Claudi Alsina
Coordina: *Francesc Michavila*
—SESIONES DE TRABAJO

Días 21 y 22:

—VISITA EXPOSICIONES
—SESIONES DE TRABAJO
—COMUNICACIONES LIBRES

Día 23:

—CONFERENCIA: **Tecnología en educación matemática**
Cristina Keitel
—CLAUSURA
—COMIDA

Las SESIONES se dedicarán al desarrollo de los grupos de trabajo cuya temática es:

Las matemáticas y otras artes:
—Coordina Grupo Cero.
—Gestiona J. Gea.
La evaluación en matemáticas:
—Coordina L. Rico.
—Gestiona R. Roig.
Los recursos:
—Coordinan A. Salazar, M. Coriat.
—Gestiona F. García Alcaine.
La coeducación en matemáticas:
—Coordinan C. Corrales, I. Callejo.
—Gestionan M. Irene, M. Mediavilla.
La formación del profesorado de matemáticas:
—Coordinan J. Colera y J. Pérez.
—Gestiona Ch. Nomdedeu.
La astronomía como recurso en la clase:
—Coordinan A. Ten y M. Fernández.
—Gestiona M. Canseco.
La historia de las Matemáticas en la clase:
—Coordina M. Martínez.
—Gestiona V. Agustí.
Las matemáticas y otras ciencias:
—Coordina C. Azcárate.
—Gestiona J. Batalla.
Resolución de problemas:
—Coordina R. Pérez y L. Puig.
—Gestiona I. García i Barceló.
Materiales Curriculares:
—Coordina Mª J. Luelmo y S. Gutiérrez.
—Gestiona O. Galindo.
Popularización:
—Coordinan J. Romero y S. Romero.
—Gestiona J. Ibañez.
La didáctica de las Matemáticas en la Universidad:
—Coordinan R. Pérez y F. Villarrolla
—Gestiona F. Martínez.
Las matemáticas en primaria:
—Coordinan A. Jaime y A. Gutiérrez.
—Gestionan C. Lórenz, I. Pérez y M. Alcalde.
Las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas:
—Coordinan L. Balbuena. M de Armas y J. Quevedo.
—Gestionan Ch. Nomdedeu.

Juegos:
—Coordinan J. A. Rupérez y M. García Deniz.
—Gestiona I. García i Barceló.

El fin del plazo de comunicaciones libres es el 30 enero de 1990.

EXPOSICIONES PREVISTAS:
—Horizontes matemáticos.
—Aplicación de Horizontes matemáticos
—Simetrías.
—Vila-Nova de les ciencies divertides.
—Astronomía.
—Cuerpos Geométricos.
—Materiales matemáticos.
—Fotografies matemátiques.
—Anaglifos.
—Recursos didácticos matemáticos.
—Editoriales.
—Libros Antiguos.
—Feria Alternativa.
—Kiosco Filatélico.
—El espacio.

Inscripción

Enviar antes del 20 de febrero el boletín de inscripción a Sociedad Castellonenca de Matemáticas. Apartado 607. Castellón. Junto al boletín debeis enviar un talón a nombre de "J.A.E.M. S.C.M." o el reguardo de la transferencia a la cuenta 3300009182 de la C.A.M.P. Castelló.

La cuota de inscripción es de 5.000 ptas. para los asociados a la Federación y de 8.500 ptas. para el resto.

Junto a la confirmación de inscripción recibiras un bono descuento de RENFE.

V. J.A.E.M.

Boletín de inscripción

Apellidos: ....

Nombre: ....

Dirección: ....

Ciudad: .... C.P.: ....

Teléfono: .... Centro de trabajo: ....

Nivel: ☐ Primaria ☐ Secundaria ☐ Universidad

Pertenece a alguna sociedad Federada: Cuál: ....

ACTIVIDAD A LA QUE DESEA PARTICIPAR: 1.-
(señalar tres por orden de preferencia) 2.-
3.-

V Jornadas Andaluzas de Educación Matemática "Thales". Granada 1991

"Recursos para el aula de matemáticas y demanda social en educación matemática"

1er Anuncio

Lugar de celebración: **Granada**

Locales: Facultad de Ciencias, I.B. "Padre Manjón"

Fecha: **11, 12 y 13 de Septiembre de 1991**

Actividades:

- —Conferencias: tres a cargo de profesores invitados.
- —Mesas Redondas: una con agentes sociales (empresarios, sindicatos, ONCE ...).
- —Exposición de materiales y recursos: a cargo de grupos de trabajo, casas comerciales, ...
- —Talleres: sobre un tema monográfico y con un responsable del mismo. Deberán presentar los interesados un resumen explicativo, así como indicarnos sus necesidades de espacio y medios.
- —Comunicaciones: antes del 30 de Mayo de 1991 deberán presentar el texto explicativo de la comunicación con una extensión máxima de cuatro folios por una cara. En su momento deberán indicar a la organización el tiempo necesario de exposición y solicitar los medios adecuados.

Número previsto de asistentes: 400.

Cuota de inscripción:

Socios de la SAEM Thales: 4.000 ptas.

No socios: 10.000 ptas.

Alojamiento: previsto en Colegios Mayores y Hoteles.

