suma+ 69
Artículos
Marzo 2012
pp. 83-92

El papel de las conjeturas en el avance de las matemáticas

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty

Ilustramos el papel que pueden desempeñar las conjeturas en el avance de las matemáticas mediante ejemplos. Dichos ejemplos han sido seleccionados en diversos dominios de las matemáticas; sus enunciados tan simples y explícitos que pueden ser entendidos por la mayoría.

Palabras clave: conjeturas, desafíos matemáticos, historia de las matemáticas.

The Role of Conjectures in the Development of Mathematics

With the help of some examples, we illustrate the role that conjectures can play in the development of mathematics. The examples have been chosen in various domains of mathematics; their statements are simple enough and explicit to be understood by a good many people.

Key words: Conjectures, open questions in mathematics, history of mathematics.

C*onjetura*... si se abre un diccionario cualquiera en esa palabra, he aquí la definición que se encuentra: hipótesis formulada sobre la exactitud o inexactitud de un enunciado del que todavía se desconoce la demostración. En otras palabras, es una «pregunta abierta» para la cual se ha emitido una afirmación: «sí, pienso que esta afirmación es verdadera» o, lo que tiene la misma fuerza lógica, «no, conjeturo que este enunciado es falso». En matemáticas, como en otras ciencias, las conjeturas siempre han desempeñado un papel estimulante. Ilustraremos esto con ayuda de ejemplos, algunos de ellos extraídos de dos artículos que hemos tenido la ocasión de escribir sobre el tema estos últimos años (Hiriart-Urruty, 2007 y 2009).

Antes de ir más lejos, erradiquemos el error consistente en confundir las palabras *conjetura* y *coyuntura*[1]. Situémonos a continuación en un contexto determinado: cada dominio de las matemáticas tiene sus conjeturas, más o menos conocidas, más o menos comprensibles... Lo que sigue corresponde, pues, a ciertas partes de las matemáticas que conozco mejor que otras. Hay por lo tanto, para empezar, una cuestión de elección o gusto personal: tal o cual conjetura enunciada en un dominio será considerada esencial por un especialista

Artículo recibido en *Suma* en junio de 2011 y aceptado en octubre de 2011

del mismo, mientras que será juzgada como insípida y de escaso interés por un colega versado en otro dominio...

¿Qué es una conjetura célebre? Es, según mi parecer, una afirmación que verifica las tres propiedades siguientes:

— El enunciado es *simple, comprensible* para la mayoría de los matemáticos, e incluso de los no matemáticos. La conjetura mayor de Fermat, hasta su demostración por Wiles y Taylor en 1994, fue un ejemplo perfecto[2].
— Haber *resistido largo tiempo* los asaltos de los matemáticos profesionales.
— Haber *engendrado novedades matemáticas* a través de las diferentes tentativas de solución.

La imagen que me viene a la mente es la de ciertas máquinas tragaperras —de los juegos de verbenas y de casinos— cuyo objetivo consiste en hacer caer las monedas dispuestas en expositores (tras los vidrios) con ayuda de algunos movimientos autorizados (y controlados desde el exterior del aparato). Al ver dichas máquinas, la primera reacción es decirse: «Veo cómo hacerlo, lo conseguiré...». En consecuencia, se juega, se insiste, se acaba uno enervando... y se abandona. El siguiente en intentarlo reacciona inicialmente de la misma manera: «El anterior lo hizo mal, pero yo veo cómo hacerlo ...»; juega a su vez intentando hacer otra cosa, insiste y acaba por abandonar...

Debido a mi afición por estas cuestiones y también por su interés en los dominios de las matemáticas que sigo, he investigado, he «limpiado», he puesto en perspectiva y he transformado, a veces, algunas conjeturas en formas equivalentes (igualmente interesantes). Presentaré aquí algunas de ellas indicando, cuando sea posible, en qué consiste su interés y dónde nos encontramos en el camino hacia su resolución. Termino esta introducción con esta frase de Sir M. Atiyah (2000): «*S*ome problems open doors, some problems close doors, and some remain curiosities, but all sharpen our wits and act as a challenge and a test of our ingenuity and techniques».

