Fórmulas electorales basadas en sucesiones de divisores[1]

Victoriano Ramírez González

0. Resumen

En este trabajo se realiza un estudio que conduce a la obtención de fórmulas electorales, basadas en sucesiones de divisores, que aseguran una representación proporcional a la hora de asignar los escaños en cada circunscripción.

Se ha encontrado una familia de fórmulas a la que pertenecen como casos particulares D'Hondt, St-Lagüe , Imperiali y el método Danés. De las propiedades matemáticas de las fórmulas obtenidas se deducen ventajas e inconvenientes que va a tener el uso de cada una de ellas.

En la búsqueda de las nuevas fórmulas se parte de un objetivo: **primar a los partidos más votados y conseguir una buena proporcionalidad.** El resultado de la aplicación de las fórmulas que consiguen este objetivo está comprendido entre los que se obtendrían aplicando las fórmulas de St-Lagüe y D'Hondt. Esta propiedad queda ilustrada con los resultados de aplicar varias de las fórmulas obtenidas a los datos de las Elecciones Generales de 1989 en España, que se muestran en el párrafo 3.

1. Introducción

El uso de una fórmula electoral es un procedimiento matemático que determina la asignación de escaños entre los partidos que concurren en una misma circunscripción.

En la literatura electoral se distinguen dos grupos de fórmulas: **mayoritarias y proporcionales.**

1) Las llamadas mayoritarias son las que asignan todos los escaños a la lista más votada. Unas de otras se diferencian en detalles como: mayoría absoluta o mayoría relativa, una o dos vueltas, etc. Algunos países en los que se usa, o se ha usado alguna fórmula mayoritaria son: Gran Bretaña, EEUU, Canadá, Nueva Zelanda, Francia, y Australia.

2) Las proporcionales tienen como objetivo el reparto de los escaños de cada circunscripción proporcionalmente a los votos que ha obtenido cada partido. Aunque el principio que inspira este tipo de fórmulas es bien sencillo, en la práctica surge el problema de aproximar cantidades que no son enteras por otras que si lo sean. Esta situación se deriva del cálculo de la proporción de escaños que corresponde a cada partido y no poder dividirse un escaño en fracciones.

El reparto de escaños, como problema de aproximación, admite diferentes soluciones en función de lo que se quiera ponderar. En ocasiones la ponderación es tal que la fórmula correspondiente no puede considerarse proporcional en sentido matemático. A pesar de todo lo anterior suelen denominarse fórmulas proporcionales a todas las que no son mayoritarias. Entre ellas se distinguen dos grupos según la filosofía subyacente:

a) Las basadas en cociente electoral y posterior redondeo por exceso de los restos mayores. Pertenecen a este grupo el Método Proporcional Puro, conocido también como Niemeyer [9], así como el Método de las Proporciones Relativas Iteradas [11]. Por ejemplo, al repartir cinco escaños entre tres partidos que han obtenido: 108 300 votos, 102 400 votos y 32 600 votos respectivamente , se obtienen las proporciones correspondientes, (243 500 votos / 5 escaños = 48700 votos por cada escaño), que son: 2.22 escaños, 2.11 escaños y 0.67 escaños respectivamente. A su vez

1. Este trabajo ha sido subvencionado por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía

estas cantidades se aproximan por 2, 2, y 1, que es la distribución definitiva de escaños.

b) Las basadas en una sucesión de divisores utilizan una sucesión creciente de números positivos $0 < d_1 < d_2 < d_3 < \ldots$. Los votos obtenidos por cada partido son divididos entre los n primeros términos de dicha sucesión, siendo n el número de escaños a repartir. Por ejemplo para los datos: 871, 256, 156, 154, 72, 52 y 39 votos, si tomamos como sucesión de divisores: 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34.. , redondeando a cantidades enteras, obtenemos:

DIV I SORES

Div \ Vot	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
	4	9	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	69	74	79
871	217	96	62	45	36	30	25	22	19	18	16	15	14	13	12	11
256	64	28	18	13	11	9	8	7	6	5	5	4	4	4	3	3
156	39	17	11	8	6	5	5	4	4	3	3	3	2	2	2	2
154	38	17	11	8	6	5	5	4	3	3	3	3	2	2	2	2
72	18	8	5	4	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
52	13	6	4	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
39	10	4	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

¿Cómo se efectúa la asignación de escaños a partir de esta tabla?. De las dieciseis cantidades mayores: diez correponden al partido 1, tres corresponden al partido 2, una corresponde al partido 3, una corresponde al partido 4, y otra al partido 5, por tanto la asignación de escaños es 10-3-1-1-1-0-0.

