Sumando cuadrados: un ejemplo de visualización en matemáticas

Vicente Meavilla Seguí

A modo de introducción

Un buen diagrama suele ser de gran ayuda a la hora de *intuir* una determinada propiedad numérica, *descubrir* algún teorema geométrico, *comprender* cierta identidad algebráica o *resolver* un problema.

La historia de la Matemática nos proporciona abundante material para apoyar esta tesis.

En este artículo presentamos un ejemplo contenido en el libro *La llave de las Matemáticas,* escrito en el siglo XVII por el autor chino Du Zhigeng.

Jugando con torres de cubos

La figura 1 representa tres torres iguales compuestas por cubos idénticos.

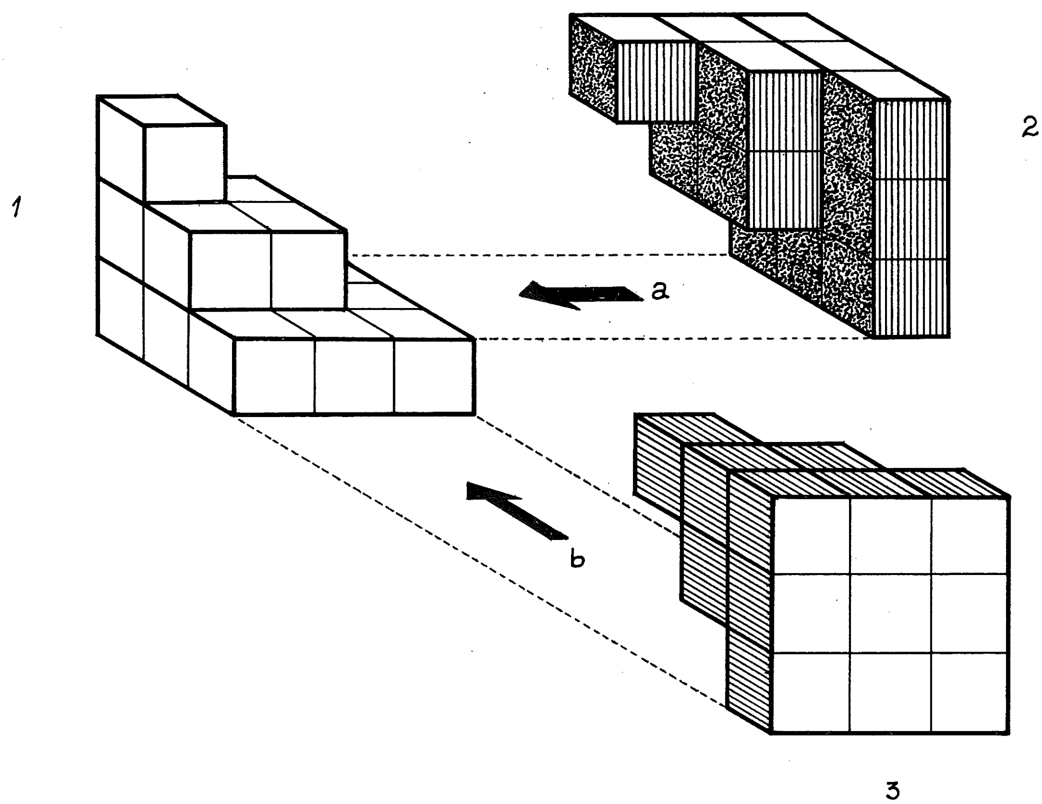

Figura 1

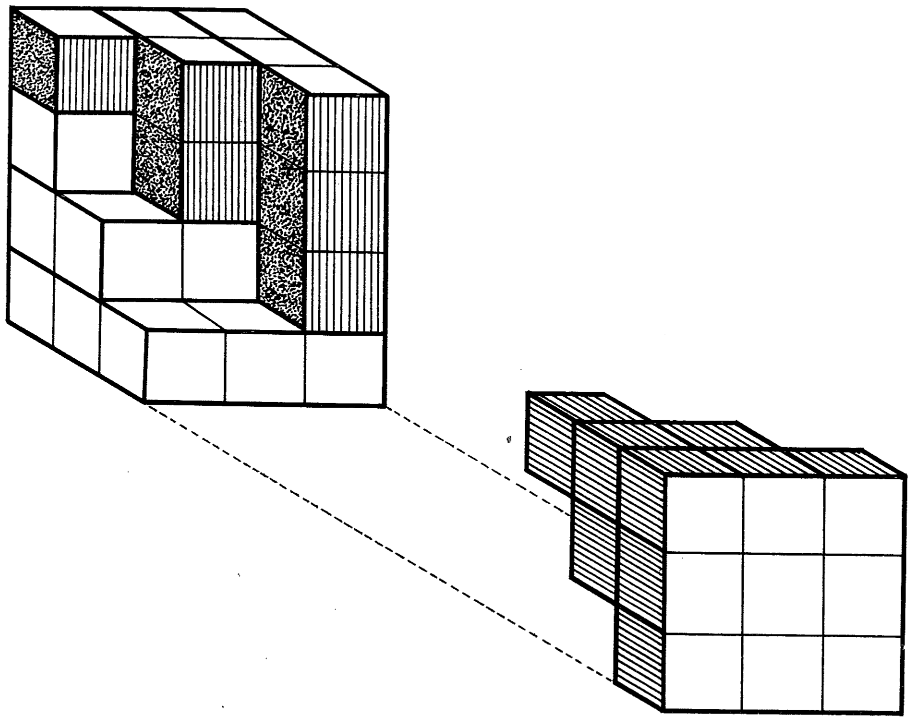

Figura 2

¿Cuántos cubos hay en cada torre?

Fijémonos en la torre 1.

En la capa superior hay *un* cubo (1^2), en la capa media *cuatro* (2^2) y en la inferior *nueve* (3^2).

Dicho en otras palabras:

Cada torre es un modelo tridimensional de la suma de los tres primeros números cuadrados.

Si desplazamos la torre 2 —según el sentido de la flecha *a*— hasta que se acople con la torre 1 y dejamos la pila 3 inmóvil, obtendremos una distribución de cubos como la que se representa en la figura 2.

Notemos que el sólido de la izquierda está compuesto por $2(1^2 + 2^2 + 3^2)$ cubos.

