

El desarrollo geométrico de la representación espacial

Mongeau, Piere
Pallascio, Richard
Allaire, Richar

Traducción: *Harout Kodjian*

Resumen

Los autores emitieron la hipótesis de que la evaluación del desarrollo geométrico de la representación espacial se repite, desde la infancia hasta la edad adulta, sobre la relación jerárquica de los niveles geométricos (topológico, proyectivo, afín y métrico). Como no se ha encontrado ningún instrumento de investigación geoméricamente completo y válido, los autores han construido uno. Grupos de individuos de diferentes edades, —jóvenes (11-12 años), adolescentes (15-16 años), adultos jóvenes (18-24 años), adultos (30-40 años)— han sido sometidos a un test para ver sus logros en cada nivel geométrico. Aunque los resultados no confirmen la hipótesis original, sin embargo estos revelan una habilidad topológica relativamente superior y una habilidad proyectiva generalmente pobre. Los autores tratan de explicar esto, haciendo referencia a los factores psicométricos de “relación” y “visualización” espaciales.

Palabras claves: Representación espacial, geometría, nivel geométrico, evolución, desarrollo, edad, factores, tests.

El desarrollo geométrico de la representación espacial

Toda representación del espacio, o de objetos que este contiene, se elabora según las leyes geométricas. Sin embargo, la evolución del desarrollo geométrico de estas representaciones es poco conocida a partir de la infancia. Por un mayor conocimiento de este

individuos de diferentes edades. Después de un breve repaso de los principales trabajos sobre la representación espacial, se presentan a continuación la metodología seguida y los resultados obtenidos.

A parte de los trabajos de Piaget, los estudios hechos sobre la representación espacial que miden la evolución de esta, o toman en consideración sus aspectos geométricos son escasos. En efecto, varios investigadores (Cooper, Glaser, Kosslyn, Pellegrino, Shepard, Sternberg y otros; ver Pellegrino et al., 1984) tratan de explicar los procesos básicos subyacentes en los problemas de representación espacial, pero ninguno de ellos parece tomar en consideración las cualidades geométricas intrínsecas de las representaciones estudiadas. Asimismo, el trabajo de los psicómétricos, que reposa sobre análisis estadísticos comparativos de los resultados obtenidos por un gran número de sujetos en ciertos tests, de ninguna manera considera estas cualidades geométricas. Los psicómétricos buscan más bien identificar los principales componentes de estos resultados.

Así, según McGee (1979, 1987), Eliot y Smith (1983), Pellegrino, Alderton y Shute (1984) quienes analizaron exhaustiva y detalladamente el conjunto de los estudios publicados en este campo, resulta que la cuestión de habilidad espacial, como está medida por los test psicométricos generalmente utilizados durante las investigaciones, se compone de dos factores principales comunmente llamados “relación espacial” y “visualización espacial”.

Por “relación espacial” se entiende la capacidad de establecer y comprender las relaciones que unen

El desarrollo geométrico de la
representación espacial

comparar objetos entre ellos. Por ejemplo, el sujeto tiene que reconocer una figura o una forma presentada desde un punto de vista diferente.

Por "visualización" se entiende la capacidad de manipular mentalmente objetos tridimensionales. Esta habilidad, la mayoría de las veces, se mide a partir de representaciones bidimensionales (proyecciones). Por una operación mental, el sujeto tiene que transformar una representación de manera que esta corresponda a otra eligible dentro de un grupo de varias representaciones. Por ejemplo, se elige una proyección entre varias de manera que esta corresponda a un despliegue plano.

De otra parte, el análisis de los tests utilizados para medir la representación espacial (ver: Eliot, J., Smith, I.M., 1983) permite comprobar que desde un punto de vista geométrico, no hay ningún instrumento de medida geoméricamente completo y válido. Ningún instrumento que cubra los cuatro niveles geométricos y que permita evaluar la evolución del desarrollo geométrico de la representación espacial. Los aspectos topológico, proyectivo y afín están casi siempre ignorados en beneficio del aspecto métrico. Más del 82% (212/256) de los tests obtenidos, analizados desde un punto de vista geométrico son de índole métrico, 11,6% son afines, 2% solamente son proyectivos, y 4% son de índole topológico. Hasta hay unos tests (2%) que contienen errores geométricos flagrantes (Mongeau, 1989).