Pierre de Fermat

Andrew Wiles

La conjetura sobre los sólidos convexos de grosor constante

(Dominios: Geometría,
Análisis y cálculo variacionales,
Optimización de formas)

¿Cuáles son los sólidos convexos de anchura (o grosor) constante de medida mínima?[3] Empezando por el plano (en 2D, como dicen los ingenieros), esta pregunta, que ha excitado a los mayores matemáticos, está completamente resuelta. El mismo Euler consideró convexos del plano de an-

chura constante a los que llamó *orbiformes*. Tienen formas muy variadas, desde el disco al triángulo curvilíneo de Reuleaux, y son utilizados como modelos para piezas de mecánica o para las ventanillas de avión. Blaschke y Lebesgue han demostrado que, entre los convexos del plano de anchura constante, el de menor área es el triángulo de Reuleaux. Las técnicas utilizadas son las de las series de Fourier. Una prueba diferente, muy reciente, basada en resultados y técnicas de Control óptimo, ha sido propuesta por mi joven colega Bayen.

Leonard Euler

La situación es totalmente distinta en el espacio (en 3D): se conocen sólidos convexos de grosor constante (llamados *esferiformas*) diferentes a las bolas, pero se desconoce cuáles son los de volumen mínimo. Existe, sin embargo, un candidato, la esferiforma de Meissner. Propuesta por este matemático hace más de 80 años, esta esferiforma es una especie de tetraedro regular en el que se hubiera soplado aire, con partes tanto esféricas como toroidales[4]. Por lo tanto, la conjetura es: la esferiforma de Meissner minimiza el volumen. En un artículo divulgativo, escrito en colaboración con T. Bayen, hemos presentado estos problemas con detalle, tanto en el plano como en el espacio (Bayen e Hiriart-Urruty, en prensa). Recientemente me han regalado una esferiforma de Meissner de 30 cm de grosor (constante), construida con resina sintética, que conservo en mi despacho. Me deleita contemplarla, palparla, aunque eso no me proporcione ninguna idea para tratar de avanzar en la resolución del problema planteado. Llegué incluso a pensar que podría proponer la esferiforma de Meissner para construir una escultura insertada entre los tres edificios de mi instituto de matemáticas: todos la verían del mismo grosor (analistas, geómetras, probabilistas, etc.), cualquiera que fuera el edificio y el piso en que se encontraran. Confiesen que es difícil ser más consensual entre los matemáticos...

¿Qué aporta esta conjetura al avance de las matemáticas? ¿Qué consecuencias tendría su resolución? Desde el punto de vista del cálculo variacional es un problema «vicioso» en el sentido de que acumula todas las dificultades que pueda uno imaginar (convexidad «a contrapelo» de la función objetivo, restricciones difíciles de tomar en cuenta). Verlo un poco más claro ayudaría a obtener «certificados de optimalidad» en problemas variacionales no convexos. Se han conseguido progresos en este sentido, algunos de ellos muy recientes... Y una y otra vez la esferiforma de Meissner satisface las condiciones de optimalidad obtenidas. También podría abordarse la cuestión desde el punto de vista del cálculo científico: aplicar, brutal y masivamente (a la versión discretizada del problema), los algoritmos más potentes conocidos y ver si aparece el sólido de Meissner... Eso es lo que se ha sugerido en Hiriart-Urruty (2009), sin que dispongamos de una respuesta convincente hasta ahora.

La conjetura sobre el camino más corto a lo largo de las aristas de un politopo convexo

(Optimización lineal, Cálculo científico)

Nos referimos ahora a los politopos convexos de $\mathbb{R}^d$ (es decir, los poliedros convexos compactos con interior no vacío) y la forma de minimizar una función lineal sobre ellos (este dominio se conoce como Programación u Optimización lineal). He aquí una presentación sucinta de la conjetura del camino más corto a lo largo de las aristas de un politopo convexo, tal como fue formulada por Hirsch en 1957.

