Generador de volúmenes

T. Ortega, R. Coca, A. García,
C. Velasco, J. Benito,
L. Mayo, I. Martín y Mª L. Rebollo

Nos parece interesante dar a conocer este útil didáctico, entre otras razones, por su sencillez de manejo, por su eficacia y su bajo costo. Su construcción es muy sencilla y con él se pueden conseguir resultados extraordinarios.

1. Objetivos

En el estudio de volúmenes de revolución, los alumnos de Tercero de B.U.P. y C.O.U. se encuentran con serias dificultades. Una reflexión sobre las mismas nos ha llevado a la construcción de un aparato que llamamos generador de volúmenes. El fundamento consiste en girar una cartulina a cierta velocidad y así dar una sensación de volumen. Este utensilio es un recurso didáctico interesante para los citados cursos.

Indudablemente, la utilización del aparato será distinta en cada curso; en Tercero puede servir como introducción y en C.O.U. como una aplicación en Matemáticas I, y como una profundización en Matemáticas II. Los objetivos también serán distintos y, de forma general, podemos señalar los siguientes.

1. Relacionar el área plana con el volumen de revolución que genera al girar sobre un eje. Así, se sabrá asignar cada tramo de la función con la zona de volumen correspondiente.

2. Ver de forma inequívoca como se generan volúmenes de revolución muy sencillos: cilindros, conos, esferas,.... Debido a la asidua aparición de estas figuras en el cálculo volumétrico, es importante que se detecte con toda seguridad.

3. Obtención analítica de los volúmenes de estos cuerpos geométricos. Es interesante que el alumno compruebe la coincidencia de los resultados obtenidos con las fórmulas que deberían conocer desde E.G.B.

4. Cuando se trate de funciones definida a intervalos, obtención de volúmenes compuestos y delimitación de las regiones planas que los generan.

5. Influencia de cada una de las curvas en el volumen generado, cuando la región plana está delimitada por dos. Ver cómo en ciertas regiones el volumen estará generado por la primera función y en otras por la segunda.

6. Ver como la superposición de volúmenes no influye en la generación del mismo (el alfarero sólo da forma al jarrón con la curva de la mano que está más alejada del eje del torno).

7. Selección de la curva que determina el volumen y de la curva que determina el hueco. El alumno tiene que ver cómo el volumen de figuras de revolución huecas es una diferencia de volúmenes.

8. Como las abscisas de los puntos de intersección de las curvas y una de ellas con la simétrica de la otra respecto del eje de giro son los límites de integración, es interesantísimo ver estos puntos en la revolución.

2. Construcción

La figura 1 muestra una fotografía del generador de volúmenes, cuyos elementos constituyentes describimos a continuación para facilitar la construcción del mismo.

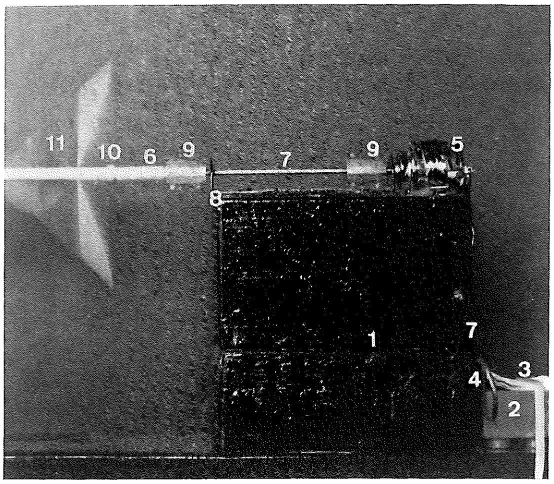

Figura 1

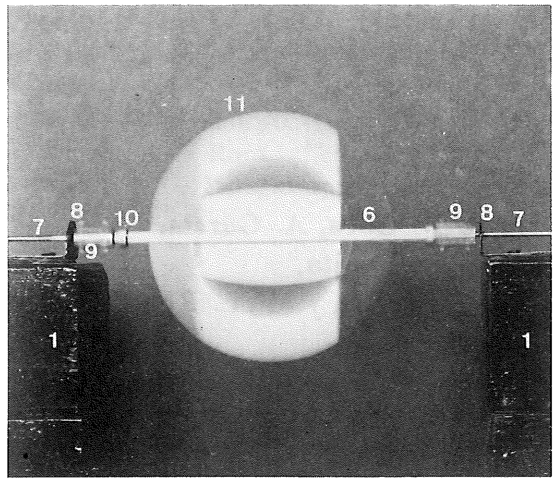

Figura 2

1. Soporte. Tablero de 0.5 x 0,5 m^2 y dos tacos de 10 x 10 x 15 cm.^{3} de madera donde se instalan los componentes.

2. Caja de baterías. Contiene dos pilas de 1,5 v. para el funcionamiento del motor.

3. Cuatro alcayatas y una goma. Constituyen la sujeción al soporte de la caja de baterías.

4. Interruptor y 50 cm. de cable. Forman la conexión entre las pilas y el motor.

5. Motor. Este es un juguete infatigable de 3 v. y está sujeto al armazón por dos abrazaderas y cuatro tirafondos.

6. Dos varillas. Constituyen el soporte de las cartulinas que generan los volúmenes, tienen una longitud de unos 17 cm.

7. Dos ejes. Facilitan el giro de las varillas y tienen una longitud de unos 10 cm. sujetos al armazón por cuatro tirafondos.