Información: SAEM "Thales". C/ Fábrica Vieja, 1. Apdo. 673 18030 - Granada

FIRST ANNOUNCEMENT

ICTMA 5

Teaching Mathematics by Applications

5th INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICAL MODELLING AND APPLICATIONS

NOORDWIJKERHOUT
THE NETHERLANDS
SEPTEMBER 9 - 13, 1991

OW&OC, UTRECHT UNIVERSITY
CENTER FOR SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION
FACULTY OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

The second announcement of ICTMA 5 is estimated to appear late 1990. If you are interested in receiving a copy, please fill in the adjacent slip and send it to:

Jan de Lange, chairman
ICTMA 5
OW&OC
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht
The Netherlands

Telephone 31 30 611611
Fax 31 30 660430
Email ictma5@owoc.ruu.nl

V Campeonato Internacional de Juegos Matemáticos y Lógicos

Florencio Villarroya

Organizado por la FEDERACION FRANCESA DE JUEGOS MATEMATICOS

Este curso 1990-91 se va a celebrar la quinta edición de este campeonato, que tiene varias categorías y varias fases. Las categorías son:

C1: Escolares de 6º y 5º (en Francia), equivalente a 6º y 7º de E.G.B. en España, y sus equivalentes en otros países.
C2: Escolares de 4º y 3º (en Francia), equivalente a 8º de E.G.B. y 1º de B.U.P. en España, y sus equivalentes en otros países.
LY: Alumnos de 2º, 1º y Terminal (en Francia), equivalente a 2º, 3º y C.O.U. en España, y sus equivalentes en otros países.
GP: Público en general.
HC: Competidores de alto nivel.

Excepción hecha de C1, C2 y LY, los demás concursantes pueden elegir entre las categorías HC y GP. Unicamente, los finalistas de un campeonato anterior en la categoría GP y HC, o los "lugares de honor" de la categoría LY, están obligados a participar en HC.

Las fases son cuatro, una más que los años anteriores:

Primera fase: eliminatorias (individuales), o cuartos de final (para escolares): diciembre de 1990 y enero de 1991 (límite: 4/02/91).

Segunda fase: Semifinales regionales, se celebrarán el 16 de marzo de 1991.

Tercera fase: Finales regionales, serán el 25 de mayo de 1991.

Cuarta fase: FINAL INTERNACIONAL, los días 6 y 7 de septiembre de 1991, en PARIS.

Primera fase

Como en años anteriores, habrá dos vías para acceder a las semifinales:

Vía individual, a través de la prensa o Minitel (en Francia, claro). Son las pruebas eliminatorias. Se componen de ocho cuestiones comunes para todas las categorías. Los C1 tendrán que responder a las cuatro primeras de ellas, los C2 a las seis primeras, los LY y GP a todas las cuestiones. La novedad de este año es que los HC se clasifican automáticamente para las semifinales. El hecho de ser adherentes de la FFJM, les vale como inscripción y recibirán automáticamente la convocatoria.

En Francia, todos los martes por la mañana, de 10 h. 20 m. a 10 h. 30 m. en el canal de televisión FR3, el programa de Matemáticas TANGENTE, informa sobre estas cuestiones.

Los escolares pueden encontrar su boletín de respuesta en las revistas "Le Jeune Archimde" y "Okapi", de enero.

Los de institutos, en las revistas "Tangente" y "Phosphore".

Los de GP participan a través de Science & Vie, o de "JOUER".

Vía escolar en los colegios e institutos. Son los cuartos de final. Estos cuartos de final pueden ser abiertos o cerrados, los centros eligen.

Cerrados: En este caso, los enunciados son secretos hasta el día de celebración de estos cuartos de final.

Abiertos: Los enunciados son públicos y la búsqueda de las soluciones puede ser individual o colectiva. Los enseñantes son los que "corregirán" las pruebas de sus alumnos y determinarán así los que se califican para las semifinales, teniendo en cuenta tanto los resultados como las motivaciones (por qué no mantener el sistema de elección de representantes?).

En las dos vías, el 15% de los participantes en los cuartos de final de un centro se clasificará para las semifinales. Las listas de clasificados de cada centro las realiza el profesor del centro que asuma el papel de delegado del campeonato. Este profesor tendrá que inscribir a su centro tan pronto como pueda, para recibir la documentación correspondiente. Más adelante aparecen los problemas de los cuartos de final abiertos.

Los calificados para semifinales tendrán que pagar la cuota correspondiente, puesto que para participar en este Campeonato a partir de las semifinales, es obligatoria.

Segunda Fase:

Las semifinales regionales se desarrollarán en alrededor de 100 ciudades. Este año solo habrá un modo de clasificarse: obtener la plaza en su centro para las semifinales. En cada categoría se clasificarán el 15% (redondeo superior) de los participantes en la semifinal para la fase siguiente, es decir, la final regional.

Tercera Fase:

Doce finales regionales determinarán los clasificados para la final internacional. La cuota de plazas será también del 15%, pero además habrá clasificados "por puntos" para la gran final.

Cuarta Fase:

Los finalistas "internacionales", tendrán pagado su viaje y estancia en París. Como en todas las fases, las cuestiones serán comunes para todas las categorías, pero habrá que resolver más problemas a medida que la categoría sea superior.

Un total de 500.000 francos de premios, recompensarán, no solo a los finalistas internacionales, sino también a los finalistas regionales. Ofrecidos por los patrocinadores: Hewlett Packard, Hatier, Encyclopaedia Universalis, etc.