Si x e y son vértices de un politopo convexo P, representamos por $\delta_P(x, y)$ el menor entero k tal que x e y se pueden unir mediante un camino formado por k aristas. A continuación, llamamos *diámetro de* P al máximo de los $\delta_P(x, y)$ cuando x e y recorren los vértices de P. Finalmente, para $n > d \geq 2$ se denota por $\Delta(d, n)$ el diámetro máximo de los politopos convexos P de $\mathbb{R}^d$ que poseen n facetas. Por ejemplo, en el plano ($d = 2$), es fácil comprobar «a mano» que $\Delta(2, n)$ es la parte entera de $n/2$. Por otro lado, considerando el politopo particular $P = [-1, +1]^d$ de $\mathbb{R}^d$ (que posee $n = 2d$ facetas), se concluye que $\Delta(2, 2d) \geq d$.

La conjetura de Hirsch se enuncia como sigue:

$$\text{Para todo } n > d \geq 2,\ \Delta(d, n) \leq n - d \qquad [1]$$

Aunque esto no sea evidente, la conjetura de Hirsch estaría asegurada si se pudiera demostrar en el caso particular de $n = 2d$. Es decir: ¿se cumple $\Delta(d, 2d) \leq d$? De ahí el nombre de «d-conjecture» utilizado en ocasiones para referirse a ella. Como $\Delta(2, 2d) \geq d$ (véase arriba), el mayorante sugerido es ciertamente el mejor posible. Por lo tanto, la d-conjetura puede formularse de la siguiente manera equivalente:

$$\text{Para todo } d \geq 2,\ \Delta(d, 2d) = d \qquad [2]$$

Como es costumbre en todo intento de resolución de conjeturas, se empieza tratando casos particulares, o bien se las relaciona con problemas conexos de los que se sepan más cosas. Así, la conjetura de Hirsch, tal y como está formulada en [1], fue demostrada para $d \leq 3$ y para todo n, así como para toda pareja (n, d) que verifique $n \leq d+5$. La d-conjetura, tal y como está formulada en [2], fue demostrada $d \leq 5$.

La d-conjetura permanecía, pues, abierta para $d \geq 6$. Además, la opinión general de los especialistas en el tema era que la conjetura era falsa para valores de d suficientemente grandes. Fue en mayo de 2010, mientras preparaba estas líneas, que se escuchó un trueno procedente de España: ¡la conjetura de Hirsch (la d-conjetura) era falsa! Un contraejemplo había sido propuesto por Francisco Santos (Universidad de Cantabria, Santander). Este autor ha construido un politopo convexo de $n = 86$ facetas en $\mathbb{R}^{43}$ cuyo diámetro es estrictamente mayor que 43 (contradiciendo así la desigualdad [1]). Tras ser anunciado el hallazgo en un coloquio, la novedad se propagó rápidamente a través de Internet (Santos, 2010). Una consecuencia ha sido que Santos se ha visto sumergido por los mensajes de felicitación y por las invitaciones para dar conferencias[5]. Es el lote de las conjeturas que tienen cierto impacto: cierta notoriedad está asegurada, raramente la fortuna...

En todo caso, la conjetura de Hirsch dejó de serlo para convertirse su negación en un teorema.

Francisco Santos

Las conjeturas acerca de los puntos más cercanos y más lejanos de un conjunto cerrado

(Análisis real, Aproximación)

Las dos preguntas siguientes están próximas, al menos en su formulación. Se refieren al *Análisis real* o, con mayor precisión, a la *Teoría de la Aproximación*.

La conjetura de los puntos más cercanos

Sea $(H, (.|.))$ un espacio de Hilbert real, con la norma $||.||$ derivada del producto escalar $(.|.)$. Sea S un conjunto cerrado no vacío de H. Para todo x de H se denota por $\mathbb{P}_S(x)$ el conjunto de puntos de S cuya distancia a x es mínima (también se le llama el conjunto de las proyecciones de x sobre S), es decir:

donde $d_S(x)$ representa la distancia de x a S definida por:

$$\mathbb{P}_S(x) = \left\{ s \in S \;\middle|\; \|x - s\| = d_S(x) \right\}$$

El conjunto $\mathbb{P}_S(x)$ es eventualmente vacío, puesto que estamos en un con-

$$d_S(x) = \inf_{s \in S} \|x - s\|$$

texto de espacio de dimensión infinita. Cuando $\mathbb{P}_S(x)$ se reduce a un único elemento (en cuyo caso se dice que $\mathbb{P}_S(x)$ es un *singleton*), se utiliza la notación $\mathbb{P}_S(x)=\{P_S(x)\}$.