8. Dos soportes de eje. Los hemos hecho doblando dos chapas en forma de U. Se podrían haber utilizado rodamientos pero saldrían mucho más caro.

9. Tres regletas. Permiten unir con relativa facilidad los ejes a las varillas.

10. Dos abrazaderas. Situadas sobre las varillas, permiten aprisionar las cartulinas para evitar que se desplacen en el movimiento.

11. Cartulina. Aunque cueste un poco recordarla, conviene que sea suficientemente fuerte para que no se doble al girarla.

12. Pintura. Es aconsejable elegir los colores de manera adecuada para que los volúmenes generados destaquen el fondo del armazón. Nosotros hemos pintado el armazón de negro y las cartulinas de colores vivos. Hemos coloreado las cartulinas en bandas perpendiculares al eje de giro, para destacar las distintas regiones planas que generan el volumen y distinguir si es hueco o no y si lo genera una curva u otra.

3. Funciones consideradas

Hemos mencionado el término "cartulinas o figuras generadoras de volúmenes" y así denominaremos a las regiones del plano delimitadas por funciones, que, al girar alrededor de un eje contenido en el mismo plano, generan los volúmenes de revolución cuyo cálculo analítico queremos que el alumno aprenda.

Estas cartulinas son la base de nuestro estudio y vamos a fijarnos en las funciones que las definen, ya que sus características afectan al volumen que generan. Nosotros hemos confeccionado un total de veintiséis cartulinas, las primeras con muy sencillas y las siguientes van aumentando su complejidad. A título de ejemplo, mostramos una selección de las mismas.

—Cartulina A: $x=0$, $x=5$, $y=0$, $y=2$
—cartulina B: $x=4$, $y=x/2$, $y=-x/4$
—cartulina M: $y=x^2-2$, $y=1$

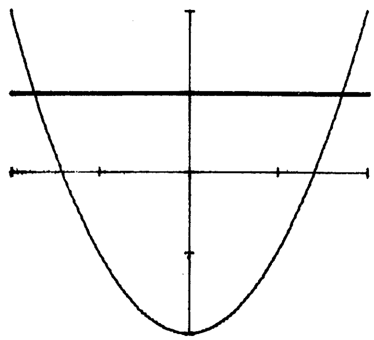

Figura 3

—cartulina Q: $x^2+(y-3)^2=1$

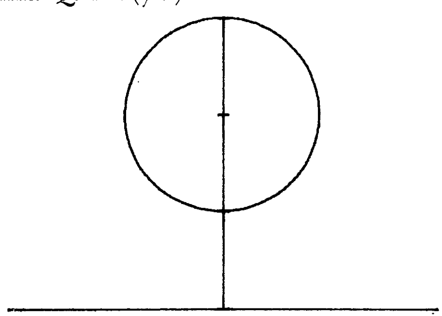

Figura 4

—cartulina S: $y=x$, $y=x^2-2$

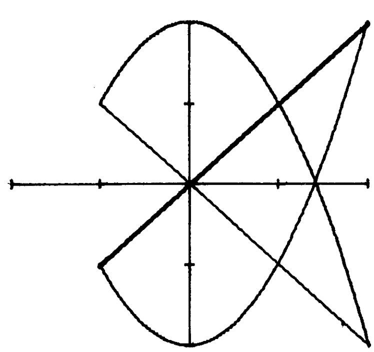

Figura 5

—cartulina U: $y=(9-x^2)/3$, $y=(x^2-9)\ (x^2-1)/8$

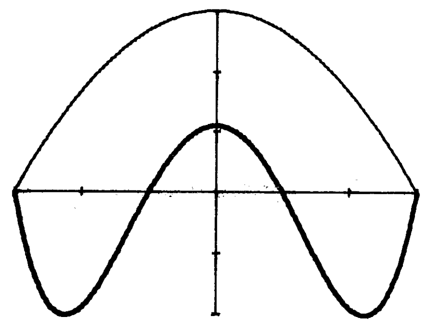

Figura 6

—cartulina W: $y=/x/$, $y=x^2-/2x/$

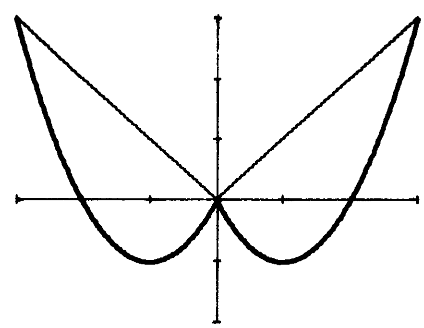

Figura 7

—cartulina Z: $y=-x^3/6 + x^2/2 - 7x/32 - 11/96$,
$y = x^3/6-x^2/2 + 1/3$.