Por si algún lector desea participar estos son los

PROBLEMAS DE LOS CUARTOS DE FINAL:

1. El que pierde, dobla

Al que pierde dobla, una partida se desarrolla de la manera siguiente: cada jugador coloca delante de él un cierto número de fichas, que elige de acuerdo con sus medios. Después, los jugadores, sacan "al palo más corto", para determinar un perdedor. Cada vez, el perdedor debe de doblar las fichas que tienen sus dos contrincantes. La partida se acaba cuando el perdedor no puede ejecutar las órdenes. Durante esta partida, los tres jugadores han tenido, en un momento dado, respectivamente 8, 23 y 4 fichas.

¿Cuántas veces, como máximo, han sacado "el palo más corto" durante esta partida (antes y después del momento descrito)?

2. El pequeño astuto

El pequeño Astuto tiene más de 36 cajas, pero menos de 1991. Las apila en triángulo:

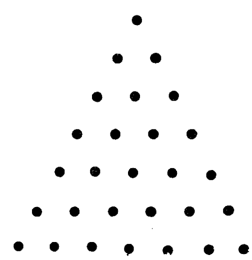


Figura 1

Luego, las mismas, en cuadrado

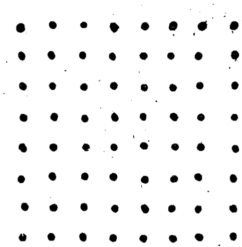


Figura 2

¿Cuántas cajas tiene?

3. Tomar la puerta

Mari Luz Foco ha construido un pasillo constituido únicamente por puertas. Ha querido confiarnos un plano.

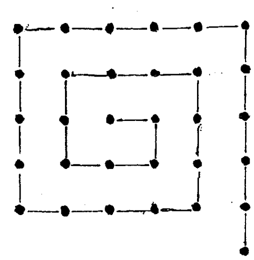


Figura 3

Haciendo girar ciertas puertas, alrededor de su eje, se quiere invertir el sentido de la espiral (una puerta puede abrirse hasta 180°).

¿Cuál es el número mínimo de puertas que hay que mover? Pintar de rojo la nueva posición

4. Banana split

Un día, 5 marineros y un mono arribaron a una isla desierta, y recogieron plátanos. Al caer la noche, un marinero se despertó, le dio un plátano al mono y escondió la mitad del resto de plátanos. Más tarde, un segundo marinero se despertó, le dio 2 plátanos al mono y escondió los 2/3 del resto de plátanos. Un poco más tarde, un tercer marinero dio 3 plátanos al mono y escondió los 3/4 del resto. El cuarto marinero dio 4 plátanos al mono, y escondió los 4/5 del resto. Finalmente, el último marinero, después de dar 5 plátanos al mono tragón, escondió 5/6 de los plátanos. A la mañana siguiente, los cinco marineros y el mono, se repartieron equitativamente el resto de los plátanos.

¿Cuántos plátanos (al menos) habían cogido?

5. Guerra de las galaxias

Una flota de la FXJM se compone siempre de naves dispuestas en cuadrados.

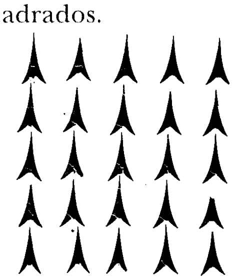


Figura 4

El general Black Gillor reúne las flotas A y B para formar una flota C. Ataca la Tierra y sufre cuantiosas pérdidas. Solo sobrevivió la última fila. Con las naves restantes, el general forma la flota D, que prefiere subdividir en dos flotas E y F. Entonces E y F pasan al ataque. De nuevo, únicamente las últimas filas de E y F se salvan de la masacre. Le quedan 23 naves.

¿Cuál era el número inicial de naves de Black Gillor?

6. La herencia está en el lago

Dos hermanos, Abel y Hernando, han heredado dos campos cuadrados cada uno, un lado de cada uno de los cuatro campos forma una de las orillas del Lago Hermes, lago con forma de cuadriltero. Las superficies heredadas por los dos hermanos son, naturalmente, rigurosamente idénticas.

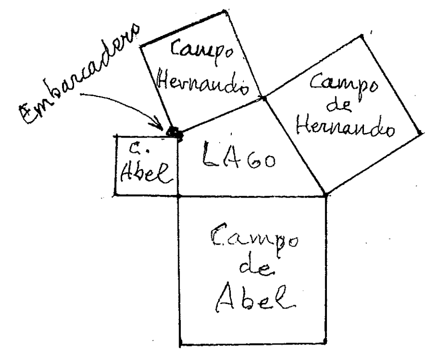


Figura 5

Durante su jogging alrededor del lago (que realiza a velocidad constante), Abel sale de su casa, llega al embarcadero en treinta segundos, pasa delante de la casa de Hernando 1'30" después de su partida, y termina el recorrido del lago en 4 minutos.

¿Cuál es, en áreas, la superficie del lago?

Hay que saber que las dimensiones de los campos son números enteros de decámetros, y que Abel corre a una velocidad comprendida entre los 15 y los 20 km/h.

7. Por doce

12 parejas juegan al tenis durante las vacaciones. Al final de ellas, uno de los jugadores, el Sr. Enrique Gil, hace el balance de los partidos. Constata que todos los demás jugadores han jugado un número diferente de partidas, que ninguno de los otros jugadores no ha jugado más de una vez con el mismo

¿Cuántos partidos ha jugado el Sr. Gil?.

