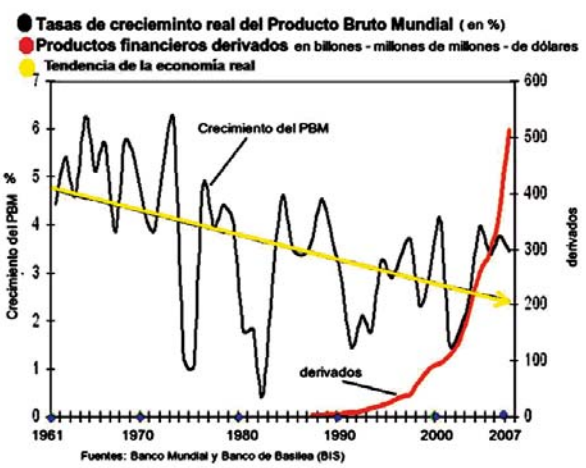
suma+ 66
Febrero 2011, pp.117-129

Los anillos de Anchuria

- "¿Debía el señor Espiritión entender que la Compañía no pasaba de 25.000.- pesos?"
- "Nada de eso, 25 pesos justos. Y en plata, no en oro". El señor Espiritión se levantó
-"¡Ese ofrecimiento es una burla a mi Gobierno!"- exclamó con indignación
- "Entonces -dijo el señor Franzoni, con tono de advertencia- lo cambiaremos"
Y en efecto, lo cambiaron....(al Gobierno)

O. Henry, en "Reyes y Berzas"

En este Gran Casino que es hoy nuestro mundo, los sistemas educativos con sus planes y sus reformas, sus sistemas evaluativos y sus programas, no son una parte menor. Conviene pues que hagamos un esfuerzo por analizar su historia, por si acaso fuéramos capaces de aprender alguna cosa útil de ella y construir así futuros menos volátiles.



Tendencia de la economía real[1]

Tengo en las manos la monografía "Ideas de *em*matemática Castelnuovo" que la FESPM dedicó a la profesora Emma Castelnuovo, la de las "nervudas y adorables manos". En ella se recoge, en las páginas 51-60, la conferencia con que nos deleitó e instruyó en las IX JAEM, celebradas en Lugo en 1999

La he releído en varias ocasiones, la he subrayado y vuelto a subrayar, pero hoy le saco más jugo, tal vez gracias a las sugerencias que me llegan de dos lugares tan diversos como el correo de mi hja Xaro y el del Profesor Antoni Montes, amigo entrañable de Eliseo Borrás. Xaro me envía un enlace y un texto escueto: "Mamá, estoy segura de que te gustará", el segundo me insiste en que las citas, entresacadas del Manifiesto que el Grupo Cero publicó en Escuela 75 para el número anterior de esta sección, no reflejan todo el espíritu de aquel Manifiesto. ¡Hay que volver a publicarlo completo!, se oye en su mensaje.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwarizmi"
ariadna@revistasuma.es

Ambos mensajes y las palabras de Emma me sugieren un nuevo texto, estructurado en tres epígrafes, que intentaré compartir.

1.- En el extremo más antiguo, el grito de Dieudonné ¡Abajo Euclides! que tan bien contextualiza Emma en su conferencia, en la página 51 de su monografía: "Pero es cierto que el propósito de Euclides (300 a. C.) no era el de usar su obra con los jóvenes de la escuela; en efecto, sus *Elementos* nunca fueron introducidos en las escuelas griegas de su tiempo." Fueron los monasterios medievales quienes empezaron a utilizar, como texto para los jóvenes ricos, la traducción simplificada en latín de Boecio; los árabes hicieron traducciones más rigurosas a su lengua; la imprenta facilitó la extensión del uso de esta obra como libro de texto para los jóvenes de las familias pudientes, hasta que Comenius en el siglo XVII y Claireaut en el XVIII publican sendos **manifiestos**[2] donde denuncian el carácter antipedagógico de los Elementos como libro de texto. Tras la Revolución Francesa el problema se agudiza, pues la educación ya no se pretende sólo para las minorías de la nobleza. Pero siempre fueron "voces que se pierden en el mundo de los que no quieren escuchar". Y así llegamos a la conferencia organizada por la OCDE en Royaumont en el 59, donde Dieudonné pronunció su famosa frase de protesta *"¡Abajo Euclides!*, acompañada de otra como propuesta alternativa *"...acercar el estudio de la matemática secundaria a los cursos de las Facultades de Matemáticas."*

2.- En los años setenta, la matemática moderna, que a la sazón era la estrella en las Facultades de Matemáticas, se introdujo en las aulas no universitarias, y la autoridad de Dieudonné se alió con las circunstancias por lo que distintas voces se alzaron contra ello. La monografía antes citada de Emma Castenluovo está en vuestro poder, nos la obsequió *Suma* con motivo del 90 aniversario de la profesora. En la página 58 dice Emma: "No, la oposición (a la enseñanza de la matemática moderna en niveles no universitarios) no llegó de la base. En el mes de agosto de 1976, durante el congreso del ICME en Karlsruhe, el gran geómetra inglés Michael Atiyah, en una conferencia plenaria, se lanzó contra los colegas universitarios con estas palabras:

> Habéis destronado a Euclides, y estoy de acuerdo. Pero ¿de qué manera habéis sustituido la enseñanza de la geometría? La matemática que se enseña hoy en día en la mayoría de los países está aún más alejada de la realidad..."

Emma Castelnuovo

Pero yo sostengo que el artículo-**manifiesto** del Grupo Cero de Valencia fue publicado en 1975, y nacía de la base, de la mejor base posible y desde las aulas de secundaria. No podían competir en capacidad de influencia con Atiyah, pero la fecha de su publicación indica que en la base ya había profesionales con formación muy profunda y de absoluta actualidad. La edición del manifiesto está agotada y la revista desaparecida, por lo que siguiendo la sugerencia de Antoni Montes transcribimos su texto íntegro en el anexo de este artículo. Entre sus conclusiones destacamos la siguiente: "dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven."

3.- En el extremo más moderno el excesivo énfasis que se ha puesto en el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y de la Comunicación) para el aprendizaje de las matemáticas, parece que repite de nuevo esa situación en la que un gran avance, esta vez tecnológico, invade las aulas de secundaria sin dejar apenas resquicio para nada más. Puede que necesitemos un **manifiesto** contra la tendencia a considerar las TIC como *la herramienta* del aprendizaje de las matemáticas. Esta vez el peligro viene implícito en las propias TIC, pues no son una herramienta más, son atractivas, motivadoras y poderosas, pero ¡cuidado!, no pueden anular al profesor, al creador de situaciones didácticas, al facilitador del aprendizaje, al transmisor de la pasión por la belleza de las matemáticas, presente en cada actividad bien elegida para cada nivel.

Emma Castelnuovo nos avisa en la pág. 60 de su monografía: "la informática gráfica ha llamado la atención sobre una geometría dinámica. Pero se trata de un dinamismo *dirigido*, no estimulado por la intuición". Notemos la tensión que Emma introduce entre los términos dinámico y *dirigido,* calificando respectivamente a geometría y enseñanza, es decir, es dinámica la geometría, pero es pasivo su aprendizaje ¡cuidado!.

Nuestro alumnado corre serios peligros: el de la adicción ya no es discutido por nadie; el de la confusión entre el encantamiento que producen las imágenes y la comprensión profunda que deseamos facilitar con el uso de procesadores dinámicos (sólo el profesor puede intervenir para salvar este peligro); en otro aspecto, la abundancia de información no equivale a información contrastada, de nuevo es necesaria la intervención del profesorado; también es responsabilidad del profesorado la elección de la herramienta TIC a utilizar, valorando la relación tiempo de aprendizaje de matemáticas-tiempo de aprendizaje de la herramienta TIC y su eficacia didáctica. El uso en el aula de sencillos lenguajes de programación, como winLOGO, facilita la actividad de resolución de problemas, revela la dependencia del ordenador respecto al alumno programador y no al revés, como suele ocurrir entre el alumno usuario y el ordenador dotado de software sofisticado y atractivo.