Si S es, además, *convexo*, sabemos (e incluso enseñamos) que $\mathbb{P}_S(x)=\{P_S(x)\}$ para todo $x \in H$. P_S se denomina entonces el operador proyección sobre S.

David Hilbert

La primera pregunta planteada se refiere al recíproco de esta afirmación:

$$(\mathbb{P}_S(x) \text{ es un singleton para todo } x \in H) \Rightarrow \\ \Rightarrow^{?} (S \text{ es convexo}). \qquad [3]$$

Si H es de dimensión finita, la respuesta es conocida y positiva desde Bunt (1934) y Motzkin (1935). Las demostraciones, variadas, hacen las delicias de quienes proponen los temas para los concursos (de CAPES o de cátedras, por ejemplo). En su forma más general, es decir [3], la pregunta fue planteada por Klee hacia 1961, quien conjeturaba que la respuesta era: no. A día de hoy, el problema no ha sido resuelto completamente, es decir, no existe una demostración de la implicación [3] y nadie ha propuesto un ejemplo de conjunto cerrado no convexo S para el cual $\mathbb{P}_S(x)$ es un singleton para todo $x \in H$. Por supuesto, ha habido muchas contribuciones al problema, principalmente con el siguiente formato: si se añade una condición adicional acerca de S (relativa a su topología, a la aplicación P_S), entonces sí, la implicación [3] es verdadera.

Nosotros mismos hemos estudiado esta cuestión transformándola en un problema equivalente relativo a la diferenciabilidad (en el sentido de Gâteaux, de Fréchet, etc.) de la función distancia d_S o de su cuadrado. Al hacerlo nos hemos limitado a desplazar el «agujero» entre la condición necesaria y la condición suficiente. Si la diferenciabilidad de d_S en los sentidos de Gâteaux y de Fréchet fuesen equivalentes (bajo la hipótesis de [3]) la pregunta estaría resuelta... Ahora bien, no es este el caso.

La conjetura de los puntos más lejanos

Sea $(X, ||.||)$ un espacio de Banach, aunque también pueda ser un espacio de Hilbert $(H, (.|.))$ como anteriormente. Sea S un conjunto cerrado acotado no vacío de H (incluso convexo). Para todo x de H se denota por $\mathbb{Q}_S(x)$ el conjunto de puntos de S cuya distancia a x es máxima (el conjunto de puntos de S más alejados de x).

Es decir:

$$\mathbb{Q}_S(x)=\left\{s\in S \,\middle|\, \|x-s\|=\Delta_S(x)\right\}$$

donde el alejamiento máximo $\Delta_S(x)$ de x a S se define como:

$$\Delta_S(x)=\sup_{s\in S}\|x-s\|$$

La pregunta planteada es la siguiente:

$$(\mathbb{Q}_S(x) \text{ es un singleton para todo } x\in H) \overset{?}{\Rightarrow} (S \text{ es asimismo un singleton}). \quad [4]$$

Al igual que en la cuestión anterior, la respuesta es positiva y conocida desde hace mucho tiempo en dimensión finita (siendo, por otra parte, bastante fácil de obtener). Pero formulada en el contexto general de un espacio de dimensión infinita (de nuevo por Klee hacia 1961), la pregunta sigue hoy sin respuesta. Aquí, la convexidad de la función Δ_S y la de su cuadrado Δ_S^2 se consiguen sin hipótesis adicionales (¡gratis!). Nosotros mismos hemos estudiado esta cuestión y la hemos transformado en otra del tipo *diferenciabilidad Gâteaux vs diferenciabilidad Fréchet* de la función convexa Δ_S^2.

Stefan Banach

Dicho esto, el «agujero» entre estas dos nociones de diferenciabilidad sigue siendo importante incluso para las funciones convexas.