8. El ascensor

Arístides vive en un edificio de más de 3 pisos, de menos de 25, sin sótano y con un único ascensor. Se supone que las idas y venidas son tales que el aparato, cuando está parado, tiene una posibilidad entre dos de estar en la planta baja, y probabilidades iguales de estar en el primer piso, en el segundo piso, en el tercer piso, etc. Cuando Arístides sale de su apartamento, y llama al ascensor, entonces éste, que estaba parado, recorre por término medio exactamente dos veces más distancia que cuando se le llama de la planta baja o del primero.

¿En qué piso vive Arístides?

La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, organizadora de la Olimpiada Matemática Nacional, para escolares de 8º de E.G.B. cuya fase final tendrá lugar este curso en Canarias, tiene interés en conectar esta fase con este Campeonato internacional, para que al menos los finalistas, o ganadores de la Olimpiada nuestra, puedan participar en la final internacional de París, en la Categoría C2.

Si otros profesores, quieren que sus **centros participen en el Campeonato Internacional** directamente, pueden hacerlo, para ello tienen que **dirigirse a la Federación Francesa de Juegos Matemáticos**, 31 Av. des Gobelins, 75013 PARIS. Teléfono 1-47075115. (Se puede hacer en español).

CONVOCATORIA PARA LA ELECCIÓN DE SECRETARIO GENERAL DE LA FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

De acuerdo con los Estatutos (Art. 14 y 15), Reglamento de Funcionamiento (Art. 9, 10 y 11) y Acta de la Junta de Gobierno de fecha 24 de marzo de 1990, de la F.E.S.P.M. se procede a abrir el plazo de presentación de candidaturas.

Las candidaturas deberán dirigirse al Presidente de la F.E.S.P.M.,

Gonzalo Sánchez Vázquez
S.A.E.M. "THALES"
APTDO. 1160
41080 SEVILLA

La candidatura debería remitirse antes del 28 de Febrero de 1.991.

La solicitud deberá de ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado del Secretario de su Sociedad, en el que conste que es socio activo.
b) Memoria en la que exponga su posible programa de actuación al frente de la Secretaría General, así como los contenidos de las tres vocalías previstas. (extensión máxima tres folios por una sola cara, a doble espacio).

El Secretario General Accidental
Florencio Villarroya Bullido

CONVOCATORIA PARA LA ELECCIÓN DE DIRECTOR DE LA REVISTA "SUMA" DE LA FEDERACIÓN ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

De acuerdo con los Estatutos, Reglamento de Funcionamiento (Art. 14, 15 y 16) y Acta de la Junta de Gobierno de fecha 24 de marzo de 1990, de la F.E.S.P.M. se procede a abrir el plazo de presentación de candidaturas.

Las candidaturas deberán dirigirse al Presidente de la F.E.S.P.M.,
Gonzalo Sánchez Vázquez
S.A.E.M. "THALES" APTDO. 1160
41080 SEVILLA

La candidatura deberá remitirse antes del 28 de febrero 1991.

La solicitud deberá de ir acompañada de la siguiente documentación:

a) Certificado del Secretario de su Sociedad, en el que conste que es socio activo.
b) Proyecto en el que exponga su línea editorial, las características técnicas de la revista y un presupuesto económico de ingresos y gastos.
c) Relación nominal del Consejo de Redacción que propone para la realización de la revista.

El Secretario General Accidental
Florencio Villarroya Bullido

CONVOCATORIA PARA LA ELECCION DE CINCO PUESTOS DEL CONSEJO EDITORIAL DE LA REVISTA "SUMA" DE LA FEDERACION ESPAÑOLA DE SOCIEDADES DE PROFESORES DE MATEMATICAS

De acuerdo con los Estatutos, Reglamento de Funcionamiento (Art. 17) y Acta de la Junta de Gobierno de fecha 24 de marzo de 1990, de la F.E.S.P.M. se procede a abrir el plazo de presentación de candidaturas, entre aquellas personas propuestas a la Junta de Gobierno de la F.E.S.P.M. por grupos de renovación, investigación, ... y otras instituciones relacionadas con la Educación Matemática, para formar parte del Consejo Editorial de la revista "SUMA".

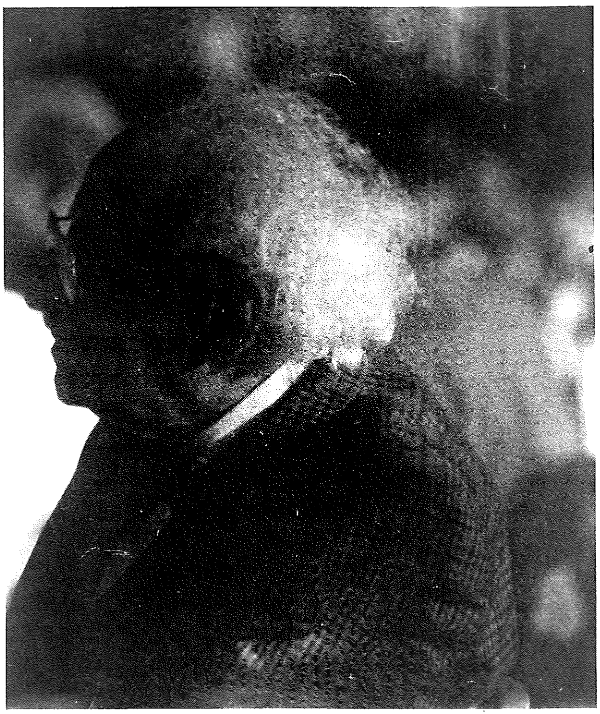
Las candidaturas deberán dirigirse al Presidente de la F.E.S.P.M.,
Gonzalo Sánchez Vázquez
S.A.E.M. "THALES" APTDO. 1160
41080 SEVILLA

La candidatura deberá remitirse antes del 28 de febrero de 1991.