En definitiva, pensamos que las TIC pueden prestar un gran servicio al aprendizaje de las matemáticas, pero el peligro ya está aquí, pues, ya se ha instalado su uso como artilugio de entretenimiento y búsqueda trivial de información, así como la idea de que TODO ESTÁ EN LA RED y ya no son necesarios los profesores.

Y un peligro peor: el de la brecha que separa cada vez más a las personas alfabetizadas en las nuevas tecnologías y aquellas para las que resulta imposible, por diversas razones, el acceso a ellas.

Según Eliseo Borrás[3]:

> Nadie discute hoy que las nuevas tecnologías son un poderoso instrumento para el desarrollo de las matemáticas. El ordenador ha cambiado el rumbo de muchas investigaciones, cuantitativa y cualitativamente. Pero las matemáticas también han tenido influencia decisiva en el desarrollo de las herramientas para el ordenador. La influencia ordenador-matemática ha sido mutua.
>
> Pero no parecen tan brillantes los logros de la informática en la mejora de la enseñanza de las matemáticas: después de un tiempo tan dilatado desde su aplicación, no ha modificado sustancialmente la calidad de la enseñanza ni sus contenidos. Tal vez por tres razones principales: la falta de medios en los centros; la falta de preparación de los profesores y la dificultad añadida al aprendizaje de las matemáticas que representa la utilización del ordenador por parte del alumnado."

Y, en línea con su proverbial visión optimista, aporta aspectos positivos "tres ejemplos de posibles interacciones ordenador-matemáticas":

1. El ordenador puede actuar como *catalizador* del aprendizaje: al intentar explicar las sombras que un objeto produce sobre distintas superficies para obtenerlas sobre la pantalla de nuestro ordenador, nos vemos obligados a acudir a la geometría analítica. El instrumento, el ordenador, puede avivar nuestro deseo de aprender matemáticas.

2. Con el ordenador podemos *construir y ensayar modelos* basados en distintas ramas de la ciencia para buscar soluciones a problemas matemáticos: utilizando las leyes de la reproducción mendeliana se pueden construir algoritmos genéticos para la resolución de problemas matemáticos.

3. Con el ordenador podemos realizar *simulaciones*: si generamos una recta al azar en una región del plano, ¿cuál es la longitud esperada de la cuerda determinada por la recta sobre la región?

Por su parte, Andrea Goldsmit pone un ejemplo de su experiencia como profesora universitaria en Standford. Viene a decir que por mucho que haya que repensar cómo y qué se enseña y cómo se pueden aprovechar las nuevas herramientas (TIC), hay ocasiones para las que todavía no ha "encontrado nada mejor que escribir en una pizarra", porque el cerebro humano sigue aprendiendo del mismo modo y hay cosas concretas que necesitan un pensamiento pausado y profundo, dos características que no descansan en el estilo de aprendizaje superficial TIC. Os "reenvío" el enlace:

www.rtve.es/mediateca/videos/20101031/cientificos-frontera-agoldsmith-311010/917097.shtml

porque creo que también os gustará.

ANEXO

¿Para qué las matemáticas?

Artículo-manifiesto publicado en *Escuela 75.* nº 2. septiembre 1975

Un grupo de profesores de Matemáticas decidió poner en cuestión colectivamente los planteamientos habituales de la enseñanza de su materia. El trabajo que sigue puede ser considerado como expresión de sus actuales posiciones, de los problemas que se plantean y de las líneas de investigación que se proponen seguir desde ahora.

1. Introducción

Frecuentemente ocurre en la historia de las ciencias que, cuando emerge un poderoso nuevo método, el estudio de aquellos problemas que pueden tratarse con el nuevo método avanza rápidamente y los focos se concentran en él, mientras que lo demás tiende a ser ignorado o incluso olvidado, y su estudio es menospreciado[4]

En las matemáticas, ese nuevo método tiene sus raíces en el siglo XIX y se instaura con solidez desde comienzos de nuestro siglo con Hilbert. Desde 1950-55 el nuevo estilo tiene primacía en las universidades. En la enseñanza secundaria comienza a tomar fuerza hace poco más de 15 años y se desarrolla rápida y vigorosamente: se trata de la *reforma* de la enseñanza de las matemáticas.

Sin embargo, ya en 1962, Alhfors, Morris Kline, Wittemberg, Polya y otros, hasta 65 matemáticos, publicaron un artículo manifiesto en el "American Mathematical Montly", en el que criticaban los nuevos programas.

Debido a carecer de una información adecuada y múltiple que nadie nos ha dado -¿quienes han sido nuestros maestros?-, durante años hemos seguido muchos de nosotros el que creíamos que era el único camino a seguir: el camino de los reformadores. Papy, Sutter, Calame, etc., eran en la enseñanza media el reflejo de lo que habían sido nuestras lecturas universitarias y profesionales. Durante años no hemos hecho más que explicar-reflejar lo que íbamos leyendo, pensando que la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato debía ser una pequeña enseñanza universitaria.

En este sentido es una desgracia que Bourbaki haya nacido tan próximo a nosotros y, además, hablando francés, la lengua que nos era más accesible.

Todo venía tan bien preparado, tan bien empaquetado, ya listo para su uso inmediato, que se tenía la doble sensación de estar haciendo una revolución y de no correr ningún riesgo. Esta rara limpieza debiera haber sido suficiente para ponernos alerta; pero lo cierto es que no lo fue: hemos tardado en hacernos preguntas. Nos ha faltado reflexionar sobre nuestro trabajo. En particular sobre:

- las limitaciones, la polarización de nuestras fuentes;
- la conexión entre lo que enseñábamos y la realidad próxima;
- la conexión con las otras ciencias;
- el cambio que en la "misión" de la enseñanza media se estaba y se está produciendo ante nuestros ojos.

1.1. Ahora nos reconforta oír a grandes matemáticos, como Thom y Dieudonné, poner en duda determinados planteamientos:

> Es razonable preguntarse -dice Thom- si las necesidades de los matemáticos profesionales deben ser tenidas en cuenta en el nivel de la enseñanza secundaria. Imbuidos de espíritu bourbakista, los matemáticos de la generación actual han tenido la tendencia muy natural de hacer admitir en las enseñanzas superior y secundaria las teorías, las estructuras algebraicas que les habían sido tan útiles en sus propias investigaciones y que triunfan en el espíritu de la matemática de la época. Pero debemos preguntarnos si, en la enseñanza secundaria al menos, deben admitirse en los programas los últimos hallazgos de la técnica del momento[5]

Y afirma Dieudonné en la revista de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia:

> Los profesores de enseñanza secundaria, al igual que sus colegas de la Universidad, han descubierto que es mucho más fácil enseñar a manipular conceptos abstractos, incluso a los niños, que hacerles captar las realidades que se ocultan bajo esas abstracciones. De ahí su exagerada admiración por la lógica en particular, y la importancia anormal que tiene la tendencia a darle en su enseñanza.

Pero Thom escribía ésto en 1970 y Dieudonné lo hace refiriéndose precisamente al artículo de Thom. Los franceses han llegado con retraso, y, con ellos, nosotros. No obstante, llegar tarde no es faltar. Confiemos en ello.