¿Qué aportaría al Análisis una respuesta a estas dos preguntas arriba planteadas? Nada esencial, ciertamente. Cambiaría un poco la estructura de ciertos problemas planteados en teoría de la Aproximación. ¿Quién puede responder a las preguntas planteadas, ora demostrando la implicación [4], ya negándola mediante un contraejemplo «retorcido»? Seguramente un virtuoso del Análisis... La recompensa será el reconocimiento del medio (y cierta notoriedad).

Conjetura sobre la cota inferior del producto escalar de vectores de signos y de vectores unitarios

(Probabilidades, Combinatoria)

Consideremos

— un vector unitario $a=(a_1, ..., a_n)\in\mathbb{R}^n$, es decir, de norma euclídea (la usual) igual a 1.

— n variables aleatorias reales independientes $X_1, X_2, ..., X_n$ con la misma ley de distribución:

$$P(X_i=1)=P(X_i=-1)=1/2$$

Se conjetura que:

El producto escalar Xa, la suma de $X_i a_i$ para $i=1, ..., n$, barre todo el intervalo:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\cdot a_i\right|\le 1\right)\ge\frac{1}{2} \qquad [5]$$

Lo que expresa [5] es que el valor de ese producto escalar está «concentrado»

$$\left[-\sqrt{n},\sqrt{n}\right]$$

sobre el intervalo [–1, +1] en más del 50% de los casos. No se puede mejorar el 1/2 en la cota inferior de [5], incluso cuando la n es pequeña (tome el ejemplo de $n = 2$).

Si no le agradan las Probabilidades, puede presentarse la conjetura bajo una forma equivalente, en términos puramente combinatorios. Para, $i = 1, ..., n$ sea $\varepsilon_i \in \forall \{-1, +1\}$, de manera que los 2^n números reales $\varepsilon_1 a_1 + \varepsilon_2 a_2 + ... \varepsilon_n a_n$ se distribuyan sobre el segmento:

$$\left[-\sqrt{50}, \sqrt{50}\right]$$

Se conjetura entonces que más de la mitad de ellos se encuentran en el segmento [–1, +1]:

$$\frac{\mathrm{Card}\left\{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n) : \varepsilon_i \in \{-1, +1\}\ \forall i, \left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot a_i\right| \leq 1\right\}}{2^n} \geq \frac{1}{2} \quad [6]$$

De entre todas las interpretaciones de [6], he aquí una muy expresiva. La suma:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i$$

se reparte en dos sumas parciales (donde, recordémoslo, $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es unitario). Entonces, al menos la mitad de estas particiones son aproximadamente iguales, es decir, difieren, como mucho, en 1. Escribamos esto de forma precisa. Sea I^+ una parte de $\{1, ..., n\}$ y sea I^- su complemento en $\{1, ..., n\}$, de manera que:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \cdot a_i = \sum_{i \in I^+} a_i - \sum_{i \in I^-} a_i$$

Entonces, de acuerdo con [6],

$$\sum_{i \in I^-} a_i - 1 \leq \sum_{i \in I^+} a_i \leq \sum_{i \in I^-} a_i + 1$$

para al menos la mitad de las posibilidades de I^+.

La conjetura que acabamos de enunciar tiene su origen en dos dominios diferentes: en teoría del Control Automático (en relación con las soluciones robustas de sistemas cuadráticos bajo incertidumbre) y en Combinatoria-Probabilidades. Nuestro trabajo ha consistido en construir un puente entre las dos formulaciones, y en informar a cada parte de la contribución de la otra. La mejor cota inferior conocida (en [5] o en [6]) es 3/8, restando por hacer un esfuerzo del 12,5% para llegar a 1/2 y validar así la conjetura, o bien encontrar un contraejemplo.

Sin alcanzar el resultado último, también se han obtenido para esta conjetura resultados «condicionales»: «Si la cota inferior se alcanza, entonces se pueden obtener otras cotas útiles para controlar la incertidumbre de ciertos sistemas que deben ser controlados».