Las candidaturas podrán ir acompañadas de cuanta documentación se estime pertinente por parte de quienes las presenten.

El Secretario General Accidental
Florencio Villarroya Bullido

Ha fallecido Hans Freudenthal



El Profesor Freudenthal, nacido en Alemania en 1905, pertenece a la generación de grandes educadores universitarios que han protagonizado los cambios realizados a partir de la II Guerra Mundial, conjugando una alta cualificación en la investigación matemática con una aportación comprometida y permanente en el campo de la educación matemática.

El profesor Freudenthal realizó sus estudios universitarios en la Universidad de Berlín, alcanzando el grado en 1930. Siguió estudios de Matemáticas, Física y Filosofía, siendo alumno de figuras tan destacadas como Köhler, Planck, Schrödinger, Hopf y Loewner.

A partir de 1930 se incorpora a la Universidad de Amsterdam, desde entonces su vinculación con los Países Bajos es permanente, abandonándose solo en aquellos cursos en los que actua como Profesor visitante en Universidades de otros países.

De 1930 a 1937 es Asistente de L. E. J. Brouwer, impulsor del Instuicionismo, y a partir de 1937 hasta 1946 Conservador del Instituto matemático de la Universidad de Amsterdam.

Desde 1946 es Catedrático de en la Universidad de Utrecht y hasta 1970 desempeña la dirección del mencionado Instituto Matemático. Entre 1970 y 1976 es Director del IOWO (Instituto para el desarrollo de la Educación Matemática) en Holanda. Durante estos años dedica parte de su actividad como Profesor Visitante en otros centros y Universidades: Paris (1956), (1959), Berkeley (1960-61) y State College Pennsylvania (1969). Fredericton N. B. Canada.

Al mismo tiempo se compromete en la dirección y gestión de la institución universitaria, siendo Secretario del Senado de la Universidad de Utrech, en el curso 62-63 y Rector de esa Universidad en el curso 63-64. Los cerca de 600 trabajos realizados por el Profesor Freudenthal, junto con las revistas y casas editoriales en las que se han publicado, son un índice de la inmensa producción científica que ha desarrollado desde el año 1931.

Su interés y dedicación más permanentes han estado dirigidas a los campos de la Topología, Grupos de Lie y Educación Matemática, aunque también ha realizado investigaciones en Análisis Clásico y Funcional, Geometría, Combinatoria, Probabilidad y Estadística, Lógica, Fundamentos, Filosofía e Historia de la Ciencia.

En el campo de la Educación Matemática es el creador de la Fenomenología Didáctica, teoría que, sobre la base del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos, obtiene implicaciones para su aprendizaje y permite establecer secuencias didácticas que contribuyen a la adquisición de esos conceptos.

La influencia del Profesor Freudenthal en el campo de la Educación

Matemática es considerable. No puede entenderse la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Europa durante los últimos 50 años sin tener en cuenta sus contribuciones y su participación.

Aunque ha desempeñado múltiples funciones conviene destacar que en 1947 fue Miembro Fundador de la CIEAEM e, igualmente, en 1976 Fundador del Grupo Internacional de Psicología Matemática (PME), desde 1955 es miembro del ICMI (International Comissión on Mathematical Instruction), siendo su Presidente de 1966 a 1970.

Sus funciones no se han limitado tampoco al campo de la Educación Matemática ya que ha sido Presidente del Coloquio Internacional sobre Geometría de Utrech (1959), Presidente de la Sociedad Holandesa de Lógica y Filosofía de las Ciencias Exactas (1963-65), Presidente de la Sección de Matemáticas del Consejo Académico Holandés (1969-73), entre otras.

También su participación como Editor o colaborador ha sido permanente, tanto en Educación Matemática, como en revistas prestigiosas de investigación matemática.

La figura del Profesor Freudenthal es señera de toda una época de investigación y desarrollo de las Ciencias Matemáticas en Europe, siendo su producción científica muy importante y su participación activa, creativa y permanente. Sin embargo, el mejor legado que nos transmite con su obra es la integración en una misma línea de trabajo personal de estudios e investigaciones sobre campos muy variados —y teóricamente alejados— de las matemáticas. Viendo la trayectoria y la producción del Profesor Freudenthal recordamos que no hay disciplinas matemáticas apartadas unas de otras, sino que los distintos campos de trabajo en matemáticas están fuertemente conectados y que entre los problemas prioritarios que hoy debe seguirse planteando la comunidad de matemáticas estan los relativos a la Educación Matemática.