1.2. En el manifiesto de Ahlfors, Polya... de 1962 se criticaban los nuevos programas. Se quejaban específicamente de que:

a. Los nuevos programas dejaban de seguir principios pedagógicos tales como éste:

> La introducción de términos y conceptos nuevos debe ir precedida de una preparación concreta suficiente. No se debería esperar que jóvenes inteligentes aprendan reglas arbitrarias.
>
> En los programas modernos -dice Kline- las matemáticas son una colección de estructuras deductivas. El tratamiento correcto, en mi opinión, no es deductivo, sino constructivo. Deberíamos empezar con situaciones simples y concretas y con argumentos heurísticos y sólo gradualmente llegar a una organización deductiva.

En las demostraciones el procedimiento debe ser tan intuitivo como sea posible, adoptar axiomas que signifiquen algo para el estudiante y demostrar sólo aquello que el estudiante piensa que requiere demostración. La verdadera función de la demostración no es demostrar lo obvio con objeto de lograr unos objetivos y alcanzar unos standards sofisticados y puramente profesionales, sino demostrar lo que no es obvio.

Lo que es necesario para la validez de la deducción -dice Polya- es una penetración intuitiva en cada paso, que muestre que la conclusión obtenida en ese paso se sigue evidente y necesariamente del conocimiento adquirido anteriormente (adquirido directamente por la intuición o indirectamente por pasos previos en la deducción).

Otro punto fundamental de la crítica es que:

b. Los nuevos programas no hacen suficiente uso de sistemas físicos a partir de los cuales los estudiantes puedan descubrir intuitivamente relaciones matemáticas. No se trata de desarrollar un cuerpo de ideas matemáticas y sólo después introducir varias aplicaciones físicas.

Las aplicaciones deben surgir de modo natural, simplemente porque las ideas matemáticas elementales tengan una importancia práctica y un significado práctico.

La teoría debe ser reinventada en lo posible y por ello no puede preceder a la práctica.

1.3. La respuesta dada por los reformadores es ésta:

Cuenta a nuestro favor el éxito que profesores adecuadamente preparados han tenido en mantener el interés de los alumnos en una materia que tiene la reputación de ser a menudo extremadamente aburrida y a veces muy abstrusa. Las enormes mejoras se consiguen en proveer de una base intelectual que permita entender las ideas matemáticas. Las notaciones son más claras: las definiciones son elegidas con más amplitud; la participación del estudiante es mayor y se dirige hacia lo más esencial; la ordenación de las materias se mejora; se han añadido nuevos e importantes temas, otros relativamente poco importantes (o incluso erróneos) se han suprimido, las relaciones con otros temas son tratadas más adecuadamente y un aire más creador e incitante campea por el programa[6].

Es innegable que la respuesta es atractiva y prueba de ello es el éxito que ha tenido –tiene– entre los profesores de matemáticas, y no sólo entre ellos. Hay, no obstante, contrarréplicas de tres tipos, al menos: *una, técnica,* que tiene que ver con la sistematización:

La inclinación natural de un matemático es dar una instrucción matemática para futuros matemáticos. Para preparar una lección de matemáticas el profesor imagina el alumno al que le gustaría enseñar, y es muy probable que este alumno imaginario se parezca un poco al propio profesor. Pero un matemático nunca debería olvidar que las matemáticas son algo demasiado importante para limitar su enseñanza a adecuarse a las necesidades del futuro matemático.

La mentalidad matemática se expresa en la tendencia a matematizar las matemáticas. Desde luego que los estudiantes deben aprender a matematizar, pero para empezar deben matematizar situaciones reales. Matematizar situaciones matemáticas puede ser el final, pero no el comienzo. Para muchos el objetivo de la enseñanza de las matemáticas es introducir a los muchachos en un sistema de matemáticas, sistema que innegablemente irradia encanto estético, el cual, sin embargo, no puede ser captado por personas que no tengan un profundo conocimiento de las matemáticas. La sistematización como objetivo final es un objetivo para futuros matemáticos. Pero jamás debe ser el objetivo de una instrucción matemática general. Si es la sistematización la que determina la tabla de materias, invariablemente incluirá materias carentes de interés y excluirá otras muy valiosas. Si el sistema está bien construido desde el punto de vista del autor, puede entusiasmar a éste por su rigor lógico, y si otros matemáticos comparten su punto de vista (lo cual es raro) puede que también les entusiasme a ellos. Pero que la enseñanza siga el sistema es antididáctico (por ejemplo, la anticipación de lo afín sobre lo métrico dictada por el sistematismo) (Freudenthal)[7].

Otra, ideológica y social: La enseñanza de las matemáticas es un hecho social como cualquier otro y no debe ni puede escapar a ello. Esta primavera se han celebrado elecciones para designar el Comité Nacional de la Asociación de Profesores de Matemáticas de Francia. Un grupo de diez candidatos se ha presentado con unos objetivos comunes. He aquí algunos de los puntos expuestos en sus candidaturas:

– La petición nacional para aligerar programas no cambia el estado mental que, bajo un vocabulario ultramoderno oculta un pensamiento escolástico muy próximo al de la Edad Media por su desprecio de las ciencias experimentales. Parece de buen tono defender a los muchachos procedentes de las capas sociales más desfavorecidas; pero, ¿quién puede creer que los nuevos programas de matemáticas, por su construcción lógica, ayudan a los muchachos procedentes de medios no intelectuales? La filosofía oculta de los nuevos programas no hace sino contribuir a una selección feroz que no tiene nada de democrática.

– El esfuerzo necesario de modernización de las matemáticas debe continuarse; pero ese trabajo no debe perder de vista la adaptación a nuestra época. Es precisa una enseñanza matemática que no pierda el contacto con la realidad tangible para evitar descorazonar a cierto número de alumnos (¡e incluso a cierto número de profesores!).

– Desde el comienzo de siglo, los matemáticos han tratado de poner en pie un formalismo y una axiomática que permitan unificar los resultados de las distintas ramas matemáticas. Este trabajo, partiendo de resultados concretos, ha sido realizado en Francia por la escuela bourbakista. Sería vano negar la aportación de estos matemáticos a la matemática de nuestra época. De este trabajo, en lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, la tendencia actual no es otra que la de conservar sólo el vocabulario. Se llega así a una matemática encantatoria, con sus grandes sacerdotes, sus templos, sus corifeos.

– Es la hora de hablar claro. Se va a matar a todos los niveles la enseñanza de las matemáticas creando una desgana en quienes la utilizan, una desgana en los alumnos y una desgana en los enseñantes, por ese parloteo esterilizante[8].

–*Y una tercera, didáctica*: Que "la participación del estudiante es mayor" y que "un aire más creador campea por el programa" es algo que sólo puede ser cierto bajo la hipótesis de que la creación formalizadora y la participación en la elaboración de reglas son los modos arquetípicos de la creación y participación en una clase de matemáticas. La participación y la creación pueden ser conseguidas también –y, en nuestra opinión, en un grado más alto– en una enseñanza en la que no prevalezca la sistematización.

1.4 Para nosotros es un hecho cotidiano, y para los rectores de la enseñanza una consigna, la gran presión existente para enseñar más matemáticas a los estudiantes a una edad cada vez más temprana, debido al rápido crecimiento de las aplicaciones de las matemáticas.

Si ése es el cometido que se nos asigna a los profesores de matemáticas, no nos parece que lo llevemos a buen término. Nos preguntamos si es *realmente* al rápido crecimiento de las aplicaciones de las matemáticas a lo que se debe el que enseñemos más matemáticas, y *precisamente* las matemáticas que enseñamos, que estamos obligados a enseñar.

¿No se nos debe exigir que sometamos a crítica la enseñanza que damos?: ¿Cómo se aprende? ¿Hasta dónde la sistematización? ¿Con qué rigor? ¿A quién interesan las matemáticas? ¿Qué papel desempeña nuestra enseñanza en una sociedad de clases? ¿Es la nuestra una enseñanza de clase? ¿A quién beneficia? ¿Podemos ofrecer una alternativa?