Como puede verse en [7], las sucesiones de divisores que usan las fómulas electorales conocidas son:

Fórmula	Divisores				
Imperiali	2,	3,	4,	5,	6,...
D'Hondt	1,	2,	3,	4,	5,...
St-Lagüe	1,	3,	5,	7,	9,...
St-Lagüe Mejorada	1.4	3,	5,	7,	9,...
Danés	1,	4,	7,	10,	13,...

si se completa una tabla como la anterior para cada una de estas fórmulas se obtienen los siguientes repartos:

asignación de escaños

	partido 1	partido 2	partido 3	partido 4	partido 5	partido 6	partido 7
FORMULA							
Imperiali	12	2	1	1	0	0	0
D'Hondt	11	3	1	1	0	0	0
St-L.Mej.	9	2	2	2	1	0	0
St-Lagüe	8	2	2	2	1	1	0
Danés	8	2	2	1	1	1	1
Propor. Exac.	8.71	2.56	1.56	1.54	0.72	0.52	0.39

Comentarios a la tabla de resultados

1) La aplicación de cada fórmula a los datos conduce a resultados muy dispares, hasta el punto de ser tachadas unas fórmulas por un defecto y otras por el contrario. Así, Imperiali y D'Hondt benefician mucho a los partidos más votados, por ejemplo, asignan al primer partido 12 u 11 escaños respectivamente, cuando solo le corresponden 8.71. Por el contrario St- Lagüe y el método Danés benefician a los partidos minoritarios, por ejemplo, al partido 6, que solo le corresponden 0.52 escaños ambos le asignan un escaño, mientras que al primer partido que le corresponden 8.71 le asignan 8, y al segundo que le corresponden 2.56 ambas fórmulas le asignan 2 . Peor aún el método Danés que a 0.39 escaños del último partido le asigna 1 escaño (salvo que exista una barrera mínima como por ejemplo el 3%).

2) St-Lagüe Mejorada puede ser aceptable en cuanto a la proporcionalidad de los resultados y la prima que otorga a los partidos más votados; sin embargo, desde el punto de vista matemático, la modificación del primer divisor de la sucesión de St-Lagüe es una arbitrariedad que conlleva una penalización de las minorías. En nuestro ejemplo ha sido justa la penalización del partido 6, en favor del partido 1, sin embargo no habría sido tan justa la penalización del partido 5, que ha estado a punto de perder el escaño. Obsérvese un posible defecto de esta fórmula, al segundo partido que le corresponden 2.56 escaños le asigna 2, y al cuarto que le corresponden 1.54 le asigna 2 también.

3) En el ejemplo se ha elegido una circunscripción de tamaño grande con objeto de resaltar, simul-

táneamente, las propiedades más importantes de varias fórmulas electorales. Sin embargo sería un error entender que el desvío de proporcionalidad que origina el uso de D'Hondt se produce por la existencia de circunscripciones grandes. Pues, son precisamente las de tamaño pequeño las que causan más desvío. Obsérvense los datos del ejemplo del apartado a), que corresponden a la circunscripción de **Valladolid** en las elecciones de 1989, cuyo reparto D'Hondt es 3-2-0, así, el primer partido al que corresponden 2.22 escaños recibió 3, (un 35% de prima), mientras que el tercero con 0.67 escaños recibió 0. Sin embargo obsérvese que en las Elecciones Andaluzas de Junio de 1990, apéndice II, D'Hondt desvía menos la proporcionalidad porque ahora las circunscripciones son más grandes.

4) El fuerte desvío de la proporcionalidad es la causa por la cual la fórmula **D'Hondt** fue **sustituida en los Países Escandinavos (1953) por Sainte-Lagüe,** ésta a su vez, lo fué por St-Lagüe Mejorada [12,pp170] y **en Alemania Federal (1985) por Niemeyer** [9, pp 295].

2. Propuesta de nuevas sucesiones de divisores

Definimos la sucesión de divisores de parámetro **A**, por:

$$(1)\qquad \mathbf{d_{n+1} = n + A}, \qquad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \qquad \mathbf{A > 0}$$

Por tanto, si tomamos valores diferentes de **A**, obtenemos sucesiones de divisores diferentes, y en definitiva, diferentes fórmulas.

Por otra parte, valores muy próximos de **A** conducen a divisores también muy próximos, que normalmente, darán resultados idénticos, o casi idénticos.

Veremos que los valores que interesan para **A** se encuentran entre 0.5 y 1, por lo que, aunque (1) representa una infinidad de fórmulas electorales diferentes, en la práctica sólo hay 7 u 8 valores de **A** que conduzcan a resultados sensiblemente diferentes.

En la tabla siguiente incluímos algunos valores, de **A**. Dos de los que citamos están fuera del intervalo [0.5, 1]; el motivo de considerarlos también es por corresponder a métodos electorales famosos.

Valor de **A**	Sucesión de divisores				
1/3	1/3,	4/3,	7/3,	10/3,	....
0.5	0.5,	1.5,	2.5,	3.5,	....
0.6	0.6,	1.6,	2.6,	3.6,	....
2/3	2/3,	5/3,	8/3,	11/3,	....
0.7	0.7,	1.7,	2.7,	3.7,	....
3/4	3/4,	7/4,	11/4,	15/4,	....
0.8	0.8,	1.8,	2.8,	3.8,	....
0.9	0.9,	1.9,	2.9,	3.9,	....
1	1,	2,	3,	4,	....
2	2,	3,	4,	5,	....

Comentarios a la Tabla

1) Para A=1 se obtienen los divisores del método D'Hondt

2) Para A=2 obtenemos los divisores: 2, 3, 4, 5, .. que corresponden al método Imperiali.

3) Para A=2/3 observamos el inconveniente de trabajar con números con infinitos decimales, por lo que parece aconsejable buscar un procedimiento de sustitución de estas sucesiones por otras equivalentes para las cuales esta problemática no aparezca. Por ejemplo, en este caso si multiplicamos por tres los términos de la sucesión se elimina el problema, quedando como divisores: 2, 5, 8, 11, ... , que conducen al mismo reparto.