Conjetura acerca del determinante de matrices normales (Cálculo matricial)

El Álgebra lineal o el Cálculo matricial se prestan igual de bien a la formulación de conjeturas fáciles de entender. Las siguientes se refieren precisamente a este dominio de las matemáticas.

Recordemos, para empezar, que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se dice que es *normal* si puede diagonalizarse mediante una matriz unitaria. Hay docenas de caracterizaciones de la normalidad de una matriz. Indiquemos simplemente que son normales las matrices hermíticas, antihermíticas y unitarias[6]. La conjetura del determinante de Marcus (1973), enunciada de forma independiente por De Oliveira (1982) (abreviada como la conjetura OMC) se enuncia como sigue:

Si A y B son matrices normales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ con valores propios prescritos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ y $\mu_1, ..., \mu_n$ respectivamente, entonces $\det(A - B)$ pertenece a la envoltura convexa del conjunto:

$$\left\{\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda_i - \mu_{\sigma(i)}\right) : \sigma \in S_n\right\} \quad [7]$$

siendo S_n el conjunto de permutaciones de n elementos.

Aunque la conjetura OMC haya sido verificada para numerosas subclases de matrices normales, todavía se mantiene para su forma general.

Conjetura acerca de la norma de la inversa de una matriz con datos inciertos (Cálculo matricial)

Sea $A=[a_{i,j}]\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz invertible, con datos $a_{i,j}$ inciertos en el sentido siguiente: $a_{i,j}\in[0,1]$ para todo $i,j\in\{1, ..., n\}$. Se denota por $||.||_F$ la norma matricial de G. Frobenius, es decir, la definida como:

$$\|M\|_F = \sqrt{\mathrm{traza}\left(M^T M\right)}$$

La conjetura anunciada, debida a Sloane y Harwith (1976), se enuncia de la siguiente forma:

$$\|A^{-1}\|_F \geq \frac{2n}{2n+1} \qquad [8]$$

Su origen está en Óptica y en Estadística. Se conocen casos de igualdad en [8] para cierta clase de matrices (llamadas de Hadamard). Como se puede ver, la formulación es muy simple y, sin embargo, la desigualdad sigue sin estar confirmada ni invalidada.

Conjetura (o Hipótesis) de Riemann (Análisis, Teoría de números)

La Teoría de números es un dominio donde abundan las conjeturas, con formulaciones desde las más simples (¿no lo es Fermat?) a las más complicadas[7]. Mencionemos dos de las más célebres:

— La conjetura de Goldbach (1742): «todo entero par estrictamente superior a 2 se puede escribir como la suma de dos números primos (pudiendo utilizarse dos veces el mismo número primo)». Dicho de una forma más imaginativa: «todo entero estrictamente superior a 2 es la media aritmética de dos números primos». La mayoría de los matemáticos especialistas en el tema piensan que es verdadera.

— La conjetura acerca de la infinitud de los números primos gemelos (de la forma n y $n + 2$): «hay una infinidad de números primos n tales que $n+2$ también es primo». Para los (jóvenes y dinámicos) sexagenarios, he aquí una golosina (que me han regalado recientemente): 60 es la suma de dos parejas de números primos gemelos, 60 = 11 + 13 + 17 + 19, así como la suma de dos números primos gemelos, 60 = 29 + 31.

Pero la conjetura más célebre, la que domina a las demás, que asegurará celebridad y fortuna a quien la responda, es la conjetura de Riemann (1859) (también se dice, y con mayor frecuencia, «la hipótesis de Riemann»). En su forma básica, expresa que la función de Riemann, es decir, laprolongación analítica en una función holomorfa definida para todo número complejo z diferente de 1 de la función de variable compleja:

$$z \mapsto \zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

tiene todos sus ceros no triviales situados sobre la recta de ecuación $\Re e(z)=1/2$ [8]. Uno de los aspectos fascinantes de esta conjetura es que puede relacionarse con diversos dominios de las matemáticas, como bien explica el excelente artículo de síntesis (Balazard, 2010). Otro aspecto es que ha sido verificada para los primeros millones de ceros de ζ (los 1023 primeros ceros a finales de 2004, probablemente muchos más hoy). Se cuenta que el matemático David Hilbert, preguntado sobre lo primero que pediría al despertar de un sueño de más de 500 años, respondió que sería esto: «¿Ha resuelto alguien la conjetura de Riemann?». Igualmente asombrosas son las diversas formas equivalentes que puede tomar la conjetura de Riemann, en prácticamente todos los dominios de las matemáticas. Nuestra forma equivalente favorita es la de Lagarias (2002); no nos podemos resistir al placer de presentarla. Sean:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(a veces llamados números reales armónicos);