El Profesor Freudenthal es Doctor Honoris Causa por las Universidades de Humboldt de Berlín, Erlangen, Libre de Bruselas, York de Toronto y Amsterdan. Su participación el el Programa de Doctorado de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, junto con su prestigioso valor científico avalan la concesión del Doctorado Honoris Causa por la Universidad de Granada

Hans Freudenthal
Fr.Schubertstr.44
3533 GW Utrecht
tel. (030) 930423

Professor Dr.Luis Rico
Escuela Univ. Professorado
Campus de Cartuja
Departamento Didactica de la
Matematica
Universidad de Granada

8 October 1990

Dear Colleague,

I am as surprised as I am delighted by the great honour which you have announced to me by your letter of 2 October. Granada will be, though the last, then certainly not the leat among the universities who have honoured me. I am pleased to accept this honour.

I think, it would be reasonable to delay the lecturing project to have it coincide with the investiture; but if you prefer an alternative solution I would accept it as well.

I am sending you a short scientific autobiography, which I have written at this opportunity. Part of it, yet elaborated on, could be part of my discourse at the ceremony. Moreover, I have made a few corrections in your "proposal" of which I am sending you a copy.

Hoping to hear from you, I am sending you my kind regards.

Hans Freudenthal

RESEÑAS

P. Holmes y M. Rouncefield (1989): FROM COOPERATION TO COORDINATIÓN (A FILE FOR COORDINATING SCHOOL STATISTICS TEACHING).
Centre for Statistical Education. Departament of Probability and Statistics. University of Sheffield.

Esta nueva publicación del Centro para la Enseñanza de la Estadística (Universidad de Sheffield, Englad) es fruto de un proyecto de investigación dirigido por P. Holmes y llevado a cabo durante 1988 y 1989, con objeto de producir un material de ayuda al Coordinador de Estadística, figura sugerida en el informe Cockcroft.

La enseñanza de la estadística, tradicional en la escuela inglesa, se ha reforzado especialmente a partir de las propuestas para el establecimiento del Curriculum Nacional en 1988, en el que, bajo el encabezamiento de "Data Handling" se dedica un total de 3 objetivos sobre 14 a la introducción de ideas de estadística y probabilidad. Incluyendo el trabajo posterior en estadística en el objetivo titulado "Using and aplying mathematics" la cuarta parte, aproximadamente del curriculum escolar de matemáticas para la enseñanza primaria y secundaria en este país dedicada a este tema.

Por otro lado, este tema es tratado en la escuela en otras materias, como geografía, ciencias, economía, etc. a diferentes niveles y por profesores con grado variable de experiencia y de conocimiento de la materia, lo que ocasiona la repetición del estudio de ciertos conceptos y del abandono de otros. Además, es en estas otras materias donde es más viable la realización de trabajos prácticos, en los que el alumno deba recoger y analizar sus propios datos, actividad que hoy se considera indispensable para la consecución de un correcto sentido del alcance y las limitaciones de la estadística.

La figura del coordinador de estadística dentro de la escuela, sería la de la persona responsable de coordinar la enseñanza y trabajo con técnicas estadísticas que se proporciona el alumno, a lo largo de su escolaridad, en las diferentes asignaturas. Asimismo se responsabilizaría de la formación de los profesores que los necesitasen en el tema y de la creación de un centro de recursos compartido en la escuela.

El material producido por P. Holmes y M. Rouncenfield está concebido, como ayuda a los posibles coordinadores, tanto en la iniciación y organización de su trabajo, como en la organización de cursos para lo profesores que coordinan. Asimismo, contiene un análisis detallado de las implicaciones curriculares de los contenidos de estadística en el Curriculum Nacional. Entre los apéndices destacamos una lista de recursos (bibliográficos y de software) para la enseñanza y una serie de material fotocopiable y de transparencias, que pueden ser empleados directamente en cursos dirigidos a profesores.

M. Carmen Batanero Bernabeu
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Mª Luz Callejo de la Vega
LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN UN CLUB MATEMÁTICO
Colección de Apuntes I.E.P.S. nº 53. Editorial Narces.

Este nuevo "Apuntes I.E.P.S"., cuarto de la colección dedicado a las matemáticas, se centra en el núcleo fundamental de la actividad matemática, la resolución de problemas. Está dividido en dos partes, un planteamiento teórico y el relato de una experiencia.

La parte teórica con el título: "La resolución de problemas: un nuevo enfoque en el aprendizaje de la matemática", analiza el lugar que ocupa este tema en las nuevas corrientes y tendencias de las matemáticas. Se plantean las distintas tendencias de la corriente "resolución de problemas", las actitudes y los métodos en la resolución de problemas, el pensamiento lateral como otra forma de razonamiento, las etapas existentes en la resolución de problemas, así como el entrenamiento en esta tarea. Completa este análisis un anexo con tres fichas sobre la búsqueda de alternativas y nuevos enfoques a una situación, pautas para la resolución de problemas y pautas para el trabajo en grupo; una hoja con la resolución de un problema (resuelto en el club matemático I.E.P.S.); y un cuestionario donde se nos propone reflexionar sobre nuestra propia manera de pensar.

La experiencia plantea y justifica la existencia de actividades matemáticas llevadas a cabo fuera del aula. Con ellas se pretende brindar a los estudiantes la educación matemática que no suele conseguirse con la enseñanza formal de la misma. Dentro de toda la posible gama de actividades fuera del aula se centra esta experiencia de los clubs matemáticos y en particular en el CLUB MATEMÁTICO I.E.P.S., promovido y coordinado por la autora de Apuntes, y dirigido a alumnos de enseñanzas medias.