Siendo el objetivo de este estudio el de conocer mejor la evolución del desarrollo geométrico de la representación espacial, ha sido necesario elaborar un nuevo instrumento de búsqueda geoméricamente válido, antes de someter a un test los grupos de sujetos de diferentes edades.

Representación geométrica de espacio

La representación geométrica del espacio se apoya sobre axiomas agrupados en cuatro niveles geométricos jerárquicamente imbricados. Se trata de los niveles topológico, proyectivo, afín y métrico. La imbricación se hace desde el topológico hacia el métrico. Así, una representación métrica conserva necesariamente todas las propiedades propias a los niveles topológico, proyectivo y afín, mientras que una representación topológica no da cuenta de ninguna propiedad propiamente proyectiva, afina o métrica. De hecho, una misma familia, de poliedros, prismas por

ejemplo, puede ser representada por cuatro tipos de representaciones distintas y geoméricamente exactas (fig. 1).

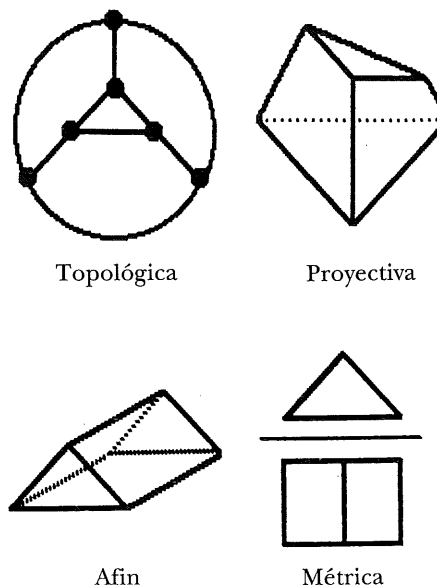


Fig. 1: Representaciones de un poliedro ("prisma").

Una representación métricamente correcta será también topológicamente justa por las propiedades topológicas que son jerárquicamente previas. En cambio, una representación topológicamente correcta puede ser incorrecta a los niveles proyectivo, afín y métrico.

Las principales características topológicas son: el número de las caras, el de los vértices y de las aristas, y las propiedades de adyacencia y de conexión. Mientras la representación en forma de grafo conserva estas características y propiedades, ignora las de los niveles superiores. Deformaciones continuas como el estiramiento, el estrechamiento, el plegado y la torsión no afectan la exactitud del grafo. Así, cuando el grafo de un prisma está deformado de una manera continua, la adyacencia de las caras, los números de vértices, de aristas y de caras, se conservan. El nivel proyectivo corresponde principalmente a las propiedades de incidencia de rectas y planos. Estas propiedades se conservan en una representación creada por una proyección central.

El nivel afín corresponde principalmente a las propiedades de paralelismo y de convexidad. Estas

propiedades se conservan en una representación creada por una proyección paralela.

El nivel métrico corresponde principalmente al estudio de propiedades relacionadas con las distancias y los ángulos. Estos pueden conservarse simultáneamente en una misma representación. Se representarán correctamente las distancias o los ángulos, o bien se utilizarán dos vistas (por ejemplo, como las vistas de cara y de encima usadas en geometría descriptiva).

Hipótesis de trabajo

Piaget, en sus trabajos concernientes a la génesis de la representación espacial en el niño, sostiene que el desarrollo de esta respeta la jerarquía de los niveles geométricos. El desarrollo va desde el topológico hacia el métrico, vía el nivel proyectivo; la noción de proximidad precede a los otros axiomas euclidianos, mientras la intuición de las dimensiones, basada sobre la interioridad y la exterioridad, precede la abstracción del volumen. Entre tanto, el orden de los desarrollos ulteriores, es decir, desde la edad de 11-12 años hasta la edad adulta, queda poco conocido e incierto.

La hipótesis de trabajo es que la evolución del desarrollo de la representación espacial sigue repitiéndose sobre la jerarquía de los niveles geométricos hasta la edad adulta. Según esta hipótesis, los logros de nivel topológico deberían ser superiores, hasta la edad adulta, a los observados por los otros niveles geométricos. Asimismo, los logros de nivel métrico deberían crecer con la edad y ser inferiores a los otros, mientras que las de los niveles proyectivo y afín deberían intercalarse entre los niveles topológico y métrico.