Si trasladamos la torre 3 —siguiendo la flecha *b*— hasta que se acople con el sólido que acabamos de describir, habremos materializado un bloque como el de la figura 3 compuesto por $3(1^2 + 2^2 + 3^2)$ cubos.

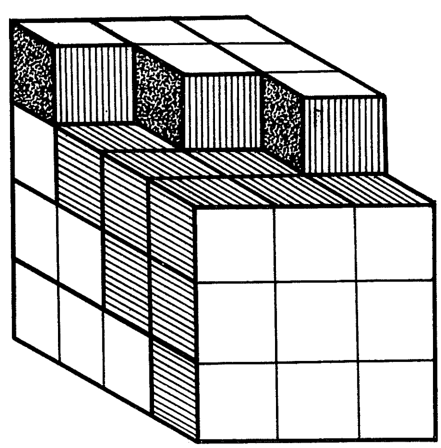

Figura 3

Resulta claro que, contando de abajo hacia arriba, las tres primeras capas de este bloque son paralelepídeos y la última no.

Si embargo, si dividimos la capa superior en dos partes iguales (ver figura 4) y las acoplamos de modo comveniente, podemos transformar el bloque de la figura 3 en un paralelepídeo de dimensiones 3,4 y 3+(1/2) (ver figura 5)

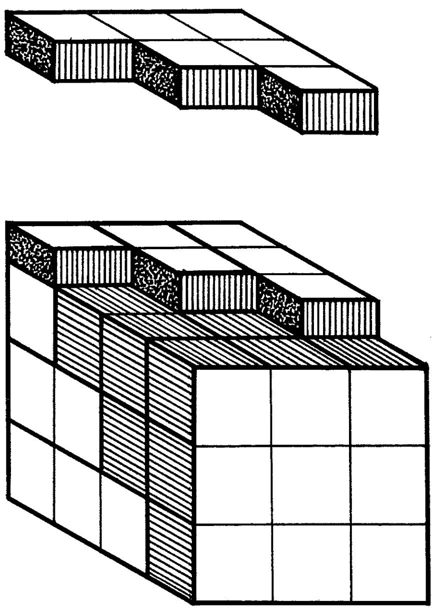

Figura 4

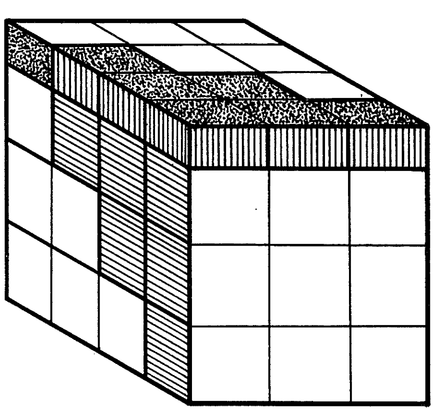

Figura 5

Con esto, resulta que:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2) = 3.4.(3 + (1/2)) \qquad [1]$$

Analicemos los tres factores que aparecen en el segundo miembro de la igualdad que acabamos de obtener.

—El primer factor (=3) coincide con el número de sumandos de $1^2 + 2^2 + 3^2$.

—El segundo (=4) es igual al primero más 1.

—El tercero [=3 + (1/2)] es igual al primero más 1/2.

Torres de cuatro plantas

Habiéndo llegado a este punto, vamos a jugar con tres torres de cuatro plantas como la que representamos en la figura 6.

