Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros

M. Dolores Iriarte Bustos
Manuela Jimeno Pérez
Inmaculada Vargas-Machuca de Alva

Introducción

Al analizar las respuestas dadas por estudiantes de 8º de E.G.B. y E.U de Magisterio a preguntas que requieren poner en funcionamiento la estructura algebráica y de orden de los números enteros, hemos tratado de poner de manifiesto las ideas causantes de los errores y olvidos constatados y que obstaculizan el aprendizaje de los números enteros.

Estas ideas obstaculizadoras las hemos agrupado en dos apartados:

A) Lo real como obstáculo: el apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria de número como cantidad, obstaculiza de múltiples formas la construcción de Z.

b) La imposición de lo formal como obstáculo: la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas. Si no es así, lo formal queda vacío de significado, y se convierte en mera apariencia que no tarda en desvanecerse.

Obstáculos y errores

La enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores, se esfuercen en buscar situaciones concretas para justificar todas las propiedades de los enteros; pero por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones. Es decir, se trata de un tema en el que no cabe aplicar la vía que caracteriza a la enseñanza de la matemática elemental, ni tampoco la que caracteriza a la enseñanza superior, pues ninguna de las dos es, en este caso, satisfactoria: la primera porque impide el acceso a lo abstracto, la segunda porque la imposición de la abstracción es estéril.

A) Lo real como obstáculo

El alumno está acostumbrado a ver en los números primero, y más tarde en las letras con que opera, representaciones de cosas reales y concretas, y en las operaciones con números o letras las correspondientes operaciones con las cosas. (F. Klein 1927).

El gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia, profundamente enraizada en la experiencia de cada cual, que identifica número con cantidad y que se vio favorecida por la concepción que de las matemáticas predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real.

Y si necesitaron más de diez siglos para plantear la cuestión de los negativos en el plano formal es que, desde luego, la ruptura con la evidencia inmediata no resulta fácil, y aquí radica la gran dificultad de la enseñanza/aprendizaje de los números enteros.

El conocimiento del número entero exige pues, la ruptura con algunas ideas que están muy ligadas al conocimiento que se posee de la aritmética práctica.

A1) El número como expresión de cantidad

"¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido -(-3)?"

"No, porque no es posible quitar una cosa que no existe". (Alumno de Magisterio).

Mientras no se abandone el plano de lo real es difícil concebir los números negativos, porque simplemente, no son necesarios. Nadie dice: "tengo -300 ptas" sino "me faltan 300 ptas.", y el prescindir del negativo no provoca ningún problema.

La identificación de número con cantidad también va a obstaculizar la generalización de las operaciones aritméticas y de orden, como veremos en lo que sigue:

A2) La suma como aumento

La concepción ingenua de suma como acción de añadir una cantidad a otra, es la que hace que algunos estudiantes ante la pregunta:

"**¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 de 2?**", sin acordarse para nada de los negativos ni de lo que "saben" sobre ellos, respondan que no es posible o se queden perplejos sin contestar.

A3) La multiplicación como multiplicación natural

"**¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?**"

Son bastantes encuestados los que no contestan o responden: "no existe", posiblemente porque no conciben la idea de un múltiplo de cinco menor que él. Otros para eludir el conflicto que les provoca esta idea confunden los conceptos de múltiplo y divisor y responden que se trata del número 1.

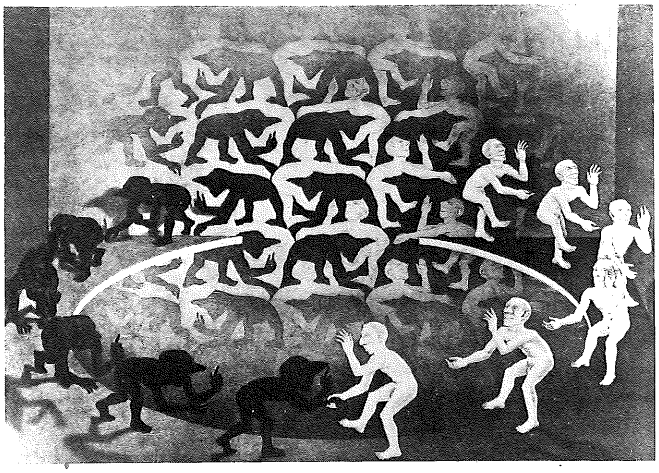
La concepción de la suma como aumento se traslada también a la multiplicación, "debe (-5) y hace 3 años debía (-3) veces lo de ahora, (-5).(-3)". Esta respuesta muestra un intento frustrado de imitar los múltiples ejemplos que salpican los libros de texto para tratar de justificar la regla de los signos. En donde la concepción de multiplicación natural como número de veces una determinada cantidad se mantiene vigente.