Las observaciones de Lunkenbein (1981, 1982) se alejan de nuestras hipótesis. El nota, a partir de actividades didácticas, que los niños parecen tener más facilidad con los gráficos topológicos que con las representaciones métricas como son los desarrollos planos, mientras que los adultos tienen más facilidad con las métricas y tienden a rechazar los gráficos como representaciones posibles de objetos poliédricos. El observa también que todos, niños y adultos, reconocen de una manera más natural los dibujos en perspectiva que las formas de representación: gráficos, desarrollos planos y proyecciones ortogonales. Estas

proyecciones serían las más accesibles. Así, el punto de entrada para el reconocimiento de las propiedades geométricas no sería el topológico, sino el proyectivo, y esto, evidentemente no por razones relacionadas con las propiedades geométricas, sino más bien por razones estrictamente figurativas y de percepción.

Lunkenbein utilizaba, sin embargo, proyecciones caballerías (representaciones afines) relativamente familiares (cubo, pirámide, etc.), las cuales no permiten confirmar que las nociones proyectivas están verdaderamente adquiridas.

También, con el propósito de averiguar si efectivamente la evolución del desarrollo de la representación espacial va desde el topológico hacia el métrico hasta la edad adulta, hemos querido someter a un test, con un método geoméricamente válido en los cuatro niveles geométricos, a grupos de sujetos de diferentes edades.

Metodología

Ya que no ha sido identificado ningún test, geoméricamente completo y válido, entre la cantidad de tests espaciales recopilados por Eliot y Smith (1983), se ha desarrollado una nueva batería de tests, cubriendo los cuatro niveles geométricos. Esta batería consta de cuatro tests, cada uno compuesto por diez items. Los cuarenta items constituyen representaciones geométricas bidimensionales de objetos tridimensionales. Se trata de gráficos o de proyecciones centrales, afines y ortogonales.

Los items de cada test son de tipo "lápiz y papel" por razones de eficacia en el examen de los sujetos. También, este tipo de items forma parte de la tradición de los tests psicométricos de representación espacial.

Para asegurarse de la validez del contenido de los items, han sido examinadas, por varias personas, un gran número de "preguntas-problemas" relacionadas con la enseñanza de la geometría. A continuación de sus comentarios y reacciones, las "preguntas-problemas" y los ejemplos que las acompañan han sido rediseñados.

Finalmente, un comité restringido de cinco expertos hizo una última selección de las "preguntas-problemas" para la confección final de los items. Los criterios de selección fueron la exactitud geométrica, la adecuación a la tarea y la sencillez. A cada item corresponde una tarea diferente pero del mismo nivel

geométrico, y está acompañado de un ejemplo, el más sencillo posible, ilustrando la tarea pedida. Así, las figuras 2,3,4 y 5 en anexo, presentan cuatro de estos items, uno por cada nivel. La corrección se hizo según el modo de verdadero o falso.

La muestra de individuos sometidos al test, se compone de alumnos de seis clases ordinarias repartidas desde el nivel primario hasta el universitario de la manera siguiente: un primer grupo de 45 niños entre 11 y 12 años, un segundo grupo de 23 adolescentes entre 15 y 16 años, un tercer grupo de 104 jóvenes adultos entre 18 y 24 años, y finalmente un cuarto grupo de 20 adultos entre 30 y 35 años. En total, unas 192 personas han sido sometidas al test. Ninguna de ellas había seguido curso de formación particular de geometría.