En el relato de la Experiencia se muestran distintas actividades desarrolladas en el club así como los objetivos que se pretendía conseguir con las mismas. Tiene lugar destacado entre las actividades, "el número pi y las distintas formas de aproximación a lo largo de la historia". (Anexo II).

Por último, la autora nos brinda una selección comentada de bibliografía en castellano y la referencia de algunas obras de interés, sin traducción española.

Mª Teresa Lebrón
S.A.E.M. "Thales"

REVISTA.
EDUCACIÓN MATEMÁTICA

(Grupo Editorial Ibeoramericano)

Fruto de la inquietud por los problemas de la Educación Matemática en la comunidad mexicana es la aparición, a partir de 1989 de la revista que reseñamos. En el comité editorial y panel de colaboradores nacionales se encuentran miembros destacados de las diversas universidades mexicanas. Asociación nacional de Profesores de Matemáticas, Centro de investigación y estudios avanzados (CINVESTAV), Secretaría de Educación Pública y otras instituciones. Asimismo, en su corta existencia, cuenta ya con artículos de autores como, Enma Castelnuovo, Luis Santaló, Miguel de Guzman, etc.

Esta revista considera para su publicación artículos relativos a temas de interés para la enseñanza de la Matemática en cualquiera de los niveles educativos, en las modalidades siguientes:

—Resultados o resúmenes de investigaciones en Educación Matemática, o bien, aplicaciones de dichas investigaciones a problemas concretos de la enseñanza.

—Descripción o propuesta de experiencias didácticas, materiales, recursos para el aula. En particular, las relativas a empleo de ordenadores.

—Exposición de carácter divulgativo de temas de Matemáticas o resultados de la investigación en Matemáticas, dirigido a profesores.

Además del Editorial y la sección de artículos, cuenta con apartados de correo del lector, problemas y soluciones, reseñas bibliográficas, notas y noticias. Hay que destacar en este último el anuncio, con suficiente antelación de reuniones, congresos y otro tipo de actividades, tanto nacionales, como a nivel internacional.

En resumen, con esta revista se pone al alcance de toda la comunidad científica y docente de habla hispana un nuevo foro de discusión y de intercambio de ideas, que merece nuestra colaboración, bien mediante el envío de trabajos para su posible publicación o mediante subscripción. Los interesados en cualquiera de los dos aspectos pueden dirigirse a:

Educación Matemática
Río Ganges, nº 64
Col Cuauhtémoc. Apdo. Postal 5-076.
06500 México, D. F.
México.

M. Carmen Batanero Bernabeu
Dpto. de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Invierno'90

Nombre y Apellidos: ____________________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C.P.: __________

Provincia/País: ____________________ Tfno.: (   ) __________

CIF/NIF: ____________________ Centro de Trabajo __________

Firmado: ____________________ Fecha: __________

☐ Renovación Firma:

☐ Primera suscripción

☐ Ha sido antes suscriptor

Deseo suscribirme por 3 números, a partir del número __________ **inclusive,** al precio de: 3.000 ptas. particulares y 3.500 Centros. Europa $35 U.S.A. y $45 U.S.A. resto, cuyo importe haré efectivo mediante:

☐ Cheque bancario adjunto
☐ Domiciliación bancaria
☐ Giro Postal Nº________ Fecha __________
☐ Contra reembolso
☐ Transferencia a: c.c. 6719644, Caja Postal, Urb. Camino de Ronda, Granada.
ó: c.c. 007.01.289530, Caja General de Ahorros. Urb. Camino de Ronda, Granada

Suscripción

Los miembros de cualquiera de las Sociedades que componen la Federación reciben la Revista por el mero hecho de ser socios. Si no pertenece a ninguna Sociedad y desea recibir SUMA en su domicilio envía, debidamente cumplimentado, **el boletín adjunto a Revista SUMA, Apdo. de Correos 1017, 18080 Granada (España).** A esta dirección se pueden solicitar, también, **los números atrasados, al precio de 1200 ptas. más gastos de envío.** La suscripción le será renovada al finalizar el período inicial indicado si no nos comunica, por escrito, su deseo de causar baja.

Señores, les agradeceré que con cargo a mi cuenta corriente/libreta atiendan al recibo que anualmente les presentará la revista «SUMA» correspondiente al pago de mi suscripción a la citada revista.

(Sólo para el Estado Español)

Banco/Caja: ____________________

Agencia: ____________________ Nº C/C: __________

Calle: ____________________

Población: ____________________ C. Postal: __________

Provincia: ____________________

Titular: ____________________

Firmado: ____________________ Fecha: __________

Firma:

Domiciliacion Bancaria

Si decide suscribirse a SUMA, puede optar por cualquiera de las formas de pago que aparecen en el boletín de suscripción. No obstante nos permitimos sugerirles la domiciliación bancaria como forma más cómoda de hacer efectivo el importe de la suscripción. En ese caso rellene con letra clara los datos bancarios que aparecen en el boletín.