4) Multiplicando por dos los divisores correspondientes a A=0.5, se obtienen los divisores del método de St-Lagüe.

5) Si damos a A el valor 1/3, y multiplicamos por tres la sucesión correspondiente se obtienen los divisores del Método danés.

Por tanto las fórmulas electorales: D'Hondt, St-Lagüe, Imperiali, y Danés son casos particulares de la familia de fórmulas que hemos definido anteriormente.

6) En general, si **A** = q/p , con p, q > 0, los divisores (1) son equivalentes a los que se obtienen como:

$$(2) \qquad d_{n+1} = pn + q \ , \qquad n = 0, 1, 2 \ldots.$$

y si p y q son enteros, los divisores anteriores son todos enteros. Así las sucesiones anteriores correspondientes a valores de A comprendidos entre 0.5 y 1, son equivalentes a:

A	p	q	Sucesión de divisores						
0.5	2	1	1,	3,	5,	7,	9,	11	...
0.6	5	3	3,	8,	13,	18,	23,	28	...
2/3	**3**	**2**	**2,**	**5,**	**8,**	**11,**	**14,**	**17**	**...**
0.7	10	7	7,	17,	27,	37,	47,	57	...
0.75	4	3	3,	7,	11,	15,	19,	23	...
0.8	5	4	4,	9,	14,	19,	24,	29	...
0.9	10	9	9,	19,	29,	39,	49,	59	...
1	1	1	1,	2,	3,	4,	5,	6	...

que usadas para distribuir los escaños, en cada circunscripción, en las Elecciones Generales de 1989 en España dan los repartos siguientes:

3. Resultados para las elecciones generales de 1989

Los resultados están en la tabla de abajo.

Comentarios a la tabla anterior.

1) Se han resaltado en negrilla tres columnas. La primera indica el reparto más justo en proporción a los votos obtenidos globalmente por cada partido; la última indica el reparto que ha dado la fórmula D'Hondt, y la del centro, el reparto correspondiente al valor 2/3 para **A** (posteriormente vamos a deducir que la fórmula correspondiente a este valor de **A** es una de las más adecuadas para efuectuar repartos proporcionales. En el apéndice I damos los resultados en cada provincia al aplicar esta fórmula).

2) El reparto correspondiente al valor 0.5 para **A** es el que produce mayor proporcionalidad en el sentido de que es mínima la suma de las diferencias, en valor absoluto, entre la proporción exacta de escaños que corresponde a cada partido y la que la fórmula le asigna. Pero ello no significa que esta fórmula sea la mejor; por ejemplo obsérvese el siguiente dato, que no es un hecho casual, la segunda fuerza recibe 10 escaños de prima, (107 escaños en lugar de 97), por tanto la primera fuerza, el P.S.O.E., debe recibir al menos 10 escaños de prima, o para mantener su proporción respecto de la primera, debe recibir unos 15 escaños más que proporcionalmente le corresponden y solo recibe 3.

3) Salvo pequeñas excepciones, (de fuerzas que concurren en pocas circunscripciones), las dos pri-

REPARTOS

PART.	VOTOS	PRO. DIPUT.	ST-Lg A=0.5	A=0.6	A=2/3	A=0.7	A=3/4	A=4/5	A=0.9	D'Hont A=1
PSOE	8088072	**148**	151	158	**162**	164	165	168	172	**176**
PP	5282877	**97**	107	108	**106**	105	106	105	104	**106**
IU	1851080	**34**	24	22	**22**	23	23	21	20	**17**
CDS	1617104	**29**	27	22	**21**	19	18	16	15	**14**
CIU	1030476	**19**	17	17	**17**	17	18	18	18	**18**
PNV	253769	**5**	5	5	**5**	5	5	5	5	**5**
HB	216822	**4**	6	6	**6**	6	6	6	5	**4**
PA	212807	**4**	3	2	**2**	2	2	2	2	**2**
UV	144655	**3**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
EA	136595	**2**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
EE	105217	**2**	2	2	**2**	2	2	2	2	**2**
PAR	71628	**1**	1	1	**1**	1	1	1	1	**1**
AIC	64989	**1**	2	2	**1**	1	1	1	1	**1**
ERC	84400	**1**	1	1	**1**	1	1	1	1	**0**

meras fuerzas son las únicas beneficiadas con cualquiera de las fórmulas anteriores.

4) La prima que recibe la segunda fuerza es independiente de la fórmula usada, mientras que la prima para la primera fuerza aumenta a medida que aumenta el valor de **A.**

5) La prima de las fuerzas beneficiadas es soportada, salvo pequeñas excepciones por la tercera y cuarta fuerza, IU y CDS, que con la fórmula D'Hondt pierden cada una el 50% de sus escaños en favor del PSOE y de PP.

Para clarificar la exposición posterior y conocer el origen del problema que nos ha llevado a la búsqueda de nuevas fórmulas electorales planteemos un ejemplo de reparto, que corresponde a datos reales, y cuya solución no es trivial. Concretamente, en la circunscripción de **Sevilla**, en las Elecciones Generales de 1989, al repartir los 12 escaños entre PSOE, PP,IU y PA proporcionalmente a los votos obtenidos se tiene:

PSOE	6.94	Escaños
PP	2.43	Escaños
IU	1.47	Escaños
PA	1.16	Escaños

dos partidos tienen que redondear por exceso y, por tanto resultar beneficiados. Los otros dos redondean por defecto. Parece evidente que el PSOE con 6.94 escaños debe redondear a 7 escaños, y por otro lado, que el PA con 1.16 escaños debe redondear a 1 escaño.