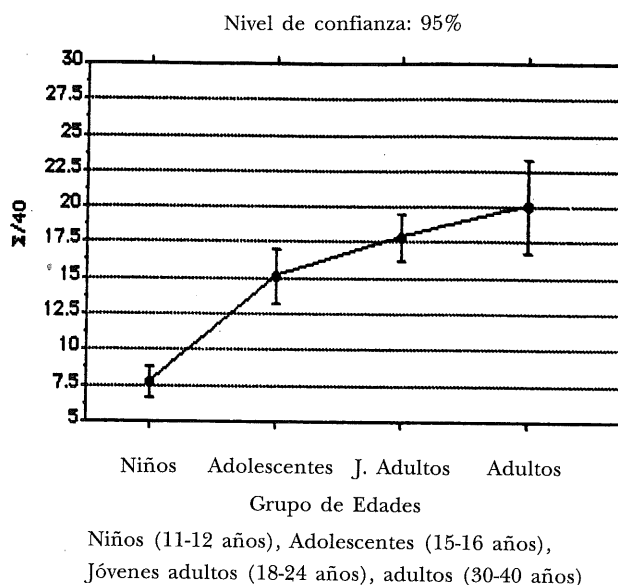
En el conjunto de la muestra 65% eran mujeres y 35% eran hombres. Entre los niños, la repartición era de 62% chicas y 38% chicos. Entre los adolescentes, 39% chicas y 61% chicos. Entre los jóvenes adultos 68% mujeres y 32% hombres. En cuanto al grupo de adultos, todas eran mujeres. Los individuos han sido examinados por grupos. El tiempo máximo concedido era de tres horas para la totalidad de los items. Los examinados tenían derecho a un lápiz, una regla, un compás y una goma de borrar.

Cada uno de los cuarenta items está, correlacionado, de una manera significativa, con todo el test, en un nivel de confianza de $\alpha=0,01$. El índice de fiabilidad de Cronbach (1970) para los cuarenta items en su totalidad, es de 0,886. Los items están agrupados en cuatro bloques según los niveles geométricos. Cada bloque se compone de diez preguntas. Todos los items están correlacionados, de una manera significativa, con el total de su reagrupamiento respectivo. También, los coeficientes de cada uno de estos reagrupamientos son buenos, teniendo en cuenta que los items se componen de tareas y de modos de respuesta variados: 0,71 para el nivel topológico; 0,63 para el nivel proyectivo; 0,72 para el nivel afín; 0,60 para el nivel métrico.

Resultados

Conforme a las previsiones, la puntuación total en los test está fuertemente correlacionada con la

edad ($r=0,67$), siendo el nivel de confianza 0,71. Sin embargo, la puntuación de los grupos de sujetos no crece uniformemente, pero crece de repente entre la infancia y la adolescencia para estancarse después (cuadro 1).

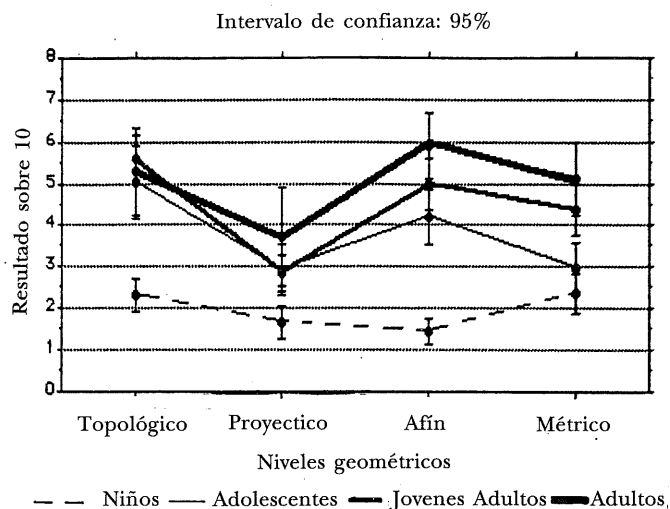


Cuadro 1: Puntuación total según las edades.

Ninguna diferencia significativa ($\alpha=0,05$) de puntuación entre ambos sexos ha sido observada. Además, no existe ninguna diferencia de puntuación significativa entre ambos sexos cualquiera que sea el nivel geométrico.

La evolución de las puntuaciones, con respecto a los niveles geométricos a través de los grupos de diferentes edades, refleja la correlación observada entre la edad y el total del test. Para conjunto de los 192 sujetos, la edad y las puntuaciones observadas según los niveles geométricos están correlacionadas de una manera significativa: topológico=0,558; proyectivo=0,432; afín=0,675; métrico=0,52.

De acuerdo con las puntuaciones generales, los resultados, cuando están compilados según la edades, se dividen en dos grupos bien distintos reagrupando de una parte los niños y de otra los otros grupos de edades diferentes (ver cuadro II)



Cuadro II: Puntuaciones según las edades y los niveles geométricos

Cualquiera que sea el nivel geométrico, las notas medias de los niños están flojas y tienden a bajar más desde el nivel topológico hasta el afin, después suben ligeramente en el nivel métrico. Estas notas medias son claramente inferiores a las de los otros grupos de edad diferente en los niveles topológico, proyectivo y afin.