Agradeceríamos la reseña de dirección postal de Centro/Institución o persona interesada, para enviarle información sobre la presente publicación. Gracias.
Enviamos información de SUMA a:

Nombre y Apellidos: ____________________

C./Plz./Avda.: ____________________ C.P. __________

Población: ____________________ Provincia: __________

Este envío es por sugerencia de:

Nombre y apellidos: ____________________

Dirección: ____________________

Población: ____________________ C.P. __________

Provincia: ____________________ Un saludo

Apdo. 1017

18080 GRANADA

ESPAÑA

Recomendaciones

Las siguientes indicaciones tienen por objeto conseguir una paulatina normalización en el estilo de presentación de los textos. No deben ser consideradas como obstáculo o dificultades añadidas a las generalmente ya de por sí precarias condiciones en que se realizan los trabajos sino como metas a las que debemos ir tendiendo.

La propias indicaciones son susceptibles de alteración en función de los medios tecnológicos de impresión de que la redacción pueda ir disponiendo.

1. Indicaciones de carácter general

Todo texto presentado deber ser (física o conceptualmente) legible, coherente (en contenido y en notación) y manipulable —para propósitos de imprenta— por personas no versadas en el tema de que el texto trate.

Se aconseja explícitamente, a quienes envíen artículos, piensen que el lector medio no sabe tanto del tema como ellos mismos. Se puede tener consideración hacia el lector de muy diversas maneras; por ejemplo, cabe

a) redactar una introducción (no necesariamente limitada al primer párrafo) que sitúe informalmente el contenido del artículo en un contexto generalmente más conocido;

b) plantearse si el esquema «definición-teorema-demostración» no podría ser sustituido por otro más «amigable»;

c) atender al hecho incuestionable de que muchos lectores preferirán enfrentarse a textos claros y concisos antes que a ristras de fórmulas;

d) estructurar el artículo de modo que el hilo conductor no quede ahogado por divagaciones...

2. Indicaciones específicas

2.1. *Escritos*

Los escritos deberían presentarse por duplicado, en papel DIN-A4, escritos a máquina por una sola cara.

El título debe ser descriptivo y corto.

En hoja aparte, figurará un breve resumen en castellano y la traducción de éste al inglés (independientemente de la lengua utilizada en el artículo).

Es deseable que la longitud de los artículos no sobrepase las 15 páginas; sin embargo, este número jamás será un requisito de aceptación o de rechazo. (La redacción se reserva la posibilidad, en artículos más largos, de publicarlos en dos entregas de la revista si los autores muestran su acuerdo.) Se invita a los autores a ser escuetos, pero sin abusar de sobreentendidos.

Tanto la página del resumen como la primera página del artículo deben contener el nombre y apellidos y centro de trabajo de quienes lo han realizado.

Siempre deberá figurar una dirección completa a la que deba remitirse la correspondencia y, en su caso, pruebas de imprenta.

2.2. *Símbolos y unidades*

Todos los artículos deben ser coherentes en lo relativo a símbolos y a unidades. Si no son de uso común, deben aparecer adecuadamente definidos.

Los símbolos matemáticos pueden ser escritos a mano o a máquina y no deben surgir ambigüedades. Los símbolos poco usuales y las letras de un alfabeto como el griego deben ir anotadas al margen. Distíngase muy bien la letra O del número 0, la letra *l* del número 1 y de la prima, la letra *k* de la letra *kappa*, etc. Empléese una notación coherente para vectores (por ejemplo: negrita o indicación de esto con un subrayado sinuoso) o para numerar expresiones matemáticas (por ejemplo: números entre paréntesis a la derecha de la expresión).

2.3. *Referencias bibliográficas*

Toda referencia a obras previamente publicadas debe ir numerada entre corchetes ([ ]) a lo largo del texto. Al final de éste aparecerá la lista completa de citas en el mismo orden numérico.

Los artículos de revistas se citarán con la siguiente pauta:
Autor/a/es: Nombre (inicial/es) y apellido(s).
Título: (el que corresponda).
Revista: Nombre o abreviatura comúnmente utilizada para referirse a ella.
Número: (el que corresponda, subrayado).
Páginas: (número de la página inicial)-(número de la página final) ocupada(s) por el artículo.
Año: (cuatro cifras).

Los libros se citarán con la siguiente pauta:
Autor: ...
Título: ...
Editorial: ...
Lugar de edición: ...
Año de edición: ...

2.4. *Notas a pie de página*

Deben ir correlativamente numeradas con superíndices a lo largo del artículo.

2.5. *Listados de ordenador (programas, tablas, etc.)*

Se enviarán listados originales (evítense rigurosamente las fotocopias) que se reprografiarán para evitar errores. También se aceptarán negativos en blanco y negro de listados originales.

2.6. *Ilustraciones*

Aunque las ilustraciones interrumpirán el texto publicado, deben remitirse en hojas separadas del manuscrito con indicación de la colocación óptima. Los autores deben asegurar la calidad de los trazos, de los símbolos empleados y, en general, de todos los elementos de las ilustraciones teniendo en cuenta que éstas se someterán a reprografía directa en escala próxima a 1:2.

El número de ilustraciones no está limitado; se ruega eviten redundancias en el material gráfico.

2.7. *Fotografía en blanco y negro*

Sólo podrán publicarse fotografías remitidas con negativos. Si las fotografías requieren algún comentario, leyenda o símbolo especial, se numerarán y en folio aparte se indicará el contenido de tales adiciones.

2.8. Enviar a cualquiera de las personas que figuran en el Panel de Colaboradores o a

Revista *SUMA*
Apdo. 1017
18080 Granada.
ESPAÑA