Sin embargo, no es tan evidente el redondeo entre el PP e IU; los restos correspondientes difieren sólo cuatro centésimas. Si, para minimizar el desvío de proporcionalidad redondeamos por exceso el de mayor resto, el de IU, tenemos que PP e IU obtienen 2 escaños cada uno, a pesar de que PP tiene un 70% más votos que IU. La otra aproximación posible es 3 escaños para el PP y 1 para IU. Lógicamente ninguna solución al problema anterior es completamente satisfactoria, pero para poder aceptar la última necesitamos establecer una fórmula que prime los restos en función de la parte entera a la que pertenezcan. Es decir, que restos iguales no tienen una influencia idéntica en el reparto, sino que aquel que acompañe a una parte entera mayor tiene más posibilidades de ser redondeado por exceso. (Con D'Hondt en Sevilla se obtuvo PSOE 8, PP 2, IU 1, PA 1; de ahí su no proporcionalidad y dudosa constitucionalidad.)

4. Fundamento matemático de la familia de sucesiones de divisores

Supongamos que la sucesión de divisores es $d_1, d_2, d_3, \ldots$.

Deseamos que esta sucesión conduzca a repartos proporcionales con una influencia creciente de la parte entera en los redondeos por exceso de los restos. Para ello supongamos que, establecida la proporción de diputados, R es el resto que acompaña a cierta parte entera, $0 \leq R < 1$. La parte entera puede valer cero, uno, dos, etc. En el primer caso, cuando la parte entera es cero, el partido correspondiente al que corresponden R escaños debe aspirar a conseguir un escaño, (a lo sumo), por tanto hay que analizar el comportamiento de R/d_1. Si la parte entera vale uno, es decir, la proporción de escaños para el partido correspondiente es 1+R, dicho partido debe aspirar a conseguir dos escaños en el mejor de los casos, por tanto hay que analizar el comportamiento de $(1+R)/d_2$, y así sucesivamente.

Luego vamos a estudiar el comportamiento de los siguientes cocientes:

$$\frac{R}{d_1}, \frac{1+R}{d_2}, \frac{2+R}{d_3}, \frac{3+R}{d_4}, \text{ etc. }, \ R \text{ dado }, R \in [0,1)$$

aquí estamos considernado que la proporción de escaños es R, 1+R, 2+R, etc. Operar con proporción de escaños o con votos es equivalente, como ya se ha dicho anteriormente.

Sería interesante que se verificase:

$$(3) \quad \frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2} \leq \frac{2+R}{d_3} \leq \frac{3+R}{d_4} \leq \text{ etc. } \forall R \in [0,1)$$

pues ello significaría que, en caso de igualdad de restos, primero redondea por exceso el que tenga mayor parte entera. En efecto, fijado R, se tiene que

$$\frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2}$$

y ello supone que un partido cuya proporción de escaños sea 1+R recibe el segundo escaño antes que reciba el primer escaño otro partido cuya proporción sea R. Análogamente para cualquier otra comparación.

Para que en (3) se verifique la primera desigualdad

$$(4) \quad \frac{R}{d_1} \leq \frac{1+R}{d_2} \qquad \forall R \in [0,1)$$

es necesario y suficiente que

$$d_2 \leq 2\, d_1$$

pues la constante $d_1/\, d_2$ tiene que ser mayor o igual que la función $R/(1+R)$ en [0,1], que es creciente, alcanzando el máximo valor, 1/2, en R=1.

Las restantes desigualdades se caracterizan de forma análoga por:

$$(5) \quad d_{n+1} \leq \frac{n+1}{n}\, d_n$$

Si, con objeto de no primar más aún a los partidos mayoritarios, en cada caso, tomamos el divisor máximo que verifica la desigualdad, se obtiene

$$d_2 = 2d_1 \;;\; d_3 = (3/2)d_2 = 3d_1 \;;\; d_4 = 4d_1 \;;\; \text{etc}$$

es decir los divisores serían: d_1, $2d_1$, $3d_1$, $4d_1$, ..., y por tanto, equivalentes a los del método D'Hondt.

Exigir que se cumplan las desigualdades (3) $\forall R \in [0,1)$ puede ser excesivo porque daría lugar a un desvío importante de la proporcionalidad cuando a la lista más votada corresponda una parte entera mucho mayor que a las demás, pues en tal caso aquella puede absorber los restos de todas las demás.

Para paliar este efecto podemos restringir las desigualdades (3) a un intervalo menor, es decir, $\forall R \in [0, \mathbf{A}\,]$ con $0 < \mathbf{A} < 1$. Vamos a probar que ello se consigue con la sucesión de divisores (1).

Consideraremos que a un determinado partido le corresponden x + R escaños, donde x es entero y R el resto. Por tanto debe conseguir al menos x escaños y posiblemente x + 1.