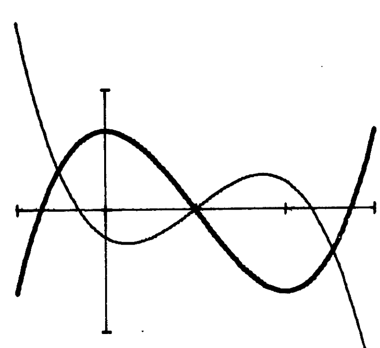

Figura 8

Para que esta presentación sea un poco más completa, vamos a hacer un análisis de la cartulina S. La figura 5 recoge las gráficas de las funciones que definen la cartulina y de sus simétricas, respecto del eje de giro, que formarían la cartulina girada W radiales.

Desde x=-1 (abscisa del primer punto de corte de la parábola con la recta) hasta x=0 (abscisa del punto de corte de la recta con el eje de giro) del volumen generado por la parábola debemos restar el volumen cónico generado por la recta. Desde x=0 hasta x=1 (abscisa del punto de corte de la parábola con la simétrica de la recta o de la recta con la simétrica de la parábola) el volumen que genera la parábola engloba al volumen cónico que genera la recta y por lo tanto sólo debemos considerar el primero. Desde x=1 hasta $x=\sqrt{2}$ (abscisa del punto de corte de la parábola y el eje de giro) el tronco de cono generado por la recta engloba al volumen generado por la parábola, vuelve a haber superposición y sólo debemos considerar el tronco de cono. Finalmente, desde $x=\sqrt{2}$ hasta x=2 (abscisa del segmento punto de corte de la parábola con la recta) del tronco de cono que genera la recta debemos restar el volumen generado por la parábola.

En resumen, el volumen total es la suma de los volúmenes generados por estas cuatro regiones planas y para que al girar la cartulina se distingan perfectamente, las pintamos de colores distintos que, además, contrasten con el fondo del soporte. Véase la figura 2 donde la cartulina aparece en movimiento.

4. Preparación de las cartulinas y experiencia didáctica

En la elaboración de las figuras generadoras de los volúmenes, hemos tenido presente que deben ser los suficientemente claras par que el alumno vea de forma palpable qué curvas delimitan las regiones planas que generan dicho volumen. Por esta razón, es muy importante que las cartulinas sean una copia de la realidad, lo más exacta posible.

Las gráficas de las curvas las hemos hecho en cartulina blanca, utilizando un ordenador Apple II-e con plotter (véanse las figuras 3, 4,...., 8), las hemos recortado con esmero y las hemos pintado con colores apropiados y el suficiente sosiego para repetir alguna que otra. Al recortarlas, hemos dejado una franja de una amplitud aproximadamente igual a la del eje de giro del generador formado por las varillas.

Otro aspecto que debemos tener en cuenta está relacionado con las dimensiones de las cartulinas, éstas deben tener, en una escala del mismo orden de magnitud numérica que la natural, un tamaño apropiado a la longitud de las varillas y a la altura de los tacos del soporte, para que las distintas regiones de la superficie que generan el volumen sean compensadas. Por lo tanto, debemos elegir funciones tales que las abscisas de sus puntos de corte sean números sençillos, se puedan determinar muy fácilmente y tengan máximos y mínimos de dimensiones apropiadas.

La figura 3, correspondiente a la cartulina M, está formada por la parábola de vértice (0,-2) y cortes con el eje de abscisas en $\pm\sqrt{2}$, y por la recta y=1.

La figura 4 (cartulina Q) está formada por la circunferencia de centro (0,3) y radio 1. Al girar sobre el eje de abscisas el círculo que delimita genera un toro.

La figura 6 (cartulina U) está compuesta por la parábola de vértice (0,3) que corta al eje de abscisas en (-3,0) y (3,0), y por la cuártica que corta al eje de abscisas en los dos puntos anteriores, en (-1,0) y en (1,0) y con un máximo en (0,9/8).

La figura 7 (cartulina W) está formada por las bisectrices de los dos primeros cuadrantes y de la función parabólica, que definida a trozos, es simétrica respecto del eje de ordenadas, corta al eje de abscisas en (-2,0), (0,0) y (2,0), y tiene mínimos en los puntos (-1,1) y (1,-1).

La figura 8 (cartulina Z) corresponde a dos cúbicas que cortan al eje de abscisas en el punto (0,1). Esta circunstancia facilita la búsqueda de los otros dos puntos de corte de cada una de ellas con el eje de abscisas y de los otros dos puntos que son comunes a ambas.

Finalmente, señalamos que hemos experimentado este útil didáctico con resultados extraordinarios. Los alumnos le reciben con agrado y hasta los menos aventajados se percatan de cómo se forman los volúmenes de revolución y de los límites de integración que debemos considerar en cada caso.