Es muy difícil considerar las matemáticas, en cuanto a fenómeno científico, social e histórico, desde un punto de vista unitario. Incluso el planteamiento de esa unidad puede que sea ya idealista o, yendo un punto más allá, religioso. Pero sí creemos que la consideración de *la enseñanza de las matemáticas del bachillerato en nuestro país* cabe hacerla desde una perspectiva unificadora. Por eso, en los apartados que siguen, unas tesis se solapan con otras.

No será preciso decir que estas tesis no son teoremas, ni pueden serlo. Las matemáticas no lo son todo. Esperamos poder justificar algunas de ellas en posteriores números de esta revista.

2. Etapas de aprendizaje y estudio. La sistematización

Los libros de texto presentan por lo común el teorema del binomio como una consecuencia del principio de inducción completa. En el proceso de la invención matemática esto sería un círculo vicioso. Un principio como el de inducción completa no puede ser formulado salvo que previamente se haya experimentado, y el teorema del binomio es la experiencia decisiva que conduce a este principio. Para formular la inducción completa es indispensable saber lo que es la inducción completa y para conocerla es preciso haberla ejercitado, por ejemplo, con el teorema del binomio. El proceso deductivo es obtener de los axiomas de Peano el principio de inducción completa y aplicarlo después a varios ejemplos. Éste es un ejemplo patente de inversión antididáctica. En verdad, el análisis del proceso de aprendizaje muestra que el camino didáctico es precisamente el opuesto. Primeramente debe haber ejemplos que obliguen al estudiante a inventar la inducción completa; en estos ejemplos el estudiante reconoce el principio común; luego lo aplica a casos más complicados. Si ha captado el principio, el profesor tratará de que el estudiante lo formule (cosa que puede no ser fácil); y finalmente éste será puesto en la vía de los axiomas de Peano, con tal de que haya tenido previamente alguna experiencia en axiomatizar. Los niveles del proceso de aprendizaje aparecen aquí en claro relieve. En el más bajo de ellos la inducción completa se ejercita. En el nivel siguiente se la hace consciente como principio organizador y puede convertirse en objeto de reflexión. En el mismo nivel o a un nivel más alto se le da forma lingüística. (Freudenthal: "Mathematics as an educational task")[9]

TESIS

2.1 Querer agotar un tema en un asalto (ahora todo sobre espacios vectoriales; ahora todo sobre máximos y mínimos; ahora todo sobre integración) además de ser imposible en la enseñanza media, es una herencia Idealista, Inmovilista y Conservadora que oculta y anula todo el verdadero proceso de creación en matemáticas y que obliga a un alejamiento de la realidad sensible y de las ciencias empíricas, al tiempo que ayuda a desarrollar en el estudiante una perspectiva antihistórica.

2.2. Lo que criticamos es la exposición de un tema de tal manera que pretenda servir como primera y única "lectura" posible: la pretensión de sistematización y de perfección formal como objetivo de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato; la idea de que no hay otra manera de trabajar en un curso de matemáticas que sistematizar; la aberración de enseñar matemáticas a estudiantes de 15 años del mismo modo que a personas que llevan quince años estudiando matemáticas.

O todo o nada

En las clases de física aparece muy pronto la ley de la refracción, aunque no puede ser formulada matemáticamente porque la tradición matemática no proporciona el seno de un ángulo hasta uno o dos años más tarde. ¿No prueba esto, que el seno debería introducirse más temprano? Es imposible –objeta el matemático– porque la trigonometría lleva tal y tal número de semanas que yo no puedo malgastar, pues la trigonometría no puede empezar hasta haber dado tales y cuales nociones de álgebra. Ésta es una reacción característica del fanatismo por la sistematización. Se pide que el seno sea introducido antes; pero el seno, de acuerdo con la sistematización, cae dentro de la trigonometría y por ello debe explicarse en trigonometría; junto a senos y cosenos están tangentes, cotangentes, fórmulas de adición y duplicación, el teorema del seno y el teorema del coseno, las fórmulas de Nepper y Briggs... O todo o nada. ¿No podría ser el seno un magnífico ejemplo de función matemática introducida gráficamente, a partir de la circunferencia, en lugar de serlo algebraicamente? Yo diría incluso que es uno de los primeros ejemplos de función que un estudiante debería aprender.(Freudenthal: "Mathematics as an educational task")[10].

3. Niveles de rigor

El proyecto idealista típico es reducir las matemáticas a un texto riguroso, sus reglas a las de un lenguaje. El proyecto materialista es tratar de determinar lo que las matemáticas hacen conocer –lo que hace de ellas algo distinto a un texto– y cómo lo hacen conocer –lo que hace de ellas algo distinto a un lenguaje–. (Raymond: "Le passage au matérialisme")[11].

No hay un método fiable único que pueda ser empleado siempre para encontrar una primera aproximación de una raíz de una ecuación, pero una combinación de sentido común y de intuición gráfica será por lo común suficiente. (S.M.P.)[12]

La tarea del rigor es convencer; pero las matemáticas presentadas como lo *ya hecho* nunca convencen. Para progresar en rigor, el primer paso es poner en duda el rigor en el que uno cree en éste momento. (Freudenthal)[13].

Las demostraciones de nuestros predecesores no nos satisfacen, pero los hechos matemáticos que ellos han descubierto permanecen y nosotros los demostramos por métodos infinitamente más rigurosos y precisos e los que la intuición geométrica, con su carácter de evidencia mal analizada, ha sido barrida totalmente. (Lichnerowicz)[14].

Todo matemático que cuide su integridad intelectual, tiene la absoluta necesidad de presentar su razonamiento en forma axiomática. (Dieudonné, en 1939)[15].

El objeto de la enseñanza de las matemáticas será siempre alcanzar el rigor lógico, lo mismo que la comprensión de un formalismo suficiente. (Piaget)[16].

El papel de la formación matemática en la enseñanza secundaria consiste casi exclusivamente, en mi opinión, en familiarizar a los alumnos con el método deductivo. (Beth)[17].

TESIS

3.1 Las afirmaciones de Lichnerowicz, Dieudonné y Piaget, que tal vez sean válidas en la enseñanza universitaria, no lo son en la enseñanza secundaria, en la que uno de los objetivos, pero no el único, es *progresar* en el rigor. No creemos que lo que haya que hacer, "casi exclusivamente", sea familiarizar a los alumnos con el método deductivo.

3.2 No hay un sólo nivel de rigor, sino varios niveles. Lo que en un estadio de desarrollo de las matemáticas ha sido considerado riguroso, se ha estimado *después* que no lo era. Lo que es riguroso para estudiantes de 2º de BUP, puede no serlo para estudiantes de 3º de la Facultad de Ciencias, y lo que es riguroso para éstos puede ser bizantino para aquellos.

3.3. La construcción científica de un fragmento dado del conocimiento matemático, no puede y no debe ser totalmente identificada con su construcción pedagógica.

3.4 Hay un permanente peligro de hacer creer al estudiante que sólo las demostraciones *plenamente* rigurosas de las matemáticas son racionales; y que fuera de las matemáticas no hay racionalidad: que no hay opciones racionales en la gestión de una empresa, o en la adhesión a un partido político, o en la decisión de socializar la medicina, por ejemplo.

El sentido del rigor en las demostraciones puede aprenderse mucho mejor en ejemplos en los que la demostración presente genuinas dificultades que con la sutil e inacabable demostración de trivialidades. (Manifiesto de Ahlfors, Kline...).

Hace algún tiempo leí algo a propósito de los esfuerzos para mejorar la enseñanza del análisis elevando los standards de rigor. Yo creo que el análisis en el bachillerato sólo puede mejorarse poniéndolo más en contacto con la realidad (Freudenthal)[18].