A4) La sustracción como disminución

"He conocido algunos que no podían entender que al restar cuatro de cero quede cero" (B. Pascal).

"**¿Es posible encontrar un número que restado de 7 de 10?**"

Algunos alumnos afirmar que no existe, otros no se atreven a ser tan tajantes pero al no caer en cual pueda ser, dejan la pregunta sin contestar, y por último, están los que eluden el conflicto tergiversando la pregunta; ellos parecen entender: "¿Qué



número al restarle 7 da 10?", pregunta que no plantea problema a la lógica natural y responden "17".

La sustracción también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y por tanto, con disminución.

A5) La división como división natural

La división con números naturales se hace por defecto y admite ser interpretada como reparto o agrupamiento de objetos.

Esta es la idea que tienen más de la mitad de los encuestados de división y por eso contestan negativamente a la pregunta:

"**¿Es correcta la siguiente división?**"

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} -1 & 1 \end{array}$$

Y algunos especifican: "3 entre 4 no cabe"; "3 entre 4 cabe a 0"; "el resto no puede ser negativo".

A6) El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural

En la serie natural los números van aumentando a medida que van estando más alejados del origen.. El trasladar esta secuencia a los negativos es la causa de que algunos encuestados cuando se les pregunta: **"Cuál es el número mayor en una unidad a -3?,"** respondan: "-4".

"En la lista de los cuarenta principales, el disco favorito de Juan estaba 3 lugares más abajo de lo que

había estado la semana anterior. La antigua posición era la 3 ¿Cuál es la nueva?", hemos encontrado el mismo error. Responden: "w3-3=w0".

A7) Ignorar el signo

Este error consiste en ignorar sistemáticamente el signo que precede a las temperaturas negativas, identificando así los números negativos con los naturales.

"-7 grados en Moscú, -3 en Budapest. **Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿Habría notado una subida o una bajada de temperatura?**"

Algunos estudiantes, olvidando por completo el signo "menos" y operando como si se tratara de números naturales contestan: "una bajada porque 7 - 3 = 4".

En el otro extremo están aquellos que siendo sensibles al signo "menos" lo hiperutilizan y responden: "una bajada de -4 grados".

A8) Identificación de los símbolos literales con números positivos

Bastantes encuestados afirman:

"a no puede ser un número negativo, sería -a".