Si llamamos C(x) al cociente resultante de dividir

$$(7) \quad C(x) = \frac{x+R}{x+\mathbf{A}} \qquad 0 < \mathbf{A} < 1, \quad R > 0, \quad x \in [0, \infty)$$

Para valores de x iguales a 0, 1, 2, 3, .., C(x) es el cociente x+1, usando la sucesión de divisores (1), para un partido cuya proporción de escaños sea x+R, por tanto nos va a informar del grado de dificultad que tiene el correspondiente partido para obtener el escaño x+1, es decir redondear por exceso su proporción exacta de escaños. Analicémos C(x); su derivada es:

$$(8) \quad C'(x) = \frac{\mathbf{A} - R}{(x+\mathbf{A})^2} \Rightarrow C \text{ es } \begin{cases} \text{creciente,} & \text{si } R < \mathbf{A} \\ \text{decreciente,} & \text{si } R > \mathbf{A} \end{cases}$$

$$(9) \quad \text{Si } R = \mathbf{A} \quad C(x) = 1\,, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

$$(10) \quad \text{Si } R > \mathbf{A} \quad C(x) > 1\,, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

$$(11) \quad \text{Si } R < \mathbf{A} \quad C(x) < 1, \quad \forall x \in \{0,1,2,3,4,..\}$$

Comentarios

1) De (8) se deduce que las desigualdades (3) se verifican en el intervalo [0, A]. Cuando varios restos son idénticos, (o casi idénticos), pero menores que **A**, redondea por exceso, **primero, el correspondiente al partido con más votos.**

2) De (9), (10) y (11) se deduce que, con la sucesión de divisores (1), un partido al que corresponda una proporción de escaños con parte entera n y resto mayor que **A**, recibirá el n+1-ésimo escaño antes que otro, al que corresponda una proporción de escaños con parte entera m y resto menor que **A**, reciba el m+1-ésimo, y esto es independiente de los valores de n y m. Por tanto antes de que un resto menor que **A** redondee por exceso habrán redondeado por exceso todos los restos que sean mayores que **A**.

Por ejemplo si al repartir 10 escaños entre cuatro partidos, la proporción de escaños es:

$P_1 \to 4.7$ esc.	al menos, para todo	$P_1 \to 5$ esc.
$P_2 \to 2.8$ esc.	**A**, $0.3<\mathbf{A}<0.7$	$P_2 \to 3$ esc.
$P_3 \to 2.2$ esc.	el resultado con	$P_3 \to 2$ esc.
$P_4 \to 1.3$ esc.	la sucesión (1) es	$P_4 \to 1$ esc.

3) De (8) se deduce que, si a varios partidos corresponden restos iguales (o similares) y mayores que **A**, redondea por exceso **primero el partido con menor número de votos** (menor parte entera), y en último lugar el que tenga mayor número de votos, (aunque eso sí todos ellos lo harán antes que cualquier partido con resto menor que **A**).

4) Si **A** = 0.5 y , al establecer las proporciones, hay tantos restos mayores que 0.5 como cantidades es necesario redondear por exceso, todos los restos mayores que 0.5 redondean por exceso y los demás por defecto, coincidiendo los resultados en tal caso con el método **Proporcional Puro**. Esta situación se da con frecuencia, de ahí que el método de St-Lagüe, (**A** = 0.5), dé resultados muy similares al Proporcional Puro.

La alta proporcionalidad de la sucesión correspondiente al valor **A** = 0.5, no significa que la fórmula correspondiente sea la mejor. De hecho es una sucesión mala en el siguiente sentido: un partido al que correspondan algo más de 0.5 escaños la fórmula asignará 1 escaño con mucha probabilidad, mientras que otro que tenga resto mayor que 0.5 y parte entera grande (alguno de los más votados) es muy posible que la fórmula le redondee por defecto debido al decrecimiento de C(x) para restos mayores que **A**.

Por tanto el valor **A** = 0.5 no se debe utilizar porque beneficia a los partidos minoritarios a costa de los mayoritarios dando lugar a la **fragmentación Parlamentaria** y a la consiguiente **inestabilidad política**. Con mayor motivo no es recomendable el uso de un valor del parámetro menor que 0.5 (el método Danés corresponde a , **A** =1/3)

Ejemplos. Para ver con mayor claridad algunas de las conclusiones anteriores vamos a mostrar dos ejemplos y los correspondientes repartos para la fórmula de St-Lagüe, **A** =0.5=1/2, cuyos divisores son según (2): 1,3,5,7,..

Ejemplo 1. Escaños 12

Partido	Propor. ciones	Reparto
A	5.30	6
B	3.36	3
C	1.90	2
D	1.44	1

Ejemplo 2. Escaños 12

Partido	Propor. ciones	Reparto
A	5.73	5
B	3.65	4
C	1.57	2
D	1.05	1

En ambos ejemplos dos restos deben redondear por exceso. En el primero sólo hay un resto mayor que 0.5, correspondiente al partido C, luego es el primero en redondear por por exceso. Ahora, entre los restos menores que 0.5, a igualdad (o proximidad) de los mismos, redondea antes el que corresponda a mayor parte entera. En efecto, observemos que a pesar de ser 0.30 el menor resto ha conseguido redondear por exceso porque su parte entera es mayor que la correspondiente al resto 0.36 y mucho mayor que la correspondiente al resto 0.44. Es deseable la prima a los partidos más votados y por tanto el comportamiento de esta sucesión de divisores ante una situación como la del ejemplo 1, sin embargo no es deseable el comportamiento de la misma fórmula ante situaciones como la mostrada en el ejemplo 2.