En el nivel métrico, sus resultados no se pueden distinguir de los resultados de los adolescentes. Este logro superior de los niños en los items topológicos y la bajada progresiva de sus puntuaciones en los niveles proyectivo y afin, confirman nuestra hipótesis y se sitúan en la prolongación del modelo de Piaget. No obstante, la subida de las puntuaciones en el nivel métrico parece estar en contradicción con ese modelo, lo que puede, sin embargo, explicarse por el impacto de los programas escolares, los cuales se refieren esencialmente a nociones métricas: figuras y formas regulares, medida de área y de volumen, etc.

En el caso de los adolescentes, los jóvenes y los adultos, hay que subrayar primero que los resultados se distinguen más y más entre los grupos de edades diferentes a medida que nos acercamos al nivel métrico. Así, las puntuaciones en el nivel topológico no parecen progresar con la edad, mientras que

progresan un poco más en cada uno de los otros niveles geométricos. Son los resultados de los items de nivel afin los que más crecen con la edad, mientras los de nivel topológico son los que menos crecen, pero crecen a pesar de todo de una manera significativa.

Una vez más, esta situación, a lo mejor, no hace más que reflejar el poco cuidado puesto en las nociones distintas de las métricas o en los dibujos en perspectiva, a lo largo del aprendizaje académico.

Lo que hay que observar también, es el descenso acentuado de las puntuaciones en el nivel proyectivo. Contrariamente a nuestra hipótesis de origen que suponía un debilitamiento continuo de las puntuaciones desde el topológico hasta el métrico, asistimos globalmente a una caída significativa de las del nivel proyectivo y a una homogeneización de las puntuaciones entre los otros tres niveles geométricos: topológico, afin y métrico. Este fenómeno nos lleva a suponer que el nivel proyectivo es quizás directamente el menos solicitado en las diversas actividades de aprendizaje de la vida cotidiana, o quizás específicamente el más espacial en el sentido de que, parece que es más difícil resolver los items proyectivos que los otros items (topológicos, afines y métricos) por estrategias analíticas (observar, contar, medir, etc.)

Los items proyectivos parecen hacer un llamamiento a estrategias más bien propiamente espaciales, exigiendo operaciones y transformaciones en el espacio propias al factor "visualización" identificado por los psicométricos, mientras que los items de los otros niveles serían más "analíticos", en el sentido del factor "relación". Estos hacen un llamamiento a una capacidad de "reconocimiento" de las formas.

Más específicamente, en el caso de los adolescentes, las notas medias aumentan en comparación con las de los niños en los niveles topológico y afin, pero su puntuación en los niveles proyectivo y métrico quedan flojas. Los items de nivel proyectivo son también poco logrados como los de nivel métrico. Los resultados de los jóvenes adultos (18-24 años) son más débiles ($\alpha=0,01$) en los items de nivel proyectivo, de una manera significativa. Los adultos (30-35 años) tiene éxito de una manera relativamente más homogénea a través de los niveles geométricos. Las diferencias entre las notas medias se atenúan. Solo los items de nivel proyectivo quedan menos logrados.

En los dos primeros casos, topológico y proyectivo, no hay diferencia significativa entre los grupos de

adolescentes, de jóvenes adultos y de adultos. En los niveles afín y métrico, la mejora de la puntuación entre los grupos de diferentes edades parece ser más regular que en los niveles topológico y proyectivo. En el nivel métrico, los adolescentes no se distinguen de los niños, solo los jóvenes adultos y los adultos obtienen pues resultados superiores de una manera significativa.

Conclusión

Los resultados de los más jóvenes (11-12 años) responden al modelo de Piaget. No obstante, las puntuaciones observadas en el conjunto de los cuatro grupos estudiados (infancia, adolescencia, joven adulto y adulto) no permiten confirmar nuestra hipótesis en cuanto al orden de adquisición de las propiedades geométricas según el orden jerárquico de su axiomatización (desde el topológico hasta el métrico) hasta la edad adulta. En oposición con las observaciones de Lunkenbein, los items de nivel proyectivo son, a partir de la adolescencia, constantemente menos logrados que los otros niveles geométricos, y quedan así hasta la edad adulta. Así, las preferencias expresadas por las representaciones en perspectiva no parecen reflejar una mejor comprensión de las nociones proyectivas. En cambio, las puntuaciones en estos items siguen mejorándose después de 20 años de edad, mientras que los otros se estabilizan y tienden a homogeneizarse cuanto más mayores son los sujetos.