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

la suma de los divisores de n ($\sigma(6)=12$ por ejemplo). Entonces, una *forma equivalente de la conjetura de Riemann* con igualdad únicamente para $n = 1$ es:

$$\forall n \geq 1, \sigma(n) \leq H(n) + \exp(H_n) \cdot \ln(H_n) \quad [9]$$

Georg Friedrich Bernhard Riemann

Naturalmente, se necesita un profundo trabajo matemático para llegar hasta allí; el trabajo de toda una vida de matemático, por ejemplo. Reconozcamos que [9] es muy fácil de entender, incluso por un estudiante de matemáticas debutante; no menos cierto es que encontrar una respuesta está fuera de nuestro alcance por ahora.

Conclusión. Las demostraciones de las conjeturas, cuando se producen

¿Intentar demostrar una conjetura? Hay matemáticos que dedican a ello toda su vida. Ocurre en ocasiones que una conjetura es demostrada por un matemático que no conoce (exacta o completamente) lo que se había hecho hasta entonces sobre el tema.

Atacar la resolución de una conjetura aporta matemáticas nuevas (nociones o técnicas), estableciendo a veces conexiones inesperadas entre diferentes dominios de las matemáticas.

Las conjeturas matemáticas pueden ser más o menos especializadas, más o menos sofisticadas en sus enunciados. Todo matemático profesional es capaz de presentar una muestra, como acabamos de hacer. Algunos matemáticos célebres han llegado a elaborar sus propias listas de problemas abiertos favoritos como, por ejemplo, S. Smale (1998). Lo que hemos intentado ilustrar aquí es el papel que desempeñan las conjeturas en el avance de las matemáticas.

Terminamos con una frase, extraída de la misma obra (Atiyah, 2000) que la citada en la introducción. Connes se la ha atribuido a Choquet y es, de hecho, terrible. Hela aquí:

> Cuando se ataca frontalmente un problema abierto bien conocido hay que asumir el riesgo de ser recordado por el fracaso... antes que por cualquier otra cosa.

Referencias bibliográficas

Atiyah, M. (2000): «Preface», en V. I., Arnold, M. Atiyah, P. Lax, B. Mazur (eds.): *Mathematics: frontiers and perspectives,* Publications of the American Mathematical Society, USA, vi-xi.

Balazard, M. (2010): «Un siècle et demi de recherches sur l'hypothèse de Riemann», *La Gazette des mathématiques,* n.° 126, Société Mathématique de France, 7-24.

Bayen, T., e Hiriart-Urruty, J. B.: «Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D): du neuf avec du vieux», *Ann. Sci. Math. Québec* (en prensa).

Hiriart-Urruty, J.-B. (1998): «Ensembles de Tchebychev vs. ensembles convexes: L'état de l'art vu via l'analyse convexe non lisse», *Ann. Sci. Math. Québec* n.° 22, 47-62.

— (2005): «La conjecture des points les plus éloignés revisitée», *Ann. Sci. Math.Québec,* n.° 29, 197-214.

— (2007): «Potpourri of conjectures and open questions in nonlinear analysis and optimization», *SIAM Review,* vol. 49, n.° 2, 255–273.

— (2009*a*): «A new series of conjectures and open questions in optimization and matrix analysis», *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations,* vol. 15, 454-470.

— (2009*b*): «An open global optimization problem», *J. of Global Optimization 45,* n.° 2, 335-336.

Lagarias, JC. (2002): «An elementary problem equivalent to the Riemann hypothesis», *The American Mathematical Monthly,* vol. 109, 534-543.

Oliveira, G. N. de (1982): «Normal matrices (research problem)», *Linear and Multilinear Algebra,* n.° 2, 153-154.