En el ejemplo 2, tres restos son mayores que 0.5 y solo dos pueden redondear por exceso, para valores "similares", el que menos probabilidad tiene es el correspondiente a una parte entera mayor, y efectivamente así ocurre en este caso, pues el partido A se queda con 5 escaños teniendo un resto de 0.73, mientras que el C al que corresponden 1.57 pasa a 2.

Para disminuir la probabilidad de que aparezcan repartos como el mostrado en el ejemplo 2, basta con aumentar el valor de **A**. Es evidente que cuanto mayor sea **A**, menor será el número de restos mayores que **A**, y por tanto mayor la probabilidad de que todos tengan que redondear por exceso. La simetría de una distribución uniforme de los restos respecto del valor 0.5, hace que no sea necesario elevar mucho el valor de **A**, respecto de 0.5, para que la situación mostrada en el ejemplo 2 no se de, o se presente en muy rara ocasión.

Por ejemplo los valores 0.6, 2/3 ó 0.7 pueden ser suficientes. Por tanto las fórmulas correspondientes priman a las fuerzas más votadas y al mismo tiempo no desvíen excesivamente la proporcionalidad.

Por el contrario si nos acercamos mucho al valor

1, (D'Hondt), no se presentará jamás la situación mostrada en el ejemplo 2, pero el intervalo de influencia creciente de la parte entera en el redondeo del resto, puede llevar fácilmente a que la lista más votada absorba todos los restos de las proporciones correspondientes a las demás listas y redondee a **varios escaños más** de los que proporcionalmente le corresponde. Por ejemplo las proporciones para la distribución de los 16 escaños de Valencia, en las Elecciones Generales de 1989 fueron: PSOE 6.96 escaños, PP 4.21 escaños, UV 1.99 escaños, IU 1.72 escaños y CDS 1.12 escaños. El reparto con D'Hondt ha sido: 8, 4, 2, 1, 1 escaños respectivamente. En estos casos no se puede considerar que el reparto sea proporcional.

5) El intervalo [0.60, 0.75] para elegir valores de **A**, es decir sucesiones de divisores, es muy bueno, aunque ninguna sucesión de divisores usada hasta ahora se aproxima a las correspondientes a los valores de este intervalo. Por tanto **una fórmula recomendable es** la correspondiente al valor 2/3 para **A**, es decir **los divisores: 2,5,8...** etc. El reparto al que conduce para los datos de las Elecciones Generales de 1989 quedó resaltado en el centro de la tabla del párrafo 3.

Siguiendo razonamientos análogos a los anteriores se pueden establecer otras propiedades de las nuevas sucesiones de divisores. Antes de enunciarlas necesitamos las siguientes notaciones:

Supongamos que en una circunscripción concurren los partidos $P_1, \ldots, P_t$, que ya consideramos ordenados decreciendo según número de votos. Sea K el número de escaños a asignar; y notemos por $N(\mathbf{A},j)$ la suma de los escaños que asigna la fórmula electoral (1) a los partidos $P_1,\ldots,P_j$.

Propiedad 1.- Fijado $j \in \{1,2,\ldots,t\}$, se tiene

$$\mathbf{A} \leq \mathbf{A'} \Rightarrow N(\mathbf{A},j) \leq N(\mathbf{A'},j), \quad \mathbf{A}, \mathbf{A'} > 0$$

es decir, al aumentar **A**, si algún escaño cambia de partido, es porque ha pasado a pertenecer a uno que tiene más votos que el partido del que procede.

Propiedad 2.- Si P_2 ha obtenido menos votos que P_1, existe un valor $A_0 \in R$, tal que si

$$\mathbf{A} > A_0 \Rightarrow N(\mathbf{A},1) = K$$

Propiedad 3.- Si $K \leq t$, existe un valor $A_0 \in R$, estrictamente positivo, tal que si

$$0 < \mathbf{A} < A_0 \Rightarrow N(\mathbf{A},j) = j, \quad 1 \leq j \leq K$$

La propiedad 1 nos dice que al aumentar el valor de **A**, se beneficia **siempre** a los partidos más votados, por tanto podemos diseñar sucesiones de divisores con la **garantía** absoluta de que ante **cualquier situación posible** van a primar más o menos, (según el valor elegido para **A**), a la lista más votada, que las sucesiones conocidas hasta ahora.

Además nos dice la propiedad 1 que si al aumentar el valor de **A** hasta **A'**, la nueva sucesión da un reparto diferente es porque algún partido ha perdido un diputado en beneficio de otro que tiene más votos que él.

La propiedad 2 nos dice que podemos construir sucesiones de divisores **equivalentes** a la fórmula mayoritaria (mayoría simple además).

La propiedad 3 nos indica del peligro de tomar valores pequeños de **A**, ya que en tal caso la prima a los partidos pequeños puede ser enorme.

Después de observar las propiedades 2 y 3, nos planteamos la siguiente pregunta, ¿ en general, pueden considerarse proporcionales las fórmulas basadas en sucesiónes de divisores ?.