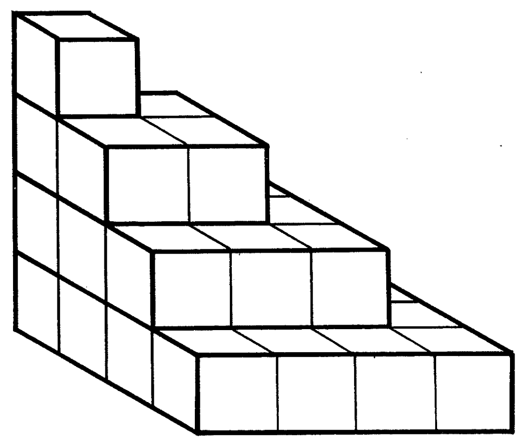

Figura 6

Si repetimos los mismos pasos que hemos dado en la sección anterior, obtendremos el resultado siguiente:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2) = 4.5.[4 + (1/2)] \qquad [2]$$

Una somera inspección de los factores que intervienen en el segundo miembro de la igualdad (2) nos conduce a descubrir que su ley de formación es idéntica a la que observamos en la igualdad (1).

En efecto:

—El primer factor (=4) coincide con el número de sumandos de $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.

—El segundo (=5) es igual al primero más 1.

—El tercero [=4 + (1/2)] es igual al primero más 1/2.

Una conjetura

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos no parece descabellado establecer la "igualdad" siguiente:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 +....+ n^2) = n(n+1)[n + (1/2)]$$

Por tanto, la suma de nos *n* primeros números cuadrados viene dada por:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 +....+ n^2 = (1/3)\ n\ (n+1)[n+(1/2)] =$$
$$= (1/3)\ n\ (n+1)[(2n+1)/2]=$$
$$= (1/6)\ n\ (n+1)(2n+1)$$

Dejamos al lector interesado la demostración —por inducción— de esta "fórmula" a la que nosotros hemos llegado por *vía geométrica.*

Viene de la pág. 42

ron una vida larga y pacífica. ¡Nada de revoluciones¡ Os veo a todos exaltados e iracundos..., mas recordad que la ira, como decía Séneca, es una locura momentánea, y por tanto,las consecuencias de aquello que la locura dicte serán irracionales y funestas.Pensad que la injusticia se comete de dos modos, o con la violencia o con el fraude: injuria fit duobos modis, aut vi, aut fraude. No hagamos valer nuestros santos derechos con las armas que se vale la injusticia y tomemos posesión legal de los escaños del Congreso... ¡Nombradme diputado y yo sabré defenderos¡

Estallaron frenéticos aplausos; aquel hombre era una adquisición, aquel hombre sabía hablar, aquel hombre se explicaba en una lengua exótica cuando venía el caso...

-¡Nombrémosle nuestro diputado¡- gritaron todos.

Un cero se puso a la derecha del uno, que desde aquel momento ya valía por diez; otro cero se les unió... y valía por ciento; después fueron todos colocándose en larga fila detrás del uno.

Figúrense los lectores el valor que en un santiamén adquirió mel uno: 1.000.000.000...

Entró, pues, triunfante en el Congreso derrotando al Gobierno en menos que canta un gallo. El 145.000 tomó las de Villadiego al ver que se le venía encima aquella nube de millones.

Muchos números primos se unieron al nuevo jefe, y a la sombra de éste comenzaron a hacer papel hasta los simples quebrados, es decir, las medianías. No falto 1/3 osado que lograra alcanzar la cartera de Hacienda, substituyendo al 63.804, y los números mixtos no les fueron a la zaga a los quebrados, pues siendo gentes despreocupadas que, como la romana del diablo, entraban con todos, ingresaron en el flamante partido.

Pero ¡ay¡ bien pronto el encumbrado uno comenzó a olvidarse de aquellos a quienes debía el ambicionado puesto que ocupaba, y acabó por no cumplir ni una sola de las promesas consignadas en su programa político.

Cundió el descontento entre los ceros: había marejada, protestas, murmuraciones..., todo lo cual supo aprovechar el Excelentísimo señor 145.000, caudillo de la oposición, atacando briosamente al jefe de Gobierno con discursos de irrebatible lógica.

El uno entonces, viéndose perdido, trató de anexionarse al 145.000, y al final de una de sus peroraciones, dijo:

-Mucho me extraña que S. S. me increpe tan duramente, pues en realidad nuestro credo político es en el fondo idéntico... Podríamos formar un gran partido, ya que en lo esencial estamos paralelos.

-¡No estamos para... lelos¡- gritó el 145.000.

Esta frase produjo tal hilaridad en la Asamblea, que hasta el presidente se retorcía de risa en su poltrona.

Fue aquella la última batalla que libró el uno... Convencidos los ceros de que, como siempre, se les había engañado, fueron pasándose poco a poco de la derecha a la izquierda, conmvirtiendo a su jefe, mediante una coma (voto de censura) en una insignificante fracción decimal: 0,00000000...1.

Desde entonces se estableció como un axioma de aquel país, y en otros muchos, la creencia de que no hay políticos sin-ceros.