Las matemáticas experimentales, esto es, las matemáticas de descubrimiento libre, son mucho más importantes que las matemáticas confinadas a axiomas impuestos por el profesor o el libro de texto, y no hay razón para pretender que son menos rigurosas. Hay niveles de rigor y para cada materia hay un nivel de rigor adaptado a ella; el estudiante debe recorrer esos niveles y adquirir su rigor:

- *rigor ejercitado sin saber lo que es;*
- *rigor como criterio consciente que se aplica a argumentos aislados;*
- *Noción global de rigor que puede aplicarse a las matemáticas como un todo.* (Freudenthal)[19].

4 El interés de los estudiantes por las matemáticas

TESIS

4.2 Para la mayoría de los estudiantes, las matemáticas aparecen como un conjunto de rígidas reglas que se aprenden para los exámenes y luego se olvidan.

4.3 Gran parte del interés que muchos estudiantes tienen por las matemáticas se basa en el hecho –que ellos no ignoran, aunque no siempre sean conscientes de su significado social– de que es la disciplina a la que la política educativa asigna el papel más importante de la selectividad, cosa que la mayoría sienten como represiva y otros como trampolín de reconocimiento de una superioridad intelectual que a la larga esperan que sea social.

4.4. Numerosos estudiantes ven las matemáticas, cuando no las comprenden, como un instrumento de humillación, que poco a poco les va haciendo perder el gusto por el conocimiento.

4.5 El papel receptivo que generalmente el profesor asigna al alumno genera inevitablemente aburrimiento, "forma suprema de la represión intelectual".

4.6 A la falta de interés que los alumnos sienten por las matemáticas contribuye en gran medida el profesor que cree que cumple su tarea informando al alumno, olvidando que informar al estudiante de ciertos hechos no garantiza que éste los conoce.

4.7 Por otra parte –algo que no es opuesto a lo anterior, sino complementario–, contribuye igualmente a la pérdida de interés un punto que a veces es simplemente una omisión y a veces una premisa didáctica: la falta de atención que se pone en la elaboración de reglas de correspondencia entre la teoría matemática y el campo a matematizar ("estos alumnos han aprendido matemáticas y no saben poner en ecuaciones el menor problema real"), olvidando el enorme esfuerzo que a la mayoría de nosotros –y a la mayoría de los científicos a lo largo de la historia– nos cuesta hacer eso que exigimos que el alumno haga como una mera "aplicación" de lo que sabe.

5 La enseñanza de las matemáticas en España

¿Qué finalidad se persigue en las sociedades modernas con la enseñanza de las matemáticas a los muchachos? Ciertamente no es la de hacerles conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre las bisectrices de un triángulo o la sucesión de los número primos, de los que no harán después ningún uso (a menos que se conviertan en matemáticos profesionales), sino la de enseñarles a ordenar y encadenar sus pensamientos con arreglo al método que emplean los matemáticos y porque se reconoce que este ejercicio desarrolla la claridad del espíritu y el rigor del juicio. El objeto de esta enseñanza debe ser por tanto, el método matemático, y las materias de enseñanza no sean más que ilustraciones bien elegidas del mismo. (Dieudonné)[20].

La matemática pura es una creación libre del espíritu y no tiene en sí misma ninguna relación con los hechos de la experiencia. (Heyling)[21].

TESIS

5.1. "La filosofía clásica se ha aprovechado de las matemáticas para elaborar sistemas de valores que sirven para sostener los intereses sociales de la clase dominante" (Raymond: "Le passage au materialisme)[22].

5.2. En nuestro país, las Facultades de Matemáticas tienen como filosofía dominante precisamente esa filosofía clásica. En ellas hemos aprendido a reproducir las relaciones de clase existentes. Los profesores de matemáticas somos, en general, en este país, aliados objetivos de la clase dominante.

5.3. Las matemáticas en la enseñanza media están en gran manera supeditadas a las necesidades y los programas de la enseñanza universitaria.

5.4. La enseñanza actual es una enseñanza de clase destinada a reproducir la división social, y es en esos términos en los que es preciso analizar la enseñanza de las matemáticas.

5.5. Tanto profesores como estudiantes sufrimos la contradicción existente entre las matemáticas como centro de interés científico y las matemáticas como instrumento de selección social.

5.6. Distinguir entre matemáticas "nobles" -las que enseñamos nosotros- y matemáticas "útiles y prácticas" -las que enseñan profesores de otras ciencias- no es más que cumplir la misión que nos asigna la clase dominante.

5.7. Todos creemos en la tesis de Dieudonné: "No se trata de hacer conocer una colección de teoremas más o menos ingeniosos sobre bisectrices de un triángulo o sobre la sucesión de los números primos"; sin embargo, hemos tardado en ver que el objetivo fundamental de la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato no debe ser "enseñar a pensar" o "desarrollar la claridad del espíritu y el rigor del juicio", sino:

I. Dar una información específica real y no ficticia sobre el mundo y la sociedad en la que el estudiante y el profesor viven.
II. Elaborar un modelo matemático para entender la realidad.
III. Utilizar el modelo para actuar y buscar soluciones que los alumnos puedan *colectivamente* dar a conocer en su medio.

El objetivo fundamental de nuestra enseñanza de las matemáticas no es, pues, otro que *enseñar a pensar qué hay que hacer.*

5.8. Todo trabajo individual debe enmarcarse en un trabajo colectivo previamente planeado.

5.9. La tarea es larga: no basta con introducir en la enseñanza media tal o cual materia –cosa que puede hacerse por Decreto– para modernizar la enseñanza. Se trata de algo más difícil: se trata de una "enseñanza moderna de las matemáticas" , como pide Freudenthal, y no solamente de una "enseñanza de las matemáticas modernas".

5.10. Para ello es necesario modificar la estructura de la clase y la estructura del centro de enseñanza. Desde ahora mismo.

5.11. La posibilidad de realizar un cambio efectivo en la enseñanza de las matemáticas en el bachillerato, pasa necesariamente por el trabajo de muchos y no por el de unos pocos, por mucha energía que éstos pongan.

Eliseo Borrás, María Elisa Carrillo, Joaquín D'Opazo,
Francisco Hernán, Adela Salvador, José Luís Tomás

Problemas propuestos

¡La bolsa o la vida!

La bolsa

Lucifer en Las Vegas (problema propuesto por Martin Gardner en "*Mathematial puzzle tales*"

Desde que fue expulsado del paraíso, Satán vio que la eficacia de sus poderes paranormales estaba en función de la convicción que la humanidad tenía en ellos. Al disminuir la fuerza de esta creencia con el paso del tiempo, el Maligno, hacia mediados del siglo XXI, había visto sus poderes psíquicos reducidos de tal manera que no podía ya echar maldiciones cuyo efecto durase más de veinticuatro horas. Para romper la monotonía del infierno, el Diablo, disfrazado de mortal, se puso a frecuentar regularmente los casinos de Las Vegas. Un día a guisa de magnate tejano del petróleo se acercó a un robusto y campechano hombre de Omaha que estaba junto a una mesa de ruleta.