De hecho, las puntuaciones, en cada uno de los cuatro niveles, progresan hasta la edad adulta. La evolución más significativa tiene lugar entre la infancia y la adolescencia, hacia la edad de 12 a 14 años, y está pues particularmente marcada por los items del nivel topológico. Las puntuaciones inferiores observadas en el nivel topológico se explican quizás en parte por la familiaridad relativa con las figuras métricas y afines, las cuales son más a menudo utilizadas en los manuales escolares como en la vida corriente. Pueden también explicarse por el tipo de habilidad psicológica solicitada por los items relacionados a estos diferentes niveles geométricos. En efecto, los items de nivel topológico, donde se trata

de interpretar una proyección del objeto, parecen más "operatorios" en el sentido del factor psicométrico "visualización" que se refiere a la transformación de las formas; mientras los items de los otros niveles, donde se trata de describir la estructura del objeto, parecen más "analíticos" en el sentido del factor "relación" que se refiere al reconocimiento de las formas.

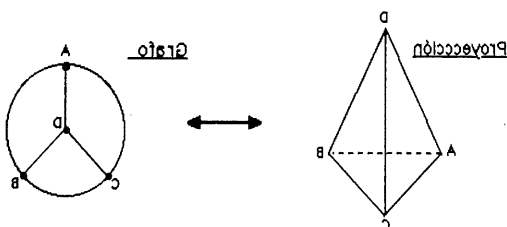
Bibliografía

- CRONBACH, L.J. *Essentials of Psychological Testing*. Harper & Row, New York, 1949, 1960 (1970).
- ELIOT, J., SMITH, I.M. *An international directory of spatial tests*. NFER-NELSON, (1983).
- KOSSLYN, S. MICHAEL *Image and Mind*. Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts (1980).
- KOSSLYN, S. MICHAEL *Ghosts in the Mind's Machine*. W. W. Norton & Compagny, New York (1983).
- LOHMAN, D.F. *Spatial Ability: A review and reanalysis of the correlational literature*. Aptitude Research Project. Report #8, Stanford California University (1979).
- LOHMAN, D.F., PELLEGRINO, J.W., ALDERTON, J.W. Regional Dimensions and Components of individual differences in Spatial Ability, in *Intelligence and Cognition: Contemporary Frames of Reference*. Ed. S.H. Irvine et S. E. Newstead, Marinus Nijhoff Publishers et NATO, Boston (1987).
- LUNKENBEIN, D., ALLARD, H., GOUPILLE, C. *Observations concernant le genèse et le développement d'idées spatiales chez l'enfant et chez l'adulte*. Rapport n° 34, Programme F.C.A.C., M.E.Q. (1981).
- LUNKENBEIN, D., ALLARD, H., GOUPILLE, C. *Structuration intérieure d'objets géométriques dans le genèse d'idées spatiales*. Rapport n° 35, Programme F.C.A.C., M.E.Q. (1982).
- MCGEE, M.G. Human Spatial Abilities: Psychometric Studies and Environmental, Genetic, Hormonal and Neurological Influences. *Psychological Bulletin*, vol. 86, n° 5, 889-918 (1979).
- MONGEAU, P. *Analyse et évaluation psychologique et géométrique de la représentation spatiale*. Université de Montréal, thèse de 3ième Cycle (1989).
- PELLEGRINO, J.W., ALDERTON D.L., SHUTE, V.J. Understanding Spatial Ability. *Educational Psychology*, vol. 19, n° 3, 239-253 (1984).
- PIAGET, J., INHELDER, B. *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Presses universitaires de France, Paris 1947/1972).

ANEXO

Ejemplo y pregunta en un ítem topológico

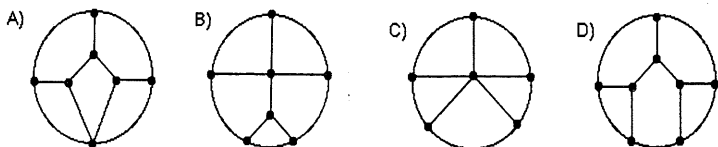
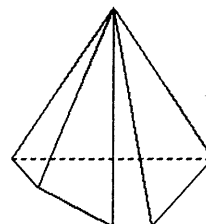
Ejemplo: Las figuras de abajo corresponden a una misma forma. Los vínculos entre los vértices A, B, C Y D son los mismos



Pregunta: ¿Cuál de los gráficos de abajo corresponde a la forma representada al lado?