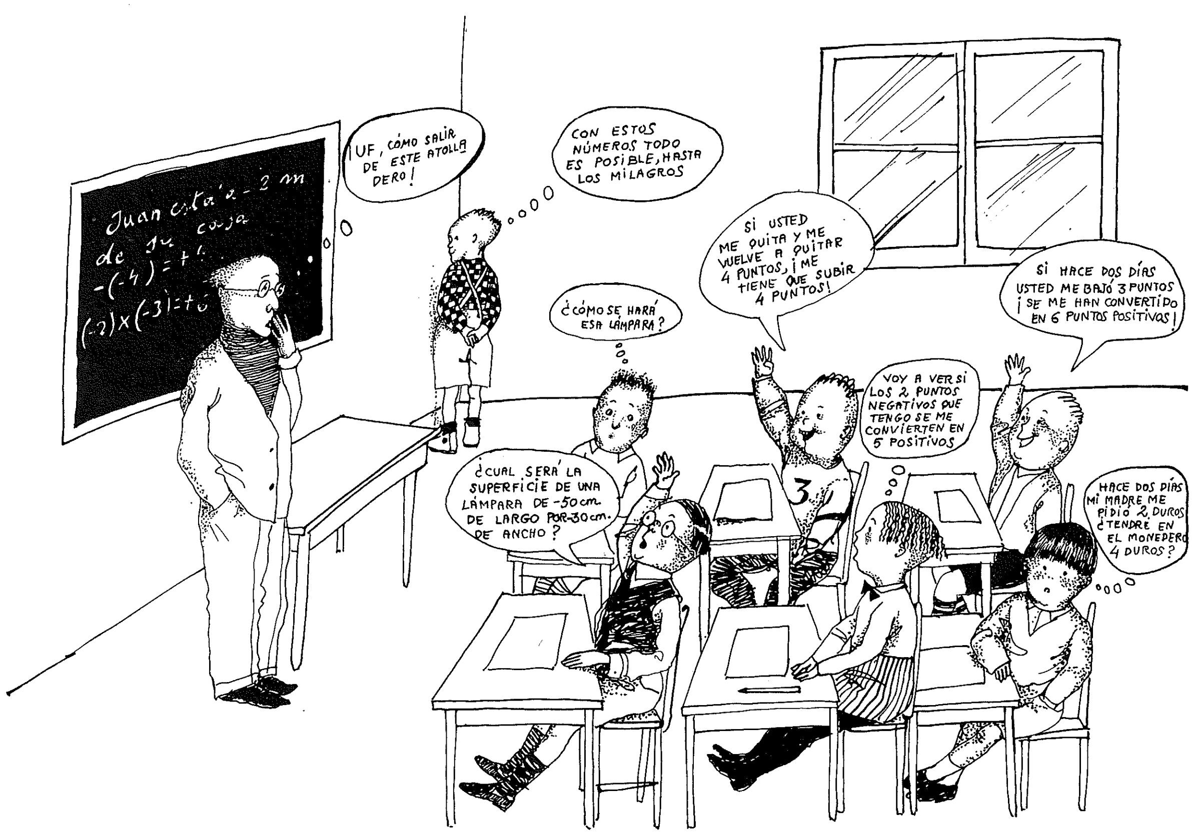
Y a la pregunta que pide calificar de verdadera o falsa la siguiente expresión:

"Si a es positivo y b es negativo, a-b es un número positivo" contestan diciendo que de a-b no se puede decir que sea positivo o negativo sino que "depende de los valores que tomen a y b", esto es, razonan como si a y b fuesen ambos números positivos.

B) La imposición de lo formal como obstáculo

"*Siempre se conoce en contra de un conocimiento anterior*" (G. Bachelard).

La historia de los números enteros confirma este principio epistemológico, pues cada avance en su



—SI A LOS NIÑOS LES DIERA POR BUSCARLE UTILIDAD A LOS NEGATIVOS—

conocimiento ha supuesto la ruptura con concepciones previas. Sin embargo, en la enseñanza de los números enteros, según el testimonio de los libros de texto, parece olvidarse con frecuencia; quedando reducidos a un formalismo vacío, que se constituye en obstáculo y origina errores, pues los estudiantes se ven inmersos en un terreno en el que no pueden orientarse porque carecen de intuiciones, o porque las tienen pero se encuentran tan alejadas de la teoría que no le sirven de ayuda.

B) En el manejo del orden lineal

Hay algunos errores que pueden ser achacables a que trasladen el orden de N a otras situaciones, ya consideradas en el apartado anterior, pero hay otros, que son los que aquí señalamos, que son inherentes al concepto de orden.

—Fracaso en la inversión de una relación de orden

Bajo este epígrafe hemos reunido los errores constatados en una serie de preguntas que se resuelven por inversión. Con estos errores, una vez más se pone de manifiesto cuán lenta es la conquista de la reversibilidad, entre otras cosas porque, no es capitalizable, pues al haberla adquirido dentro de un contexto no significa que sea extensible a cualquier otro contexto.

"Pedro tiene 5 canicas más que Juan y Juan tiene 3 canicas más que Enrique sabiendo que Pedro tiene 26 canicas ¿Cuántas canicas tiene Enrique?

Los errores que hemos constatado están provocados porque no realizan la inversión de las relaciones "más que" y "menos que" y por ello contestan que "Juan tiene 31 canicas y Enrique 28" y en otros casos, invierten con éxito la primera relación pero no la segunda y contestan "Juan tiene 21 y Enrique 18".

Ninguno de los encuestados dibuja un esquema de recta numérica, pero como el problema les pide que simbolicen la situación algunos plantean ecuaciones.