- *¿Amigo, le gustaría hacer conmigo una apuesta un poco especial?*
- *Habría que ver de qué se trata; gruñó el hombre de Omaha.*
- *Enseguida se lo digo. Lo que le propongo es esto. Vamos a jugar con los colores de la ruleta, el rojo y el negro. Elige usted cualquier terna de colores, por ejemplo rojo-rojo-negro, la que quiera. Entonces elegiré yo una terna diferente. Nos pondremos de acuerdo sobre el momento de comenzar y observaremos la ruleta para ver cuál de nuestras ternas ha salido primero. Si sale antes la suya, usted gana, si es la mía la primera, gano yo. Prescindiremos del cero. Apuesto 5 contra 4, es decir, si usted gana le pagaré cinco "pérsicos", y si gano yo me pagará usted 4. Cada vez que repitamos la apuesta, usted puede elegir la terna primero.*
- *Hmmm… (reflexionó el hombre de Nebraska) cada vez que gire la ruleta hay una probabilidad 1/2 de que salga rojo, y también 1/2 de que salga negro. La probabilidad de obtener una terna cualquiera es 1/2 por 1/2 por 1/2, o sea 1/8, y todas las ternas tienen la misma probabilidad de salir. Ninguno de los dos tiene ventaja.*
- *Exacto, dijo sonriendo el diablo, y le estoy ofreciendo una apuesta mejor que a la par.*
- *...Su propuesta es diabólicamente tentadora; vamos a jugar.*

La vida

El juego de la vida de Conway. Propuesto por Eliseo Borrás en múltiples ocasiones.

Inventado en 1970 por el matemático inglés John Conway, es uno de los autómatas celulares más famoso. Las reglas de nacimiento y muerte de cada célula de una retícula cuadrada son sencillas: Cada célula (cuadradito) de la retícula está rodeado (vecinas) de ocho células. Cada célula puede estar viva o muerta. Una célula viva permanece viva si sólo tiene como vecinas 2 o 3 células vivas, en otro caso muere de soledad o de sobrepoblación. Una célula muerta nace cuando está rodeada exactamente por tres células vivas.

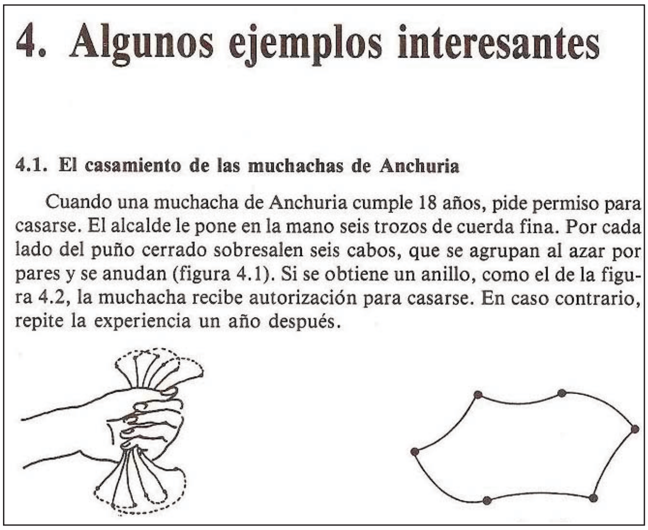
El comportamiento de estos autómatas es increíblemente complejo, a pesar de las sencillez de las reglas de funcionamiento. El caos aparece de nuevo. No hay forma de predecir de antemano, y de forma general, cuando una configuración inicial de células será estable, morirá, será oscilante...

Seguramente, para obtener una semilla que produzca una configuración estable tendremos que dedicar bastante tiempo a pensar con papel cuadriculado y lápiz al lado. Jugar sólo a cambiar la semilla y observar los distintos resultados puede convertirse en un pasatiempo trivial si no se utiliza esta información como retroalimentación de un trabajo más reflexivo.

Soluciones a los problemas del número anterior

¿Difícil viajar? O las bodas en Anchuria

El enunciado es equivalente a la primera parte del que aparece en *Probabilidad y Estadística* de Arthur Engel, tomo I, página 59, con el título "El casamiento de las muchachas de Anchuria", que presenta rasgos sexistas y el contexto es más exótico, con las consiguientes consecuencias antipedagógicas. Dice el enunciado de Engel:



4. Algunos ejemplos interesantes

4.1. El casamiento de las muchachas de Anchuria

Cuando una muchacha de Anchuria cumple 18 años, pide permiso para casarse. El alcalde le pone en la mano seis trozos de cuerda fina. Por cada lado del puño cerrado sobresalen seis cabos, que se agrupan al azar por pares y se anudan (figura 4.1). Si se obtiene un anillo, como el de la figura 4.2, la muchacha recibe autorización para casarse. En caso contrario, repite la experiencia un año después.

> *¿Cuál es la probabilidad de obtener un anillo? ¿Cuál es la probabilidad de que una joven fracase 10 años seguidos?”*

El problema de Engels continúa:

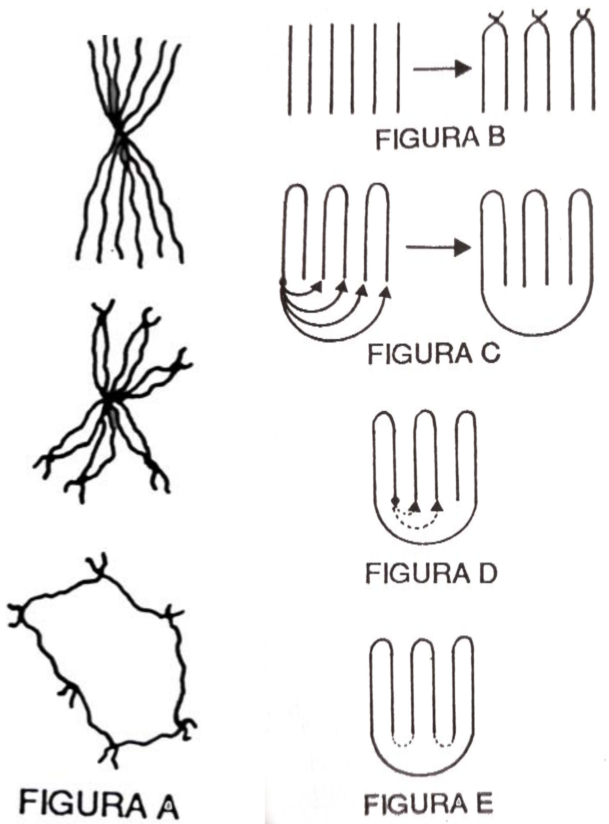
> *“El nuevo presidente de Miraflores decide que, en adelante, se anudarán los cabos de arriba con los de abajo. De esta forma, espera reducir la tasa de nacimientos. ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo?*
>
> *Al cabo de cierto tiempo, Miraflores decide reducir todavía más la natalidad. Con este fin, decreta que cada extremo se anudará, al azar, con un extremo libre de arriba o de abajo. ¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo? ¿Y si tenemos 2n cuerdas?*
>
> *¿Cuál es ahora la probabilidad de obtener un anillo? ¿Y si tenemos 2n cuerdas?*

En “¿Difícil viajar?”, propuesto por Eliseo en *Es posible*, el contexto es actual y el sesgo androcéntrico ha desaparecido. Sólo propone la primera parte, las restantes, recién enunciadas más arriba, las ofrecemos para que vuestras alumnas y alumnos les cambien el contexto, de forma acorde a “¿Difícil viajar?” y para que las resuelvan durante el próximo periodo. Las soluciones aparecerán en el apartado de “problemas resueltos” en el nº 67, en esta sección.

Recordemos el enunciado de *¿Difícil viajar?*

> *En cierto país andan escasos de divisas y, el Ministerio de Turismo, para restringir los viajes al exterior, somete a una prueba de azar a quienes quieren viajar.*
>
> *A cada candidato le ofrecen seis cuerdas iguales, de la misma longitud, que alguien tiene cogidas por la mitad con la mano cerrada, dejando ver los extremos superiores y los inferiores de las cuerdas.*
>
> *El aspirante a viajero tiene que atar las cuerdas, al azar, de dos en dos por arriba y también de dos en dos por abajo (figura A). Recibe permiso para salir del país solamente si después de haber hecho los seis nudos, al abrir la mano, las seis cuerdas quedan formando un solo anillo.*
>
> *¿Crees que es muy difícil que una persona reciba autorización para viajar? ¿Qué porcentaje de personas podrán salir del país?”*

En primer lugar pedimos al alumnado que haga una predicción y, generalmente, la mayoría contesta que una figura tan especial es muy difícil que se produzca anudando al azar.