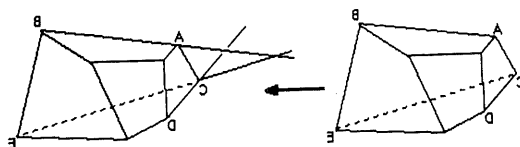
INDICA TU RESPUESTA

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |



Ejemplo y pregunta de un ítem proyectivo

Ejemplo: Si prolongamos en el espacio las aristas de la forma representada de abajo, algunas de ellas se cruzarán, mientras que otras nunca. Por ejemplo, las aristas AB y CD no se cruzan; en cambio, AB y CE si.



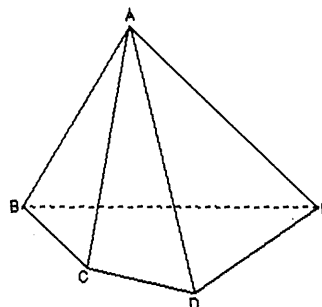
Pregunta: Mira bien la pirámide de la derecha. ¿Qué par de aristas se cruzarán en un punto exterior a la forma cuando las prolongamos en el espacio?

ELIGE TU RESPUESTA

- 1) AE Y BC;
- 2) BC Y DE;
- 3) AB Y CD;
- 4) AD Y BC.

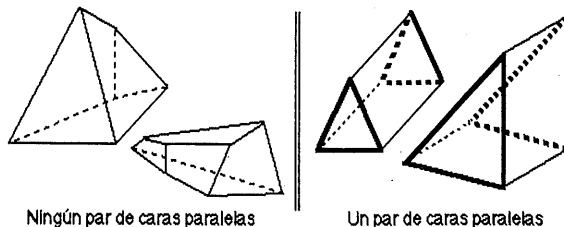
INDICA TU RESPUESTA

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| | | | |



Ejemplo y pregunta en un ítem afin

Ejemplo: Se pueden agrupar formas según el paralelismo de sus caras.



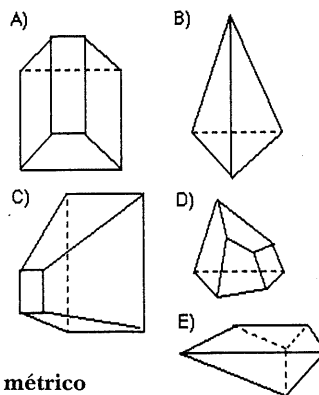
Pregunta: ¿Cuál de los enunciados de abajo (de 1 a 4) corresponden correctamente, a las cinco formas representadas más abajo, según el paralelismo de sus caras?

ELIGE TU RESPUESTA

- | |
|--------------------------------|
| 1) Las formas A, B y C juntas, |
| 2) Las formas B y E juntas, |
| 3) Las formas A, C y E juntas, |
| 4) Las formas A, C y D juntas |

INDICA TU RESPUESTA

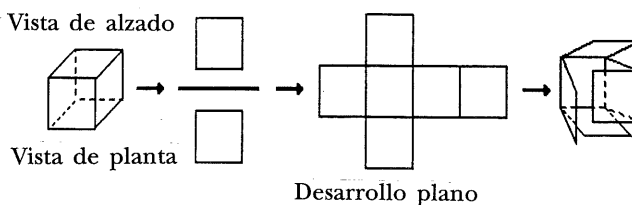
| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |



Ejemplo y pregunta en un ítem métrico

Ejemplo: El alzado y la planta

Las vistas de cara y de encima de la forma representada más abajo permiten conocer el verdadero tamaño de las caras y de las aristas. Se puede hacer pues un despliegue plano que, una vez replegada de nuevo, permite de obtener la forma ilustrada.



Pregunta: ¿Cuál de los desarrollos planos de abajo permiten obtener la forma representada por las vistas de planta y de alzado al lado?

INDICA TU RESPUESTA

| A | B | C | D |
|---|---|---|---|
| | | | |