Santos, F. (2010):
<http://gilkalai.wordpress.com/2010/05/10/francisco-santos-disproves-the-hirsch-conjecture/>

Smale, S. (1998): «Mathematical problems for the next century», *Math. Intelligencer,* n.° 20, pp. 7-15.

Zhang, X. (2007): «Open problems in matrix theory», *ICCM, vol. II.*

Jean-Baptiste Hiriart-Urruty
Institut de mathématiques, Université Paul Sabatier
<www.math.univ-toulouse.fr/ ~jbhu/>

Agradecimientos. Quisera agradecer los comentarios de Michel Balazard (Marseille), Roger Mansuy (Paris) y Maryvonne Spiesser (Toulouse), que han contribuido a mejorar la versión inicial de este texto, y la traducción del mismo al español por mi colega Miguel A. Goberna (Alicante).

1 Con ocasión de la entrega del Premio Fermat de investigación 1995 a Andrew Wiles, en octubre de 1995 en el Ayuntamiento de Toulouse, una efímera Secretaria de Estado para la Investigación nos estuvo «fastidiando» a lo largo de su discurso con la «coyuntura de Fermat»… (N. del T.: obsérvese que los términos franceses *conjecture* y *conjoncture* están fonéticamente más próximos entre sí que sus equivalentes en español, *conjetura* y *coyuntura*).

2 Como otros colegas, tengo en mi despacho un cajón lleno de «demostraciones» de este teorema, recibidas durante años, frecuentemente «papillas» incomprensibles donde el distingo acerca de la potencia n, $n \geq 3$ o no (en la ecuación $x^n+y^n=z^n$), ni siquiera aparece ... Esto tiene un lado simpático, en ocasiones patético. He renunciado a leer estas pseudo-demostraciones, a pesar de la insistencia, o de la paranoia, de sus autores, a quienes doy una respuesta tipo: «Empiece mostrando lo que ha hecho a un matemático de la universidad más próxima...».

3 Se dice que un convexo del plano tiene anchura constante cuando se puede encajar entre dos rectas paralelas igualmente separadas cualquiera que sea la orientación de las mismas. La definición es semejante para un convexo del espacio, sin más que sustituir rectas por planos.

4 No hay que confundirla con otro sólido convexo que hace el «buzz» en Internet desde 2007: *el gömböc*.

5 Tras una primera circulación de este texto, F. Santos me ha hecho saber que ha publicado en la *Gaceta de la RSME* (Volumen 13, 2010) un artículo dirigido a los matemáticos no especialistas y que pronto aparecerá otro, más técnico, en *Annals of Mathematics*. Su página web personal <http://personales.unican.es/santosf/Hirsch/>, contiene una recensión de artículos de prensa relativos a esta refutación de la conjetura de Hirsch.

6 N. del T.: A es *unitaria* si $A^{-1}=A^*$; A es *normal* si existe una matriz unitaria U tal $U^{-1}AU$ que es diagonal. Se demuestra que las matrices normales son aquellas que conmutan con sus adjuntas, *i.e.*, tales que $AA^* = A^*A$; Aes hermítica si $A^* = A$ (p.e., las matrices reales simétricas); finalmente, A es *antihermítica* si $A^* = -A$ (p.e., las matrices reales antisimétricas).

7 El nombre del matemático J.-P. Serre está asociado a numerosas conjeturas ... Le oí decir una vez, en una conferencia, que más valdría denominar a estas conjeturas con los nombres de las estaciones del metro parisiense, la «conjetura Réaumur-Sébastopol por ejemplo»...

8 Los números reales $-2n$ para $n \geq 1$ se denominan ceros triviales de ζ porque su existencia es relativamente fácil de demostrar.

9 Este mismo matemático acaba de publicar un libro que recopila sus artículos acerca de otra conjetura, así mismo muy célebre y fácil de entender: la llamada conjetura de Syracusa o «3*x*+1» (una cuestión sobre la convergencia eventual de una sucesión inocente de enteros). Véase: Lagarias, J. C. (2010): *The ultimate challenge: The problem,* Publications of the American Mathematical Society.