Por último indicar que a este trabajo se ha llegado buscando argumentos científicos para, primeramente, mostrarle al Defensor del Pueblo que la fórmula electoral D'Hondt no es proporcional y por tanto debe recurrirse ante el Tribunal Constitucional, y en segundo lugar mostrarle a los Diputados del Congreso los defectos de nuestra fórmula electoral y darle soluciones alternativas. Es posible que el cambio de fórmula electoral no se consiga, y debamos conformarnos con haber obtenido una infinidad de fórmulas electorales basadas en sucesión de divisores con efectos intermedios entre D'Hondt y St-Lagüe, de tal manera que podemos realizar cambios de fórmula con tanta moderación como se quiera. Creemos que esta es una aportación importatante a una sociedad democrática de los profesores de matemáticas.

REFERENCIAS

[1] AGUILERA DE PRAT, C.R.,, Pere Vilanova, *Temas de Ciencia Política,* PPU, 1987.

[2] ALVAREZ CONDE, E. Y GONZÁLEZ HERNÁNDEZ,, J.C.,*Código de Derecho Electoral Español.* Ed. Tecnos, Madrid 1985.

[3] BALINSKI, H.P. & YOUNG, H.P. *Fair Representation,* Yale University Press, 1982.

[4] BALINSKI, H.P. & YOUNG, H.P. *On Huntington methods of apportionment,* SIAM J. Appl. Math., vol. 33, pp. 607-618, 1977.

[5] CARRERAS FRANCÉS DE, Y VALLES, JOSEP M.: *Las elecciones.* Ed. Blume, Barcelona, 1977.

[6] COLOMER, J.M. *El arte de la manipulación política.* Anagrama S.A.,Barcelona, 1990.

[7] DUVERGER, M. (ed): *L'influence des systèmes électoraux sur la vie politique, Cahiers de la fondation Nationales des Sciences Politiques,* A. Colin,París, 1950.

[8] GIMÉNEZ FERNÁNDEZ, M.: *Estudios de Derecho electoral contemporaneo,* Sevilla, 1925 (2º ed. 1977).

[9] MACKENZIE, W. J. M.: *Elecciones libres,* Ed.Tecnos, Madrid, 1962.

[10] MEER, F. *La Constitución de la II República,* Eunsa, Pamplona, 1978.

[11] NOHLEN, D.: *Sistemas electorales del mundo,* Centro de Estudios Constitucionales, Madrid, 1981.

[12] ORTIZ DE BURGOS, J., *La Representacón Proporcional,* J.B., 1923.

[13] PASTOR, M.: *Ciencia Política,* Mc-Gran Hill, 1988.

[14] RAE DOUGLAS W.: *Leyes electorales y Sistemas de partidos políticos,* Ediciones CITEP, Madrid, 1977.

[15] RAMÍREZ GONZÁLEZ, V., *Matemática Aplicada a la distribución de escaños Método de reparto P.R.I* Rev. Epsilon nº 6/7, 1985.

[16] ROKKAN, S.: Voz *"Elecciones electorales"*, en Enciclopedia Internalcional de las Ciencias Sociales, Ed. Aguilar, Madrid, 1968.

[17] SANTOLAYA MACHETTI, P. , *Significado y alcance de la Ley Orgánica del Régimen Electoral General,* Centro de Estudios Constitucionales, Revista de Estudios Políticos (Nueva Epoca), nº 53, pp. 45-69, Madrid 1986.

[18] 'TE RIELE, H.J.J. *The proportional representation problemin de Second Chambre: an approach via minimal distances,* Statistica Neerlandica, vol. 32, nº 4, pp. 163-179, 1978.

APENDICE I

RESULTADO POR PROVINCIAS AL APLICAR LA FORMULA CUYOS DIVISORES SON:2, 5, 8, ... EN 1989.
Comparación con D'Hondt y con las proporciones exactas

	REPARTO CON 2, 5, 8, ..						REPARTO
Provincia	PSOE	PP	IU	CDS	OTROS	Proporciones	D'HONDT
Alava	**1**	**1**			PNV **1** HB **1**	1.51-0.83-0.98-0.68	**2-1-1-0**
Albacete	3	1				2.47-1.53	3-1
Alicante	5	3	1	1		4.7-3.2-0.97-1.1	5-3-1-1
Almería	**3**	**2**				3.43-1.58	**4-1**
Avila	1	1		1		0.88-1.1-1.02	1-1-1
Badajoz	**4**	**1**		**1**		3.72-1.6-0.68	**4-2**
Baleares	**2**	**3**		**1**		2.45-2.89-0.66	**3-3**
Barcelona	**13**	**4**	**3**	**1**	CiU **10** ERC **1**	12.7-3.6-2.8-1.6-10.4-0.86	14-3-3-1-11-0
Burgos	2	2				1.7-2.3	2-2
Cáceres	3	2				3.3-1.7	3-2
Cadiz	**5**	**2**	**1**		1→PA	5.24-1.64-0.97-1.15	**6-1-1-1**
Castellón	3	2				2.75-2.25	3-2
Ciudad Real	3	2				3.18-1.82	3-2
Córdoba	**4**	**1**	**2**			4.01-1.49-1.5	**5-1-1**
Coruña	4	4		1		4.4-3.97-0.99	4-4-1
Cuenca	2	1				1.62-1.38	2-1
Gerona	2				3→CiU	1.9 - 3.1	2-3
Granada	4	2	1			4.25-1.84-0.91	4-2-1
Guadalajara	1	2				1.38-1.62	1-2
Guipuzcoa	2				PNV 1 HB 2 EA 1 EE 1	1.6-1.3-1.8-1.45-0.85	2-1-2-1-1
Huelva	4	1				3.75-1.25	4-1
Huesca	2	1				1.84-1.16	2-1
Jaén	**4**	**1**	**1**			3.61-1.62-0.77	**4-2**
León	**2**	**2**		**1**		2.25-2.18-0.57	**3-2**
Lérida	**1**	**1**			**2**→CiU	1.38-0.6-2.02	**2-0-2**
La Rioja	2	2				1.96-2.04	2-2
Lugo	2	3				2.02-2.98	2-3