Por otro lado, da la impresión de que los estudiantes no son sensibles a las situaciones relativas que encierran enunciados tan habituales como el siguiente:

"El ordenador de Eva costó 12.000 ptas. más que el de Alejandro. El de Eva costó 52.000 ptas. ¿Cuánto costó el de Alejandro?

El error más frecuente es dejarse engañar por la palabra "más" y contestar que el ordenador de Alejandro costó:

$$52.000 + 12.000 = 64.000$$

—La secuencia temporal como fuente de errores

"Sara gastó ayer en 'chucherías' 8 ptas más que hoy. Ayer gastó 35 ptas. ¿Cuántas ha gastado hoy?"

Son bastantes los que contestan 35 + 8 = 43.

Por otro lado hemos constatado la tendencia a olvidar la doble orientación del tiempo. Así en el problema:

"El señor Ruiz tiene 56 años y su hijo 29. ¿Cuándo la edad del padre es doble que la del hijo?"

Los errores observados hacen pensar que han buscado la solución en el tiempo por venir, y no han considerado la posibilidad de que el suceso se hubiese dado en el pasado.

Por eso responden "nunca" y otros, "dentro de 2 años pues 29 . 2 -56 = 2", donde el supuesto implícito de que el suceso se dará en el futuro se le suma el de considerar que el tiempo no pasa para el hijo. Otra variante dentro de este tipo de respuesta es la de aquellos que se dan cuenta que la única forma de estancar la edad del hijo es hacerlo morir y responden: "cuando el hijo muera", o también, "si el hijo muere con 30, cuando el padre tenga 60".

—Identificación de una relación con su recíproca

¿Qué número precede en 7 unidades a -3?

Al identificar "x precede a -3 en 7 unidades" con su recíproca "x sigue a -3 en 7 unidades", cerca de la mitad de los encuestados responden que es 4.

B2) Las reglas de cálculo como formalismo vacío

Si estas reglas se encuentran vacías de contenido y significación son fáciles de olvidar y confundir.

La regla de los signos es la que parece más asumida. Las reglas de la adición resultan más difíciles de memorizar y provocan mayor número de errores. Cuando interviene la sustracción los errores aumentan.

La dificultad es aún mayor cuando los cálculos se encuentran dentro de un contexto algebraico.

B3) Los enteros estudiados y olvidados

En las respuestas a las preguntas:

"¿Qué número sumado a 5 da 3?"

"¿Puedes encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?

"¿Qué número restado de 7 da 10?

Hemos constatado que son bastantes los que no se acuerdan de los negativos y responden que no existe tal número o dejan la pregunta sin contestar.

También los olvidan a la hora de simbolizar ciertas situaciones relativas inventando sus propios símbolos: tres pasos hacia delante, 3—; tres pasos hacia atrás —3.

Conclusiones

1.- Separación entre pensamiento académico y natural

Los errores constatados en situaciones que se encuentran, sin duda, dentro de la experiencia de todos los alumnos encuestados, manifiestan un pensamiento lo suficientemente rígido como para dejarlos indefensos frente a la seducción de ciertas palabras engañosas que les impiden resolverlas. También puede ser indicio de la separación que existe en muchos alumnos entre pensamiento natural y pensamiento académico, la flexibilidad de pensamiento que muestran en situaciones ajenas a la escuela se convierte en agarrotamiento ante un ejercicio escolar, y si es de matemáticas peor.

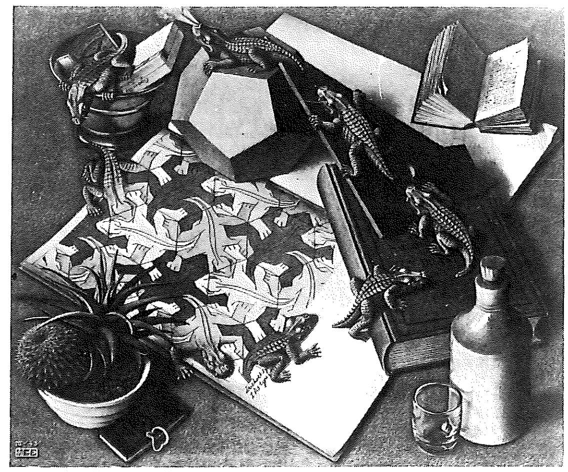
2.- Necesidad de tratamiento matemático de las situaciones de comparación en el curriculum

Las preguntas que se hacen dentro de un contexto de comparación "es tantos años mayor que", "ha costado tantos menos que", tienden a traducirlas de forma mecánica a una operación aritmética sin tener en cuenta la relación de orden en la que están inmersas. La abundancia de errores en estas preguntas muestran el olvido de estas cuestiones en la práctica escolar.