Hecho esto, se procede a realizar la experiencia y se pide a las alumnas y alumnos que han conseguido el anillo que levanten la mano (Fgura A). Se repite varias veces y el resultado es abrumadoramente sorprendente: casi siempre salen más de la mitad premiados. ¿Por qué? La explicación es sencilla[23].

Los nudos que haga cada viajero con los cabos sueltos que asoman por arriba (o por abajo) no alteran el resultado. Lo interesante viene cuando analizamos qué puede pasar al anudar los del otro lado: el primer cabo puede anudarse a cualquiera de los restantes. Sólo en una ocasión se anudará con el mismo cabo que lo hizo en el lado opuesto, formando un pequeño anillo de dos cordeles, independiente del resto, impidiendo el anillo total. En caso contrario, la cosa va bien, el primer nudo es favorable (figura C); con los cuatro cabos restantes ocurrirá algo parecido:

a) elegimos un cabo de los dos cordeles que han quedado independientes del proceso anterior, entonces uno de los nudos hará coincidir los dos cabos que ya estaban anudados en el lado opuesto haciendo fracasar al aspirante y otro encadenará el cordel con los anteriormente encadenados (figura D);

b) elegimos uno de los anteriormente encadenados: si se anuda con el extremo que cierra el círculo de los cuatro cordeles implicados en el proceso hasta ahora tampoco ganará el premio. Sólo queda pues una posibilidad. Los dos cordeles restantes cierran el anillo total necesariamente (figura E). Así que 4/5 favorables del primer nudo por 2/3 del segundo nos da 8/15 que es mayor que 0,5, por lo que la expectativa inicial de que es muy difícil que te toque el premio es falsa. La respuesta a la última pregunta es obvia, aproximadamente un 53 %

Desintegración radiactiva

La desintegración de los átomos de las sustancias radiactivas es un fenómeno estadístico: no se puede saber de antemano qué átomos se van a desintegrar en un instante determinado, aunque cuanto más tiempo transcurra mayor es la probabilidad de que se desintegren los átomos existentes. Además la cantidad que se desintegra en cada momento es proporcional a la materia que existe en ese momento.

Este fenómeno puede simularse mediante el lanzamiento de cierto número de dados, cada uno de los cuales representará un átomo.

Si consideramos que un átomo se desintegra cuando sale 6, podemos lanzar 100 dados cúbicos y retirar el dado en el que haya salido un seis . Repetimos la operación con los dados restantes.
¿Cuántos dados quedan después de 1, 2, 3..., lanzamientos?

¿Cuántos lanzamientos hay que efectuar para que se reduzca a la mitad, o menos, la cantidad inicial de dados?

¿Y para que se reduzcan a la tercera parte?

¿Pueden desintegrarse todos los átomos?

Antes de comenzar las pruebas pedimos a los alumnos que conjeturen sobre el número de lanzamientos necesarios para que el número de dados sea menor que 50 y justifiquen sus opiniones.

Realizamos la simulación por parejas de forma que los mismos alumnos controlan las condiciones de la experiencia. Tras cada lanzamiento las parejas retiran los dados en los que aparece un seis. Recogen los resultados en una tabla.

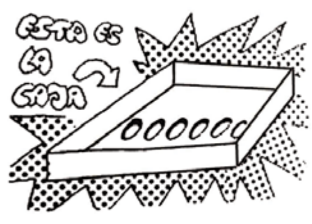
Lanzamiento	Nº de átomos	Átomos desintegrados	Átomos no desintegrados

Se sigue jugando hasta que quedan la mitad de dados. Se resalta este resultado en la tabla. Id para la tercera parte y también cuando ya no quede ningún dado.

Una vez termina el proceso, cada pareja anota sus resultados en una tabla en la pizarra. A partir de ella, además de poder comprobar y discutir si la simulación se ha efectuado correctamente, comentaremos los datos estadísticos obtenidos, calcularemos los tiempos medios de espera para que se reduzca a la mitad y la moda.

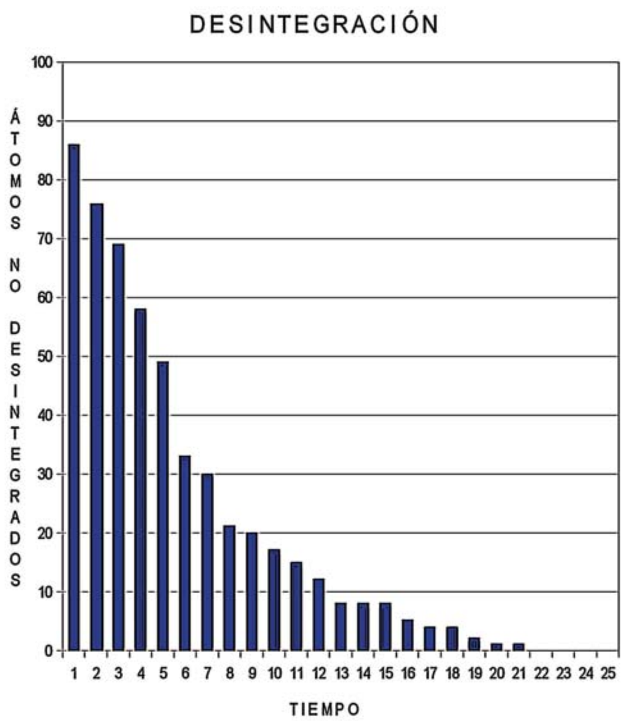
Después repetiremos el experimento individualmente, en el ordenador, con una hoja excel y la función random entre 1 y 6. Así reduciremos el tiempo de las tiradas e introduciremos y/o afianzaremos el trabajo con números aleatorios para simular juegos de azar. Las alumnas y alumnos se iniciarán en el método de Monte Carlo con ordenador. Además podrán obtener el gráfico que les aproxima a la función que modeliza el fenómeno de la desintegración y tantos otros similares como el crecimiento de la concha de una caracola, la capitalización a interés compuesto o el crecimiento de una población.

Podemos simular la desintegración no sólo mediante dados, sino también con ruletas, urnas, monedas o mediante una caja perforada en la que se dejan caer un número determinado de bolas. Se cuentan las que han caído, "se han desintegrado", se repite el proceso varias veces (al menos 15) con las que quedan y se tabulan los resultados.



Lanzamiento	Nº de átomos	Átomos desintegrados	Átomos no desintegrados
1	100	14	86
2	86	10	76
3	76	7	69
4	69	11	58
5	58	9	49
6	49	16	33
7	33	3	30
8	30	9	21
9	21	1	20
10	20	3	17
11	17	2	15
12	15	3	12
13	12	4	8
14	8	0	8
15	8	0	8
16	8	3	5
17	5	1	4
18	4	0	4
19	4	2	2
20	2	1	1
21	1	0	1
22	1	0	0
23	0	0	0
24	0	0	0
25	0	0	0

Con estos diferentes tipos se obtienen resultados similares al siguiente:



El tiempo que aparece en el eje de abscisas esta medido en tiradas. Los valores en ordenadas son los que aparecen en la cuarta columna de la tabla anterior.