Madrid	12	12	5	4		11.7-12.1-5.37-3.9	12-12-5-4
Málaga	**6**	**2**	**1**	**1**		5.69-2.18-1.5-0.61	**7-2-1**
Murcia	**4**	**3**	**1**	**1**		4.33-2.83-0.86-0.98	**5-3-0-1**
Navarra	**2**	**2**			1→HB	2.07-2.2-0.73	**2-3-0**
Orense	2	3				2.3-2.7	2-3
Asturias	4	3	1	1		3.8-2.5-1.5-1.2	4-3-1-1
Palencia	1	2				1.36-1.64	1-2
Las Palmas	**2**	**2**	**1**	**2**		2.57-1.66.81-1.96	**3-2-0-2**
Pontevedra	**3**	**4**		**1**		3.27-3.92-0.81	**4-4**
Salamanca	2	2				1.9-2.1	2-2
S.C. Tenerife	4	1		1	1→AIC	3.26-1.4-0.8-1.5	4-1-1-1
Cantabria	**2**	**2**		**1**		2.27-2.18-0.55	**3-2**
Segovia	**1**	**1**		**1**		1.06-1.37-0.57	**1-2**
Sevilla	**7**	**3**	**1**		1→PA	6.94-2.43-1.47-1.1'6	**8-2-1-1**
Soria	1	2				1.2-1.8	1-2
Tarragona	2	1			2→CiU	2.1-0.8-2.1	2-1-2
Teruel	2	1				1.64-1.36	2-1
Toledo	3	2				2.88-2.12	3-2
Valencia	**7**	**4**	**2**	**1**	**2→UV**	6.96-4.2-2-1.72-1.1	**8-4-2-1-1**
Valladolid	**2**	**2**		**1**		2.1-2.23-0.67	**2-3**
					PNV HB EA EE		
Vizcaya	2	1			3 2 1 1	2.3-1.1-3.1-1.7-0.9-0.9	2-1-3-2-1-1
Zamora	1	2				1.41-1.59	1-2
Zaragoza	3	2	1		1→PAR	3.05-2.2-0.9-0.85	3-2-1-1
Ceuta+Melilla	2					2	2

Nota: i) se han resaltado en negrilla las provincias en las que los repartos, con los divisores 2, 5, 8, ... y con la fórmula D'Hondt, son diferentes.
ii) Para el cálculo de las proporciones se han considerado sólo los votos de aquellos partidos que obtienen algún escaño con los divisires 2, 5, 8, ...
iii) Los datos son anteriores a la resolución de las impugnaciones por tanto no contemplan el cambio de resultado en el escaño de Melilla.

APENDICE II

ELECCIONES ANDALUZAS. JUNIO DE 1990

	REPARTO CON 2, 5, 8,..				PROPORCIONES				REPARTO D'HONDT			
Provincia	PSOE	PP	IU	PA					PSOE	PP	IU	PA
Almería	**6**	**3**	**1**	**1**	5.88	3.31	1.05	0.76	**7**	**3**	**1**	**0**
Cádiz	**8**	**2**	**2**	**3**	7.46	2.47	1.62	3.45	**8**	**2**	**1**	**4**
Córdoba	7	3	2	1	6.39	2.81	2.54	1.26	7	3	2	1
Granada	7	4	1	1	6.70	3.84	1.61	0.85	7	4	1	1
Huelva	7	2	1	1	6.43	2.56	1.07	0.94	7	2	1	1
Jaén	**7**	**3**	**1**	**1**	6.47	3.40	1.43	0.70	**7**	**4**	**1**	**0**
Málaga	9	4	2	1	8.33	3.72	2.46	1.49	9	4	2	1
Sevilla	10	4	2	2	9.44	3.66	2.35	2.55	10	4	2	2
TOTAL	61	25	12	11	56.8	25.4	14.5	12.3	62	26	11	10

Nota: se han resaltado en negrilla las provincias en las que los repartos, con los divisores 2, 5, 8, ... y con la fórmula D'Hondt, son diferentes

Observaciones:

i) El PSOE, partido ganador en todas las provincias, ha resultado beneficiado respecto de su proporción exacta en todas las provincias, acumulando una prima de 4.2 escaños con los divisores 2, 5, 8,... y 5.2 con D'Hondt, que extrapolando los 109 escaños autonómicos a los 350 de unas Elecciones Generales equivalen a una prima de 13.5 y 16.7 escaños respectivamente. Lo que prueba, una vez más, que el desvio de proporcionalidad que origina D'Hondt disminuye al aumentar el tamaño de las circunscripciones.

ii) Con los divisores 2, 5, 8, .. el último escaño por **Almería** no corresponde ni al PP ni al PSOE sino al PA, independientemente de que usemos los datos anteriores o posteriores a la impugnación. (Los que aparecen en la tabla son los posteriores a la impugnación).