Puede ser que los encuestados hayan estudiado las relaciones de orden, que conozcan que son relaciones antisimétricas y transitivas, pero si es así, lo tienen totalmente separado e inutilizado a la hora de afrontar cuestiones que exigen la consideración de los dos sentidos en una relación de orden.

3.- Paralelismo entre los obstáculos históricos y los obstáculos en el aprendizaje

Históricamente el conocimiento que se poseía de los números como expresiones de cantidad, obstaculizó durante siglos la aceptación de los negativos y la construcción de Z. Los errores de los estudiantes provienen en muchos casos de tratar las situaciones con números negativos con herramientas de la aritmética natural (número como cantidad la adición como aumento, traslación del orden natural a Z, etc.).



4.- Ausencia de representación de los procesos de pensamiento

Según Piaget (1975) los enteros surgen no como resultado de una acción sino de la toma de conciencia de los mecanismos que rigen la propia acción, de ahí que su aparición fuese más tardía.

La dificultad para reflexionar sobre el proceso queda de manifiesto en las respuestas: la mayoría sólo expresan los resultados no el proceso que les llevó a ellos. Quizás esta falta de representación sea consecuencia de que en la enseñanza vigente se prima la obtención del resultado sobre el análisis de los procesos.

5.- Ausencia de un modelo unificador para el tema de los números enteros

La mayor dificultad para la enseñanza de los números enteros es la no existencia de un modelo concreto que explique todas las propiedades de Z. El intento de utilizar un modelo de este tipo que cubra totalmente el estudio de los enteros es contraproducente por dos motivos:

a) Obstaculiza el aprendizaje al impedir la ruptura con lo real; necesaria para la construcción de Z.

b) Convence al alumno de la inutilidad de los negativos, ya que los ejemplos propuestos para justificar ciertas propiedades de los enteros se resuelven mejor en el marco de la lógica natural.

Por otro lado el tratamiento de los enteros desde un punto de vista exclusivamente formal es estéril pues lo formal no se puede imponer por decreto. Prueba de ello es que ni siquiera el objetivo mínimo de utilizar correctamente las reglas de cálculo llega a realizarse totalmente.

6.- Necesidad de provocar el conflicto que entraña el número entero

La enseñanza/aprendizaje de los números enteros, desde nuestro punto de vista, ha de estar marcada por el conflicto, por la confrontación entre el conocimiento formal de los números y el conocimiento práctico que se posee de ellos como representación de lo real.

Sólo afrontando este conflicto es posible descubrir las limitaciones que lo real impone a la aritmética práctica, concebir los números enteros como ampliación de los naturales que permite trascender el plano de la acción y generalizar el concepto de número, operación aritmética y orden.

Pero lo habitual en la enseñanza de los números enteros no ha sido provocar el conflicto sino evitarlo, con lo que las concepciones ingenuas de la aritmética práctica han seguido vigentes y los números enteros se han visto reducidos a un formalismo vacío.

Bibliografía

—BACHELARD, G. *La formación del espíritu científico.* Siglo XXI. Argentina (1974).

—BELL, A. "Enseñanza por diagnóstico, algunos problemas sobre números enteros" *Enseñanza de las Ciencias.* 4(3) (1986).

—BELL, A. "Looking at Children and Directed Numbers". *Mathematics Teaching, nº 100* (1982).

—BELL, A. "Direct Numbers and the Bottom up curriculum". *Mathematics teaching nº 102.* (1982).

—GLAESER, G. "Epistemologie des nombres relatifs". *Recherces en didactique des Mathématiques, 2.3* (1981).

—KLEIN, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Colección de Rey Pastor. Madrid (1927).

—PIAGET, J. *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático.* Paidos. Buenos Aires. (1975).