Para que el procedimiento resulte ágil, se puede automatizar el conteo de los seises y los no seises, en una hoja de cálculo de Open Office, de 26 por 100, en la que la primera columna es de unos y por tanto suma100 e indica el número de lanzamientos o de átomos no desintegrados antes de comenzar la simulación, las celdas de las restantes columnas valen uno o cero y éstas suman una cantidad igual al número de átomos no desintegrados, gracias a la orden:

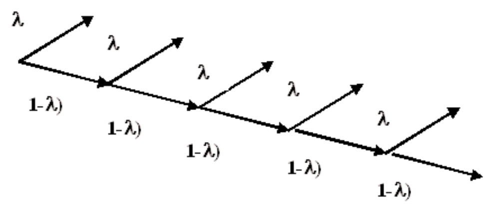
=SI(ALEATORIO.ENTRE(1;6)=6;0;A1)

copiada a todas las celdas de las 25 columnas siguientes a la primera.

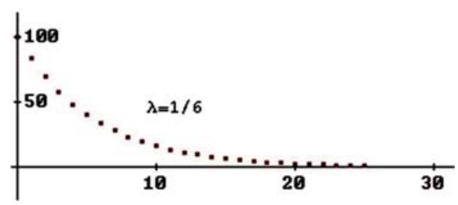
Si N es el número de átomos no desintegrados, después de n pruebas, N_0 el número inicial de átomos y λ la probabilidad de desintegración de un átomo, la probabilidad de no desintegración de cada átomo en cada tirada será $1-\lambda$.

Del árbol siguiente se deduce que tras n tiradas y N_0 átomos iniciales, el número N de átomos presentes será:

$$N=N_0(1-\lambda)^n,\ n=0, 1, 2...$$



y la gráfica de esta experiencia discreta tendrá este aspecto:



Para pasar al caso continuo, usando la variable tiempo t en lugar del número de tiradas n, podemos dividir el intervalo de tiempo t en n subintervalos de de tamaño t/n con n suficientemente grande. Siendo λ la probabilidad de que un átomo se extinga en una unidad de tiempo, la probabilidad de que se produzca la extinción en uno cualquiera de dichos n subintervalos es $\lambda t/n$ si n es suficientemente grande. Ahora es como si hiciésemos un sorteo para cada uno de esos pequeños subintervalos en los que la probabilidad de extinción es $\lambda t/n$ y por lo tanto la de supervivencia $1-\lambda t/n$.

Tomando límites cuando n tiende a infinito, obtenemos:

$$\lim N_0(1-\lambda t/n)^n = N_0\, e^{-\lambda t}$$

Así pues, $N=N_0\, e^{-\lambda t}$, $t\geq 0$, donde N_0 es la cantidad inicial de átomos y N la cantidad de átomos supervivientes al cabo de un tiempo t, cuya gráfica ajusta muy bien a la anterior pero es continua.

De la última fórmula se desprende que para que el número de átomos se reduzca a la mitad,

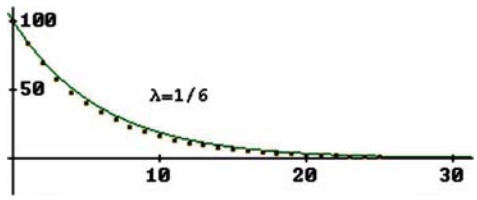
$$N_0/2=N_0\, e^{-\lambda t}$$
$$1/2= e^{-\lambda t}$$

Tomando logaritmos neperianos

$$\ln(1/2)=\ln e^{-\lambda t}$$
$$-\ln 2 = -\lambda t$$
$$t=\ln 2/\lambda$$

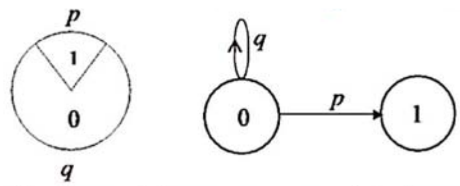
Así pues:
Semivida= $\ln 2/\lambda = 0.693/\lambda = 0.693/(1/6) = 6 \cdot 0.693 = 4{,}518$

Para que se desintegren más de la mitad será necesario un valor superior a 4,518 unidades de tiempo. Para que el número de núcleos se reduzca a 1/3, procederemos análogamente, obteniendo $\ln 3/\lambda=6\cdot\ln 3$.



Como se puede apreciar, la gráfica de la simulación, la de la probabilidad y la de la función de desintegración, son muy aproximadas.

Por otro lado, mediante el ábaco probabilístico podemos calcular la probabilidad de que un átomo se desintegre en n lanzamientos, así como el número de lanzamientos necesarios para que esta probabilidad sea 0,5.



T = número de lanzamientos antes de la desintegración

$$Prob(T=n)=p_n = q^{n-1}\,p \qquad \mu = E(T)=\frac{1}{p}$$

$$Prob(T>n)=q_n = q^n\,,\ n=1,2\ldots \qquad \sigma^2 = V(T)=\frac{q}{p^2}$$

$$\frac{1}{2}=q^n \Rightarrow \qquad n=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{5}{6}}\approx 3{,}802\approx 4$$

EL HILO DE ARIADNA

Este artículo ha visto la luz gracias a la inestimable ayuda de Vicente Calixte Juan, Pilar Moreno y Juan Carlos Orero.

Este artículo fue solicitado por *Suma* en octubre de 2010 y aceptado en diciembre de 2010 para su publicación.

NOTAS

1 La tendencia es la dirección general de los picos y valles de la gráfica del producto mundial bruto que da cuenta de la marcha (descendente) de la economía real.

El crecimiento exponencial acelerado que se observa en la gráfica de productos derivados, comparada con el descenso progresivo de la economía real, explica la gravedad y las causas de la actual crisis en su nivel económico: desplazamiento de la inversión del mundo productivo a la especulación financiera.

2 Las negritas no aparecen en el texto de E. Castelnuovo, son una licencia para enfatizar el tema del artículo.

3 Borrás Veses, Eliseo. (2002). "Tres algoritmos en busca de autor" en Jornadas "Las Matemáticas y sus aplicaciones. Un reto en la enseñanza actual". IES Ferrer y Guardia.

4 Lakatos explica este hecho en un magnífico trabajo: "Proofs and Refutations", en el que, siguiendo paso a paso un problema (en un poliedro, ¿es el número de caras, mas el de vértices, igual al número de aristas aumentado en 2?), muestra que las matemáticas no son, a lo largo de su historia una cadena de demostraciones aceptadas enseguida por los matemáticos, sino un complejo campo de demostraciones y refutaciones, a través del cual el avance no es en línea recta con pequeñas detenciones para reflexionar, como a veces se nos ha hecho creer y como, en cierta manera, la enseñanza de las matemáticas transparenta.

5 En "L'age de la science", vol. 3, núm. 3, 1970.

6 En "Problems in the Philosophy of Mathematics". Ed. Lakatos. Hay un trabajo de Jack A. Easley en el que trata la polémica reformadores-críticos y aporta ideas que ilustran una tercera vía.

7 "Mathematics as an educational task", pag. 69.

8 Revista de la A.P.M.E.P. de Francia, núm. de abril de 1975.

9 Pág.122,

10 Pág. 138.

11 Pág. 229.

12 S.M.P. "Advanced Mathematics", libro 2, ág. 458.

13 L.c. Pág. 151.

14 "Logique et connaisance scientifique". Ed, Gallimard, pág. 475

15 "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathematiques", citado por Lakatos en "Proofs and Refutations"

16 "La enseñanza de las matemáticas". Piaget, Beth, Choquet y otros. Ed. Aguilar, pág. 27.

17 Mismo sitio, pág. 40

18 "Mathematics as an educational task", pág. 513.

19 L.c. pág, 148

20 "La enseñanza de las matemáticas". Ed. Aguilar, pág. 43.

22 Citado por Raymond: I. c. Pág. 368.

22 Pág. 325.

23 Los gráficos proceden de la versión publicada por José Colera en el nº 37 de *Apuntes de educación*, Pág. 9.